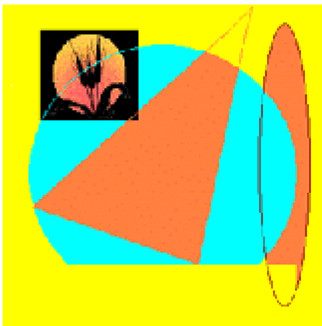
TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 4

Geometría Descriptiva.



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Obra completa:
Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

Revisado Febrero 2020

Editado en España

ISBN:
Depósito Legal:

JUSTIFICACIÓN:

El presente trabajo viene motivado por el firme deseo de recopilación, al tiempo que profundización, de los Temas que se imparten en la Enseñanza reglada, desde los primeros cursos hasta la superación de los Bachilleratos, siendo también de gran ayuda en el Primer curso de Facultades de Ciencias.

Es el deseo de volver la mirada silenciosa a aquellos contenidos Matemáticos 'predicados con ilusión' junto a la pizarra y la tiza en la mano.

No cabe duda que de esta forma más sosegada el autor ha podido meditar y profundizar en cada tema, buscando la manera más inteligible en la exposición, al tiempo que rellenando 'pequeñas lagunas'.

Temas como 'Descomposición en suma de fracciones simples', 'Fracciones continuas', 'Resolución de las Ecuaciones de tercer o cuarto grado', y otros ... , que en la clase suelen ser tratados superficialmente, es esta la ocasión para tratarlos en toda su extensión y profundidad. Desde luego que este no es el lugar para hablar ni explicar la Teoría de los grupos de Galois.

En este momento, en este trabajo, es maravilla 'transitar' por la Geometría analítica (Vol.5), basamentada y reforzada por los sólidos pilares que nos proporciona el estudio intenso de los Espacios vectoriales y el Álgebra lineal (Vol.10). Es muy potente como herramienta de cálculo en la resolución de problemas, al tiempo que muy elegante, el Análisis y resolución de sistemas, incluidos los no lineales, el Cálculo matricial, ... , como lo es también la 'feliz idea' de los conceptos de 'Producto escalar, vectorial y mixto, de vectores.

De gran utilidad es también la 'Programación lineal', así como la 'Interpolación polinómica' en el terreno del Cálculo funcional (Vol.11).

Especial mención merecen los temas: 'Las Superficies', 'Las Cónicas', 'Las Cuádricas', por lo que reporta el estudio de la Polaridad (Vol.12).

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

En el campo del Cálculo funcional baste llegar a interpretar y hacer inteligible los conceptos de 'Integral definida', 'Función integral', y acto seguido el 'Teorema fundamental del cálculo', y como consecuencia la muy conocida 'Regla de Barrow' (Vol.9).

En el campo de lo 'probable' baste mencionar la Fórmula de la Probabilidad total, la Fórmula de Bayes y las bien construidas Distribuciones binomial, Distribución hipergeométrica, la Distribución normal, ... , sin olvidar que su basamento reside en el Cálculo combinatorio.

Creo, y espero que así sea, que el deseado 'estudioso' percibirá en todo momento la orientación intencionadamente práctica del presente trabajo, que pretende como objetivo final la consecución de 'destrezas' suficientes para la resolución de los problemas (matemáticos) por parte del alumno.

Necesarias fueron las tinieblas para que después brillase la inteligencia del Ser Humano, del Hombre de Ciencia descubridor ó creador de nuevos conceptos. En nuestro campo ahí lo tenemos cuándo fue necesario crear el concepto de número real, resolver después la necesidad de los números complejos, ahí están Cauchy, Lagrange, L'Hópital, Euler, Bernoulli, Taylor, ... , Barrow, ... , y tantos otros.

Qué gran idea la 'creación' del concepto de Seno y Coseno de un ángulo, seguramente sin sospechar el alcance de su posterior desarrollo en todos los campos de la Ciencia.

Se suele decir que Dios creó los Números naturales y que el resto es 'Obra de la inteligencia humana'. Seguro que esto ha ocurrido así, con la salvedad de que, incluso los números naturales fueron invención del hombre, basta recordar que 'nuestros antepasados' contaban sus piezas de ganado, sus piezas de caza, ... , y esto no es otra cosa que 'los números naturales'.

Abundando en esta línea, ahí tenemos los distintos Sistemas de numeración invención del matemático. Y para concluir con este asunto:

Es evidente que 'El todo' estaba ahí y que la inteligencia del humano lo ha ido sacando a la superficie.

No puedo pasar sin mencionar la Obra de Julio Rey Pastor y sus compañeros, la de Pedro Puig, el texto 'buenísimo' de Francisco Granero Rodríguez sobre Álgebra y Geometría analítica. Por haber sido mi primer profesor de matemáticas y por ello el primer responsable de mi interés por ellas, honor a la memoria de D. Norberto Cuesta Dutari por su Geometría vectorial, sus Transfinitos, su Sinfonía del infinito, ... , y aquella significativa frase: 'con Euler entramos en el Paraíso de las Matemáticas'.

Lógicamente, sin el menos cabo a la memoria del resto de Profesores y compañeros condiscípulos.

Estamos hablando de unos contenidos matemáticos que difícilmente pueden ser acomodados al 'terreno de lo lúdico'. Podríamos decir que todo esto es mucho más serio, aunque resulte fuerte. La estructura de los conocimientos Matemáticos (Las Matemáticas) constituyen un edificio suficientemente sólido e inamovible, sólo ampliable sin pérdida de solidez, y será muy difícil su reconversión al terreno de lo lúdico. Sí es posible cuando nos limitamos al ámbito de los números enteros, pero ahí nos quedamos.

12/5/2017 *El Autor*

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

Resumen de la OBRA COMPLETA

Vol.1: Números: Naturales y Enteros, Racionales e Irracionales, Reales y Complejos. Sistemas de numeración. Clases de restos módulo m. Sucesiones. Progresiones y Series numéricas. Fracciones continuas. Notación exponencial. Proporcionalidad geométrica. El Número de Oro y el Rectángulo áureo, Pentágono regular. Colección de problemas resueltos.

Vol.2: Álgebra básica: Polinomios y Fracciones, Ecuaciones y su resolución. Expresiones radicales en x. Ecuaciones con radicales. Inecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas no lineales. Sistemas de Inecuaciones. Descomposición de p(x)/q(x) en suma de fracciones simples. Estudio de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Sumas simples de las raíces de p(x) y relación con sus coeficientes. Colección de problemas resueltos.

Vol.3: Parte I
Proporcionalidad numérica: Directa, Inversa. Cálculo mercantil. Temas afines: Mezclas y Aleaciones, Fuentes y Grifos, Móviles, Repartos proporcionales. Proporcionalidad geométrica. Teorema de Thales. Combinatoria ordinaria y con repetición. Potencias del binomio y del trinomio.
Parte II
Teoría de conjuntos, Particiones, Función característica, Conjuntos bien ordenados, Función de elección, Principios de inducción. Álgebra de proposiciones, Tablas de verdad, Implicación lógica. Operadores sobre un conjunto, Estructuras. Álgebra de Boole.
Colecciones de Problemas de gran interés: De Combinatoria, De Sucesiones, De Progresiones, De Cálculo mercantil, De Conjuntos.

Vol.4: Geometría descriptiva en el plano. Polígonos. Perímetros y Áreas. Estudio del Triángulo y de la Circunferencia. Semejanza. Geometría descriptiva en el Espacio. Poliedros. Superficies y Volúmenes de cuerpos geométricos. Partes de la esfera. Trigonometría en el plano y sus aplicaciones. Las Cónicas y su Ecuación general. El Número áureo y el Rectángulo áureo. El Pentágono regular. Problemas resueltos.

Vol.5: Geometría analítica en el plano y en el Espacio. Incidencia y Cálculo de distancias. Estudio de la Circunferencia, Potencia y Ejes radicales. Vectores fijos, Vectores libres. Los Espacios vectoriales V2, V3. Producto Escalar de dos vectores y Ortogonalidad. Producto Vectorial y Producto Mixto de vectores y sus aplicaciones. Espacio vectorial Vn: Dependencia lineal, Sistema generador, Sistema libre, Bases y cambio de base. Sistemas de referencia. Ampliación de Trigonometría. Suplementos sobre Geometría analítica: Cónicas y Cuádricas. Colección de Problemas de gran interés.

Vol.6: Funciones reales básicas elementales y trascendentes. Funciones reales en general. Funciones cuya expresión f(x) se obtiene empíricamente. Interpolación. Sucesiones, Conceptos básicos de Topología, límites y continuidad. El número e. Concepto de Derivada en un punto. Interpretación geométrica. Función derivada de f(x). Derivada de las funciones básicas y trascendentes. Diferencial de f(x). Concepto de Primitiva de f(x): Primitiva de las funciones básicas y trascendentes. Integral indefinida: Métodos básicos de integración.
Sucesiones de Números reales: El Número e, sucesión de Fibonacci. Series de Números reales. Progresiones, Capitalización y Amortización. Criterios de convergencia. Interpolación: Método parabólico progresivo , Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos.
Apéndice I: Sobre límites y continuidad, indeterminaciones y su resolución. Teoremas sobre continuidad. Apéndice II: El límite de sen(x)/x, x -> 0. El Número de oro. Apéndice III: Constantes y Valores notables, Propiedades en los Números combinatorios, Suma de potencias de números naturales, Fórmula Binomial y Multibinomial. Apéndice IV: Logaritmos en base ‘a’ cualquiera, Cambio de base, Ecuaciones y Sistemas con exponenciales y con logaritmos, Uso de la Tabla de logaritmos. Apéndice V: Profundización sobre las Series.

Vol.7: Funciones básicas elementales y trascendentes: Representación gráfica. Derivada y Diferencial en un punto y su interpretación geométrica. Reglas de derivación. Derivadas sucesivas. Diferencial de segundo orden. Funciones y = f(x,y) y Derivadas parciales. Funciones implícitas y Derivación implícita. Aplicación a la Representación gráfica y a los Problemas de optimización. Integral indefinida: Métodos de integración. Concepto de Integral Definida: Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow, Aplicación al Cálculo de áreas. Apéndice I:

Dominio de las funciones recíprocas en trigonometría. Funciones hiperbólicas y sus recíprocas. Apéndice II: Sobre Derivabilidad. Apéndice III: Sobre el Teorema de Cauchy. Apéndice IV: Integración de expresiones irracionales. Apéndices V: Integrales Elípticas. Apéndice VI: Integrales Elípticas de Primera y de Segunda especie. Apéndice VII: Integrales Definidas impropias. Colecciones de problemas resueltos. Listados de Prototipos de expresiones integrables.

Vol.8: Aplicación del Cálculo diferencial: Teorema de Fermat, Teorema de Rolle, Teorema de los Incrementos finitos, Otros Teoremas. Conceptos y elementos básicos en el Análisis y Representación gráfica de y = f(x). Funciones de dos variables z = f(x,y) y las Superficies en el Espacio: Derivadas parciales, Segunda derivada. Desarrollo de Taylor. Función implícita, Derivación implícita. Extremos locales y Optimización. Las Cónicas y otras Curvas predefinidas: Lemniscata, Estrofoide, Cicloide, Cardioide, Hipocicloide, Cisoide de Diocles, Folium de Descartes, Envolvente, Espirales, Rasa de n pétalos. Superficies. Superficies predefinidas: La Esfera, Elipsoides, Hiperboloides, Paraboloides, … . Curvas sobre una superficie. Diferencial de arco, Curvatura, radio de curvatura. Diferencial direccional, Gradiente. Iniciación al estudio de las Cuádricas y su relación con el análisis de los extremos locales. Varias Colecciones de problemas resueltos. Apéndice I: Profundiza sobre funciones f(x,y,z) = k y curvas sobre una superficie. Apéndice II: Estudio de las Cuádricas y Extremos locales. Apéndice III: El Resto de Lagrange. Apéndice IV: Listado de derivadas inmediatas. Colección de problemas, Actividades sobre Desarrollo de Taylor.

Vol.9: Integral Definida, Teorema del valor medio, Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow. Longitud de un arco de curva, Curva de Viviani. Cálculo de áreas planas. Integral Doble: Cálculo de superficies y volúmenes. Integral Triple: Cálculo de volúmenes. Cálculo de la Superficie y del Volumen de sólidos predefinidos: Zona y Casquete esféricos, Cono esférico, Elipsoide, Paraboloide, Bóveda de Viviani. Cuerpos de revolución: Superficie y Volumen. Revolución de: La Astroide, Cicloide, Cardioide. Integral Curvilínea: Fórmula de Riemann-Green. Integral de Superficie: Fórmula de Stockes, Fórmula de Ostrogradski-Gauss. Apéndice I: Profundización en Métodos de Integración. Apéndice II: Profundización sobre Integral doble y triple, coordenadas curvilíneas. Apéndice III: Complementos, Cambio de coordenadas, Coordenadas curvilíneas, … . Apéndice IV: Complementos, …, La Integral de Euler - Poisson. Colección de Problemas resueltos. Listado de Integrales interesantes.

Vol. 10: Álgebra Lineal: Matrices y Determinantes. Aplicación a los Sistemas lineales: Análisis y resolución, Métodos de Gauss y de Crámer. Espacios vectoriales: Dependencia lineal, Sistema generador y Sistema libre, Bases y dimensión. Aplicaciones Lineales, Endomorfismos, Cambio de base. Espacio Afín, Espacio métrico y Espacio Euclídeo asociados a un Espacio vectorial. Transformaciones geométricas en el Plano y en el Espacio, Cambio de Sistema de referencia, Ángulos de Euler, Determinación de los ángulos de Euler. Apéndice I: Profundización sobre transformaciones en el Plano y cambio de s.d.r.. Apéndice II: Profundización sobre transformaciones en el Espacio y cambio de s.d.r.. Colecciones de problemas resueltos.

Vol.11: Parte I:
Estadística descriptiva en una y en dos variables. Correlación y Rectas de regresión. Teoría y Cálculo de Probabilidades: Regla de Laplace, Probabilidad condicionada, Probabilidad total, Teorema de Bayes. Variable aleatoria y Distribuciones: Funciones de Probabilidad, de Densidad y de Distribución. Distribuciones discretas: Distribuciones Binomial e Hipergeométrica. Distribuciones continuas: Función de Densidad y de Distribución. Distribución Normal, Tipificación, Tabla de la Normal Tipificada y su aplicación. Aproximación de la Binomial mediante una Distribución normal, Ajuste de una Serie de datos mediante una Distribución normal. Colecciones de problemas resueltos.
Parte II: Programación Lineal: Resolución de Problemas Optimización. Interpolación Polinómica: Método progresivo, Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos. Apéndice: Sobre Distribución Hipergeométrica y Distribución de Poisson.

Vol.12: Ampliación en el estudio de las Matrices, Teorema de Hamilton – Cayley. Polinomio característico, valores y vectores propios, Diagonalización de matrices. Formas bilineales, Formas cuadráticas. Profundización: Espacios afines, Transformaciones geométricas, Cambio de s.d.r.. Profundización: Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio: Cónicas y Cuádricas en cartesianas, sus elementos y

clasificación. Geometría Analítica en coordenadas homogéneas: Estudio completo de Cónicas, Cuádricas, Polaridad. Invariantes, Tipo de cónica, Tipo de cuádrica y su ecuación reducida.
Estudio de curvas alabeadas: Tangente, Plano osculador, Normal principal, Binormal, Triángulo intrínseco. Estudio de Superficies: Superficie en general, Regladas y Desarrollables, de Rotación, de Traslación. Plano tangente, Recta normal. Proceso simple y práctico para un Cambio de Sistema de referencia. Cosenos directores de una recta. Orientación en el Plano y en el Espacio.
Complementos/Profundización: Rotación en el Espacio, Teorema de Euler, Ángulos de Euler y su cálculo. Colección de problemas resueltos de gran interés.

Vol.13: COMPLEMENTOS: I: De Álgebra Superior. II: Operadores. III: Transformaciones Proyectivas. IV: De Suma de Series. V: Algunos Teoremas, Sucesión de Fibonacci en la naturaleza. VI: De Geometría, Transformaciones geométricas.

Vol 14: I: Álgebra de vectores: Producto escalar de vectores, Producto vectorial de vectores, Relación de Bibbs , Producto mixto de vectores, Volumen del Tetraedro, Identidad de Lagrange. II: Geometría vectorial: Métodos vectoriales. III: Resultados interesantes Geométrico – Vectoriales: Entre otro: Teorema de Menelao, Teorema del Cuadrilátero, Cuaterna armónica. Razón doble de segmentos, Abscisas proyectivas sobre la recta real ampliada, Correspondencia proyectiva entre dos rectas ampliadas, Proyectividad Involutiva, Teorema del Cuadrivértice de Desargues, Teorema de las Medianas. IV: Todo sobre Geometría en el plano y en el espacio. V: Algunos Teoremas: T. de Ptolomeo, T. geométrico de Euler, T. de Napoleón, Problema de Napoleón. VI: Otros de especial interés: De Programación Lineal, De Cónicas, Añoranzas del Aula.

Cuadernillo 1: Números: 1.- Raíz cuadrada de un número: Justificación. 2.- Raíz cúbica de un número: Justificación. 3.- El Número de Oro y su presencia. La Sucesión de Fibonacci en la naturaleza. (36 págs)

Cuadernillo 2: Estudio de las Cónicas: 1.- La Elipse. Casuística. 2.- La Hipérbola. 3.- La Parábola. 4.- Las Cónicas de Apolonio: Método vectorial. (38 págs)

Cuadernillo 3: De Espacios …: 1.- Espacios vectoriales Euclídeos. 2.- Espacios Euclídeos: En el plano, En el espacio. 3.- Trigonometría. 4.- Productos vectoriales: Producto escalar, Producto vectorial, Producto mixto. Aplicaciones … (54 págs)

Cuadernillo 4: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales. (44 págs)

Cuadernillo 5: Olimpiadas Matemáticas: Ediciones: XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIV, XXX, XXXI, XXXII fase Regional, XXXII fase Nacional. Más dos problemas de interés: Vaso con agua – vaso con vino; los dos trenes y la mosca. (126 págs)

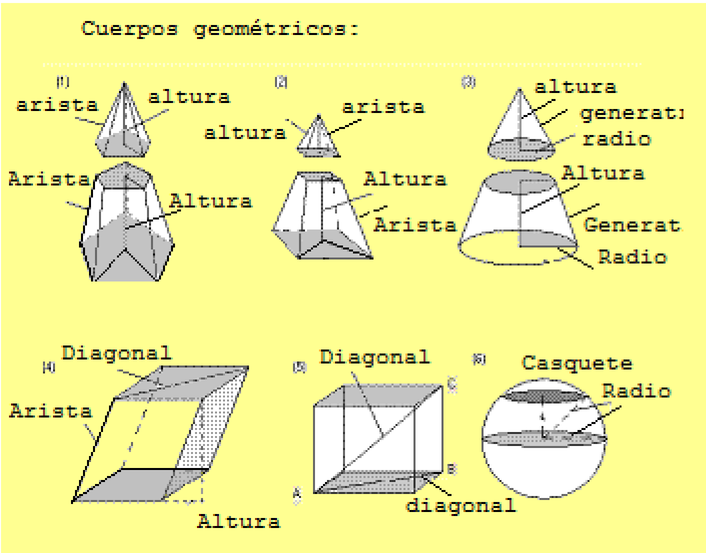
Cuadernillo 6: 1: Teoría de grafos. 2: Aplicación en El problema de los mapas coloreados. 3: Aplicación en el Teorema de Euler para los poliedros. (96 págs) ------------

VOLUMEN 4

Geometría básica descriptiva en el Plano y en el Espacio

Trigonometría en el Plano

Las Cónicas



ÍNDICE

pág.

Tema 1 Geometría básica Descriptiva en el Plano

Conceptos y Elementos básicos I

21 1.1.- Elementos básicos: Puntos, Segmentos, Semirrectas, Rectas, Ángulos, Orientación de los ángulos

23 1.2.- Circunferencia y Círculo, arco de circunferencia. Medida de ángulos

25 1.3.- Paralelismo y perpendicularidad de rectas

27 1.4.- Triángulos

28 1.5.- Cuadriláteros

31 1.6.- Polígonos. Polígonos regulares o Irregulares

Tema 2 Conceptos y Elementos básicos II

41 2.1.- Teorema de Thales. Proporcionalidad, Semejanza de triángulos

44 2.2.- Teorema de Pitágoras. Propiedades en el triángulo rectángulo.

47 2.3.- Arcos y ángulos en la circunferencia

Tema 3 Perímetros y áreas en el Plano

53 3.1.- Sistema de referencia sobre una recta.
Longitud de un segmento. Distancia entre dos puntos

54 3.2.- Sistema de referencia cartesiana en el Plano.

55 3.3.- Perímetro de un triángulo y de un cuadrilátero.
Perímetro de un polígono

57 3.4.- Perímetro del disco

58 3.5.- Área del Cuadrilátero recto (Rectángulo) y del
Triángulo recto (Triángulo rectángulo)

59 3.6.- Área de un Paralelogramo. Área de un Triángulo
cualquiera. Área de un Polígono

61 3.7.- Área del Círculo (disco), área de un Sector circular,
área de un Segmento circular. Área de un Triángulo
curvilíneo.

63 Actividades resueltas

Tema 4 Más sobre el Triángulo

75 4.1.- Puntos y rectas notables en un Triángulo

77 4.2.- Estudio del Triángulo equilátero

79 4.3.- Estudio del Triángulo rectángulo: Propiedades

80 4.4.- La Circunferencia: Construcción geométrica

Tema 5 Geometría básica descriptiva en el Espacio

83 5.1.- Punto, Recta y Plano en el Espacio

84 5.2.- Ángulo diédrico y ángulo triédrico

81 5.3.- Cuerpos en el espacio. Poliedros y su clasificación

91 5.4.- Los Prismas. Volumen y Superficie

96 5.5.- Las Pirámides: Volumen y Superficie

101 5.6.- Los conos: Volumen y Superficie. Principio de Cavalieri.

105 5.7.- Los Cilindros: Volumen y Superficie

107 5.8.1.- La Esfera: Volumen y Superficie

110 5.8.2.- Segmento esférico y Casquete esférico. Volumen y Superficie

112 5.8.3.- Cono esférico (o Sector esférico). Volumen. Superficie del Casquete esférico

115 5.8.4.- Cuña esférica: Volumen y Superficie

116 5.9.- Otros cuerpos geométricos de interés

Tema 6 Trigonometría en el Plano

119 6.1.- Definición de las Razones trigonométricas

124 6.2.- Razones trigonométricas de Suma/Resta de dos ángulos

126 6.3.- Fórmulas del Producto de r.t.

127 6.4.- Fórmulas de las Sumas/Restas de r.t.

127 6.5.- Teorema de los Senos

129 6.6.- Teorema del Coseno

133 6.7.- Resolución de triángulos

136 6.8.- Aplicación al cálculo del Área de un Triángulo cualquiera

Tema 7 Cónicas en el Plano

143 7.0.- Secciones cónicas

143 7.1.- LA ELIPSE. Definiciones. Elementos de la Elipse

146 7.2.- Ecuaciones de la Elipse

151 7.3.- LA HIPÉRBOLA. Definiciones. Elementos de la Hipérbola

153 7.4.- Ecuaciones de la Hipérbola

159 7.5.- LA PARÁBOLA. Definiciones. Elementos de la Parábola

164 7.6.- Ecuación de la parábola

167 7.7.- Construcción de las Cónicas con Regla y lápiz.

169 Ejemplos/Problemas

173 *ACTIVIDADES* y Problemas

187 *APÉNDICE I*: Ecuación general de una Cónica

193 *APÉNDICE II*:
Sobre el Número de oro. Semejanza y el Rectángulo áureo. El Pentágono regular (T. de Ptolomeo).
203 Construcciones con Regla y Compás: Triángulo, Hexágono , Pentágono.
212 División del círculo …. (Problema de Napoleón) (Revisar)
214 La Cuadratura del Círculo SÍ es posible (Revisar)

219 *APÉNDICE III:* Demostración del Teorema de Thales

215 *APÉNDICE IV:* Demostración del Teorema de Euler para los poliedros. Ángulo de Euler.

224 *APÉNDICE V:* Teorema de Napoleón (De los triángulos equiláteros) (Revisar)

223 Colección de Problemas geométricos resueltos

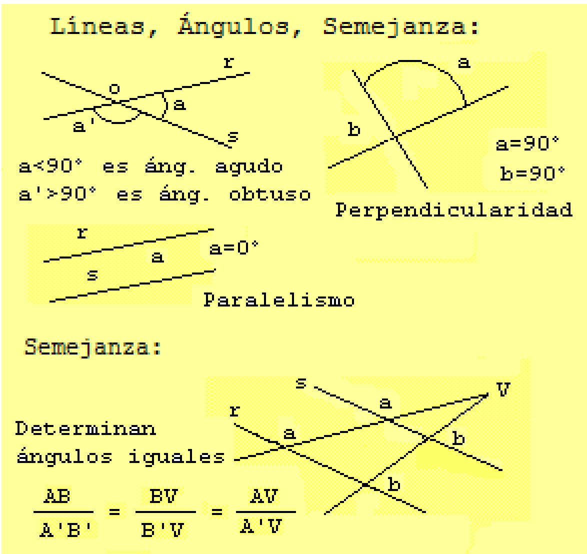
243 *BIBLIOGRAFÍA*

247 Notación y Nomenclatura. Valores

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

Tema 1

GEOMETRÍA básica Descriptiva en el plano



Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

1.1.- Elementos básicos: Plano, Puntos, Segmentos, Semirrectas, Rectas, Ángulos

Los siguientes conceptos son básicos y primarios, y esta es la razón por la que los introducimos de forma intuitiva sencilla y práctica, con la única ayuda de nuestra intuición práctica.

El alumno debe utilizar lápiz y papel.

Nos movemos en un espacio que llamamos 'tridimensional', y este hecho, que nos pasa desapercibido, es sin embargo fundamental al considerar y describir los objetos geométricos.

Concepto básico de Plano:

Llamamos plano a la superficie de la mesa sobre la que escribimos, o la mesa sobre la que degustamos, o el suelo de nuestro piso en el que habitamos, ..., o el folio en el que escribimos, etc.

Si tomamos un hilo de cierta longitud y lo fijamos a la mesa mediante una chincheta, lo mantenemos tenso y lo fijamos en otro punto, conseguimos un 'segmento'. Si este segmento lo extendemos por ambos extremos ilimitadamente obtenemos 'una recta'. Donde pinchamos la chincheta es 'un punto'.

Un hecho importante es que dos rectas distintas determinan, 'identifican' y 'diferencian' un plano.

Punto:

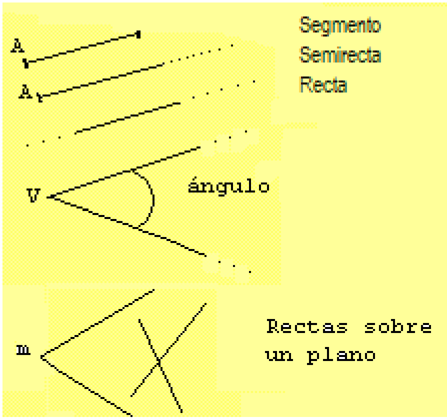
Es el 'lugar' donde pinchamos la chincheta, o donde situamos la punta del lápiz.

Segmento:

Si unimos dos puntos 'por el camino más corto' tenemos un segmento. O bien como dijimos antes al fijar el hilo tensado en dos puntos A y B. Tenemos el segmento AB.

Semirrectas:

Mantenemos el hilo fijo en A, y soltamos el extremo B del segmento. Extendemos por B tanto como queramos, manteniéndolo tensado y en ‘una dirección’ cualquiera, tenemos una ‘semirrecta’.



Recta:

Si liberamos los dos extremos del segmento AB manteniendo el hilo tensado, y extendemos (prolongamos) en cualquier dirección, tenemos una ‘recta’.

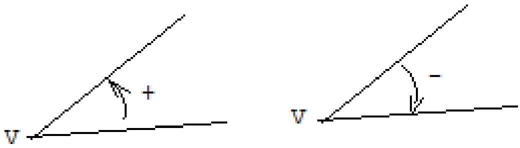
Ángulo:

Si trazas dos semirrectas con el mismo origen A, llamamos ‘ángulos formados por ellas’ a cada una de las partes del plano limitadas por las semirrectas.

Llamamos ‘vértice’ de estos ángulos al origen común A de las semirrectas.

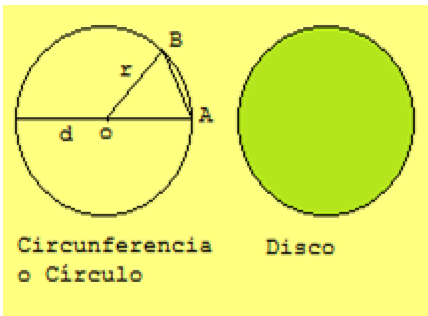
Orientación de los ángulos:

Por definición, el ángulo g es positivo si lo recorremos en sentido contrario a las agujas del reloj, y es negativa si lo recorremos en el mismo sentido de las agujas.



1.2.- Circunferencia y Círculo, arco de circunferencia. Medida de un ángulo

Círculo y circunferencia:



Toma un compás y ábrelo a tu gusto. Pinchando en un punto cualquiera O, e iniciando el trazado en un punto cualquiera A, hazlo girar hasta que la línea que va trazando alcance de nuevo el punto A (línea cerrada). Llamamos ‘circunferencia’ a la línea cerrada obtenida. Llamamos ‘círculo’ a la parte del plano limitada e interior a la circunferencia.

Arco de circunferencia:

Llamaremos ‘arco de circunferencia’ a una parte de ella entre dos punto A y B de dicha circunferencia.

Al segmento AB lo llamamos ‘Cuerda’ asociada al arco AB.

El punto donde pinchamos para el trazado de la circunferencia lo llamamos ‘centro’ de la misma.

El segmento que lleva desde el centro hasta un punto A cualquiera de la circunferencia lo llamamos ‘radio’ de la misma.

Unidad de medida de ángulos:

División de la circunferencia en 360 partes iguales. El grado

Dividimos la circunferencia en 360 partes iguales, a cada una de éstas la llamamos **‘grado’**. Así, una circunferencia tiene (mide) 360 grados.

El grado va a ser la ‘unidad de medida’ para medir la amplitud de un ángulo, o de un arco de circunferencia.

Sector circular:

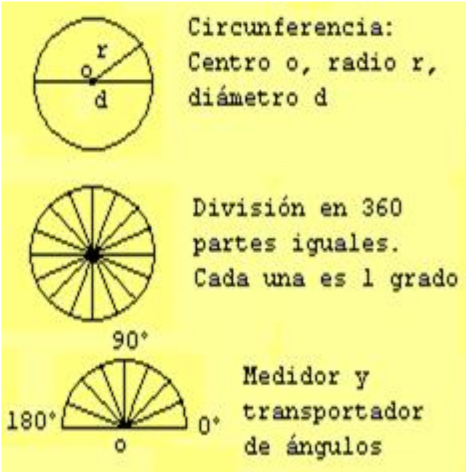
Partiendo del centro trazamos dos semirrectas. La parte del círculo que queda delimitada por las dos semirrectas y por la circunferencia la llamamos **‘sector circular’** (asociado al ángulo formado por las semirrectas).

Amplitud de un ángulo:

Es costumbre marcar el ángulo de la siguiente forma:

Toma un compás y ábrelo a tu gusto. Pinchando en A (vértice del ángulo) y traza un arco que lleve desde una de las semirrectas hasta la otra. Es posible trazar dos de estos arcos.

Por convenio, llamamos **‘ángulo formado por las dos semirrectas’** al menor de los dos arcos posible (o al menor de los sectores circulares).



¿Cómo realizar esta medida? El trasportador de ángulos:

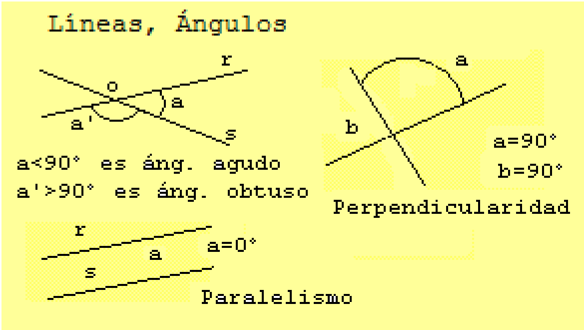
Del mismo modo que para medir distancias (en línea recta) hemos fijado una unidad de medida (el metro), y disponemos de instrumentos para realizar la medida, así para medir ángulos hemos definido el 'grado' y disponemos del llamado 'trasportador de ángulos'.

Cuadrantes en la circunferencia:

La circunferencia puede ser dividida en cuatro partes iguales, y por tanto cada una es un arco que mide 90 grados. Cada una de éstas es un 'cuadrante' de la circunferencia.

1.3.- Paralelismo y perpendicularidad de rectas.

Angulo formado por dos rectas:



Casos:

a)Tienen un punto común: Si O es el punto común tomo sobre r un segmento OA, y sobre s tomo el segmento OB. Estos dos segmentos forman un ángulo v. Este ángulo puede tomar cuatro valores dos a dos iguales.

Decimos que 'el ángulo formado por las dos rectas' es el menor de estos valores.

b)No tienen ningún punto común: En este caso decimos que forman ángulo de 0º.

Perpendicularidad:

Si dos rectas forman ángulo cuya amplitud mide 90 grados, decimos que son 'perpendiculares'.

Paralelismo:

Dos rectas tales que mediante algún movimiento podamos hacer que coincidan (que se sobrepongan en todos sus puntos), diremos que son 'paralelas'.

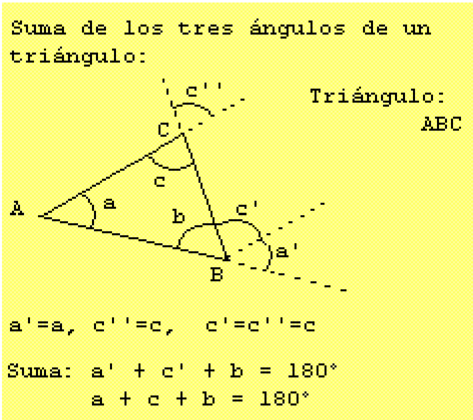
También, son 'paralelas' si forman ángulo de 0 grados.

1.4.- Triángulos

Si tenemos tres rectas entre las que ningún par de éstas son paralelas, la parte del plano que delimitan la llamaremos 'triángulo'.

Los elementos de un triángulo son: Tres lados, tres vértices, tres ángulos.

La suma de los tres ángulos de un triángulo vale siempre 180º:



Observando la figura se comprueba de forma inmediata.

Clasificación:

A)Por sus ángulos:

Acutángulo: Los tres ángulos agudos (menores de 90º)

Obtusángulo: Tiene un ángulo mayor que 90º

Rectángulo: Si tiene un ángulo igual a 90º (ángulo recto)

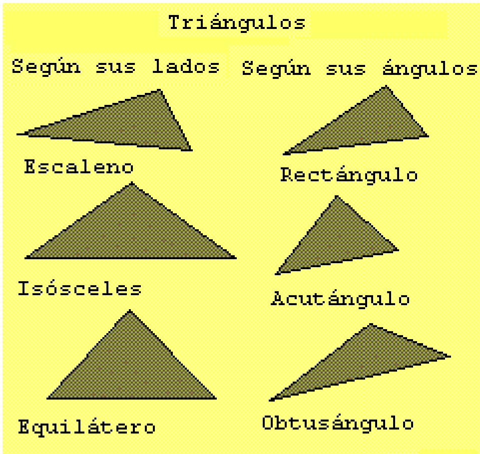
B)Por sus lados:

Escaleno: Sus tres lados tienen distinta longitud.

Isósceles: Tiene dos lados iguales en longitud.

Equilátero: Tiene los tres lados iguales en longitud.

La figura muestra cada uno de los tipos descritos.



1.5.- Cuadriláteros

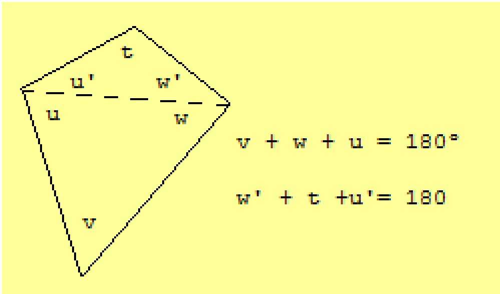
Es la región del plano delimitada por cuatro rectas.

Sus elementos son: Cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos.

La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale 360º:

En la figura podemos comprobar que si sumamos miembro a miembro

$$v + (w+w') + t + (u'+u) = 360º$$



Clasificación:

A)Por sus ángulos:

Rectángulo: Tiene los cuatro ángulos iguales.

Romboide: Tiene dos pares de ángulos opuestos iguales.

Escalenos: El resto que entran en ninguno de los dos anteriores.

B)Por sus lados:

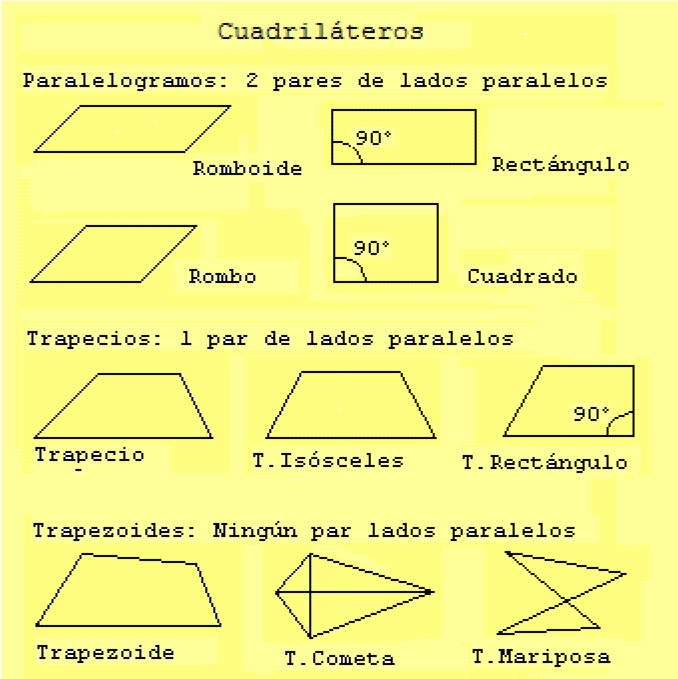
Paralelogramos: Tienen dos pares de lados opuestos paralelos entre sí.

Trapecios: Tienen un par de lados paralelos entre sí.

Trapezoides: Ningún par de lados paralelos.

Observa que dentro de cada grupo podemos tener formas muy variedad. Por ejemplo: Un 'rombo' es un romboide, un 'cuadrado' es un rombo y por tanto romboide. Dentro de los trapecios: Trapecio isósceles, trapecio recto. Dentro de los trapezoides: Cuatro segmentos que encierran una región del plano.

En la siguiente figura mostramos varias de estas formas.

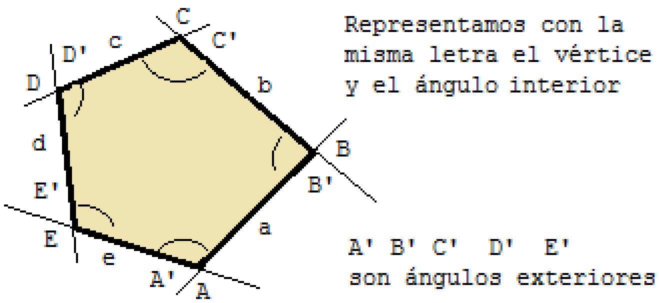


1.6.- Polígonos. Polígonos regulares

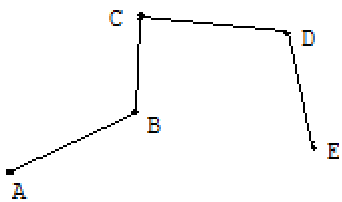
Polígono de n lados:

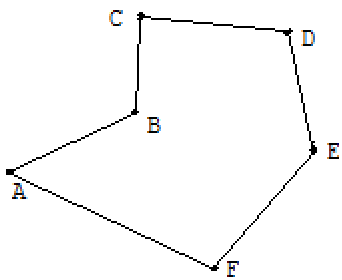
Es la región o parte del plano limitada (encerrada) por n rectas. Este polígono tiene n vértices y n ángulos.

Sus elementos son: n lados, n vértices, n ángulos.



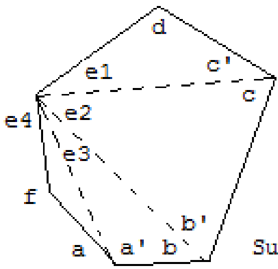
Si definimos 'línea quebrada' como la unión de segmentos: Punto final coincidente con el origen del siguiente, entonces un polígono es el recinto limitado por una línea quebrada cerrada (el final del ultimo coincide con el origen del primero). Esta es la definición que se da en algunos textos.





Suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera:

Observa la figura, y tenemos en cuenta lo que ocurre en un triángulo:



$$a' + b + e3 = 180°$$
$$b' + c + e2 = 180°$$
$$c' + d + e1 = 180°$$
$$e4 + f + a = 180°$$

Sumando:

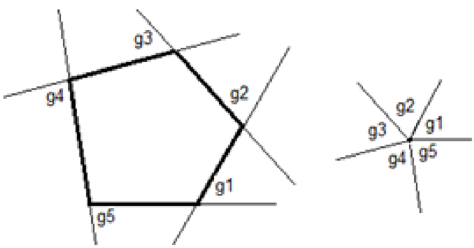
$$(b+b')+(c+c')+d+(e1+e2+e3+e4)+f+(a+a') = 4.180° = (6-2).180°$$

Concluyo que en general:

Suma de los ángulos de polígono de n lados = (n-2).180º

Observa que hemos fijado uno de los vértices y a partir de éste hemos triangulado el polígono. Los dos ángulos contiguos al que hemos fijado quedan sin dividir, mientras que los otros n-2 vértices (incluido el que hemos tomado fijado) son divididos en dos sumandos, salvo el fijado que es dividido en (n-2) sumandos. Intuitivamente podemos afirmar lo anterior.

Otra demostración:



$$S\ int. = n.180 - (g1+g2+g3+g4+g5)$$
$$g1 + g2 + g3 + g4 + g5 = 360$$
$$S\ int. = n.180 - 360$$

Suma de los ángulos interiores = n.180º – 360º = (n-2).180º

Polígono regular:

Es aquel cuyos ángulos tienen la misma amplitud, y sus lados tienen la misma longitud.

Los polígonos regulares son equiangulares y equiláteros, por tener sus ángulos (interiores) y sus lados iguales.

Los polígonos, regulares o no, son nombrados del siguiente modo:

5 lados	-> pentágono
6	“ -> hexágono
7	“ -> hectágono
8	“ -> octógono
9	“ -> eneágono
10	“ -> decágono
11	“ -> undecágono
12	“ -> dodecágono
13	“ -> tridecágono
	…………

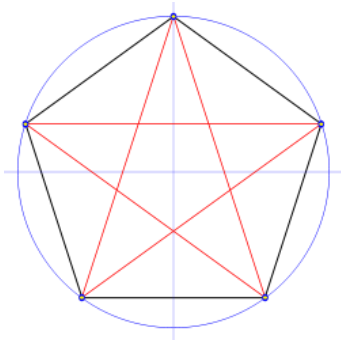
Propiedades de un polígono regular

Tomo como ejemplo el pentágono regular

Los polígonos regulares se pueden inscribir en una circunferencia.

Diagonales de un polígono regular. Número de diagonales

Para determinar el número de diagonales **Nd**, de un polígono de **n** vértices realizaremos el siguiente razonamiento:



De un vértice cualquiera partirán (n – 3) diagonales, donde n es el número de vértices, dado que no hay ningún diagonal que le una consigo mismo ni con ninguno de los dos vértices contiguos.

Esto es válido para los n vértices del polígono.

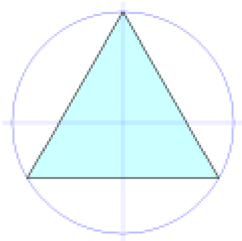
Una diagonal une dos vértices, por lo que aplicando el razonamiento anterior tendríamos el doble de diagonales de las existentes.

Según el razonamiento tendremos que:

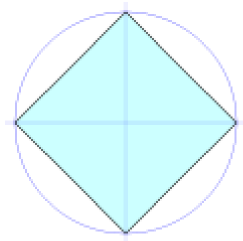
$$N_d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Galería de polígonos regulares

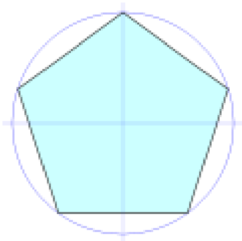
Triángulo equilátero



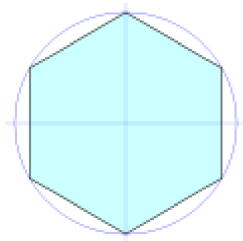
Cuadrado y Rombo



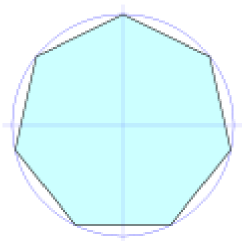
Pentágono regular



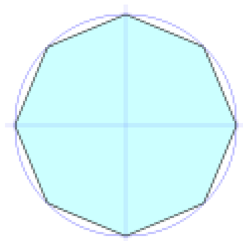
Hexágono regular



Heptágono regular

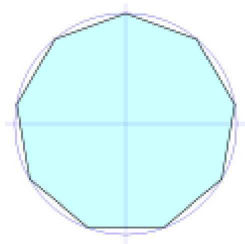


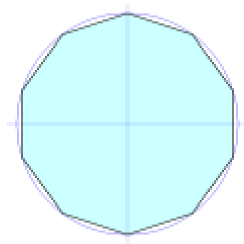
Octógono regular



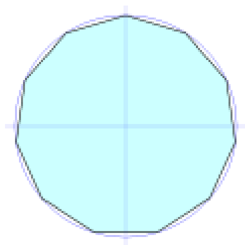
Eneágono regular

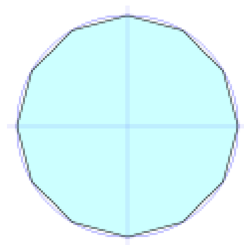
Decágono regular



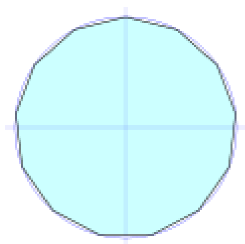


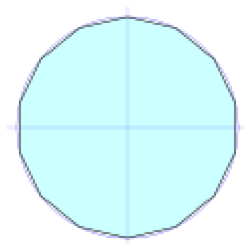
Undecágono regular Dodecágono regular





Tridecágono regular Tetradecágono regular

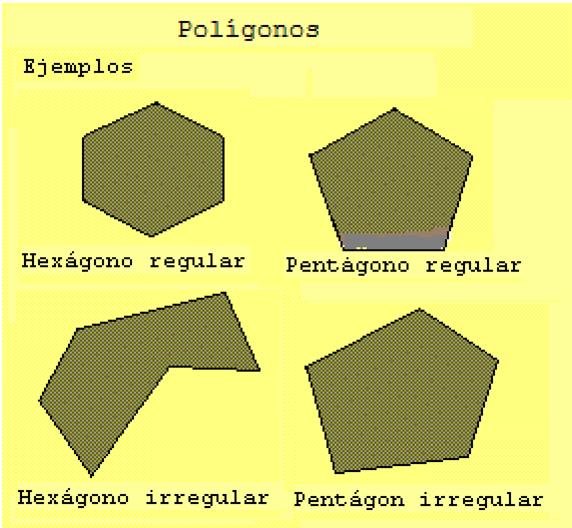




Polígonos irregulares:

Todo aquel que no es regular.

En la figura mostramos algunos ejemplos



$$$$oOo$$$$

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

Tema 2

Conceptos y Elementos básicos II

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio.
Trigonometría. Cónicas.

2.1- Teorema de Thales. Semejanza

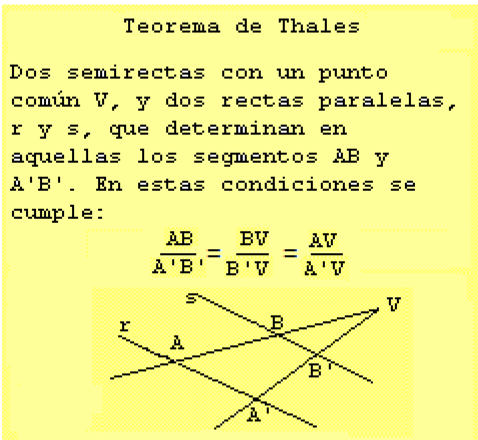
Observa la figura

Tengo dos rectas que se cortan en V, y tengo además dos rectas paralelas entre sí, r y s, que cortan a las anteriores produciendo los segmentos AB, A’B’, BV y B’V.

Se puede demostrar que se cumplen las siguientes igualdades (aunque aquí no lo demostremos):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BV}{B'V} = \frac{AV}{A'V}$$

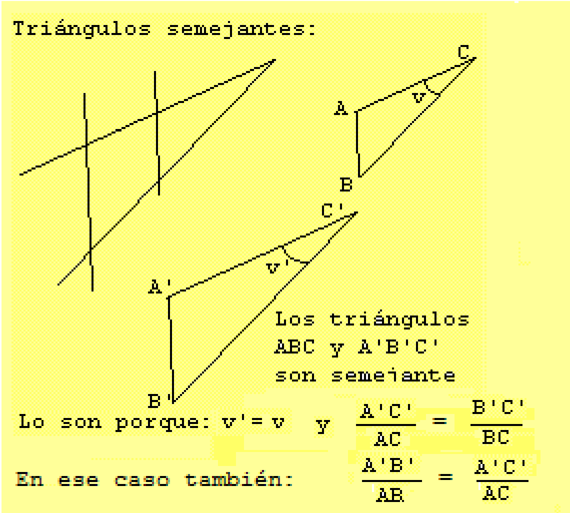
Es la afirmación del conocido como Teorema de Thales



En el Apéndice 3 damos una demostración de esta importante propiedad.

Triángulos semejantes:

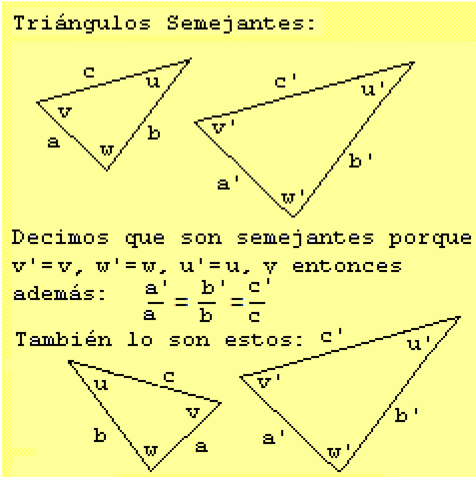
Observa las siguientes figuras



"Decimos que dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si sus tres ángulos son iguales".

En ese caso se cumple también la siguiente relación entre sus lados:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$



Casos en los que podemos afirmar que son semejantes:

a)Si v' = v , y $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$, y como consecuencia también

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Y análogamente si la igualdad se produce en otro par de ángulos.

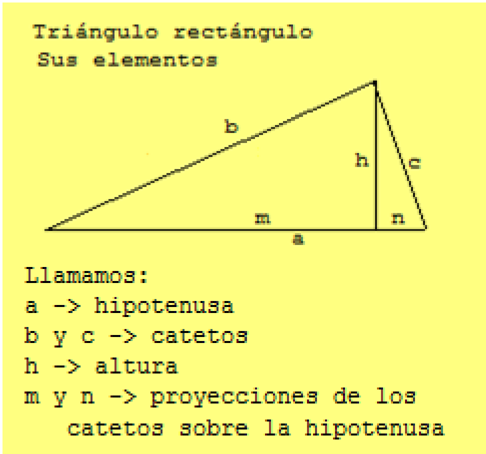
b) Si tienen dos ángulos iguales (recuerda que la suma de los tres ángulos vale 180º), y en consecuencia los tres ángulos son iguales.

c) Si los lados cumplen $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

d) Si son triángulos rectángulos y tienen otro ángulo igual, entonces son semejantes.

2.2.- Teorema de Pitágoras

Observa las siguientes figuras



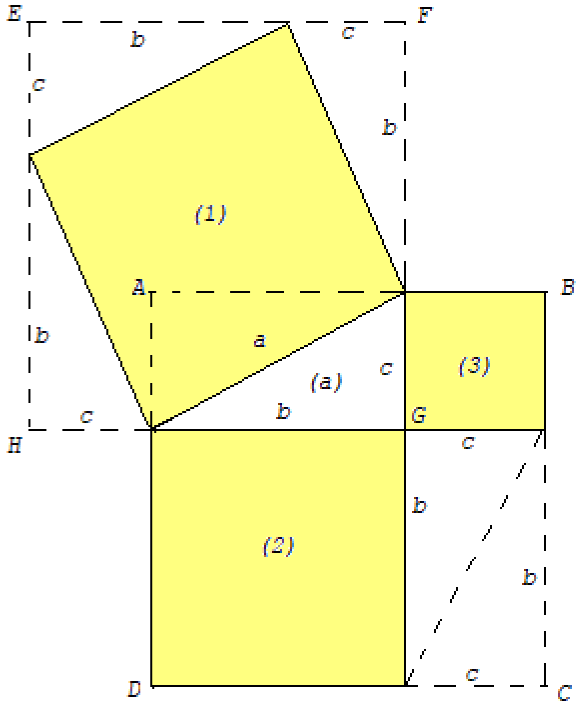
La siguiente propiedad se cumple sólo en triángulos rectángulos (un ángulo de 90º -> dos de sus lados son perpendiculares).

Siempre que mencionamos los lados nos estamos refiriendo a su longitud. Lo mismo ocurre con los ángulos.

Teorema (Pitágoras):

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2$

Demostración gráfica:



El cuadrado ABCD, en su área engloba:

(2) + (3) + 4.(a)

El cuadrado EFGH, en su área engloba:

4.(a) + (1)

Por tanto, teniendo en cuenta que (2) + (3) + 4.(a) = 4.(a) + (1)

deduzco que (2) + (3) = (1) , esto es: $b^2 + c^2 = a^2$

Propiedades en un triángulo rectángulo (interesantes):

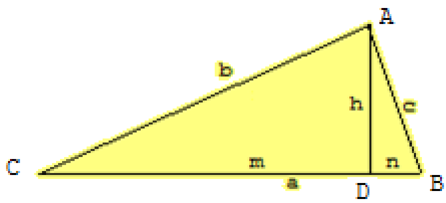
Es costumbre nombrar los ángulos con mayúsculas y el lado opuestos a cada ángulo con la misma letra en minúscula.

En la siguiente figura observa que los triángulos BAC y CDA son semejantes, por tener un ángulo recto y otro ángulo igual, y por tanto los tres ángulos iguales.

Por tanto $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$ -> a.h = b.c

También $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ -> a.m = b^2

Triángulo rectángulo



Por la misma razón, Los triángulos BAC y BDA son semejantes, y por tanto

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$ -> a.n = c^2

También $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$ -> a.h = b.c

Por la misma razón los triángulos ADC y ADB son semejantes, y por tanto

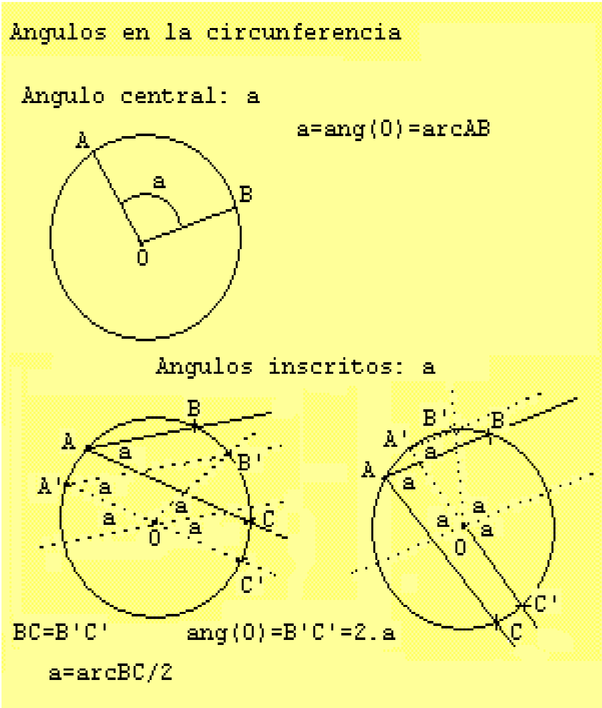
$\frac{b}{c} = \frac{h}{n}$ -> b.n = c.h

También $\frac{b}{c} = \frac{m}{h}$ -> b.h = c.m

También $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$ -> m.n = h^2

2.3.- Arcos y ángulos en la circunferencia

Observa las siguientes figuras



Tomamos una circunferencia y construimos distintos tipos de ángulos. Tenemos las siguientes opciones.

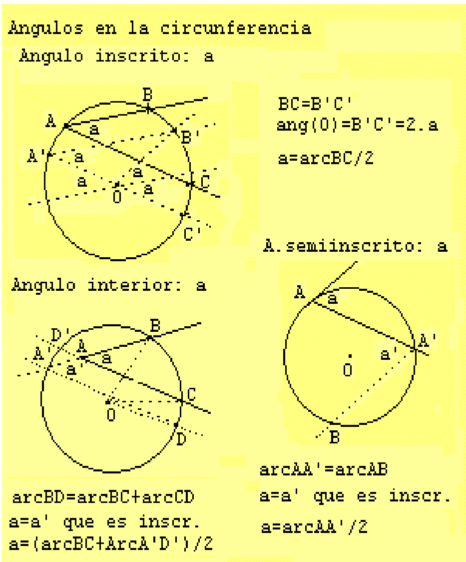
Ángulo central:

Es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. Su medida es la misma que al del arco que abarca. Con ayuda del trasportador podemos obtener su valor.

En el caso de ángulos No centrales, No podemos obtener su valor con ayuda del trasportador; tendremos que obtener un ángulo central que nos permita deducir el valor de aquel.
Tenemos los siguientes casos, como mostramos en las figuras adjuntas.

Observa que el arco lo recorremos siempre en sentido contrario al de las agujas del reloj (elegido como orientación positiva).

Ángulo inscrito:
Es aquel cuyo vértice está en el borde del círculo.



Su valor es $\frac{1}{2}$ del arco central: $a = \frac{\text{arcCB}}{2}$

b) Ángulo semi-inscrito:

Es aquel cuyo vértice está en el borde del círculo y además uno de los lados es tangente a dicho borde. Observa la figura.

Su valor es 1/2 del arco A’A: a = $\frac{arcA\prime A}{2}$

c) Angulo interior:

Es aquel cuyo vértice está en el interior del disco. Observa la figura.

Su valor es la semisuma de los arcos CB y D’A’:

$$a = \frac{\text{arcCB}+\text{arcD'A'}}{2}$$

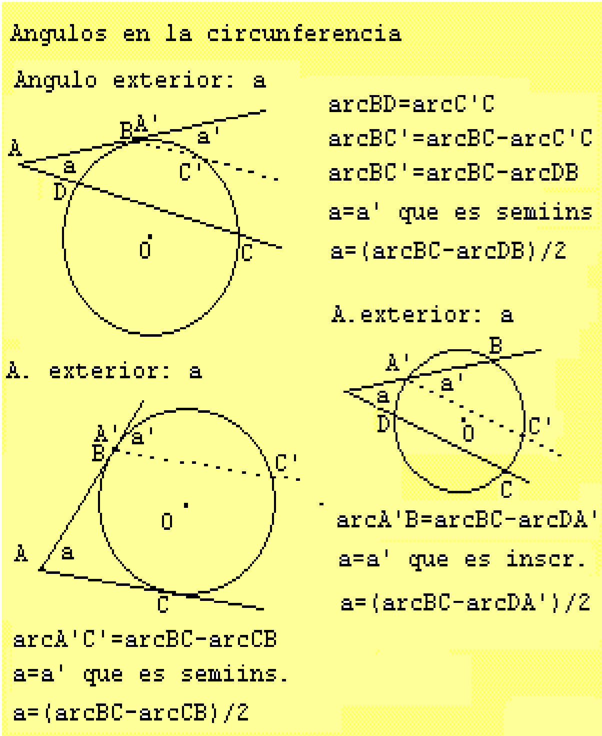
d) Ángulo exterior:

Es aquel cuyo vértice está fuera del disco.

Su valor es la semidiferencia de los arcos que determinan sus lados:

$$a= \frac{\text{arcCB}-\text{arcA'D}}{2}$$

Observa en la figura varios sub-casos:


Angulos en la circunferencia
Angulo exterior: a
arcBD=arcC'C
arcBC'=arcBC-arcC'C
arcBC'=arcBC-arcDB
a=a' que es semiins
a=(arcBC-arcDB)/2
A
B
A'
a'
a
C'
D
O
C
A.exterior: a
A'
B
a'
a
D
O
C'
C
arcA'B=arcBC-arcDA'
a=a' que es inscr.
a=(arcBC-arcDA')/2
A. exterior: a
A'
a'
B
C'
O
A
a
C
arcA'C'=arcBC-arcCB
a=a' que es semiins.
a=(arcBC-arcCB)/2

$$$$oOo$$$$

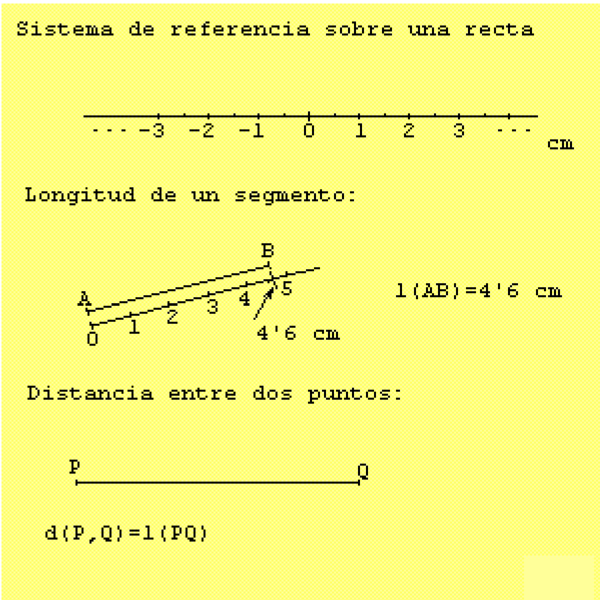
Tema 3

Perímetros y Áreas en el plano

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

3.1.- Sistema de referencia sobre una recta. Longitud de un segmento o Distancia entre dos puntos

Sobre una recta fijamos un punto, que designamos por 0 (cero u origen), y a partir de este punto marcamos segmentos de igual longitud, y convenimos que cada uno de estos segmentos representa la unidad: 1 metro (m), 1 centímetro (cm), o lo que convenga en cada caso. Al final del primer segmento escribiremos 1, al final del segundo un 2, y así como indica la figura.



Cada segmento podrá ser dividido en 10 partes iguales (sistema decimal), u otro número de partes si tomamos otro sistema. Tenemos así las décimas de la unidad. Podríamos dividir cada décima en 10 partes iguales y tenemos las centésimas, y seguir para obtener las milésimas, y así hasta la precisión deseada.

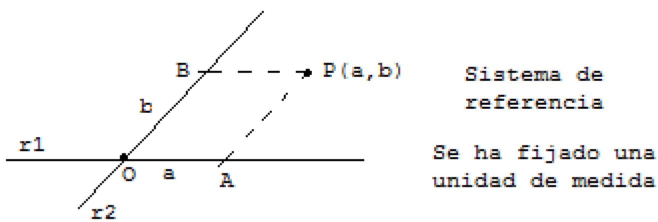
Todo lo que interesa en este punto queda reflejado en la figura.

Este razonamiento nos ha permitido construir las 'cinta métrica' que utilizamos diariamente para medir pequeñas distancias.

Observa: La longitud de un segmento va coincidir siempre con la distancia entre sus extremos. En Geometría analítica, Vol-5, estudiaremos el cálculo de distancias.

3.2.- Sistema de Referencia Cartesiano en el Plano

Fijando un punto O en el plano y dos rectas r1, r2, podremos localizar cada uno de los puntos P del plano mediante dos valores x, y , como vemos a continuación. Observa la figura

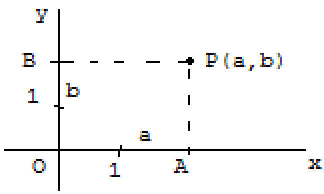


El punto P queda localizado por la distancia 'a' y por la distancia 'b'. Hemos trazado por P una paralela a la recta r2 y obtenemos el punto A. Trazamos por P la paralela a r1 y obtenemos el punto B. Después domo las distancias 'a' y 'b' al origen O.

Es importante tener en cuenta que sobre cada recta hemos fijado una 'unidad de medida'.

Sistema de referencia Cartesiano:

El Sistema de referencia habitual, llamado Cartesiano, es el que muestra la siguiente figura:



Sistema C. de referencia ortogonal

Las rectas forman entre sí ángulo de 90^{o}, y decimos que son 'ortogonales'. Hemos fijado una unidad de medida sobre cada recta.

Estas rectas fijas las llamaremos 'Ejes de coordenadas', y designaremos así: ox, oy. El punto fijado, O, lo llamaremos 'origen de coordenadas' y llamamos 'coordenadas' de P a los valores a y b.

A la coordenada 'a' se la ha dado el nombre: 'abscisa', y a la 'b' el nombre: 'ordenada'.

En Geometría analítica, Vol-5, veremos el cálculo de distancias.

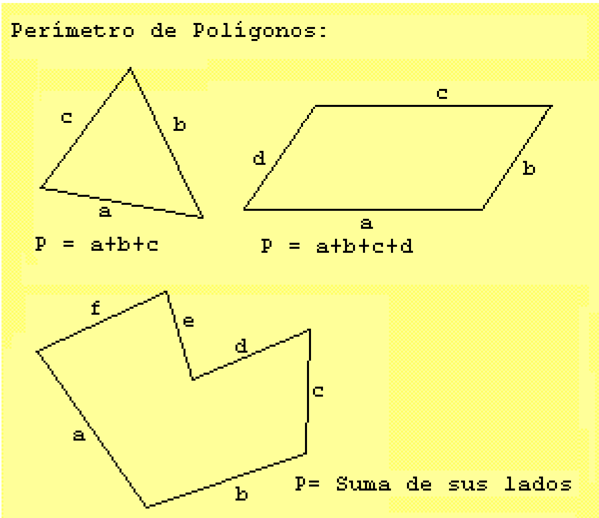
3.3.- Perímetro de triángulos y cuadriláteros. Perímetro de un polígono cualquiera.

Perímetro (del griego 'peripatos') significa recorrer el borde de un recinto cerrado. Esta es la razón por la cual llamamos 'perímetro' al citado borde del recinto.

Para obtener la 'longitud' de este perímetro utilizamos la cinta métrica u otro instrumento, obteniendo un valor que también llamamos 'su perímetro'.

Un triángulo, un cuadrado y un polígono en general es un recinto cerrado cuyo borde está formado por segmentos, que llamamos 'lados'.

Evidentemente, el valor de su perímetro es la suma de la longitud de cada lado.



Tenemos:

Perímetro del triángulo:

$$P = a + b + c$$

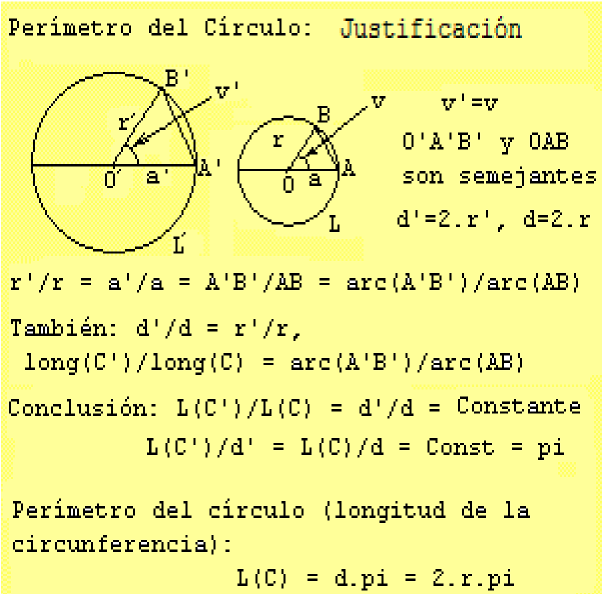
Perímetro de un cuadrilátero:

$$P = a + b + c + d$$

Perímetro de un polígono cualquiera:

$$P = a + b + c + d + \ldots + e + f$$

3.4.- Perímetro del disco



Desde muy antiguo se ha podido demostrar que la razón entre la longitud de la circunferencia (perímetro del disco) y su diámetro toma siempre el mismo valor, cualquiera que sea el radio de la circunferencia. Este valor fue calculado y lo llamamos 'número pi'. Posteriormente se ha demostrado que es un valor no racional (y por tanto 'irracional'). Lo designaremos por pi (número pi) y su valor es

$$pi = 3{,}1415927\ldots$$

(un número con cifras decimales ilimitadas y que no presentan periodo)

Para los cálculos ordinarios y habituales tomamos esta aproximación pi = 3,1416

Si L es el perímetro y d es el diámetro, tenemos

$$\frac{L}{d} = pi, \text{ y por tanto } L = pi.d$$

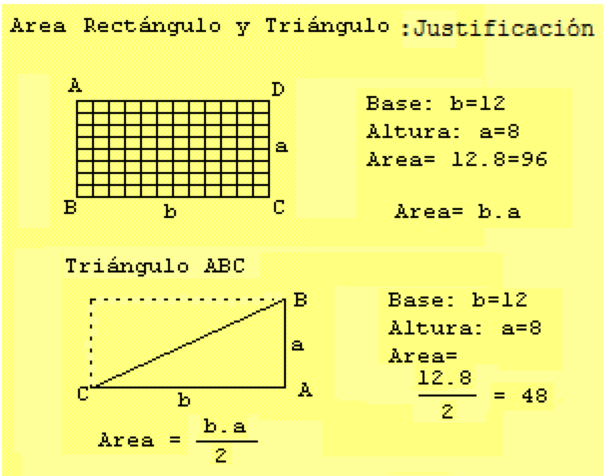
Teniendo en cuenta que d = 2.r, nos queda la fórmula utilizada habitualmente:

$$L = 2.pi.r$$

que usamos habitualmente.

3.5.- Área del cuadrilátero recto (Rectángulo) y del triángulo recto (Triángulo rectángulo)

Observa la figura



En la figura comprobamos que el área de un Rectángulo se obtiene por la fórmula:

Área = base.altura = b.h (h = a)

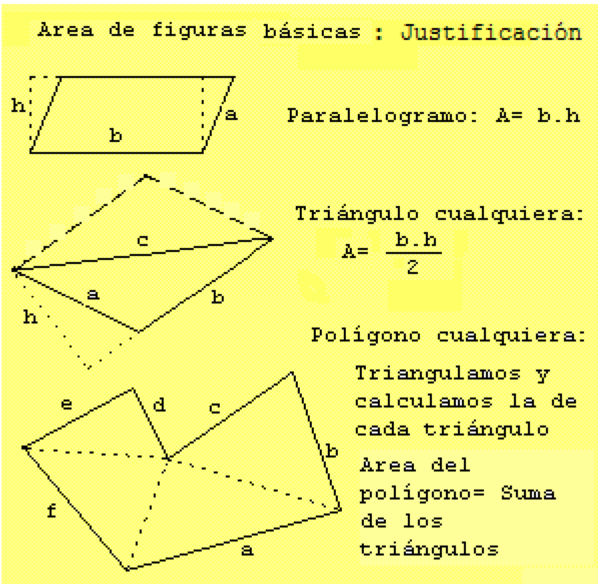
También comprobamos que el área de un triángulo rectángulo la obtenemos por la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\textbf{base . altura}}{\textbf{2}} = \frac{\textbf{b . h}}{\textbf{2}}$$

Más adelante trataremos el área de una figura cualquiera en el plano.

3.6.- Área de un paralelogramo. Área de un triángulo cualquiera. Área de un polígono

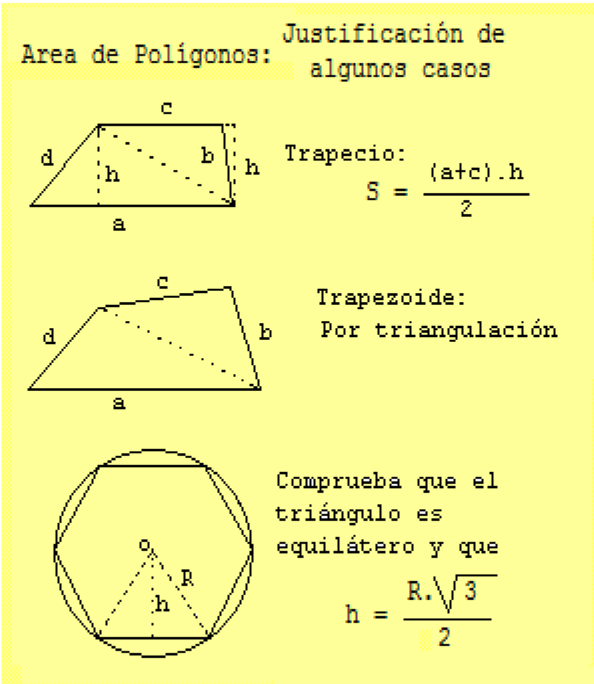
Observa la figura



No es necesaria más explicación para entender cómo se obtiene una fórmula que nos da el área de un paralelogramo, y lo mismo para un triángulo cualquiera.

Para un polígono cualquiera procedemos a la triangulación. Aplicarlo incluso para un cuadrilátero no paralelogramo.

Si Observando la siguiente figura vemos cómo mediante triangulación podemos obtener el área de un polígono cualquiera.



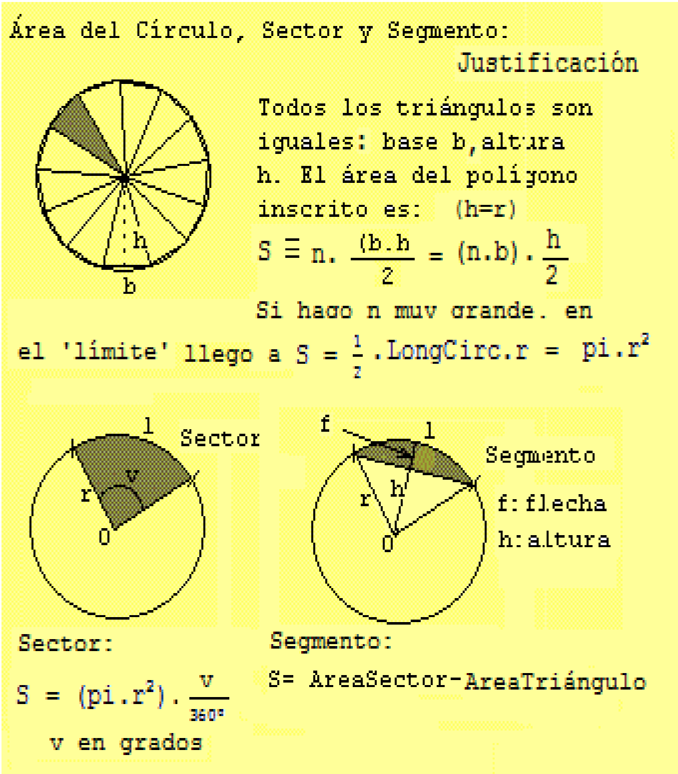
En el caso del hexágono regular se puede demostrar que la altura h se obtiene como sigue:

$$R^2 = h^2 + (R/2)^2 \rightarrow\ h^2 = \frac{3}{4} \cdot R^2\ \rightarrow h = \frac{R.\sqrt{3}}{2}$$

3.7.- Área del círculo (o disco), área de un sector circular, área de un segmento circular, área de un triángulo curvilíneo

Observa la figura

En ella tenemos la demostración de las siguientes fórmulas para el área de algunas figuras.



a) **ÁreaCírculo = pi.r^2**

Observa que coincide con lo siguiente:

$$\text{AreaCírculo} = \frac{1}{2}\,.(2.pi.r).r$$

como si se tratase de un triángulo cuya base tiene mida

2.pi.r (longitud de la circunferencia) y su altura h igual al radio.

b) **ÁreaSectorCircular =** $\left(\mathbf{pi.r^2}\right).\ \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{360}}$ **,**

donde v es el ángulo que determina el sector medido en grados.

Si v está dado en radianes

$$\text{AreaSector} = (\text{pi}.\,\text{r}^2).\frac{\text{v}}{2.\text{pi}} = \frac{1}{2}.\,(\text{v}.\,\text{r}^2)$$

Otra forma:

Área de un triángulo curvilíneo:

Su base curvilínea ha de ser un arco de circunferencia cuyo radio coincide con la altura (en realidad coincide con el sector circular)

Siguiendo el mismo razonamiento (visto en la figura) para obtener el área del cículo, podemos utilizar esta fórmula, donde lo que conocemos es la longitud del arco en lugar de la amplitud del ángulo

$$S = \frac{1}{2}.\text{longitudBase.Altura}$$

siendo altura = radio

c) **ÁreaSegmentoCircular =**
= ÁreaSectorCircular – ÁreaTriángulo

La complejidad de los cálculos dependerá de los datos de que dispongamos. Supongamos que, como en el sector, conocemos el ángulo v además del radio. En este supuesto:

La base y altura del triángulo son:

$b = 2.r.sen(\frac{v}{2})$, $h = r.cos(\frac{v}{2})$

$áreaTriángulo = \frac{1}{2}. b.h = r^2.sen(\frac{v}{2}).cos(\frac{v}{2})$

Por tanto

$ÁreaSegmento = r^2.[pi. \frac{v}{360} – sen(\frac{v}{2}).cos(\frac{v}{2})]$, donde

v está dado en grados.

Si v está dado en radianes

$ÁreaSegmento = \frac{1}{2}.(v.r^2) - r^2.sen(\frac{v}{2}).cos(\frac{v}{2}) =$

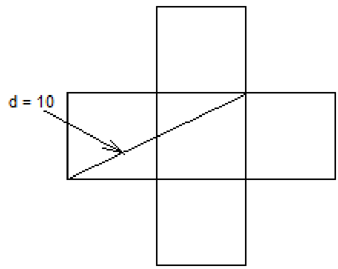
$= r^2. [\frac{v}{2} - sen(\frac{v}{2}).cos(\frac{v}{2})]$, v en radianes.

NOTA: En el caso del círculo, tanto el área de un sector como la longitud de un arco son directamente proporcionales al ángulo que abarcan.

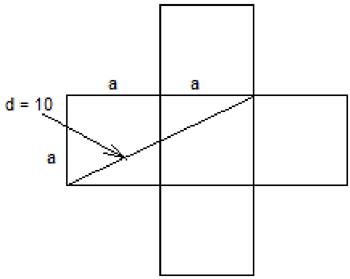
Actividades resueltas:

PROBLEMAS Geométricos interesantes. RESUELTOS:

1.- Calcula el área del interior de la cruz



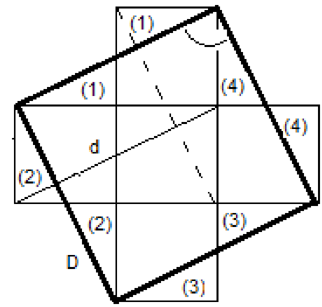
PRIMER Forma:



$d^2 = a^2 + (2.a)^2 = 5.a^2 \rightarrow a = d / \sqrt{5} = (\sqrt{5}.\ d) / 5$

$S = 5.\ a^2 = 5.(5.d^2) / 25 = d^2 = 100$

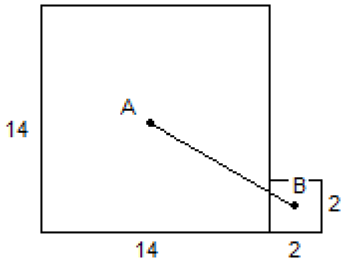
OTRA FORMA:



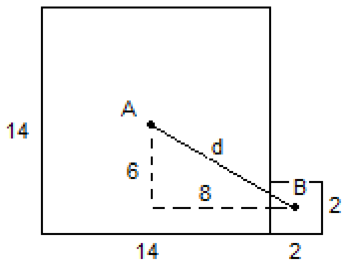
$D = d = 10$

S = Área del cuadrado = $D^2 = 100$

2.- Calcula la longitud del segmento AB

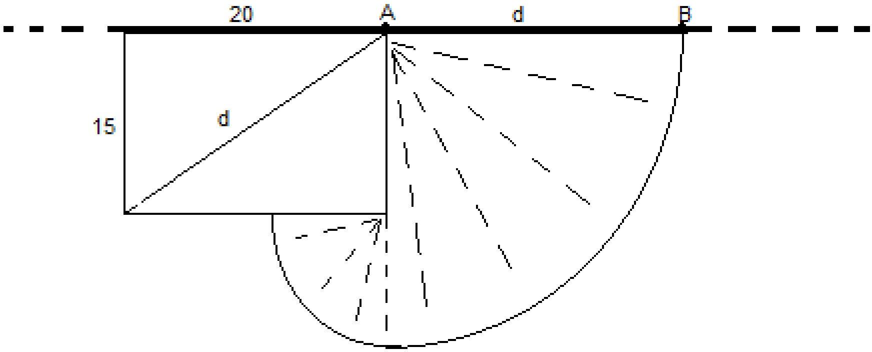


SOLUCIÓN:

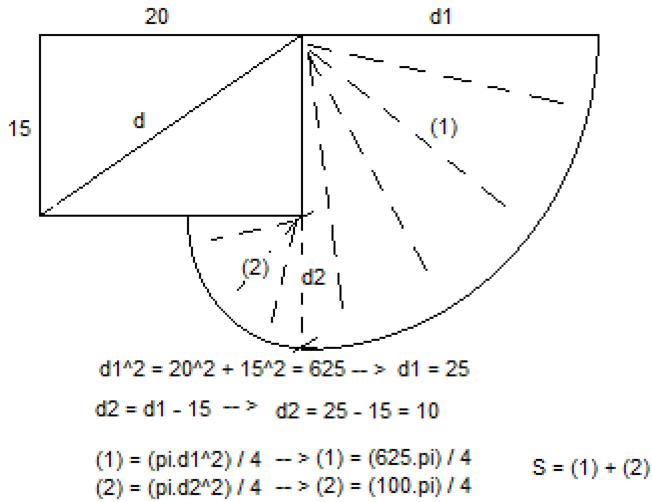


d^2 = 36 + 64 = 100 --> d = 10

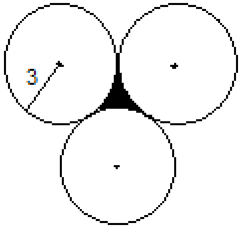
3.- Una parcela vallada de 20 m. por 15 m. En el exterior y en la esquina A fijamos un cordel con longitud d, que sujeta una cabra que situamos en el punto B. La cabra sólo puede moverse por la superficie rayada, porque no puede sobrepasar las vallas.
Calcula el valor del área en la que puede pastar la cabra.



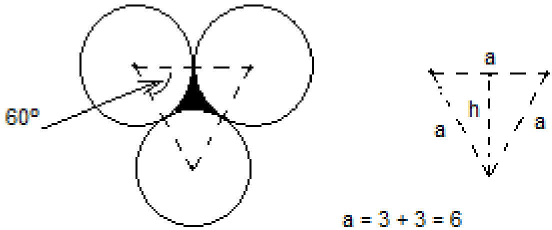
SOLUCIÓN:



4.- Tres círculos iguales situados como muestra la figura. Calcula el valor del área sombreada.



SOLUCIÓN:



$a = 3 + 3 = 6$

$h = (a\sqrt{3}) / 2 = 3\sqrt{3}$

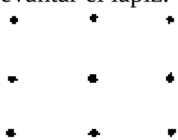
$ST = 1/2 \,.\, a \,.\, (a\sqrt{3}) / 2 = (a\text{^}2 \sqrt{3}) /4 =$

Sector circular: Los tres sectores hacen un semicírculo

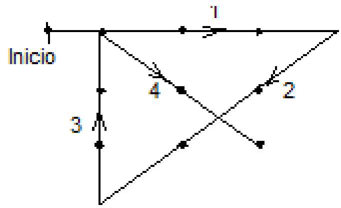
SSc = 1/2 . (pi.r^2) =

S pedida: $S = 9\sqrt{3}$ - 1/2 . (9.pi) = ...

5.- Tenemos 9 puntos situados como muestra la figura.
Se pide unir estos 9 puntos mediante 4 trazos rectos, iniciando en un punto elegido a voluntad y continuando sin levantar el lápiz.

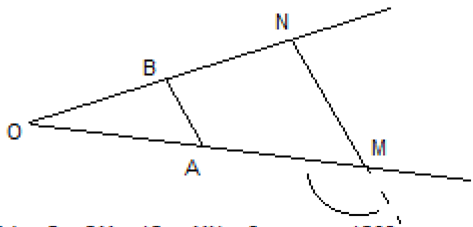


SOLUCIÓN:



Problemas:

1.- Observa la figura

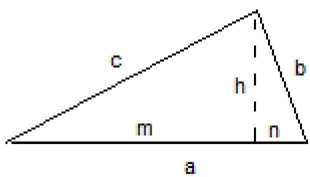


OA = 5 OM = 12 MN = 8 g = 120º

a) Determina el valos de los ángulos interiores

b) Calcula el valor de AB, OB , ON

2.- Triángulo rectángulo



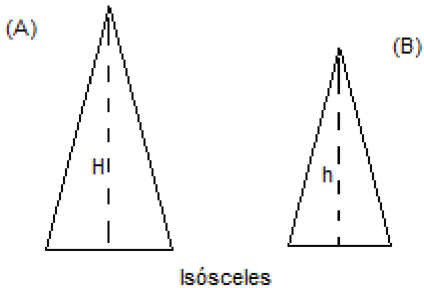
Datos: b = 6, c = 8

Calcula: h, m, n

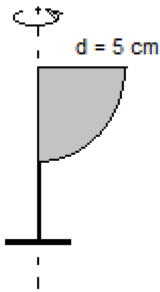
3.- Dos triángulos isósceles semejantes

Datos: Son semejantes, y H = 12, h = 8
Perímetro del A, P = 48

Calcula sus áreas.

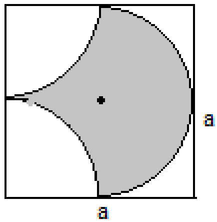


4.- Observa la figura: Al girar genera una semiesfera



Calcula el volumen de la copa generada

5.- Observa la figura

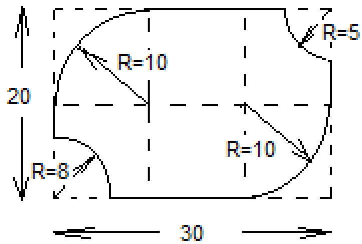


a = 5

Calcula el área sombreada.

6.- Ejemplo: PROBLEMA interesante

Datos: Interior de la figura bordeada por trazo continuo.

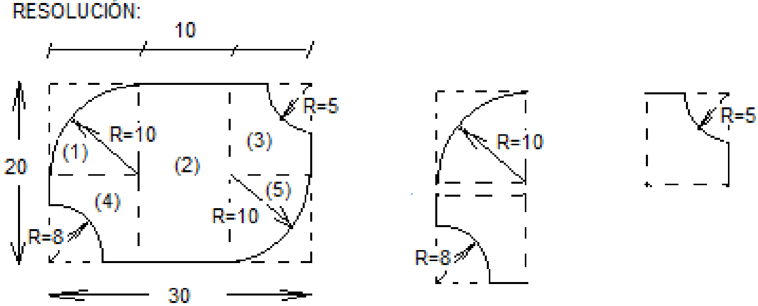


Se pide: Calcular su área con los datos indicados.

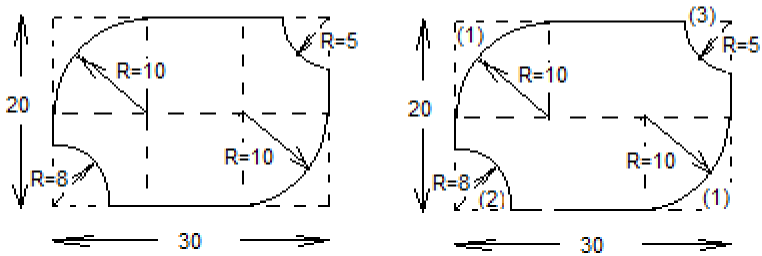
Valores:

(1) = (pi.R^2)/4 , un cuarto del disco con R=10
(2) = 20x10 , área del rectángulo
(3) = 10x10 - (pi.R^2)/4, cuadrado - cuarto del disco con R=5
(4) = 10x10 - (pi.R^2)/4, cuadrado - cuarto del disco con R=8
(5) = (pi.R^2)/4, un cuarto del disco con R=10

RESOLUCIÓN:



OTRA FORMA:



Valores:

(1) = 10x10 - (pi.R^2)/4 , con R=10
(2) = (pi.R^2)/4, con R= 8
(3) = (pi.R^2)/4, con R= 5

Área pedida: S = 30x20 - 2.(1) - (2) - (3)

$$$oOo$$$

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio. Trigonometría. Cónicas.

Tema 4

Más sobre el Triángulo

Circunferencia determinada por tres puntos:

Construcción geométrica

Geometría básica descriptiva en el Plano y en Espacio.
Trigonometría. Cónicas.

4.1.- Puntos y rectas notables en un triángulo cualquiera

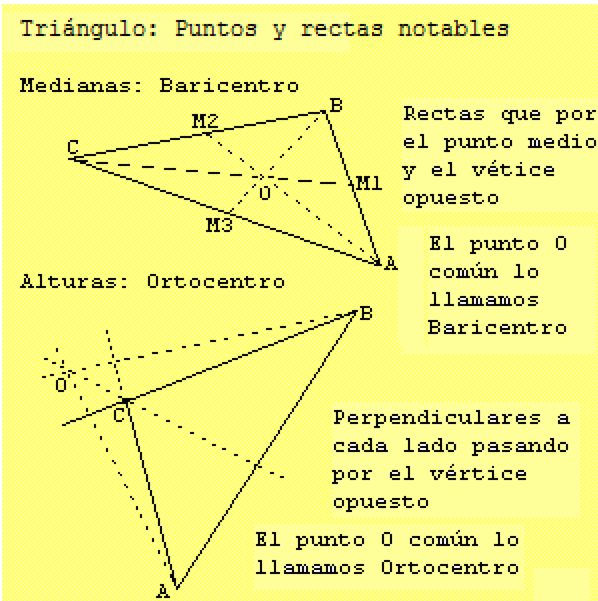
Observa las figuras

Medianas:

Una recta que pasa por el punto medio de un lado y por el vértice opuesto, es una 'Mediana'.

Tiene tres medianas.

Se cortan dos a dos en puntos que coinciden, de modo que permiten afirmar que 'se cortan las tres en un mismo punto'.

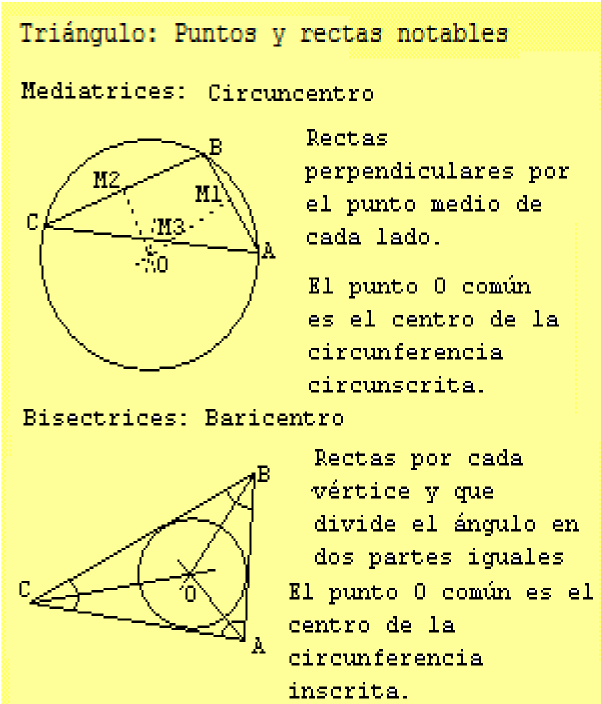


A ese punto común lo llamamos 'Baricentro' del triángulo.

Mediatrices:

Una recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a este lado, es una 'Mediatriz'

Son tres, y sus puntos de corte dos a dos coinciden. A este punto lo llamamos 'Circuncentro', porque es el centro de la circunferencia circunscrita (que pasa juto por los vértices) al triángulo.



Bisectrices:

Una recta trazada por uno de los vértices y de modo que divida al ángulo interior en dos partes iguales, la llamamos 'Bisectriz'.

Tiene tres bisectrices. Estas se cortan dos a dos de modo que estos puntos de corte coinciden en uno. A este punto lo llamamos ‘Incentro’, por ser el centro de la circunferencia inscrita (que ‘toca’ tangencialmente a cada lado) en el triángulo.

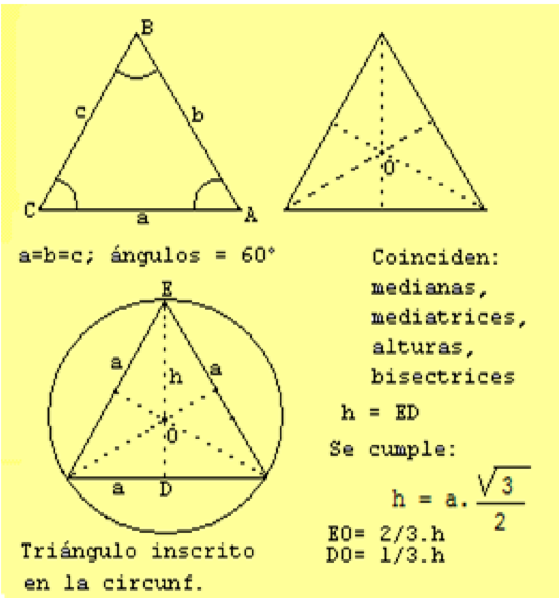
Alturas:

Una recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto decimos que es una altura. Podemos trazar tres de estas rectas. Se cortan dos a dos de modo que los tres puntos coinciden en uno.

A este punto común lo llamamos ‘Ortocentro.

4.2.- Estudio del Triángulo equilátero

Observa la figura



En este triángulo coinciden los cuatro tipos de rectas: Medianas, Mediatrices, Bisectrices, Alturas, y por consiguiente coinciden los puntos: Baricentro, Circuncentro, Incentro, Ortocentro.

Tenemos dos detalles interesantes (muy interesantes podríamos decir).

Relación entre la altura h y el lado a del triángulo equilátero:

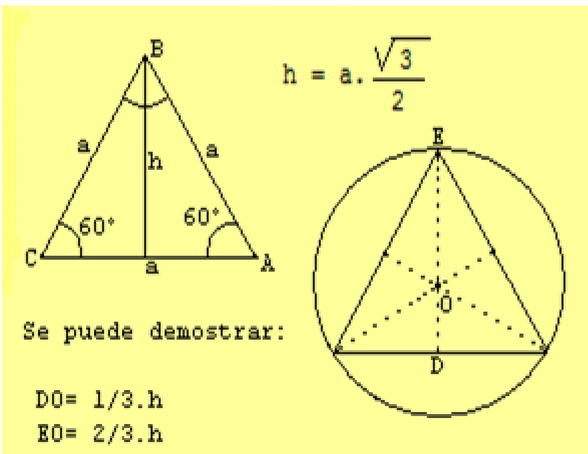
Por Teorema de Pitágoras tenemos

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 , \quad h^2 = \frac{3}{4} .a^2 ,$$

de donde $h = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se puede demostrar (aquí no lo aremos) que el baricentro O está sobre la altura a 2/3 del vértice y a 1/3 del pie de la altura.

Observa la figura



4.3.- Estudio del Triángulo rectángulo

Son de gran interés las siguientes propiedades consecuencias de ser triángulo rectángulo.

Observa la figura

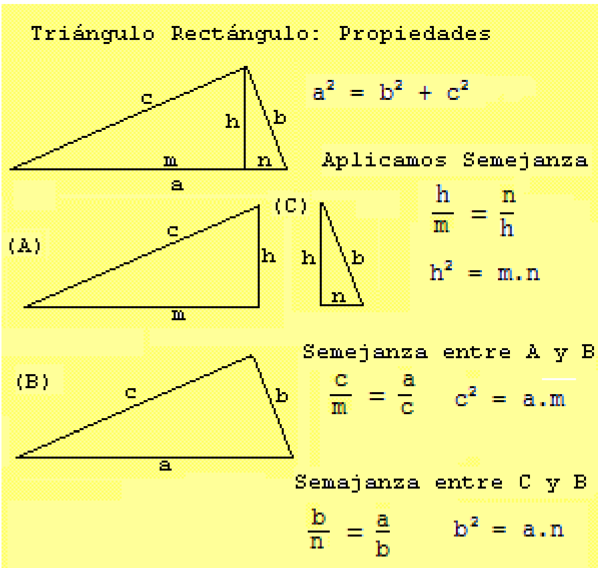
Aplicando la semejanza se cumple:

a) $h^2 = m.n$

Decimos que 'La altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa'.

b) $b^2 = a.n$, $c^2 = a.m$

Decimos que 'Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre la hipotenusa'.

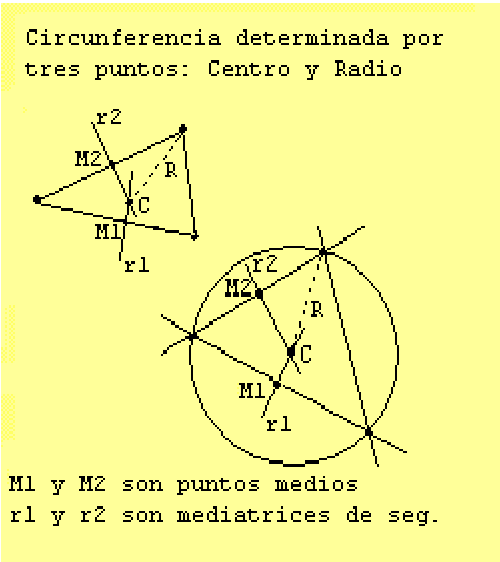


4.4.- La Circunferencia: Construcción geométrica

Observa la figura

Afirmamos:
Tres puntos A, B y C determinan una circunferencia única que pasa por ellos.

Trazamos las mediatrices r1, r2 de los segmentos AB y AC (perpendiculares por su punto medio). Estas se cortan en un punto C que será el centro de la circunferencia. Su radio R es la distancia desde C a A:

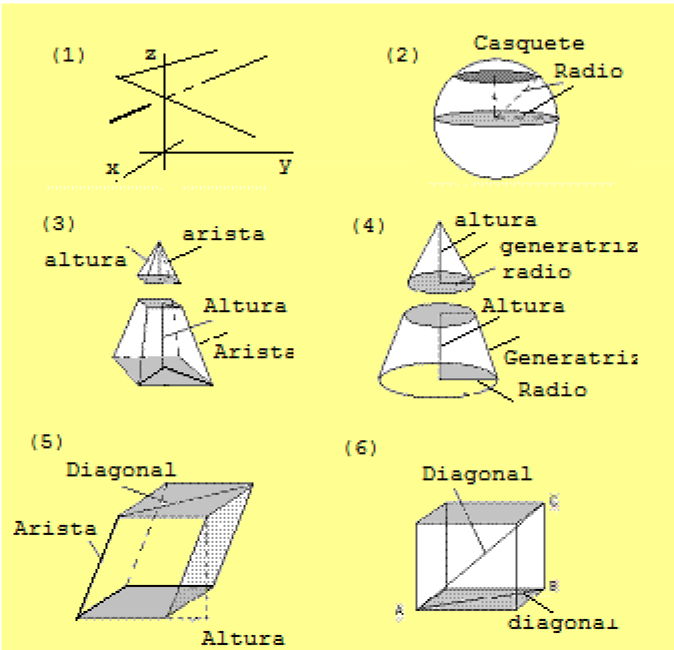


R = d(A,C)

$$$oOo$$$

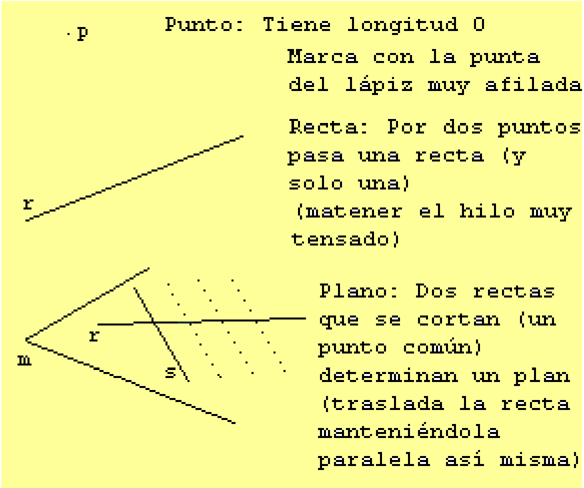
Tema 5

Geometría básica descriptiva en el Espacio



5.1.- Punto, Recta y Plano en el espacio

Observa y lee el texto en la figura



Observa que:

Un punto tiene longitud cero.

Una recta tiene superficie (o área) cero (el ancho de la línea es cero).

Un plano tiene volumen cero, porque su altura es cero.

Definiciones

"Pinchamos sobre el papel con el lápiz muy afilado y tenemos 'un punto'"

"Tensamos todo lo posible un hilo fino y tenemos un segmento".

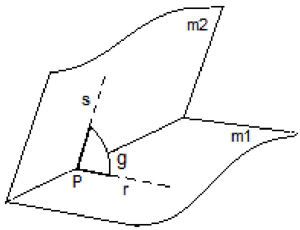
"Si lo prolongamos indefinidamente por los dos extremos tenemos 'una recta'"

"Fijamos dos rectas r y s que se corten en P y arrojamos sobre ellas una sábana manteniéndola tensada, tenemos 'un plano'"

5.2.- Angulo diédrico. Ángulo triédrico

Tenemos dos planos m1, m2, que se cortan en una recta común. Por el punto P de la recta común trazo dos semirectas r, s, de tal modo que éstas determinen un plano m perpendicular a los dos planos tomados inicialmente.

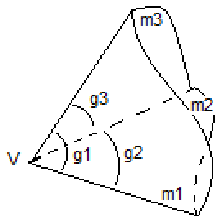
"Angulo diédrico formado por los seplanos m1, m2 es el ángulo formado por las rectas" (Siempre se toma el menor de los ángulos de forman).



Ángulo triédrico:

Es el espacio limitado por tres semiplanos. También llamado ángulo sólido.

Ángulo sólido: "Es el espacio limitado por tres planos que tienen un punto común, que llamamos vértice, y además cada dos planos se cortan según una recta que pasa por el vértice"



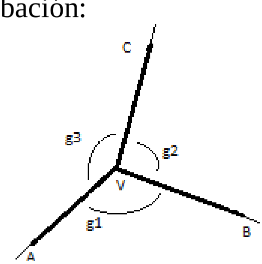
La suma de los tres ángulos diédricos es siempre menor que cuatro rectos (< 360º)

Demost.: g1 + g2 + g3 < 4 rectos

Puede ser consultada en el texto Interpretación Actualizada de los Elementos de Euclides, Libro XI, prop. 21.

Prop.:
21.- Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro ángulos rectos.

Interpretación y Comprobación:



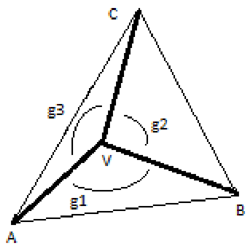
Hipótesis:
Tengo un ángulo sólido comprendido por tres ángulos planos:

AVB, AVC, BVC

Tesis:
Los tres ángulos planos suman menos de cuatro rectos.

Demostración:
Marco arbitrariamente los puntos A, B, C, y trazo las rectas AB, AC, BC.

Considero el ángulo sólido con vértice en A, limitado por los ángulos planos: CAV, VAB, CAB.
Estos ángulos, dos cualesquiera suman más que el restante, por tanto CAV + VAB > CAB.
Del mismo modo obtengo que, fijándome en el ángulo sólido con vértice B, CBV + VBA > CBA.
Y fijándome en el ángulo sólido con vértice en C tengo: ACV + BCV > ACB. Pero CAB + CBA + ACB = 2 rectos,
luego
(CAV + VAB) + (CBV + VBA) + (ACV + BCV) > 2 rectos



Los tres ángulos de cada una de las tres caras de la figura, que comprenden el ángulo sólido con vértice en V, suman 2 rectos, por lo cual la suma de estos nueve ángulos suman 6 rectos.

Pero de estos nueve tengo seis que
(CAV + VAB) + (CBV + VBA) + (ACV + BCV) > 2 rectos

y por tanto los tres restantes sumarán:

AVC + AVB + BVC < 4 rectos

c.q.d.

5.3.- Cuerpos en el espacio. Poliedros y su clasificación

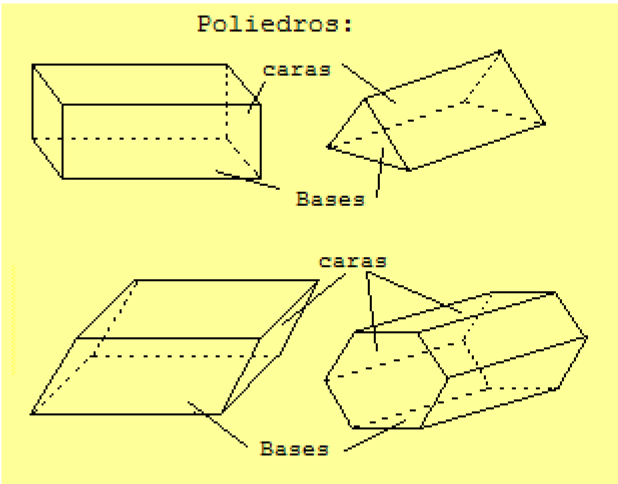
Poliedros:

Para delimitar, encerrar, una parte del espacio mediante planos necesitamos al menos cuatro planos que llamaremos caras.

Defínción:

Poliedro es una parte del espacio delimitada por cuatro o más planos (caras).

Una mosca que hubiese quedado dentro no podría salir del interior del poliedro.



Es habitual llamar 'base' a la cara sobre la cual queda apoyado sobre un plano.

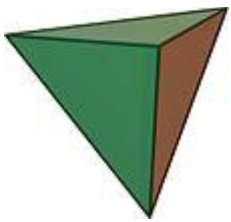
Clasificación de los poliedros regulares:

En lo que sigue la notación (n;m) significa lo siguiente:

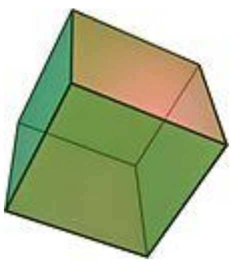
n -> cada cara es polígono regular de n lados;
m -> en cada vértice coinciden m caras

Poliedros regulares convexos: Galería

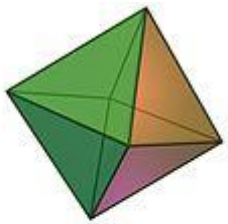
Tetraedro regular (3;3)



Hexaedro regular (Cubo) (4;3) (dual: el octaedro)



Octaedro regular (3; 4) (dual: el hexaedro)

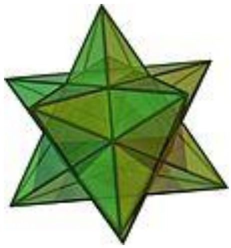


Dodecaedro regular (5;3) (dual: el icosaedro)

Icosaedro regular (3;5) (dual: el dodecaedro)

Otros Poliedros regulares No convexos:

Pequeño Dodecaedro estrellado
(5/2; 5) (dual: el gran dodecaedro)



Gran dodecaedro estrellado
(5/2; 3) (dual: el gran icosaedro)

Gran dodecaedro (5; 5/2)
(dual: pequeño dodecaedro)

Gran icosaedro (3; 5/2)
(dual: el gran dodecaedro estrellado)

5.4.- Los Prismas. Volumen y superficie

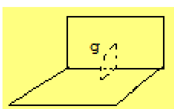
En la figura se describe qué entendemos por “Prisma”.

Definición:

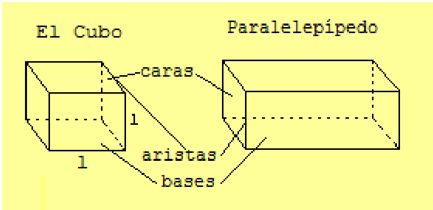
“Un Prisma consta de dos caras paralelas entre sí, a las que llamaremos bases y que son polígonos iguales, y tres o más caras que son paralelogramos; estos elementos colocados y ‘soldados’, cada cara con la consecutiva, y todas las caras a las dos bases; de modo que cierran una parte del espacio”.

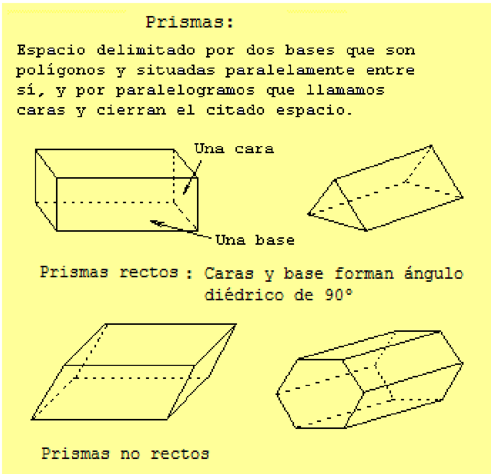
Prisma recto:

En primer lugar ¿Qué es el ángulo diédrico? : Es el ángulo que forman dos caras que tengan una arista común.



Llamamos ‘Prisma recto’ al prisma en el que todos sus ángulos diédricos son ‘rectos’ (90º).





En un prisma tenemos:

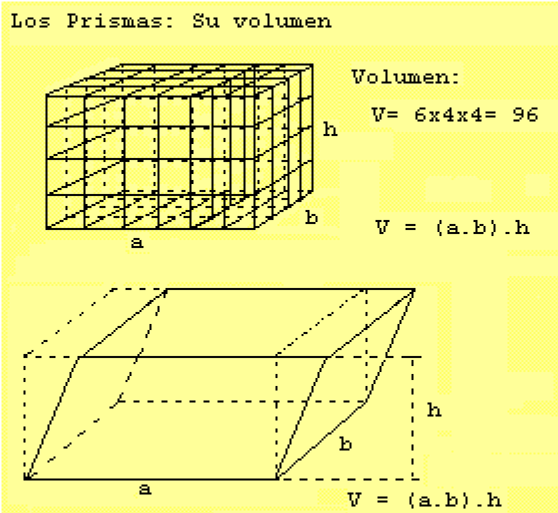
Vértices: **Punto común a dos caras y una base**

Bases y Caras: **Son regiones en un plano**

Aristas: **Línea de unión de dos caras o de base y cara**

Volumen y Superficie de los prismas

A) Volumen del prisma recto cuyas bases son rectángulos



En la figura describimos cómo determinar un valor, que llamamos volumen, y que representa la ‘parte’ del espacio que el encierra prisma, que coincide con la parte del espacio que el cuerpo ocupa (las caras no ocupan espacio).

Recordamos que hemos definido una unidad de medida ‘lineal’, esto es, ‘sobre una recta’.

Desde uno de los vértices medimos cada una de las tres aristas que en él confluyen.

Realizamos un trazado como muestra la figura, de modo que cada ‘cubo’ (o mini-cubo) obtenido ocupa la unidad de volumen. El volumen del prisma (recto) coincide con el número de mini-cubos, esto es,

$$V = (a.b).c$$

donde a.b es el área de la que habitualmente llamamos 'base del prisma', y a la arista c la llamamos 'altura' sobre la base. Por eso decimos

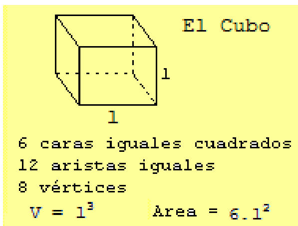
$$V = (\text{área base}).\text{altura}$$

Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base o bases y el área de sus caras.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de sus bases.

Caso del Cubo:



B) Volumen del prisma oblicuo (no recto) cuyas bases son rectángulos:

En la figura queda muy claro cómo proceder en este caso.

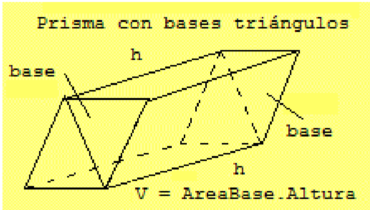
$$V = (a.b).h$$

Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base o bases y el área de sus caras.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de sus bases.

C) Volumen del prisma recto cuyas bases son triángulos:



En la figura mostramos cómo convertirlo a un prisma cuyas bases son rectángulos, llegando a que su volumen es

$$V = \frac{1}{2}.(a.b).h$$

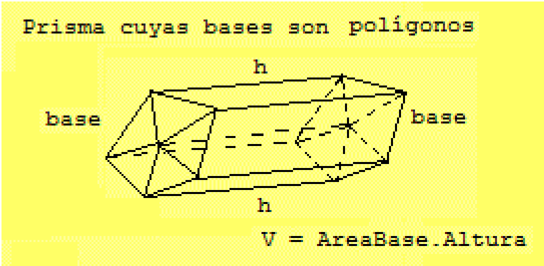
Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base o bases y el área de sus caras.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de sus bases.

D) Volumen de un prisma recto cuyas bases son polígonos:

Triangulando las bases, el prisma queda como la reunión de prismas cuyas bases son triángulos. El volumen del prisma será la suma del volumen de cada uno de éstos.



Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base o bases y el área de sus caras.

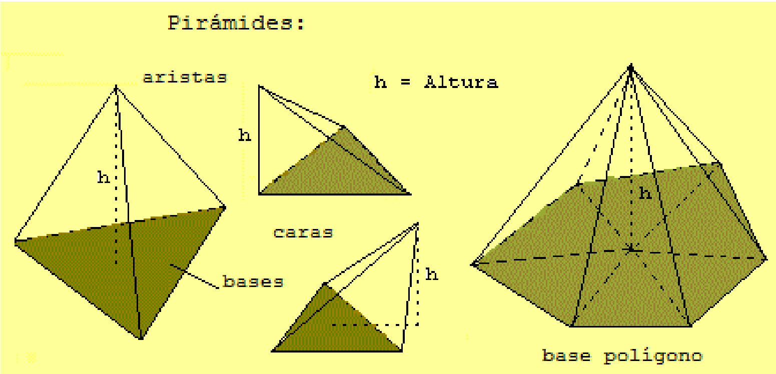
La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de sus bases.

5.5.- Las Pirámides: Volumen y Superficie

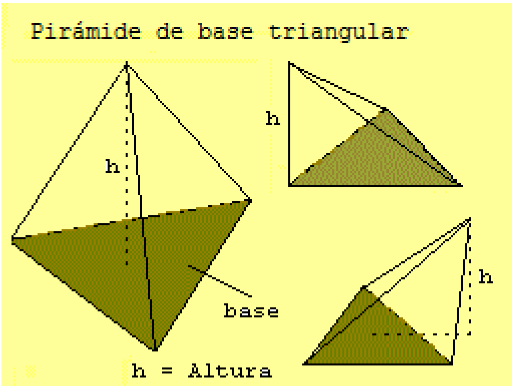
Definición:

En general, "Una Pirámide está formada por una base, que es un polígono, y tantas caras como aristas tiene el polígono base. Estas caras son triángulos, colocados entre sí de forma que el resultado es un espacio cerrado, confluyendo un vértice de cada triángulo en un mismo punto, que llamaremos vértice de la pirámide. Los lados de cada triángulos van soldados uno sobre la base y los otros dos con los triángulos contiguos".

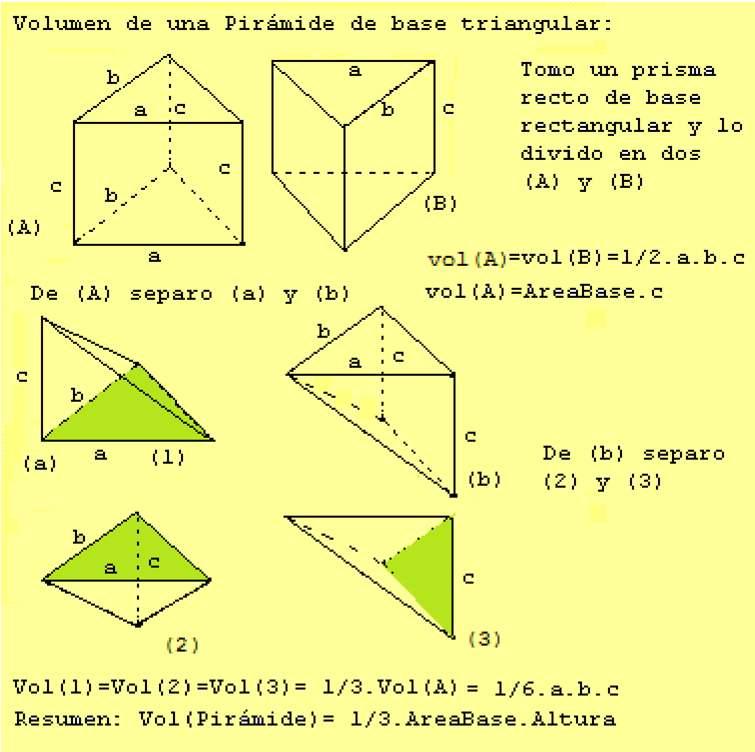
En las figuras 40 y 41 mostramos algunos casos



A) Pirámide de base triangular:



Observa con detalle la siguiente figura. En ella podemos ver cómo llegar a obtener el volumen de este tipo de pirámide.



Partiendo de un prima recto con base rectangular, seccionamos en dos prismas iguales cada uno con base triangular. Nos fijamos en uno de estos, y seccionando obtenemos tres pirámides iguales de base triangular. Por tanto, en total tengo seis pirámides iguales de base triangular.

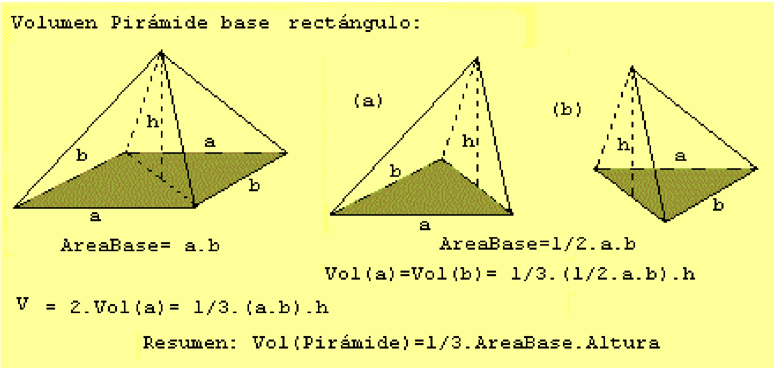
Su volumen es: $\quad \text{Vol(pirámide)} = \frac{1}{3}$. AreaBase . Altura

Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base y el área de sus caras. Estas son figuras planas cuya área sabemos calcular.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de su base.

B) Pirámide con base rectangular:



Podemos seccionar y obtener dos pirámides con base triangular. El área de la base de la primera (A) es doble que la de la base de la pirámide (B).

Entonces

$$\mathbf{Vol(A) = 2.Vol(B)} = 2.\frac{1}{3}.\left[\frac{1}{2}.a.b\right].h = \frac{1}{3}.a.b.h =$$

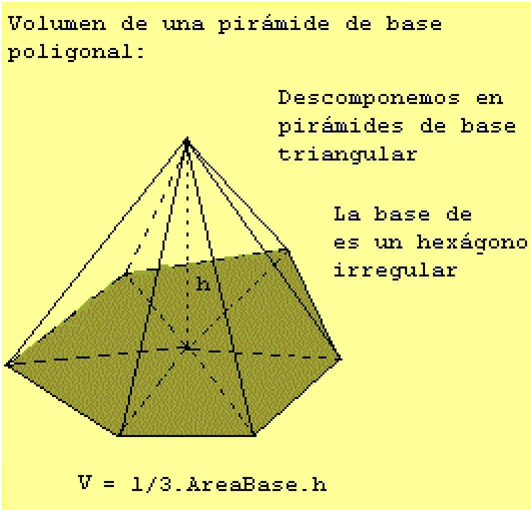
$$= \frac{1}{3}.(\text{AreaBase}).\text{ Altura}$$

Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base y el área de sus caras. Estas son figuras planas cuya área sabemos calcular.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de su base.

C) **Pirámide con base polígono cualquiera**



Volumen:

Triangulamos la base y calculamos el volumen de cada una de las pirámides resultantes. El resultado final es la suma de estos volúmenes.

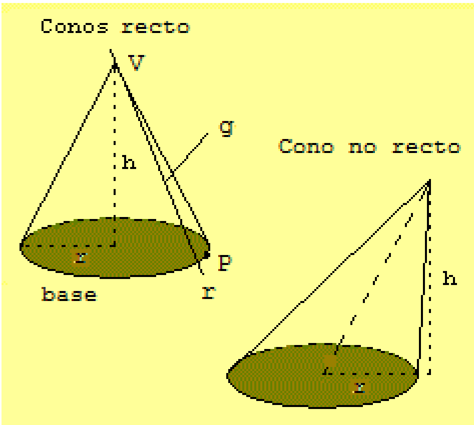
Superficie:

Es habitual calcular por separado el área de su base y el área de sus caras. Estas son figuras planas cuya área sabemos calcular.

La superficie total, lógicamente, es la suma de la superficie de todas las caras más la de su base.

5.6.- Los Conos: Volumen y Superficie

Definición:



Tengo un disco y fijo un punto V fuera del disco. Tomo una recta r que pase por V y se apoye en un punto P del borde del disco. Hago que P recorra el borde del disco y la recta r barre una superficie, siendo el resultado final una 'parte cerrada' del espacio.

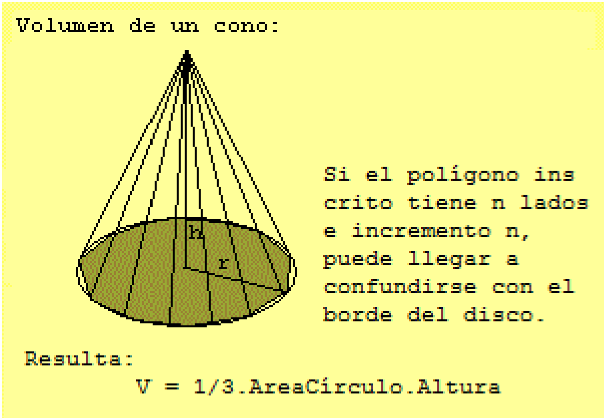
A este 'cuerpo' así obtenido lo llamamos Cono.

V es su vértice, la recta r es 'la generatriz' del cono, el disco es la base del cono.

En la figura tenemos un cono recto y otro que no lo es, decimos que es 'inclinado' u 'oblicuo'.

Volumen:

En la figura deducimos la fórmula para el volumen del cono recto.



Observamos cómo, incrementando el valor de n,

pasamos del polígono regular inscrito en la circunferencia a que coincida con esta misma circunferencia. Así obtenemos la fórmula del volumen del cono, que es análoga a la obtenida para las pirámides.

Unimos los extremos de cada segmento con el centro del círculo, el triángulo obtenido es la base de una pirámide cuyo volumen es Vi = 1/3.(areaBase).h. Cuando estos segmentos se hacen ‘muy pequeños’, la suma del área de la base de todas estas pirámides está ‘muy próxima’ al área del círculo. Como la altura es la misma para pirámides y para el cono, llegamos a que la suma de aquellos volúmenes está ‘muy próximo’ al volumen del cono.

El error puede hacerse tan pequeño como queramos, y por tanto, en el 'límite' podemos concluir que

$$\textbf{Vol.Cono} = \frac{1}{3}.\text{AreaBase.h} = \frac{1}{3}.\text{pi.r}^2.\text{h}$$

Superficie lateral

En la figura tenemos el desarrollo de la superficie (lateral) del cono, resultando un triángulo curvilíneo (con radio r) cuya altura es la generatriz g . La base de este triángulo curvilíneo mide

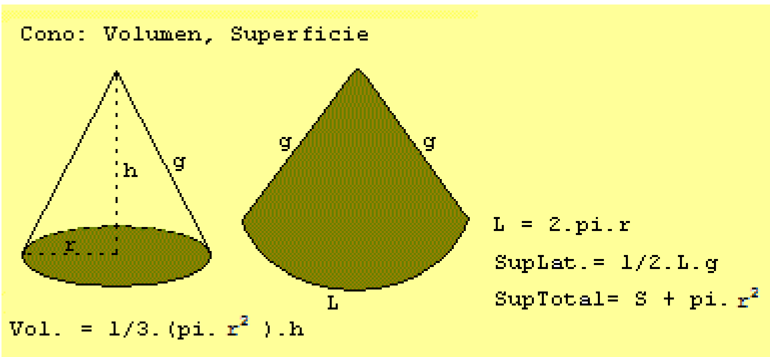
$$L = 2.\text{pi.r}$$

y por tanto, su área mide S = 1/2.(2.pi.r).g

Por tanto tenemos

$$\text{Superficie lateral} = \frac{1}{2}.(2.\text{pi.r}).\text{g} = \text{pi.r.g}$$

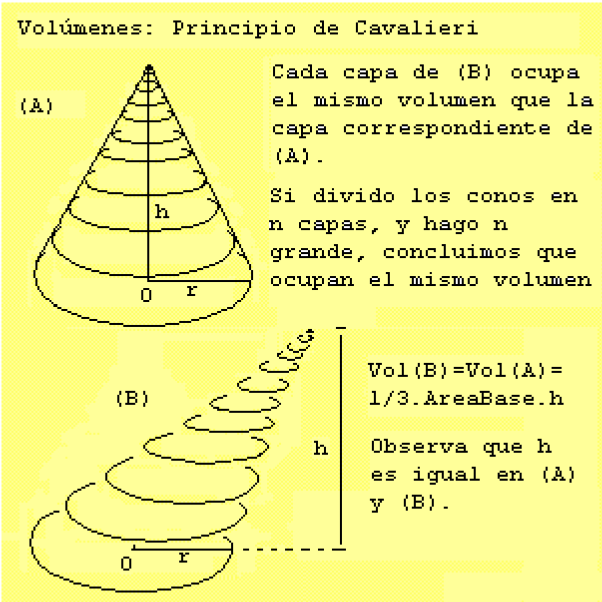
La superficie total la obtenemos sumándole el área, pi.r^2, de la base:



Volumen del Cono oblicuo:

Principio de Cavalieri

Observando la figura queda explicado en qué consiste el referido principio, muy utilizado en Geometría en la deducción y demostración de fórmulas relacionadas con el cálculo de volúmenes.



La figura muestra cómo produciendo secciones muy finas en cada uno de los conos, el volumen que ocupa cada una y su conjunto es el mismo en los dos casos.

Conclusión:
El volumen de un cono oblicuo cumple la misma fórmula

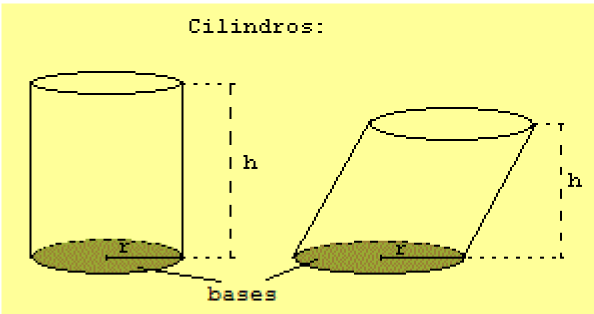
$$V = \frac{1}{3}.pi.r^2.h$$

Observa que la altura no cambia cuando pasamos del cono recto al cono inclinado.

Superficie:
Intentamos obtener su desarrollo.

5.7.- Los Cilindros: Volumen y Superficie

Llamamos Cilindro al cuerpo formado por: "Dos bases que son dos círculos situados en planos paralelos entre sí, y una 'superficie lateral' que es un rectángulo soldado a las citadas bases por dos de sus lados opuestos, y los otros dos lados soldados entre sí, resultando una parte cerrada del espacio".

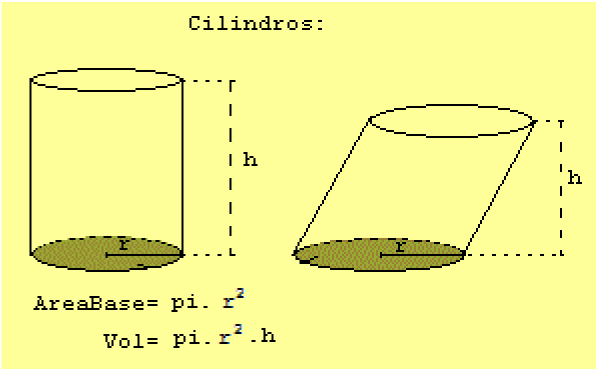


Volumen:

Observa la figura

Aunque en la figura no lo hemos señalado, también aquí, como en el caso del cono, podemos inscribir polígonos regulares en el círculo, cuyo perímetro tiende a confundirse con el de la circunferencia. En este caso, uniendo los extremos de estos segmentos con el centro, obtenemos prismas cuyas bases son triángulos, y cuyo volumen es

V = ÁreaBase x Altura



Como la suma de las áreas de esos triángulos tiende a coincidir con el área del círculo, concluimos que el volumen del cilindro es la suma de aquellos.

$$VolCilindro = pi.r^2.h$$

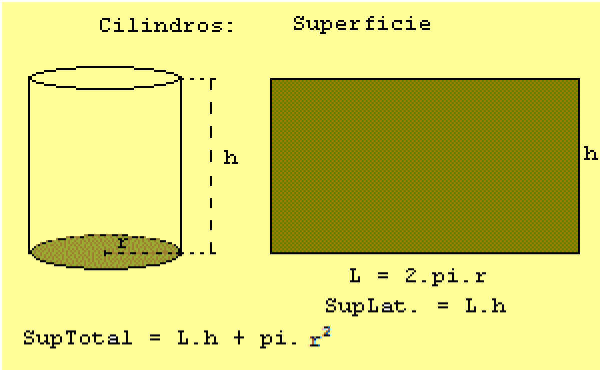
Para el cilindro inclinado, tenemos en cuenta el “Principio de Cavalieri”, por lo cual es válida la misma fórmula.

Superficies

En la figura 49 tenemos el desarrollo de la superficie lateral del cilindro, resultando un rectángulo. Así tenemos

Superficie lateral = (2.pi.r).h

La superficie total la obtenemos sumándole el área de las dos bases, siendo cada una: $pi.r^2$



S.total = **(2.pi.r).h + 2.pi.r**^{2}

5.8.1.- La Esfera: Volumen y Superficie

Si tomo un círculo y lo hago girar alrededor de uno de sus diámetros el resultado es una parte cerrada del espacio que llamamos ‘esfera’.

Este cuerpo ‘esfera’, como tal cuerpo tiene ‘superficie’ que llamamos ‘Superficie esférica’ y tiene ‘volumen’ que llamamos ‘Volumen de la esfera’.

En el Vol.5 veremos una definición analítica de la esfera como lugar geométrico.

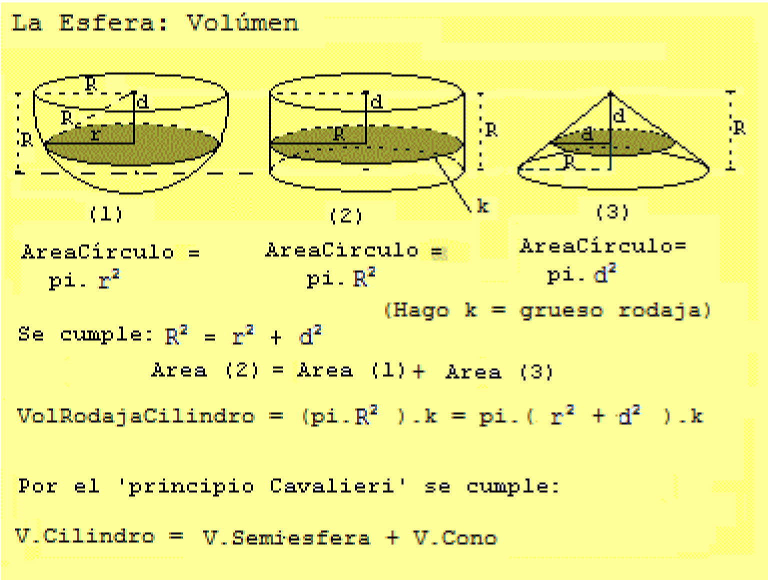
El radio de la esfera coincide con el el radio del círculo que lo genera, y lo mismo ocurre con su centro.

Volumen:

Probaremos que sus valores son:

$$VolEsfera = \frac{4}{3}.pi.R^3$$
$$SupEsfera = 4.pi.R^2$$

Observa atentamente la presente figura



Tomamos una semiesfera con radio R, un cilindro y un cono con el mismo radio R, y los tres con la misma altura H = R. Cortamos mediante un plano paralelo a sus bases, produciendo discos en cada uno de los tres cuerpos. Se comprueba que el área del disco producido en el cilindro es igual a la suma de los producidos en la semi-esfera y el producido en el cono. Hacemos que el plano recorra desde el punto más bajo al más alto, y, aplicando el principio de Cavalieri podemos concluir

Vol.Cilindro = Vol.Semiesfera + Vol.Cono

de donde

Vol.Semiesfera = $pi.R^2.R – 1/3.pi.R^2.R$

esto es: V.Semiesfera = $2/3.pi.R^3$,

de donde: V.Esfera = $4/3.pi.R^2 = 1/3.(4.piR^2).R$

Habitualmente se utiliza esta fórmula: V.Esfera = $\frac{4.pi.R^3}{3}$

NOTA:

Este resultado coincide con el que resultaría de considerar la esfera como un ‘cono completo’, cuya base (no plana) fuese la superficie de un casquete esférico ‘completo’ (que cubre toda la esfera), y altura H = R. Lo veremos en el apartado 5.8.3.

Superficie:

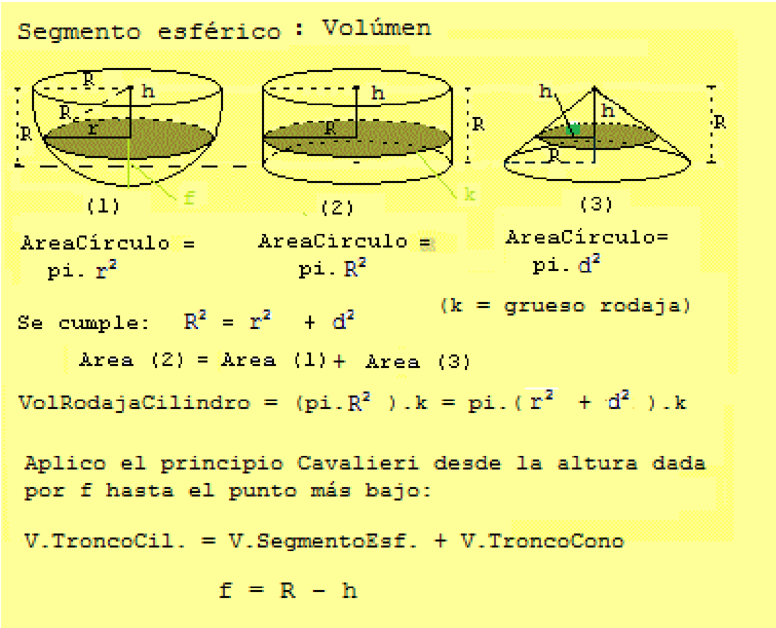
En el punto 5.8.3 probaremos que

S.Esfera = $4.pi.R^2$,

que representan cuatro veces el círculo máximo de la esfera.

5.8.2.- Segmento esférico (SegEsf) y Casquete esférico. Volumen y Superficie

Observa atentamente la figura



Si seccionamos la esfera mediante un plano puede ocurrir:

-Si el plano pasa por el centro de la esfera, resultan dos partes iguales, que llamamos ‘Semiesferas’.

-En otro caso la divide en dos partes No iguales, y las llamamos segmentos de la esfera. La superficie del segmento lo llamamos ‘casquete’ esférico.

Evidentemente, la unión de estos dos segmentos nos da la esfera, y por tanto es suficiente saber calcular el volumen del menor de estos segmentos.

Hemos obtenido:

Vol.TroncoCil. $= pi.R^2.f$
Vol.TroncoCono = Vol.Cono1 –Vol.Cono2 =

$= 1/3.(pi.R^2).R – 1/3.(pi.h^2).h =$

$= 1/3.pi.(R^3 – h^3) = (*)$

donde $h = R\text{-}f$, y por tanto $h^3 = (R\text{-}f)^3 =$

$= R^3 -3R^2f +3Rf^2 –f^3$, y por tanto podemos

expresar $(*) = 1/3.pi.(3R^2f -3Rf^2 +f^3)$

$$VolSegEsf = pi.R^2.f - \frac{1}{3}.pi.(R^3\text{-}h^3)$$

donde f es la ‘flecha’ del segmento: f = R-h, siendo h la distancia del plano de corte al centro de la esfera.

NOTA: Recuerda que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a\text{-}b)^3 = a^3\text{-}3a^2b+3ab^2\text{-}b^3$

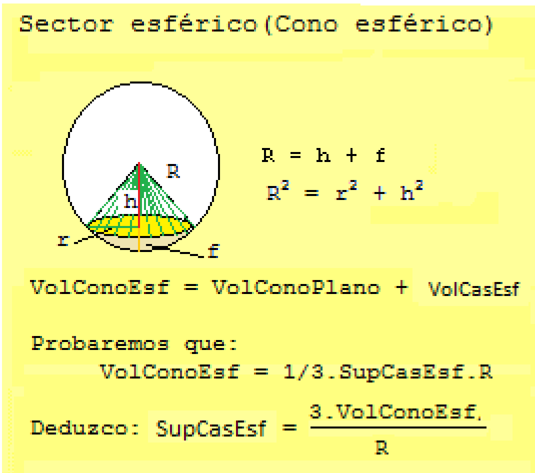
El resultado anterior permitirá obtener la superficie del casquete esférico, como veremos en el punto 5.8.3

5.8.3.- Sector esférico (o Cono esférico ConoEsf). Volumen y Superficie del Casquete esférico (CasEsf))

Llamamos 'Cono esférico' (ó Sector esférico) al cuerpo formado por la conjunción de un cono plano (base plana) y el segmento esférico 'asociado' dentro de la esfera cuyo radio coincida con la generatriz del cono plano. Los consideramos 'soldados' por sus bases.

Cuando estudiamos el sector circular (sector en un disco), su área es proporcional al ángulo que abarca. Esto No se cumple en el caso del cono esférico que nos ocupa.

Observa el cono esférico en la presente figura



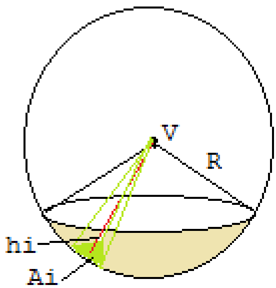
Observa que el cuerpo formado después de ser 'soldadas las partes' debe ser parte de una esfera, siendo el casquete del cono esférico coincidente con un casquete de la misma esfera.

Vamos a demostrar que el volumen de este cono esférico cumple la misma fórmula que el cono plano:

$$\text{VolConoEsf} = \frac{1}{3}.\text{SupCasquete} . \text{Altura},$$

donde Altura = R esfera.

Imaginemos la superficie del casquete esférico 'aproximada' mediande el adosado de pequeños triángulos equiláteros. Cada uno de estos triángulos es la base de una pirámide con vértice el vértice del cono.



Uniendo el baricentro del triángulo base con el vértice del cono obtenemos la altura de la pirámide. Estas alturas hi, que son iguales entre sí, son 'casi' iguales a R, y el volumen de cada una de estas pirámides es, como sabemos

$$\text{Vi} = \frac{1}{3}.\text{AreaBase} . \text{hi}$$

La Suma de estos volúmenes es inferior al volumen del cono, pero tan próximos como queramos.
Por otro lado, la suma de las áreas Ai de las base de estas pirámides se aproxima tanto como queramos el área de la superficie del casquete.

Tenemos pues

$$\text{Suma(Vi)} = \frac{1}{3}.(\text{Suma(Ai)}).\text{R} \text{ --> } \frac{1}{3}.\text{SupCasquete.R}$$

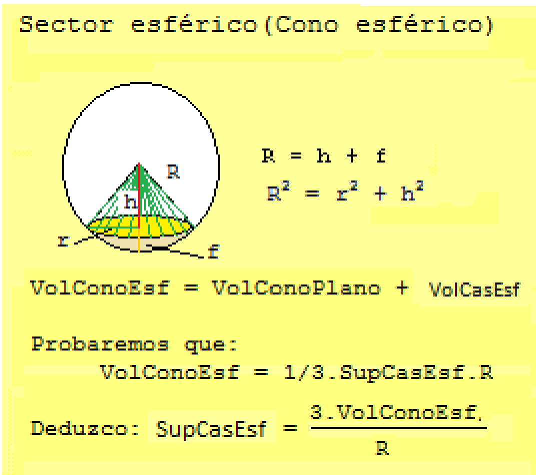
Es decir: $$\textbf{VolConoEsf} = \frac{1}{3}.\textbf{SupCasquete.R}$$

Superficie:
Observa que, si conocemos este volumen, podemos obtener la superficie del casquete:

$$\textbf{SupCasquete} = \frac{3}{R}.\textbf{VolConoEsf}$$

Si el cono esférico coincidiese con la esfera tendríamos

$$\text{SupEsfera} = \frac{3}{R}.\frac{4}{3}.\text{pi.R}^3 = 4.\text{pi.R}^2$$



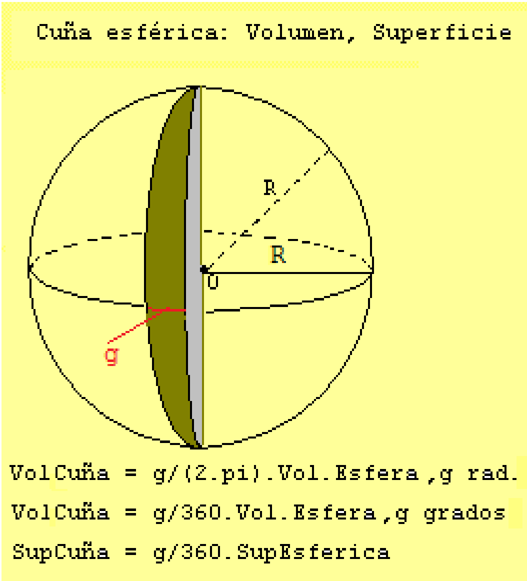
Por otro lado, evidentemente se cumple

VolConoEsf = VolConoPlano + VolSegEsf

Dependiendo de los datos disponibles utilizaremos estas igualdades de la forma que interese.

5.8.4.- Cuña esférica. Volumen. Superficie

El volumen y la superficie de la cuña esférica es directamente proporcional al ángulo del arco que abarca. Este ángulo g es el que forman los dos planos que la delimitan.



Por tanto, **Vol.CuñaEsf** = $\frac{g}{360^0}$ .Vol.Esfera

SupCuñaEsf = $\frac{g}{360^0}$ .SupEsfera

donde g está dado en grados.

Si g está dado en radianes

Vol.CuñaEsf = $\frac{g}{2.pi}$ .Vol.Esfera,

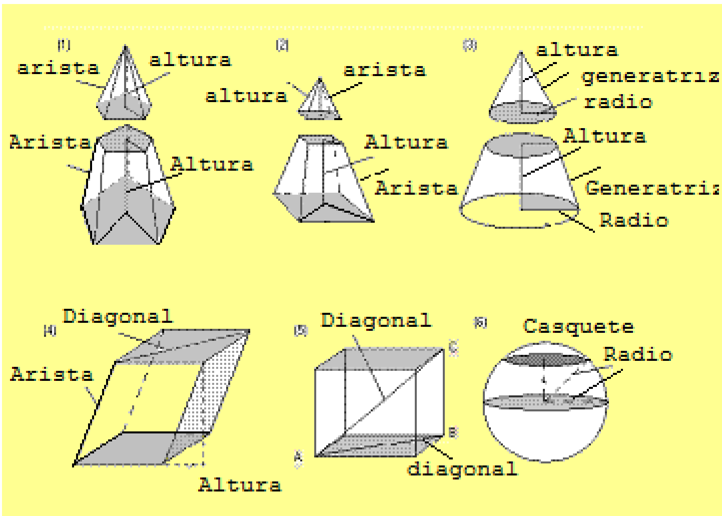
SupCuñaEsf = $\frac{g}{2.pi}$ .SupEsfera

5.9.- Otros cuerpos geométricos de interés

En la siguiente figura mostramos diferentes cuerpos.

El alumno debe tomarse como reto, paso a paso y a lo largo de un tiempo, obtener para estos cuerpos:

-Su superficie
-Su volumen



$$$oOo$$$

Tema 6

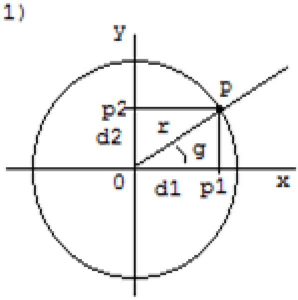
Trigonometría en el Plano

6.1.- Definición de "Razones Trigonométricas"

Tomo una circunferencia con centro en O y radio r.

Trazo por O una semirrecta que cortará a la circunferencia en un punto P. Por P trazo una paralela al eje oy y cortará a ox en un punto P1.

(1)



Del mismo modo trazo por P una paralela al eje ox y cortará a oy en un punto P2. Tengo así los segmentos OP1 y OP2, cuya longitud designaremos por x, y.

Por semejanza ocurre que las razones $\frac{d1}{r}$ y $\frac{d2}{r}$ toman el mismo valor tomemos la figura (1) ó tomemos l figura (2). Es independiente del radio de la circunferencia.

Este hecho permite establecer las siguientes definiciones.

Definiciones: Cos(g) = $\frac{d1}{r}$, Sen(g) = $\frac{d2}{r}$

Además definimos, a partir de las dos anteriores (como principales):

tan(g) = $\frac{d2}{d1} = \frac{sen(g)}{\cos(g)}$, cota(g) = $\frac{d1}{d2} = \frac{cos(g)}{\text{sen}(g)}$

sec(g) = $\frac{r}{d1} = \frac{1}{\cos(g)}$, cose(g) = $\frac{r}{d2} = \frac{1}{\text{sen}(g)}$

Es habitual la siguiente notación:

Cos(g) = $\frac{x}{r}$, Sen(g) = $\frac{y}{r}$

Tan(g) = $\frac{y}{x}$, Cota(g) = $\frac{x}{y}$

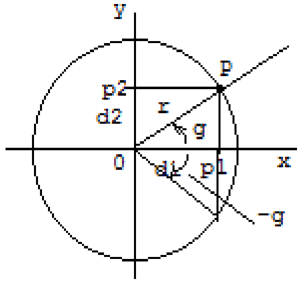
Sec(g) = $\frac{r}{x}$, Cose(g) = $\frac{r}{y}$

Propiedades:

A) Aplicando el Teorema de Pitágoras comprobamos que
Cos(g)^2 + sen(g)^2 = 1 (1)

Orientación de los ángulos:

Por definición, el ángulo g es positivo si lo recorremos en sentido contrario a las agujas del reloj, y es negativo si lo recorremos en el mismo sentido de las agujas.

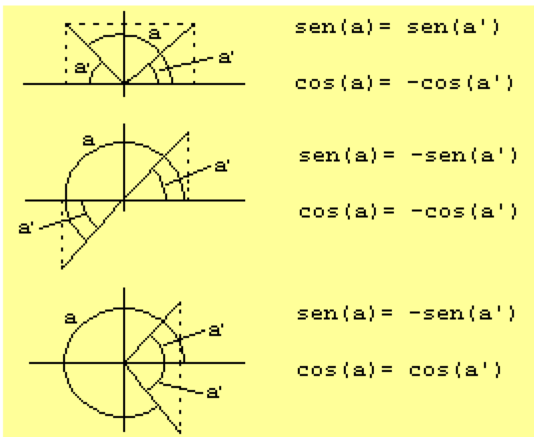


B) Observando la figura vemos que se cumple

Cos(-g) = cos(g)
Sen(-g) = -sen(g)   (porque y < 0)

C) Es fácil comprobar las siguientes, es suficiente dibujar cada caso.

Lo llamamos **'Paso al primer cuadrante'**



Si 90º < g < 180º -- > g = 180º - g', y entonces sen(g) = sen(g'),   cos(g) = -cos(g')

Si 180º < g < 270º --> g = 180º + g', y entonces

sen(g) = -sen(g'),   cos(g) = -cos(g')

Si 270º < g < 360º --> g = 360º - g', y entonces

sen(g) = -sen(g'),   cos(g) = cos(g')

Algunos valores frecuentes:

g = 0º: x = r, y = 0
cos(0º) = 1,   sen(0º) = 0

g = 30º: x = r.$\frac{\sqrt{3}}{2}$,   y = r/2
cos(30º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sen(30º) = 1/2

g = 45º: x = y
cos(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, sen(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g = 60º: x = r/2,   y = r. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos(60º) = 1/2, sen(60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

g = 90º: x = 0, y = r
cos(90º) = 0,   sen(90º) = 1

g = 180º: x = -1, y = 0
cos(180º) = -1, sen(180º) = 0

$g = 270º$: $x = 0$, $y = -1$
$\cos(270º) = 0$, $\mathrm{sen}(270º) = -1$

$g = 360º$: $x = r$, $y = 0$
$\cos(360º) = 1$, $\mathrm{sen}(360º)= 0$

Observaciones:

Observa que:

$\mathrm{Tan}(90º) = 1/0$, no definido
$\mathrm{Cota}(0º) = 1/0$, no definido

$\mathrm{Sec}(90º) = 1/0$, no definido
$\mathrm{Cose}(0º) = 1/0$, no definido

Abusando del lenguaje, en estos casos decimos que toman valor $\pm\infty$ (infinito), ¡Que No es un valor real!.

Otras Propiedades:

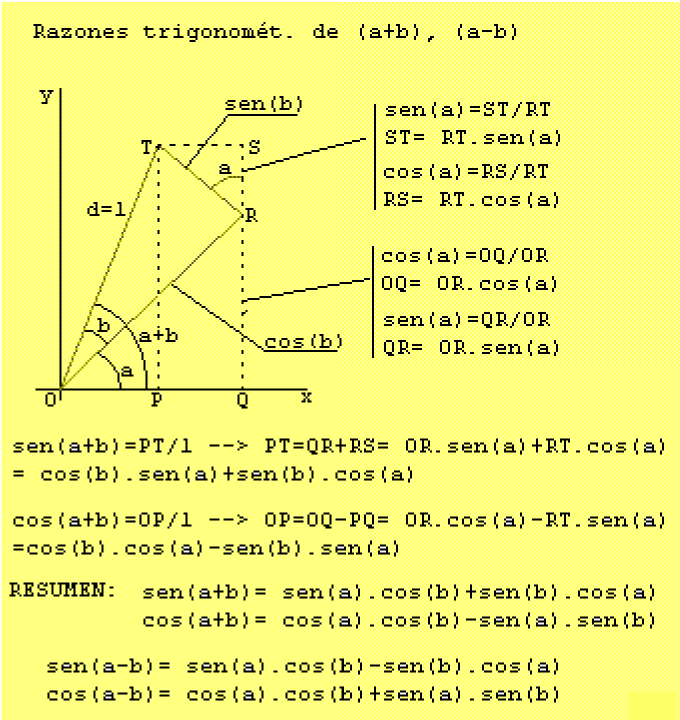
De la igualdad (1) obtenemos las siguientes:

$$1 + \tan(g)^2 = \sec(g)^2$$

$$\mathrm{Cota}(g)^2 + 1 = \mathrm{cose}(g)^2$$

6.2.- Razones trigonométricas de Suma/Resta de dos ángulos

Observa detenidamente la siguiente figura:



Observa que resultan las siguientes igualdades

Sen(a+b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a)
Cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sen(a).sen(b)
Sen(a-b) = sen(a).cos(b) – sen(b).cos(a)
Cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sen(a).sen(b)

Tan(a+b) $= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$, Tan(a-b) $= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a).\tan(b)}$

Cota(a+b) $= \frac{1}{\tan(a+b)}$, Cota(a-b) $= \frac{1}{\tan(a-b)}$

sec(a+b) $= \frac{1}{\cos(a+b)}$, sec(a-b) $= \frac{1}{\cos(a-b)}$

cose(a+b) $= \frac{1}{\operatorname{sen}(a+b)}$, cose(a-b) $= \frac{1}{\operatorname{sen}(a-b)}$

Consecuencia:

A) Ángulo doble

Sen(2a) = 2.sen(a).cos(a)
Cos(2a) = $\cos^2$(a) – sen^2(a)
Tan(2a) = $2.\frac{\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

En efecto: Tan(2a) = $\frac{\operatorname{sen}(2a)}{\cos(2a)} = \frac{2\operatorname{sen}(a).\cos(a)}{\cos^2(a)-sen^2(a)} =$

(Divido entre $\cos^2$(a))

= 2tan(a)/(1-$\tan^2$(a)) = $2.\frac{\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

cota(2a) = $\frac{1}{\tan(2a)}$, o bien Cota(2a) = $-\frac{1-cota^2(a)}{2.cota(a)}$

En efecto: $\frac{\cos(2a)}{\operatorname{sen}(2a)} = \frac{\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)}{2\operatorname{sen}(a)\cos(a)} =$

(Divido entre sen^2(a))

$= \frac{cota^2(a)-1}{2.cota(a)} = -\frac{1-cota^2(a)}{2.cota(a)}$

B) Ángulo mitad

Cos(a) = $\cos^2(\frac{a}{2}) - \text{sen}^2(\frac{a}{2}) = 1 - 2.\text{sen}^2(\frac{a}{2})$, de donde

$\text{Sen}^2(\frac{a}{2}) = \frac{1}{2}.(1-\cos(a))$, **$\text{Sen}(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$**

Cos(a) = $\cos^2(\frac{a}{2}) - \text{sen}^2(\frac{a}{2}) = \cos^2(\frac{a}{2}) - [1-\cos^2(\frac{a}{2})] =$

$= 2.\cos^2(\frac{a}{2}) - 1$, de donde

$\cos^2(\frac{a}{2}) = \frac{1}{2}.(1 + \cos(a))$, **$\text{Cos}(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$**

$\frac{\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$, por tanto

$\text{Tan}(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$, **$\text{Cota}(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(a)}{1-\cos(a)}}$**

6.3.- Fórmulas del Producto de r.t.

Sen(a+b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a)
Sen(a-b) = sen(a).cos(b) – sen(b).cos(a)

Sumándolos

Sen(a+b) + sen(a-b) = 2.sen(a).cos(b)

Sen(a).cos(b) = $\frac{1}{2}$.[sen(a+b) + sen(a-b)]

Restándolas

Sen(a+b) - sen(a-b) = 2.sen(b).cos(a)

Sen(b).cos(a) = $\frac{1}{2}$.[sen(a+b)-sen(a-b)]

De forma análoga
Cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sen(a).sen(b)

Cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sen(a).sen(b)

Sumándolas

Cos(a+b) + cos(a-b)= 2.cos(a).cos(b)

Cos(a).cos(b) = $\frac{1}{2}$.[cos(a+b) + cos(a-b)]

Restándolas

Cos(a+b) – cos(a-b) = -2.sen(a).sen(b)

Sen(a).sen(b) = -$\frac{1}{2}$.[cos(a+b) – cos(a-b)]

6.4.- Fórmulas de las Sumas/Restas de r.t.

En las anteriores hacemos:
A = a + b,
B = a - b, a =(A+ B)/2, b = (A-B)/2

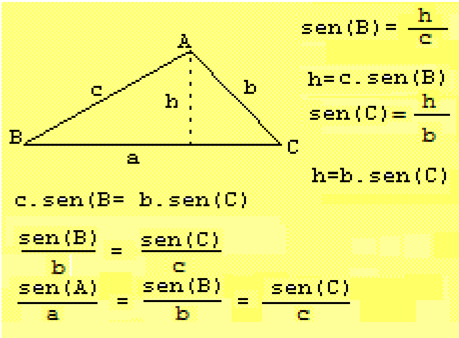
Entonces:

Sen(A) + sen(B) = 2.sen($\frac{A+B}{2}$).cos((A-B)/2)
Cos(A) + cos(B) = 2.cos($\frac{A+B}{2}$).cos($\frac{A-B}{2}$)

$$\text{Sen}(A) - \text{sen}(B) = 2.\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\text{Cos}(A) - \cos(B) = -2.\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

6.5.- Teorema de los senos

Observa la figura



Tenemos las siguientes relaciones:

$$\text{Sen}(B) = \frac{h}{c} \text{ -- > } h = c.\text{sen}(B)$$
$$\text{Sen}(C) = \frac{h}{b} \text{ -- > } h = b.\text{sen}(C)$$

De donde: c.sen(B) = b.sen(C),

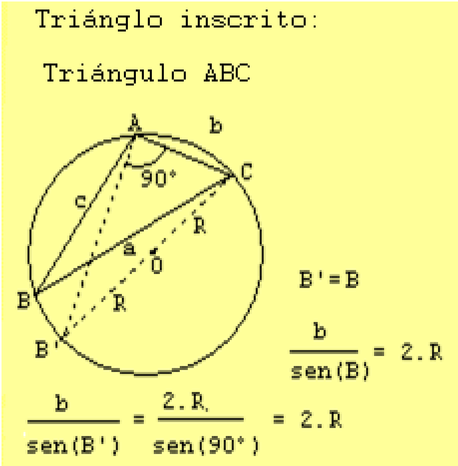
$$\frac{c}{sen(C)} = \frac{b}{sen(B)},$$ y del mismo modo $$\frac{c}{sen(C)} = \frac{a}{sen(A)},$$

y por tanto

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

Una interpretación geométrica:

Observando la figura



Teniendo en cuenta que B = 90º, y que A'= A, tenemos

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{2R}{sen(90^0)} = 2.R\ , \quad \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{A})} = 2.R$$

6.6.- Teorema del coseno

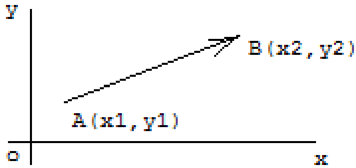
NOTA: En este momento necesitamos conceptos que se estudiarán en el Vol. 5. Aquí y en este momento daremos las ideas básicas necesarias para que lo que sigue resulte inteligible.

Idea de vector fijo:

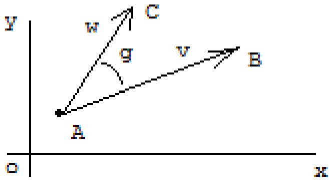
Dos puntos A(x1,y1), B(x2,y2) del plano determinan el vector

v = AB cuyas componentes son (x2-x1,y2-y1), y escribiremos

v = (a,b) donde a = x2-x1, b = y2-y1



Ángulo formado por dos vectores:



Módulo de un vector:

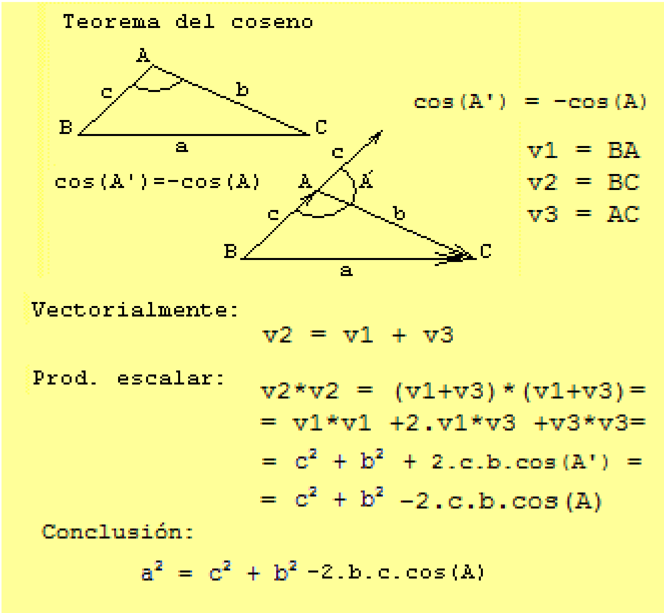
mod(v) = $\sqrt{a^2 + b^2}$. Lo designaremos por /v/

Producto escalar de dos vectores:

v*w = |v|.|w|.cos(g)

Cuando g = 0^{o}, cos(g) = 0, y v*v = $|v|^2$

Observa la figura



Designo por ‘a’, ‘b’ y ‘c’ los lados con ‘doble significado’: Escalar -> Su longitud, Vectorial -> Vector determinado por sus vértices, de modo que: a = |BC|, b = |AC|, c = |BA|

Supongo el origen O(0,0) en el vértice B:

Entonces, Vectorialmente tenemos: a = c + b

Haciendo el producto escalar consigo mismo tenemos:

$$a*a = (c+b)*(c+b) = c*c + c*b + b*c + b*b$$

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2.(b*c)$$

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2.b.c.\cos(A')=$$
$$= c^2 + b^2 - 2.b.c.\cos(A),$$

ya que cos(A’) = -cos(A)

Conclusión: $a^2 = c^2 + b^2 - 2.b.c.\cos(A)$

Observa:

-Si $A = 90^o$, $\cos(A) = 0$,

y queda la fórmula del Teorema de Pitágoras.

-Por tanto, la anterior es una generalización del citado teorema.

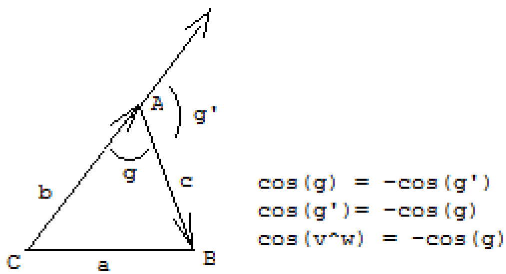
-En la práctica la utilizamos así:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2.b.c.\cos(A)$$

donde A es el ángulo en el vértice A.

NOTA:

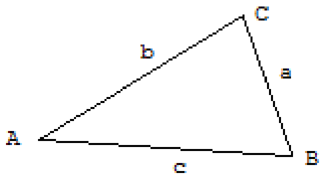
Observa que en todo caso, sea $A < 90^o$ ó sea $A > 90^o$, se cumple la anterior con el signo menos:



g = ángulo A en el vértice A.

6.7.- Resolución de triángulos

Dado un triángulo cualquiera



decimos que sus elementos son:

Sus tres lados, más sus tres vértices.

En problemas reales ocurrirá que conocemos el valor de algunos de sus elementos pero desconocemos otros, estando interesados en calcular el valor de alguno de los desconocidos.

El conocimiento de lo estudiado en este Tema de Trigonometría, y en particular Teorema de los senos y Teorema del coseno, siempre podremos calcular cualquiera de los elementos desconocidos, suponiendo que tenemos 'datos suficientes' que suele ser 'el valor de al menos tres de sus elementos'.

Veremos casos resueltos en la sección de los problemas. Aquí tenemos descritos los casos posibles, y después resolvemos uno de los casos más complicados y prácticos reales.

Casuística:

a) Datos: Un lado y dos ángulos

Resolvemos aplicando el teorema de los senos

b) Datos: Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Por teorema del coseno obtenemos el tercer lado. Por teorema de los senos obtenemos otro de los ángulos, y está.

c) Datos: Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.

Por teorema de los senos obtengo otro de los lados. Obtengo el tercer ángulo, y por teorema de los senos obtengo el tercer lado.

d) Datos: Tres lados

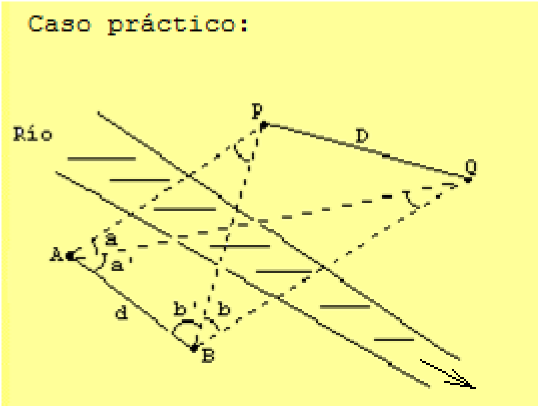
Por teorema del coseno obtengo uno de los ángulos. Por teorema de los senos obtengo un segundo ángulo, y está.

Un caso práctico

Una de las situaciones reales típicas es la siguiente figura

"Deseamos determinar la distancia entre los puntos P y Q, situados al otro lado de un río. Nosotros estamos situados en el punto A, y desde este punto tomamos el ángulo A> que forman las 'visuales' por P y por Q. También a este lado del río tenemos el punto B situado a distancia d de A, y, situados en A, tomamos el ángulo A'> que forman las visuales por Q y por B (ver figura 150). Nos desplazamos al punto B y desde éste medimos el ángulo B> que forman las visuales por P y por Q, y también el ángulo B'> que forman las visuales por P y por A".

Resolución: Proceso



Obtenemos lo necesario para que al final obtengamos D = d(P,Q) resolviendo el triángulo AQP.

NOTA: Designare el ángulo en un vértice, por ejemplo P, indistintamente mediante P^ ó P>

Cálculo de b = d(A,P):

P^ = 180º - (a + a'+ b')

Por teorema del seno $\frac{sen(P>)}{d} = \frac{sen(b')}{b}$
de donde

$$b = \frac{d.sen(b')}{sen(P>)}$$

Cálculo de c = d(A,Q):

Q^ = 180º - (b + b'+ a')

Por teorema del seno $\frac{sen(Q>)}{d} = \frac{sen(b+b')}{c}$

de donde: $c = \frac{d.sen(b+b')}{sen(Q>)}$

Cálculo de D = d(P,Q):

Por teorema del coseno

$D^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(a)$, de donde obtengo D

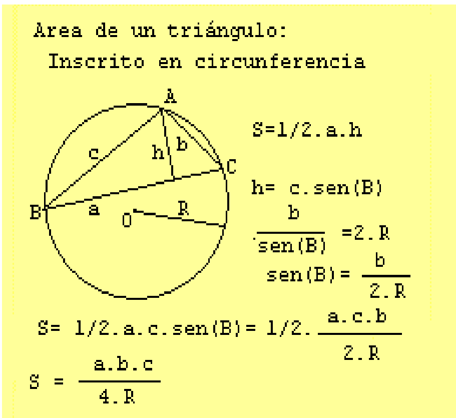
Ver un caso resuelto con datos concretos en Problemas Tema 7

6.8.- Aplicación al cálculo del Área de un Triángulo cualquiera

Observa las figuras adjuntas

Tenemos varios procedimientos dependiendo de los datos de que dispongamos.

Casuística:



a) Datos: Conocemos la altura sobre uno de los lados.

$$S = \frac{1}{2}.\text{base}.h$$

b) Datos: Dos lados y el ángulo comprendido.

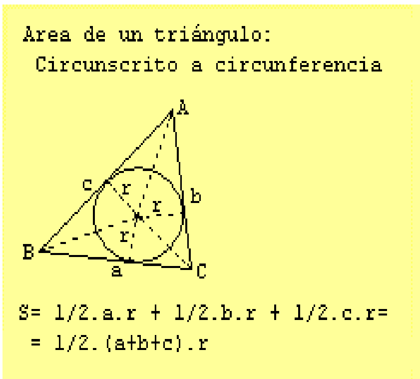
$$S = \frac{1}{2}.a.c.\text{sen}(B), \ \ (h = c.\text{sen}(B))$$

c) Datos: Radio R de la circunferencia circunscrita.

$$S = \frac{a.b.c}{4.R} \ , \ (\text{sen}(B) = \frac{b}{2R})$$

d) Datos: Radio r de la circunferencia inscrita.

$$S = \frac{1}{2}.(a+b+c).r = p.r, \ \ (p = \frac{1}{2}.(a+b+c))$$



e) Datos: Los tres lados: Entonces

$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \ ,$$

donde p = $\frac{1}{2}$.(a+b+c), semiperímetro.

(Fórmula de Herón o de Arquímedes)

Demostración: Del Teorema del coseno obtenemos

Cos(B) = $\frac{a^2-b^2+c^2}{2.a.c}$ --> Sen(B) = $\sqrt{1-\left[\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}\right]^2}$ =

= $\frac{1}{2.a.c}$.$\sqrt{(4ac)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}$ =

= (diferencia de cuadrados)

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{\left(2ac+(a^2-b^2+c^2)\right).(2ac-(a^2-b^2+c^2))} =$

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{(2ac+a^2-b^2+c^2).(2ac-a^2+b^2-c^2)} =$

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{((a+c)^2-b^2).(-(a-c)^2+b^2)} =$

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{((a+c+b).(a+c-b).(b+a-c).(b-a+c)} =$

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{P.(P-2b).(P-2c).(P-2a)} =$

donde P = a+b+c = perímetro. Hago p = $\frac{1}{2}$.P = semiperímetro

$= \frac{1}{2.a.c}.\sqrt{2p.(2p-2a).(2p-2b).(2p-2c)} =$

$= \frac{1}{2.a.c} .\sqrt{16.p(p-a).(p-b).(p-c)} =$

$= \frac{1}{2.a.c} .4. \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)} =$

$= \frac{2}{a.c} . \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$

Probado lo anterior, tenemos para el área del triángulo ABC

$S = \frac{1}{2}.a.c.sen(B) =$
$= (\frac{1}{2}.a.c). \frac{2}{a.c} . \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$ -->

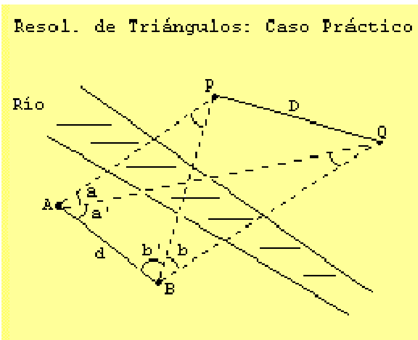
$$\mathbf{S = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

(Fórmula de Herón-Arquímedes)

Presentación de un Problemas:

El enunciado es el dado en "Un caso práctico" del apartado 7.8 (Resolución de triángulos)

Observa la figura



Datos: d = 100 m.,
A^ = 30º, A^' = 42º, B^ = 40º, B^' = 62º

Sol.: $P^\wedge = 180º - (72º+62º) = 46º$

$Q^\wedge = 180º - (102º+42º) = 36º$

$b = 100.sen(62º) / sen(46º) = 122'74$

$c = 100.sen(102º) / sen(36º) = 166'41$

$D^2 = 15065'11 + 27692'29 – 35377'42 = 7379'98$

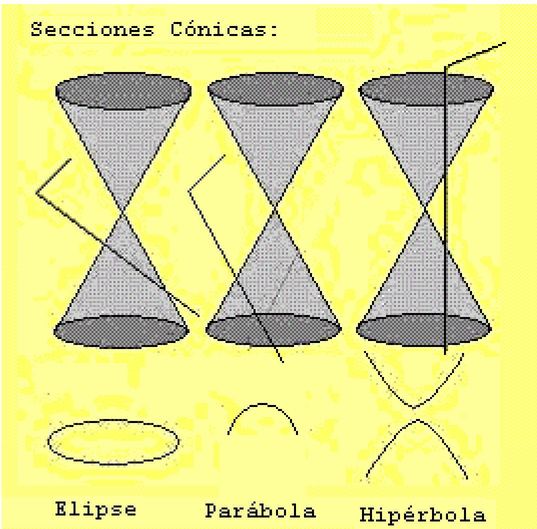
$D = 85'91$ m.

Al final, en el apartado ACTIVIDADES y problemas, se encontrarán más problemas sobre aplicación práctica de la Trigonometría.

$$$oOo$$$

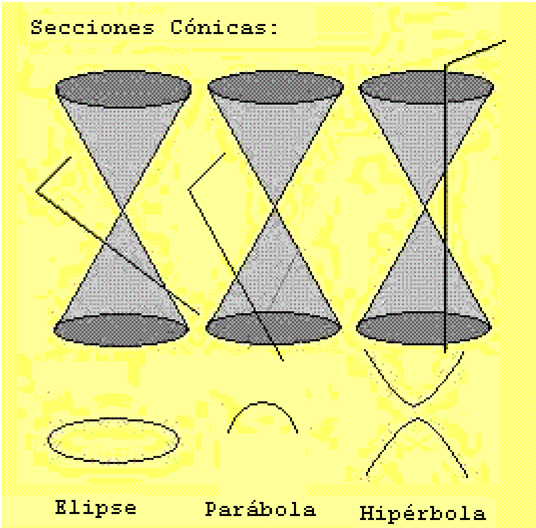
Tema 7

CÓNICAS en el Plano



7.0.- Secciones Cónicas

Las secciones producidas por un plano sobre un doble-cono dieron lugar al estudio de las llamadas 'cónicas' en el plano.

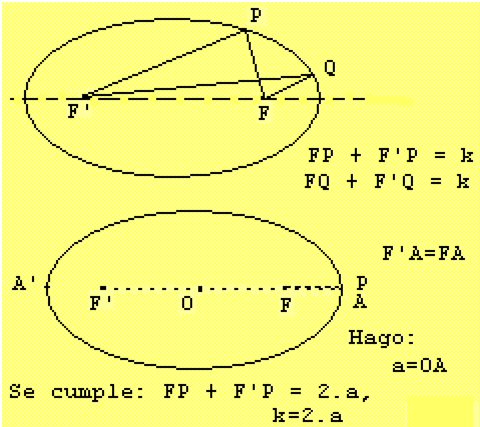


7.1.- LA ELIPSE

Definiciones: *Elementos de la Elipse*

Fijamos dos puntos F y F' del plano, que llamaremos focos, y fijamos un valor k mayor que d(F, F').

'Llamamos Elipse al lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de sus distancias a los puntos F y F' sea igual a k'. Esto es:
d(P, F) + d(P, F') = k



Elementos de la Elipse:

-Los focos: Son los puntos fijos F y F'

-La recta focal: Recta que pasa por F y F'

-Su centro: C(xo, yo),punto medio del segmento FF'

-Sus ejes de simetría: La recta que contiene los focal (eje focal), y la perpendicular a ésta que pasa por el centro (eje secundario).

-Los puntos de corte de la elipse con sus ejes: A,A' sobre el eje focal, B,B' sobre el eje secundario.

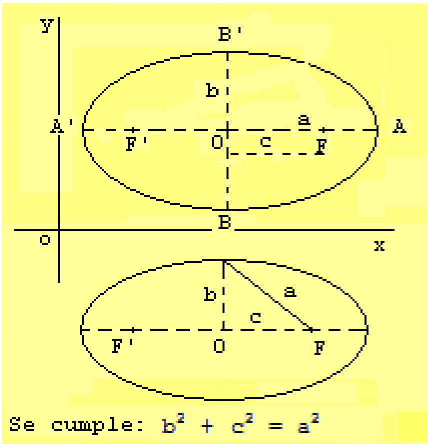
Parámetros de la elipse:

-La medida de sus semiejes: a = d(A,C) sobre el eje focal, y b = = d(B,C) sobre el eje secundario.

-La distancia Semifocal: c = d(C, F) = d(C, F')

-La excentricidad: $e = c/a$, (Siempre será $e < 1$, ya que $c < a$. (Cuando $c = a$ será $e = 1$, y la elipse se convierte en el segmento F'F).

Relación entre los parámetros: Se cumplen



$a^2 = c^2 + b^2$, $\quad 2.a = k$

Ecuación de la Elipse:

En lo que sigue obtendremos: $A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0$

En lo que sigue suponemos que el eje focal es paralelo al eje ox, y por tanto, si F(xo, yo), F'(xo', yo') son los focos, se cumple yo' = yo.

La igualdad $\quad d(P, F) + d(P, F') = k$

significa:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \sqrt{(x-x_0')^2+(y-y_0')^2} = k \quad (1)$$

Operamos para hacer desaparecer los radicales, como sigue.
Despejamos un radical

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = k - \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$$

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase ‘notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = k^2 + (x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2 - $$
$$- 2.k. \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$$

Desarrollando los cuadrados:

$(x^2 + xo^2 – 2.xxo) + (y^2 + yo^2 – 2.yyo) =$

$= k^2 + (x^2 + xo'^2 -2.xxo') + (y^2 + yo'^2 -2.yyo') –$
$- 2.k. \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$

Simplificando y sacando factor común tengo

$(xo^2 - xo'^2 + yo^2 - yo'^2) - 2.(xo – xo').x - 2.(yo - yo').y - k^2 =$

$= -2.k. \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$

Y teniendo en cuenta que yo’ = yo

$-2.(xo – xo').x + (xo^2 - xo'^2) - k^2 = -2.k.$
$\sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$

2.k. $\sqrt{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2}$ = 2.(xo – xo').x - (xo^2 - xo'^{2}) + k^2

Hago:
m = 2.(xo - xo')
l = xo'^{2} - xo^2 + k^2, y queda

2.k. $\sqrt{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2}$ = m.x + l

Elevando al cuadrado

4.k^2.[$(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2$] = m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x

4.k^2.[x^2 + y^2 -2.xo'x -2.yo'y +xo'^{2} +yo'^{2}] = m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x

Pasándolo todo al miembro izquierda y agrupando

(4.k^2 –m^2).x^2 + 4.k^2.y^2 + (-8.k^2.xo' -2.m.l).x – 8.k^2.yo'.y +
+ [4.k^2.(xo'^{2} + yo'^{2}) –l^2] = 0

Haciendo

A= 4.k^2 – m^2
B= 4.k^2
D= -8.k^2.xo' - 2.m.l
E= -8.k^2.yo'
F= 4.k^2.(xo'^{2} + yo'^{2}) – l^2

tenemos la ecuación:

A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0 (2)

Casuística:

a) Supongamos que el eje focal coincide con ox, en cuyo caso es yo = 0, yo' = 0. Entonces

$m = 2.(xo - xo')$
$l = xo'^2 - xo^2 + k^2$, -- >

$m = 2.(xo - xo')$
$l = -xo^2 + xo'^2 + k^2$

$A= 4.k^2 – m^2$
$B= 4.k^2$
$D= -8.k^2.xo' - 2.m.l$
$E= -8.k^2.yo'$
$F= 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) – l^2$ -- >

$A = 4.k^2 – m^2$
$B = 4.k^2$
$D = -8.k^2.xo'-2.m.l$
$E = 0$
$F = 4.k^2.xo'^2 – l^2$

Y la ecuación queda de la forma

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + F = 0 \qquad (3)$$

b) Supongamos que la recta focal coincide con el eje ox, y que además el centro de la elipse coincide con (0,0).

Entonces yo = 0, yo' = 0, xo = c, xo' = - c, y queda

$m = 2.(xo - xo')$
$l = xo'^2 - xo^2 + k^2$, -- >

$m = 2.(c – (-c)) = 4.c$
$l = (-c)^2 - c^2 + k^2 = k^2$

$A= 4.k^2 – m^2$
$B= 4.k^2$
$D= -8.k^2.xo' - 2.m.l$
$E= -8.k^2.yo'$
$F= 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) – l^2$ -- >

$A = 4.k^2 – m^2$

$B = 4.k^2$
$D = 8.k^2.c - 2.m.l$
$E = 0$
$F = 4.k^2.c^2 - l^2 = k^2.(4.c^2 - k^2)$

Y la ecuación queda de la forma

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + F = 0 \qquad (4)$$

ECUACIÓN Reducida, Ecuación canónica (normal)

Teniendo en cuenta que $k = 2.a$, veamos cómo son los valores de A, B y F en función de los parámetros a, b, c.

Tenemos (Teniendo en cuenta, como vimos, que $a^2 - c^2 = b^2$

$A = 4.4.a^2 - 16.c^2 = 16.(a^2 - c^2) = 16.b^2$
$B = 16.a^2$

Observa que $A > 0$, $B > 0$

$D = 32.a^2.c - 8.c.4.a^2 = 0$
$F = 16.a^2.c^2 - 16.a^4 = 16.a^2.(c^2 - a^2) = -16.a^2.b^2$

Observa que $F < 0$, $-F > 0$, entonces $A.x^2 + B.y^2 + F = 0$ -- >

$A.x^2 + B.y^2 = -F$ (Ecuación reducida)
(5)

Divido los dos miembros por –F, y tengo

$$-\frac{F}{A} = a^2, \ -\frac{F}{B} = b^2, \ -\frac{F}{F} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

(Ecuación normal ó canónica de la Elipse)

Consecuencia:

Ecuación normal de la Elipse cuando los ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas y su centro es un punto cualquiera (xo, yo):

Teniendo en cuenta el resultado obtenido más arriba:

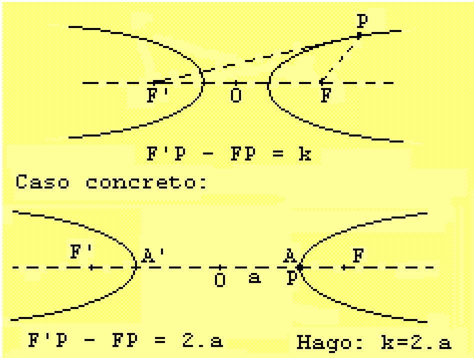
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si hacemos una traslación de modo que el centro de la elipse sea el punto C(xo, yo), la nueva ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (6')$$

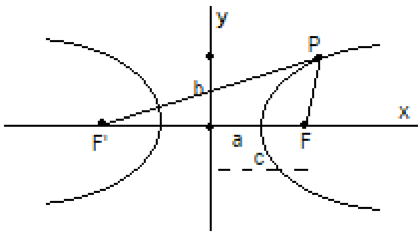
7.3.- LA HIPÉRBOLA

Definiciones: Elementos de la Hipérbola
Fijamos dos puntos F y F' del plano que llamamos focos, y una constante k < d(F, F').



"Llamamos Hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos F y F' es igual a k':

$$abs[d(P, F) - d(P, F')] = k$$



Elementos de la hipérbola:

-Los focos: F, F'

-Su centro: C(xo, yo), que es el punto medio del segmento F'F.

-Sus ejes de simetría: Eje focal, que es la recta que pasa por F y F', y Eje secundario que es la perpendicular al eje focal por el centro C.

-Los puntos de corte con su eje focal: A,A' (observa que no corta a su eje secundario, y por eso se le llama también 'eje imaginario').

Parámetros de la hipérbola:

-La medida de su Semieje focal: $a = d(A, C)$

-La distancia Semifocal: $c = d(C, F) = d(C, F')$

-La medida del Semieje imaginario: Es el valor b, tomado sobre el eje imaginario a partir de C, y tal que cumple: $a^2 = c^2 - b^2$

-La excentricidad: $e = \frac{c}{a}$. Observa que

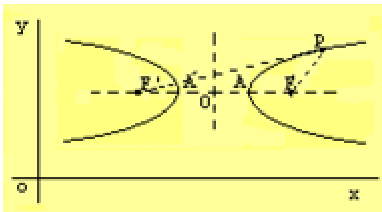
$$e > 1, \text{ ya que } c > a$$

Relaciones entre los parámetros:

-Se cumplen las relaciones:

$$a^2 = c^2 - b^2, \qquad k = 2.a \qquad (10)$$

Ecuación de la Hipérbola



En lo que sigue obtendremos $A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0$

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase 'notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

En todo lo que sigue supongamos que el eje focal es paralelo al eje ox.

Sean los focos F(xo, yo), F'(xo', yo'), yo' = yo

Caso A: Eje real paralelo al eje ox

Para la rama correspondiente al foco F' se cumple:

d(P, F) – d(P, F') = k (11)

significa

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{(x-x_0{'})^2+(y-y_0{'})^2} = k \qquad (11)'$$

Operamos con el fin de hacer desaparecer los radicales.

Tenemos, despejando un radical: d(P,F) = k + d(P,F')

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \mathrm{k} + \sqrt{(x-x_0{'})^2+(y-y_0{'})^2}$$

Elevando al cuadrado

$(x - xo)^2 + (y - yo)^2 = k^2 + (x - xo')^2 + (y - yo')^2 + 2k.d(P,F')$

Desarrollando los cuadrados:

$[x^2 + xo^2 – 2.xxo] + [y^2 + yo^2 – 2.yyo] =$
$= k^2 + [x^2 + xo'^2 -2.xxo'] + [y^2 + yo'^2 -2.yyo'] + 2k.d(P,F')$

Simplificando y sacando factor común tengo

$-2.(xo - xo').x - 2.(yo - yo').y + (xo^2 - xo'^2 + yo^2 - yo'^2) - k^2 =$
$= 2.k.d(P,F')$

Y teniendo en cuenta que $yo' = yo$

$$2.(xo - xo').x - (xo^2 - xo'^2) + k^2 = -2.k.d(P,F')$$

Hago

$m = 2.(xo - xo')$ (Observa: $m > 0$)
$l = -(xo^2 - xo'^2) + k^2$

con lo cual queda

$$m.x + l = -2.k.d(P,F')$$

Elevamos otra vez al cuadrado:

$m^2. x^2 + l^2 + 2.m.l.x = 4.k^2.[(x - xo')^2 + (y - yo')^2]$

Operando

$m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x = 4.k^2.([x^2 + xo'^2 - 2.xo'x] + [y^2 + yo'^2 - 2.yo'y])$

Trasponemos términos nos queda

$(m^2 - 4.k^2).x^2 - 4.k^2.y^2 + (2.m.l + 8.k^2.xo').x + 8.k^2.yo'.y +$
$+ (l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)) = 0$

Hacemos

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

Quedando la ecuación

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0 \qquad (12)$$

Nota: Observamos el signo de A y de B.

Signo de A: Recuerda que $k = 2.a$, y observando la gráfica vemos que $abs(xo – xo') > 2.a$, por tanto

$A = 4.(xo- xo')^2 - 4.4.a^2 = 4.[(xo – xo')^2 – (2.a)^2] > 0$, es decir $A > 0$

Signo de B: Evidente $B = - 4.k^2 < 0$

Casuística:

a) Si el eje focal coincide con el eje ox, entonces

$yo = 0$, $yo' = 0$, y tenemos

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$ -- >

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$

$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

--- >

$A = m^2 - 4k^2$
$B = -4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 0$
$F = l^2 - 4k^2.xo'^2$

Y queda la ecuación

$Ax^2 + By^2 + Dx + F = 0$ (Ecuación reducida)

(13)

b) Si el eje focal coincide con ox y además su centro coincide con (0, 0), entonces además

$xo = c$, $xo' = -c$ (c = semidistancia focal)

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$

--- >

$m = 4.c$
$l = –(c^2 – (-c)^2) + k^2 = k^2$

y entonces

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

--- >

$A = 16.c^2 - 4k^2$ (A > 0)
$B = - 4.k^2$

$D = 8.c.k^2 - 8.k^2.c = 0$
$E = 0$
$F = l^2 - 4k^2.c^2$ --> $F = k^2.(k^2 – 4.c^2)$

Y queda la ecuación

$$A.x^2 + B.y^2 + F = 0 \qquad \text{(Ecuación reducida)} \qquad (14)$$

ECUACIÓN Canónica (normal)

Teniendo en cuenta que k = 2.a, y que $c^2 – b^2 = a^2$, veamos el valor de los anteriores coeficientes en función de a y b.

$A = 16.c^2 - 4k^2 = 16.c^2 - 4.4.a^2 = 16.(c^2 - a^2) = 16.b^2$

$B = - 4.k^2 = - 4.4.a^2 = -16.a^2$

Teniendo en cuenta que $k^2 = 4.a^2$, y que $a^2 – c^2 = -b^2$, tengo

$F = k^4 - 4k^2.c^2 = k^2.(k^2 - 4.c^2) = 4.k^2.(a^2 - c^2) = -4.4.a^2.b^2 = -16.a^2.b^2$

Aquella (ecuación 14) queda así:

$$16.b^2.x^2 – 16.a^2.y^2 = 16.a^2.b^2$$

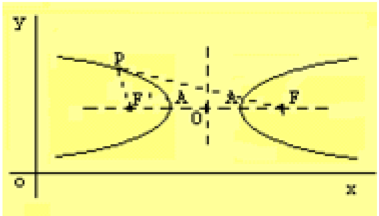
$$b^2.x^2 – a^2.y^2 = a^2.b^2 \qquad (14')$$

y dividiendo los dos miembros por $a^2.b^2$ queda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (15)$$

La llamamos ‘Ecuación canónica’ o ‘normal’ de la hipérbola.

NOTA: El alumno puede puede comprobar, siguiendo el mismo proceso de cálculo, que si el punto P está situado hacia la otra rama de la hipérbola el resultado es el mismo.



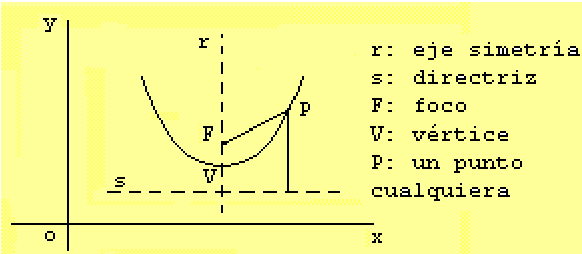
Ecuación normal de la Hipérbola cuando los ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas y su centro es un punto cualquiera (xo, yo):

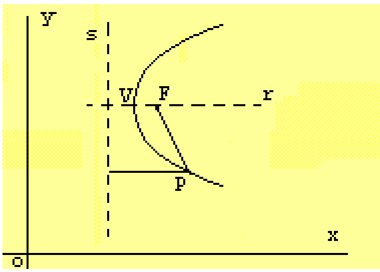
Teniendo en cuenta el resultado obtenido más arriba: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
si hacemos una traslación de modo que el centro de la hipérbola sea el punto C(x0,y0), la nueva ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (16)$$

7.5.- LA PARÁBOLA

Definiciones: Elementos de la Parábola





Fijamos una recta r y en ella un punto F que llamaremos foco. (La recta r va a ser el eje de simetría de la parábola). Fijamos también una recta s perpendicular a r. Se cortarán en un punto A.

"Llamamos Parábola al lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que equidistan del punto F y de la recta s, es decir, que cumplen

$$d(P,F) = d(P,s)$$

o bien $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (30)

Elementos de la parábola:

-Eje de simetría: Es la recta r fijada

-Recta directriz: Llamamos así a la recta s fijada (perpendicular a r por A)

-Foco F: Es el punto fijado en la recta r

-Vértice V: Es el punto de corte de la parábola con su eje de simetría r.

Sea A el punto de corte del eje de simetría con la recta directriz s.

De la gráfica se deduce que el vértice V es el punto medio del segmento FA.

Parámetro de la parábola:

-Es el valor de la distancia d(F,s) desde el foco a la directriz, y lo representaremos por p.

Ecuación de la Parábola

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase ‘notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

Sea la ecuación de la recta s: ax + by + c = 0, y el foco F(xo,yo).

Si P(x,y) es un punto cualquiera que cumple la igualdad (30), de ésta obtenemos

$$\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = |ax+by+c|$$

Elevando al cuadrado

$(a^2 + b^2).[(x - xo)^2 + (y - yo)^2)] = (ax + by + c)^2$

$(a^2 + b^2).[(x^2 + xo^2 - 2.xox) + (y^2 + yo^2 -2.yoy)] =$
$= a^2.x^2 + b^2.y^2 + c^2 + 2ab.xy + 2ac.x + 2bc.y$

Trasponiendo, simplificando y agrupando, tenemos

$b^2.x^2 + a^2.y^2 - 2.a.b.xy + [-2.(a^2 + b^2).xo - 2.a.c].x +$
$+ [-2.(a^2 + b^2).yo -2.b.c].y + [(a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2] = 0$

Haciendo

$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2.a.b$
$D = -2.[(a^2 + b^2).xo + a.c]$
$E = -2.[(a^2 + b^2).yo + b.c]$ (*)
$F = (a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (31)$$

(Ecuación general de la parábola)

NOTA: La forma (31) es la misma que tomaría una cónica cualquiera, si bien cambiaría el valor de sus coeficientes dados en el bloque (*)

Casuística:

a) Si el eje de simetría (recta r) es paralela al eje ox, entonces la recta s es paralela al eje oy, y su ecuación es s: $x + c = 0$, es decir $a = 1$, $b = 0$, y entonces

$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2.a.b$
$D = -2.[(a^2 + b^2).xo + a.c]$
$E = -2.[(a^2 + b^2).yo + b.c]$
$F = (a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2$

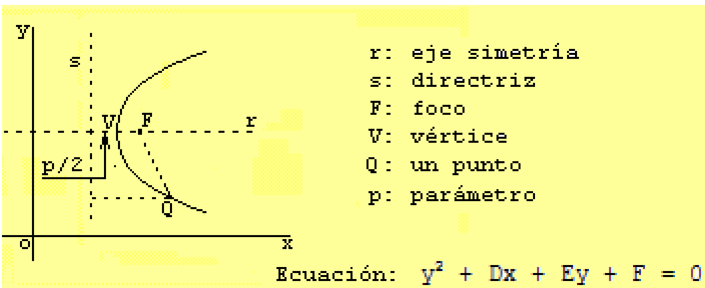
--- >

$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$
$D = -2.[xo + c]$
$E = -2.yo$
$F = (xo^2 + yo^2) - c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (32)$$

b)Si el eje de simetría coincide con ox, entonces la recta s es paralela a oy, será:
s: x + c = 0, y además, el foco es de la forma F(xo, 0), es decir: a = 1, b = 0, yo = 0, y entonces



$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$

$D = -2.[xo + c]$
$E = -2.yo$
$F = (xo^2 + yo^2) – c^2$

--- >
$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$
$D = -2.[xo +c]$
$E = 0$
$F = xo^2 – c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx + F = 0 \qquad (32)'$$

c) Si el eje de simetría coincide con ox y el vértice V coincide con (0,0), entonces, si el foco es F(xo,0), en la recta s: x + c = 0 es c = xo, y entonces

$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$
$D = -2.[xo +c]$
$E = 0$
$F = xo^2 – c^2$

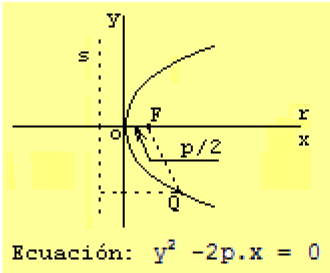
--- >
$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$
$D = - 4.x0$
$E = 0$
$F = 0$

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx = 0 \qquad (33)$$

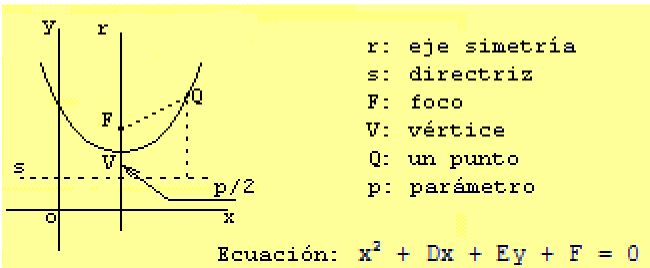
Si en estas condiciones hacemos xo = $\frac{p}{2}$, y por tanto
D = - 4. $\frac{p}{2}$ = -2p, queda

$$y^2 - 2p.x = 0 \qquad (34)$$



Por otro lado, si el eje de simetría (recta r) es paralelo al eje oy, entonces llegamos a las siguientes tipos de ecuaciones:

a)' Si el eje de simetría (recta r) es paralela al eje oy, entonces la recta s es paralela al eje ox, y su ecuación es s: y + c = 0, es decir a = 0, b = 1, y entonces



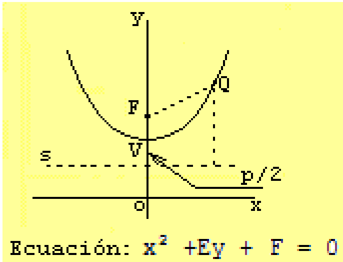
A = 1
B = 0
C = 0
D = -2.xo
E = -2.[yo + c]

$F = (xo^2 + yo^2) – c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (35)$$

b)' Si el eje de simetría coincide con oy, entonces la recta s es paralela a ox, será:
s: y + c = 0, y además el foco es de la forma F(0,yo), es decir:
a = 0, b = 1, xo = 0, y entonces



A = 1
B = 0
C = 0
D = 0
E = -2.[yo + c]
$F = yo^2 – c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$x^2 + Ey + F = 0 \qquad (36)$$

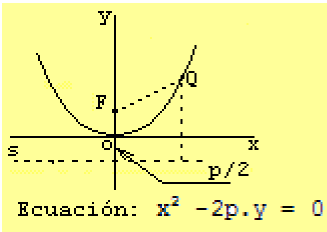
c)' Si el eje de simetría coincide con oy y el vértice V coincide con (0,0), entonces, si el foco es F(0, yo), en la recta s: y + c = 0 es c = yo, y entonces (Siendo a = 0, b = 1, xo = 0)

A = 1
B = 0

C = 0
D = 0
E = -4.yo
F = 0

y la ecuación queda de la forma

$$x^2 + E.y = 0 \qquad (37)$$

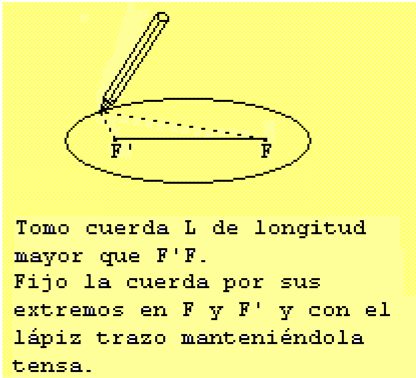


Si en estas condiciones hacemos yo = $\frac{p}{2}$, con lo cual
E = -4. $\frac{p}{2}$ = -2p, queda

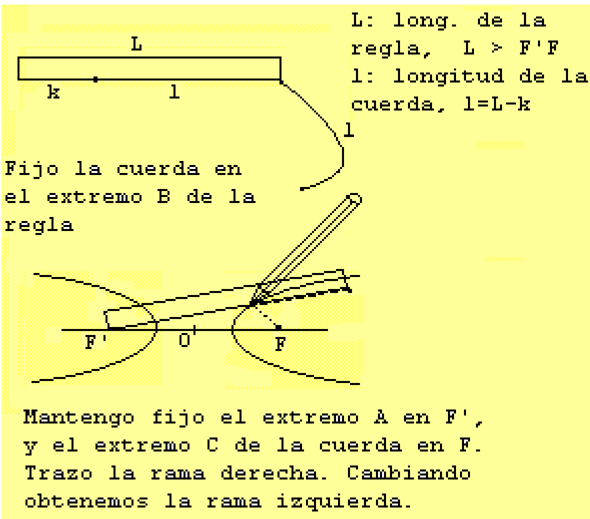
$$x^2 - 2p.y = 0 \qquad (38)$$

7.7.- Construcción de las cónicas con Regla y lápiz

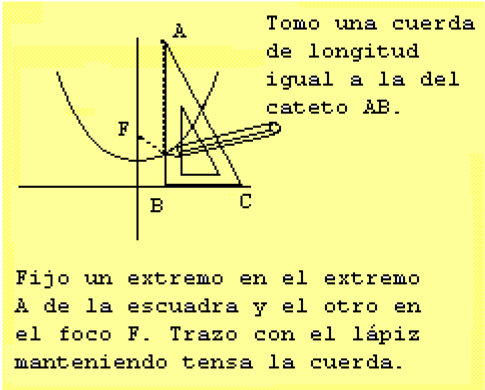
Elipse:



Hipérbola



Parábola


A
F
B
C
Tomo una cuerda de longitud igual a la del cateto AB.
Fijo un extremo en el extremo A de la escuadra y el otro en el foco F. Trazo con el lápiz manteniendo tensa la cuerda.

Ejemplos/Problemas:

1.- Halla la ecuación de la Elipse con focos F(4,3), F'(-2,3), y k = 2.a = 8

Sol.:
Si Q(x,y) es un punto de la elipse ha de cumplirse

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}=8$$

Traspongo a la derecha el segundo radical y elevo al cuadrado

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = x^2 + y + 4x - 6y + \\ + 64 - 16.\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$$

Después de simplificar

$$16.\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = 12x + 52$$

$$4.\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = 3x+13$$

Elevo otra vez al cuadrado

$$16.[x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13] = 9x^2 + 169 + 78$$

Trasponiendo y agrupando

$$7x^2 + 16y^2 + 14x - 96y + 39 = 0$$

2.- Halla la ecuación de la Hipérbola con focos F(4,2), F'(-2,2), y k = 2.a = 4

Sol.:
Si Q(x,y) es un punto de la hipérbola ha de cumplirse

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=4$$

Traspongo a la derecha el segundo radical y elevo al cuadrado

x^2 +y^2 –8x –4y +20 = x^2 +y^2 +4x –4y +8 +
+ 16 + 8. $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$

Traspongo y Simplifico

8. $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$ = -12x +12

2. $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$ = -3x +3

Elevo de nuevo al cuadrado

4.[x^2 +y^2 +4x –4y +8] = 9.(x^2 –2x +1)

Traspongo y simplifico

$5x^2 - 4y^2 - 34x + 16y - 32 = 0$

3.- Halla la ecuación de la parábola con foco F(3,3), y recta directriz
r: x + 1 = 0

Sol.:
Si Q(x,y) es un punto de la parábola ha de cumplirse
d(Q,F) = d(Q,r)

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = \frac{|x+1|}{\sqrt{1}}$$

Al elevar al cuadrado el valor absoluto se esfuma

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = x^2 + 2x + 1$

Traspongo y simplifico

$y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$

****

ACTIVIDADES y Problemas

4.- En un rombo una diagonal es doble que la otra. Su área es $4\ m^2$.

a)Calcula sus diagonales
b)Calcula el valor del lado

5.- Tengo un rectángulo. Si la altura aumenta en 20 cms, y la base disminuye 80 cms, el rectángulo se convierte en un cuadrado. También sabemos que si la altura aumenta en 20 cms y la base disminuye 60 cms, el área disminuye 400 cm^2.

Determina las dimensiones del rectángulo inicial.

6.- Tengo dos triángulos semejantes e isósceles, y la base del menor mide 12 m. Sus áreas miden 108 m^2 y 48 m^2.

a)Determina la razón de semejanza
b)Calcula el perímetro de ambos triángulos

7.- Dibuja un cono y marca en la figura ‘r base = 3 cm’ i la ‘generatriz = 5 cm’.

a)Calcula su área total
b)Calcula su volumen

8.- Dibuja una pirámide recta con base cuadrada, y marca en la figura ‘lado base = 12 m.’, ‘arista = 10 m.’

a)Calcula su área lateral
b)Calcula su volumen

9.- Dos triángulos semejantes e isósceles, de los cuales el menor tiene base 6 cm. Sus áreas son 24 m^2 y 96 m^2 .

a)Determina su razón de semejanza
b)Calcula sus perímetros

10.- Dibuja una pirámide recta de base cuadrada cuyo lado base mide 6 cm, y su arista mide 5 cm.

Calcula su área lateral y su volumen

11.- Determina las dimensiones que debe tener un pequeño campo rectangular sabiendo que su diagonal ha de medir 17 m y su superficies ha de ser de 120 m^2.

12.- De dos rectángulos semejantes sabemos que:

-La base del menor mide 8 cm y su diagonal 10 cm. El área de éste es 48 cm^2

-El área del mayor es 192 cm^2

Determina las dimensiones de cada uno

13.- En el Pueblo X desean construir un depósito para el agua cuya estructura ha de ser prisma con base hexagonal regular, y con capacidad de 4000 m^3. Su altura ha de ser de 10 m.

Determina la arista base.

14.- Una Empresa exportadora embala sus productos en cajas de 50 cm x 30 cm x 20 cm. Se desea enviar estas cajas en contenedores de forma cúbica, y necesitamos saber:

-La arista del menor contenedor cúbico mediante el cual no se produzca pérdida de espacio.

-El número de cajas que es posible enviar en cada contenedor.

15.- Nuestro carpintero dispone de un tronco de árbol de 5 m largo y sección de 60 cms. Necesita obtener una viga con sección cuadrada.

-Determina el lado de la mayor sección posible.

-Si suponemos que la densidad de ese tipo de madera es 0,75 kg/dm^3, ¿Cuánto pesa la viga obtenida?

16.- Calcula el valor de la arista del cubo inscrito en la esfera de radio R = 8 cm.

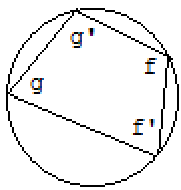
17.- Un ortoedro ha de ser tal que sus aristas sean proporcionales a los valores 3, 4, 8/3. La diagonal de la cara correspondiente a las dos primeras aristas mencionadas debe medir 15 m.

Determina las aristas del ortoedro.

18.- En un Ortoedro comprueba que la suma de los cuadrados de sus doce aristas es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro diagonales.

19.- Dibuja un cuadrilátero cualquiera inscrito en un círculo. Demuestra que los pares de ángulos opuestos: g, f, y g', f' , satisfacen la igualdad:

$$g + f = 180^\circ, \quad g' + f' = 180^\circ.$$



20.- En el lado interno de la pared de un tarro cilíndrico de cristal y a 6 cms del borde superior hay una gota de miel. En la pared diametralmente opuesta, en el lado externo y a la misma distancia del borde, se halla una mosca que decide acudir a la gota de miel.

Indícale cuál es el camino más corto y calcula la distancia que debe recorrer. (Datos: Altura del tarro 40 cms, diámetro base 20 cm.)

21.- Un bambú que tiene 30 m. de alto se ha roto por efecto del viento, doblándose hasta tocar el suelo en un punto que dista 16 m. del su pié.

¿A qué altura se produjo la rotura?

22.- Rectas y puntos notables en un triángulo:

Toma regla, cartabón y compás y ….

a) Traza las medianas: Redacta y explica su propiedad principal.
b) Traza las mediatrices: Redacta y explica su propiedad principal.
c) Traza las alturas: Redacta y explica su propiedad principal.

23.- Toma regla graduada, cartabón y compás y ….

Dibuja dos circunferencias cuyos centros distan 15 cms entre sí, y cuyos radios sean 6 y 4 cms.

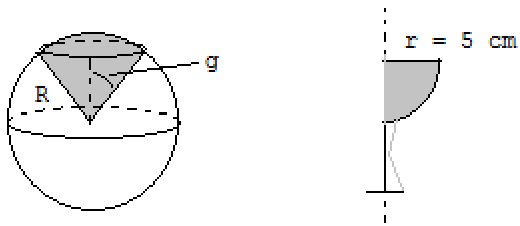
a) Dibuja el segmento de tangente exterior común y calcula su longitud.
b) Dibuja el segmento de tangente interior común y calcula su longitud.

24.- Una antena está sujeta por cuatro tirantes de cable fijados al tejado en un punto que dista 15 ms del pie del mástil. Estos puntos de fijación son los vértices de un cuadrado. Cada tirante se fija al mástil en un punto que está a 20 ms del su pié.

a)Calcula los metros de cable necesarios b)Calcula la superficie del cuadrado afectado por la instalación.

25.- Calcula la arista del cubo inscrito en una esfera de radio 8 cm.

26.- Observa la figura



a)Calcula el volumen del sector esférico cuando g = 30º, en una esfera con R = 8 cm.

b)Calcula el volumen de la copa resultante a girar 360º el área de la figura

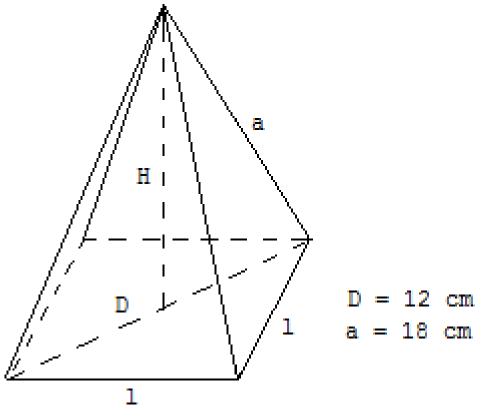
27.- Tengo un cilindro de altura H y base de radio R. Dentro del cilindro he insertado un cono con la misma altura y el mismo radio base.

a)¿Cuántas veces cabe el volumen del cono en el volumen del cilindro?

b)Si R = 6 cm y la generatriz del cono mide 10 cm, calcula el volumen de cada uno.

c)Calcula el área lateral del cono.

28.- En la Pirámide de la figura adjunta (recta y base cuadrada) conocemos los valores que se indican.

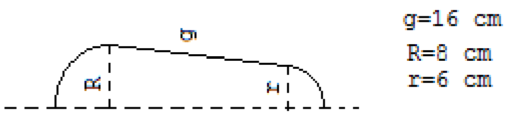


Se pide: a)Área total
b)El Volumen

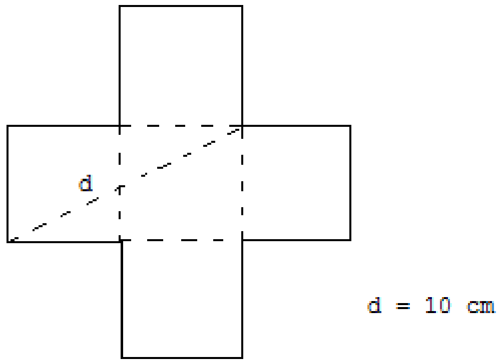
29.- Hacemos girar 360º el área de la figura obteniendo un cuerpo cerrado. Se pide:

a)Su volumen

b)¿Cuántos kgs de pintura necesitamos sabiendo que se gasta 1 kg./m^2



30.- Calcula el área de la figura constituida por 5 cuadrados



31.- Consideremos los tres cuerpos siguientes:

Una Esfera de radio R

Un Cilindro de altura H = R y cuya base tiene radio R

Un Cono de altura H = R y cuya base tiene radio R

a)Cuántas veces cabe el volumen de la esfera en el del cilindro.

b)Cuántas veces cabe el volumen del cono en el de la esfera.

c)Cuántas veces cabe el volumen del cono en el del cilindro.

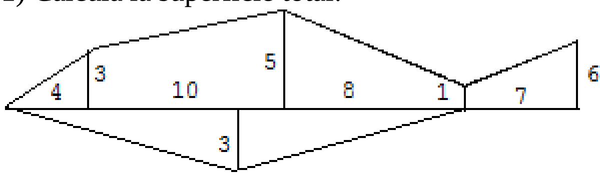
32.- La densidad de la leche de una vaca determinada es d = 1,10 kgs/l.

Si al pesar una garrafa de 5 litros comprobamos que su peso es de 5,450 kgs, ¿Cuánta agua contiene? (Tara garrafa: 250 grs.)

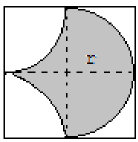
33.- Miscelanea de figuras geométricas:

En cada una de las siguientes figurar calcula lo que se indique:

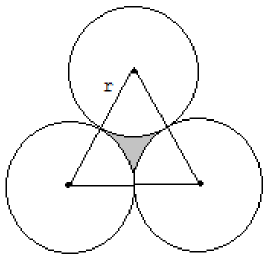
(1) Calcula la superficie total:



(2) y (3) Calcula el área y el perímetro de la zona sombreada:



r = 10 cm

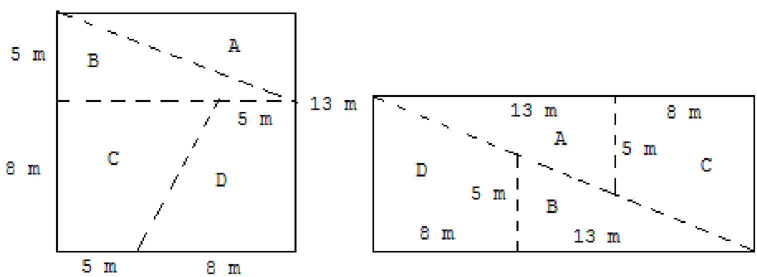


r = 8 cm

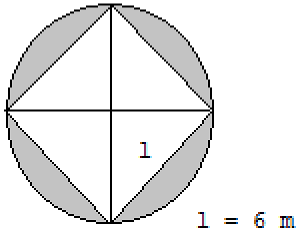
(4) Según la descomposición mostrada en las dos figuras siguientes la suma de las áreas, y por tanto el área total, coincide. Pero haciendo cálculos tenemos:

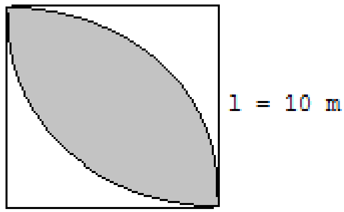
Cuadrado: S = 13x13 = 169 m^2
Rectángulo: S = 21x8 = 168 m^2

¿Dónde está el error?



(5) Calcula el área sombreada:

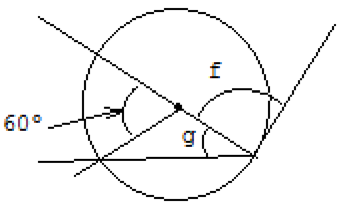


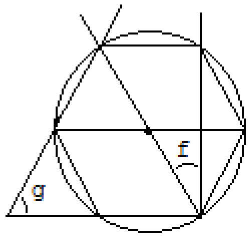


34.- Miscelánea 'Ángulos en la Circunferencia'

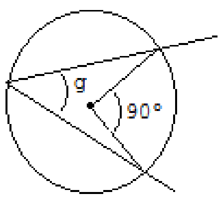
En cada caso calcula el valor de los ángulos desconocidos:

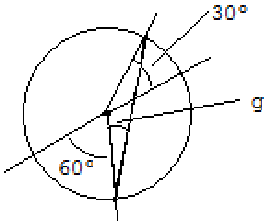
(1)

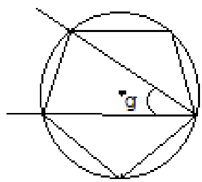




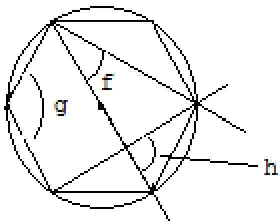
(2)

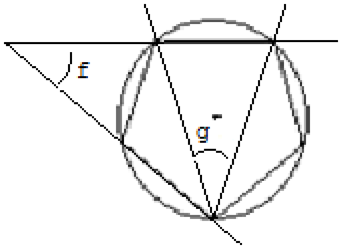




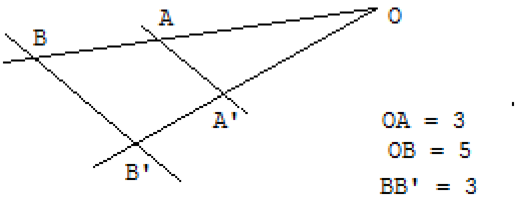


(3)

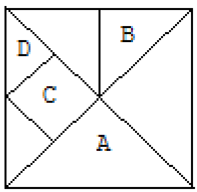




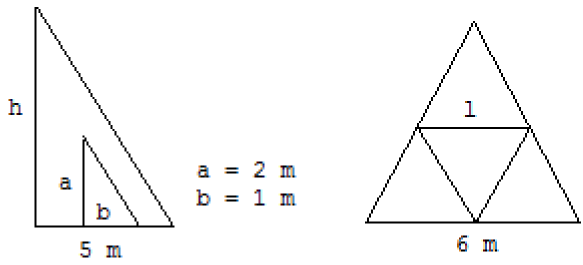
35.- Calcula el valor de: OA’, OB’, AA’



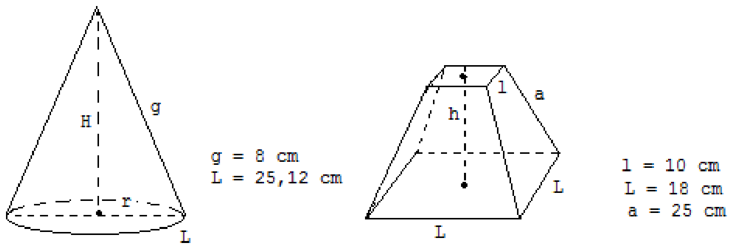
36.- Determina qué fracción del área total del cuadrado representa el área de cada una de las zonas marcadas con A, B, C, D



37.- ¿Cuánto mide h? , ¿Cuánto mide l?, en las siguientes figuras:



38.- Observa las figuras

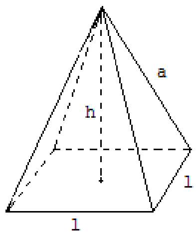


Se pide:

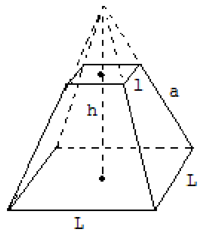
a) Superficie lateral y volumen del cono
b) Superficie lateral y total del tronco

39.- a)Calcula el área lateral y total de la pirámide.

b)Calcula el área lateral y el volumen del tronco de pirámide.

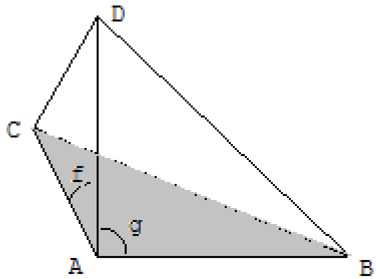


h = 20 cm
l = 16 cm



l = 10 cm
L = 18 cm
a = 25 cm

40.- Observa la figura.



AB = 5 m
BD = 6,40 m
CD = 5 m

g = 90°
f = 90°

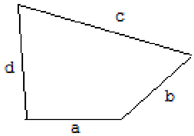
Se pide: a)Superficie total.
b)Volumen

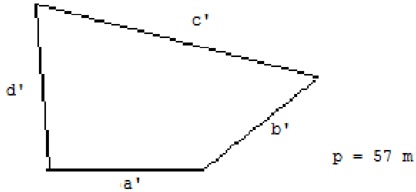
41.- Tengo un cuadrilátero cuyos lados miden:

a = 3, b = 4, c = 7, d = 5

Tengo otro cuadrilátero semejante al anterior cuyo perímetro mide 57 m.

Determina la medida de los lados de este último.





42.- El joven Luis sabe que su talla está en 1,48 m. En una salida al campo encuentra un árbol milenario y se le antoja adivinar su altura (o una aproximación). Entonces recuerda la explicación de su Profesor y se pone manos a la obra.

Mide la sombra del árbol: 5 m , y mide su propia sombra: 25 cm, y con estos datos obtuvo la altura del árbol. Realiza los cálculos.

43.- En un croquis los puntos A y B están seperados por 14 cm, mientras que en la realidad distan entre sí 352 kms. ¿Qué distancia en el croquis corresponde a dos ciudades separadas 221 kms en la realidad?.

44.- Tengo una caja cuyas medidas son: 20, 15, 10 cm. Deseo construir un cajón semejante a la anterior y cuyo volumen sea 24 litros (15 dm^3).

Determina qué dimensiones debe tener.

45.- Tengo un depósito en forma de Ortoedro semejante al de una caja de zapatos cuyas aristas miden: 32, 20 y 11 centímetros. El depósito está situado en un lugar inaccesible, pero que mediante un llenado y vaciado de agua hemos podido comprobar que su volumen es 880 litros. Determina las dimensiones de este depósito.

APÉNDICE I:

Ecuación general de una cónica

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase ‘notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

Vamos a obtener la ecuación de las cónicas sin ninguna restricción en lo que se refiere a sus eje de simetría o a su centro.

Ecuación de la Elipse:

d(P,F) + d(P,F’) = k (k = 2.a)

Sean los focos F(x0,y0), F’(x0’, y0’).

$$\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x0})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0})^2} + \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x0'})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0'})^2} = k$$

Operamos para hacer desaparecer los radicales, como sigue.

Despejamos

$$\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x0})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0})^2} = -\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x0'})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0'})^2} + k$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(\mathrm{x}-\mathrm{x0})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0})^2 = (\mathrm{x}-\mathrm{x0'})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0'})^2 + \mathrm{k}^2 -$$

$$-2.\mathrm{k}.\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{x0'})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y0'})^2}$$

Operando y agrupando:
$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2.\mathrm{x0x} - 2.\mathrm{y0y} + (\mathrm{x0}^2 + \mathrm{y0}^2) =$

$$x^2 + y^2 - 2.x0'x - 2.y0'y + (x0'^2 + y0'^2) + k^2 -$$

$$-2.k.\sqrt{(x - x0')^2 + (y - y0')^2}$$

Simplificando

$$-2.x0x - 2.y0y + (x0^2 + y0^2) = -2.x0'x - 2.y0'y +$$
$$+(x0'^2 + y0'^2) + k^2 - 2.k.\sqrt{(x - x0')^2 + (y - y0')^2}$$

Trasponiendo términos:

$$2.k.\sqrt{(x - x0')^2 + (y - y0')^2} =$$

$$= 2.(x0 - x0').x + 2.(y0 - y0').y +$$

$$+ [-(x0^2 + y0^2) + (x0'^2 + y0'^2) + k^2]$$

Hago:

m = 2.(x0-x0')
n = 2.(y0-y0')
l = -($x0^2$ + $y0^2$) + ($x0'^2$ + $y0'^2$) + k^2 , y queda

$$2.k.\sqrt{(x - x0')^2 + (y - y0')^2} = m.x + n.y + l$$

y elevando otra vez al cuadrado:

$$4.k^2.[(x - x0')^2 + (y - y0')^2] =$$
$$= m^2.x^2 + n^2.y^2 + l^2 + 2.m.n.xy + 2.m.l.x + 2.n.l.y$$

Pasándolo todo al miembro izquierda

$$(4.k^2 - m^2).x^2 + (4.k^2 - n^2).y^2 - 2.m.n.xy +$$

$$+ (-8.k^2.x0' - 2.m.l).x + (-8.k^2.y0' - 2.n.l).y +$$

$$+ [4.k^2.(x0'^2 + y0'^2) - l^2] = 0$$

Este resultado lo escribimos en la forma

$$A.x^2 + B.y^2 + C.xy + D.x + E.y + F = 0$$
(Ecuación general de la Elipse) (2)

donde:

$A = 4.k^2 – m^2$
$B = 4.k^2 – n^2$
$C = -2.m.n$
$D = -8.k^2.x0' - 2.m.l$
$E = -8.k^2.y0' - 2.n.l$
$F = 4.k^2.(x0'^2 + y0'^2) – l^2$
(3)

y donde

$m = 2.(x0 - x0')$
$n = 2.(y0 - y0')$
$l = -(x0^2 + y0^2) + (x0'^2 + y0'^2) + k^2$

Ecuación de la hipérbola:

Sean los focos F(xo, yo), F'(xo',yo'), yo' = yo

A)
Para la rama correspondiente al foco F' se cumple:

d(P,F) – d(P,F') = k, de donde d(P,F) = k + d(P,F')

y en coordenadas

$$(x-xo)^2 + (y-yo)^2 = k^2 + (x-xo')^2 + (y-yo')^2 + 2k.d(P,F')$$

Desarrollando los cuadrados

$[x^2 + xo^2 -2.xxo] + [y^2 + yo^2 -2.yyo] =$
$= k^2 + [x^2 + xo'^2 -2.xxo'] + [y^2 + yo'^2 -2.yyo'] +2k.d(P,F')$

Simplificando (teniendo en cuenta que yo' = yo) y tomando factor común

$2.(xo'- xo).x + 2.(yo'- yo).y + (xo^2 - xo'^2 +$
$+ yo^2 - yo'^2) – k^2 = 2.k.d(P,F')$

Hago:

$m = 2.(xo'-xo)$
$n = 2.(yo'-yo)$
$l = (xo^2 + yo^2) – (xo'^2 + yo'^2) – k^2$

y tengo $m.x + n.y + l = 2.k.d(P,F')$

Elevamos otra vez al cuadrado

$m^2.x^2 + n^2.y^2 + l^2 + 2.m.n.xy + 2.m.l.x + 2.n.l.y =$
$= 4.k^2.[(x-xo')^2 + (y-yo')^2]$

Operando

$m^2.x^2 + n^2.y^2 + l^2 + 2.m.n.xy + 2.m.l.x + 2.n.l.y =$
$= 4.k^2.([x^2 + xo'^2 - 2.xo'x] + [y^2 + yo'^2 -2.yo'y]$

Trasponemos y hacemos

$A = m^2 -4.k^2$
$B = n^2 -4.k^2$

C = 2.m.n
D = 2.m.l + 8.k^2.xo'
E = 2.n.l + 8.k^2.yo'
F = l^2 -4.k^2.(xo'^{2} +yo'^{2})

y obtengo la ecuación general

$$A.x^2 + B.y^2 + C.xy + D.x + E.y + F = 0 \qquad (4)$$

B)
Si P está en la rama correspondiente al foco F, obtenemos el mismo resultado.

Compruébelo el alumno.

Ecuación de la parábola:

Sea la ecuación de s: ax + by + c = 0, y el foco F(xo, yo)

Si P(x, y) es un punto cualquiera de la parábola tenemos

$$d(P,s) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

entonces

$$\sqrt{(x-xo)^2+(y-yo)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ de donde}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{(x-xo)^2+(y-yo)^2} = |ax + by + c|$$

elevando al cuadrado

$$(a^2+b^2).[\,(x-xo)^2+(y-yo)^2] = (ax + by + c)^2$$

$$(a^2 + b^2).[(x^2 + xo^2 - 2xo.x) + (y^2 + yo^2 - 2yo.y)] =$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2ab.xy + 2ac.x + 2bc.y$$

Trasponiendo, simplificando y agrupando, tenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab.xy + [-(a^2 + b^2).2xo - 2ac].x +$$
$$+ [-(a^2 + b^2).2.yo - 2.b.c].y$$
$$+ [(a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2] = 0$$

Haciendo

$A = b^2$

$B = a^2$

$C = -2.a.b$

$D = -2.[(a^2 + b^2).xo + a.c]$

$E = -2.[(a^2 + b^2).yo + b.c]$

$F = (a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2$

donde a, b, c son los coeficientes de la ecuación de la recta directriz s.

La ecuación queda de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$

(Ecuación general de la parábola)

Nota: Observa que para las tres cónicas la ecuación general toma la misma forma, si bien los valores de sus coeficientes se obtienen, en cada caso concreto, de forma específica diferente.

APÉNDICE II: Sobre el Número de oro, el Rectángulo áureo y el Pentágono regular

Definición:

Sea la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que nos da las soluciones $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Llamamos 'Número de oro' a la solución positiva $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es habitual representarlo por $\emptyset$

$$\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Otra forma de introducirlo es la siguiente:

Tomo un segmento de longitud L = 1, y lo divido en dos partes: Una de longitud x, la otra de longitud 1-x.

Estudiamos ahora la proporción $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$

Operando $1 - x = x^2$, $x^2 + x - 1 = 0$, cuyas soluciones son $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Tomando la solución positiva, al hacer el cociente $\frac{x}{1-x}$ vamos a obtener el número de oro:

$$\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \ldots = \frac{-3-\sqrt{5}+3.\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{2+2.\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si hacemos el cociente $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618\ldots$

Conclusión:
La razón entre la parte mayor y la parte menor nos da el número de oro.

Otra aparición del Número de oro: La Sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

En esta sucesión, a partir del segundo término, cada término es la suma de los dos términos precedentes.

Por cálculo directo podemos comprobar que el cociente a_n/a_{n-1} se aproxima tanto como deseemos al valor 1’6181818...

Puesto que éste es al resultado del cociente

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'6181818...$$

podemos concluir que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Demostración: $L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \quad \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}} =$ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 +$ $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{L}$,

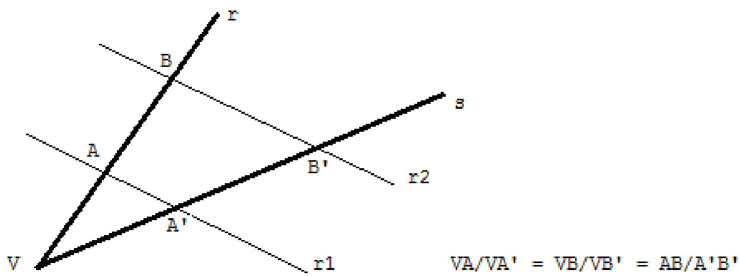
Tengo así: $L = 1 + \frac{1}{L}$, de donde $L^2 - L - 1 = 0$, cuyas soluciones son

$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de las que la positiva es el número de oro.

Teorema de Thales

Suponemos que tenemos la longitud de los segmentos que intervienen.

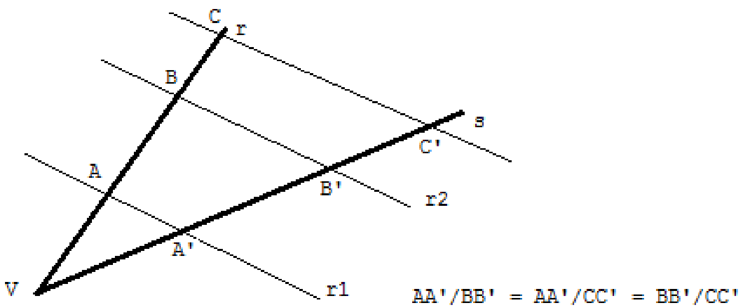
Teorema (de Thales):



Como muestra la figura:

Dadas dos semirectas r y s con el punto V común. Dos rectas r1, r2 paralelas entre sí las cortan produciendo segmentos proporcionales:

$$\frac{VA}{VA\prime} = \frac{VB}{VB\prime} = \frac{AB}{A\prime B\prime}$$



También $\frac{AA\prime}{BB\prime} = \frac{AA\prime}{CC\prime} = \frac{BB\prime}{CC\prime}$

Triángulos semejantes:

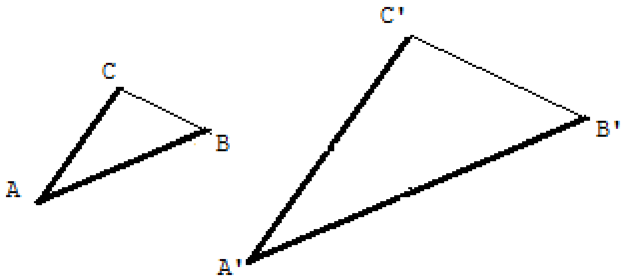
En la figura se vislumbra la semejanza de los triángulo

AVA’ y BVB’

Definición:

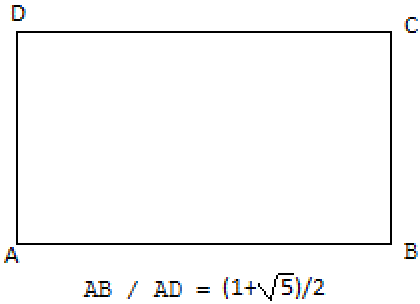
En general se define la semejanza de dos triángulos ABC, A’B’C’ si sus lados homólogos satisfacen la igualdad

$$\frac{AB}{A\prime B\prime} = \frac{AC}{A\prime C\prime} = \frac{BC}{B\prime C\prime}$$

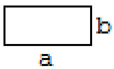


Rectángulo áureo

Definición:
Decimos que el rectángulo ABCD cumple las ‘Proporciones áureas’ si es cierta la siguiente proporción $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de oro)



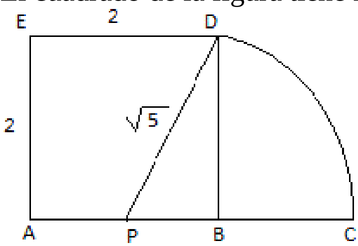
Resumen:

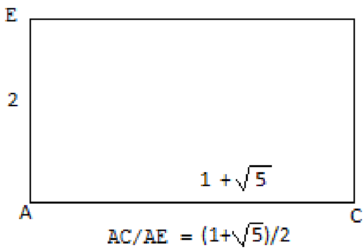


Para el Rectángulo áureo: $a = b.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

Construcción:

El cuadrado de la figura tiene lado AB = 2





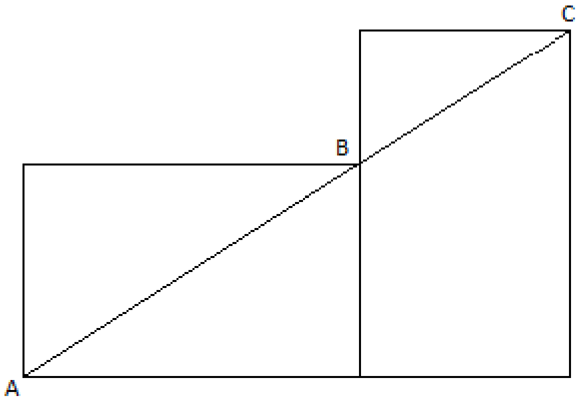
El punto P es el punto medio del segmento AB, por lo que PB = 1. Entonces el segmento PD = $\sqrt{5}$

Tomando PD como radio trazo un arco hasta cortar en C. Entonces el segmento AC = $1 + \sqrt{5}$

Corolarios del Número de oro:

A) Curiosidades-Consecuencias

Sitúo dos rectángulos áureos como muestra la figura.



Vamos a demostrar que los puntos A, B, C están alineados.
Probamos que los vectores AB y AC son proporcionales:

A(0,0), B(1+$\sqrt{5}$; 2), C(3+$\sqrt{5}$; 1+$\sqrt{5}$)

AB = (1+$\sqrt{5}$; 2), AC(3+$\sqrt{5}$; 1+$\sqrt{5}$)

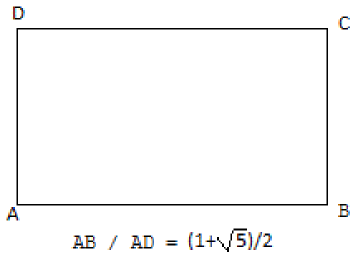
$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \ldots = \ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ,$$

Por tanto AC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .AB

(Comprobación: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.(1+$\sqrt{5}$; 2) = ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\left(1+\sqrt{5}\right)$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}.2) =$ ($\frac{6+2.\sqrt{5}}{2}$; 1+$\sqrt{5}$) = (3+$\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$))

B) Generar un Rectángulo áureo partiendo de otro que lo sea

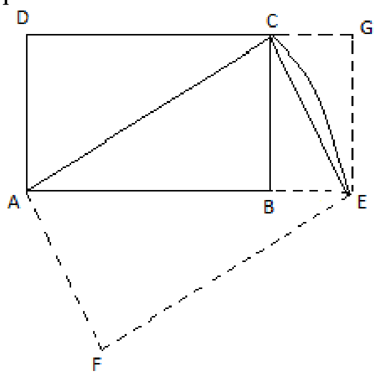
Supongamos que el siguiente rectángulo es áureo:



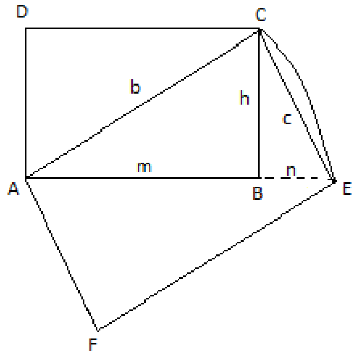
$AB : AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Tomando la diagonal AC como radio trazamos un arco hasta cortar la prolongación del lado AB.

En lo que sigue, y en base a la siguiente figura, demostraremos que el rectángulo AFEC también cumple la proporción áurea. Es importante hacer notar que el arco CE es arco de circunferencia con radio AC.



Aplicaremos las propiedades en el triángulo rectángulo AEC,



Tenemos por hipótesis : $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ó con la nueva notación

$$\frac{m}{h} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Utilizaremos m = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.h$

Por las referidas propiedades tengo $h^2 = m.n$, y entonces

$$\frac{h^2}{n^2} = \frac{m.n}{n^2} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}.h}{2}}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{h}{n} \;\text{->}\; \frac{h}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$ lo

cual nos dice que el rectángulo BEGC es áureo.

Por otro lado

$b^2 = m^2 + h^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2.h^2 + h^2 = h^2.(1 + \frac{6+2.\sqrt{5}}{4}) =$

$= \frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2$

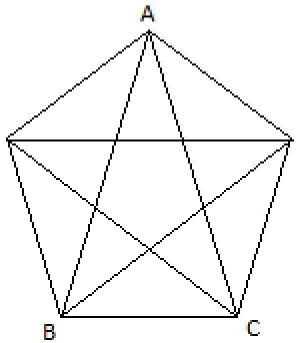
$c^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2.h^2 = h^2.\left(1+\frac{2}{6+2.\sqrt{5}}\right) = \cdots =$

$= h^2.\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Entonces $\frac{b^2}{c^2} = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.h^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ -> $\frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y por tanto el rectángulo AFEC es áureo.

El Pentágono regular: (T. de Ptolomeo, Claudio)

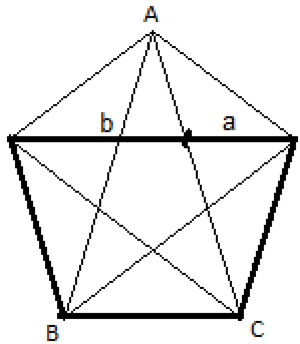
El Pentágono, y más concretamente el pentágono estrellado fue el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Veamos algunas de sus características más destacadas.



Demostraremos que: La razón entre la diagonal AB y el lado BC es el número de oro:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esta igualdad se deduce del Teorema de Ptolomeo (Claudio Ptolomeo. Libro XIII de Elementos de Euclides pág. 251. Verlo más abajo).



Suprimiendo un vértice del pentágono resulta un cuadrilátero (trapecio) como muestra la figura. Conforme al citado teorema se cumple $\frac{b+a}{b} = \frac{b}{a}$, y decimos que el segmento queda dividido en "media y extremos". Operando tenemos

$$(b + a).a = b^2 , \quad \text{esto es} \quad b^2 = a^2 + b.a$$

De esta obtenemos: $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}$, y si hago x = b/a obtengo la ecuación

$x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son, como ya sabemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

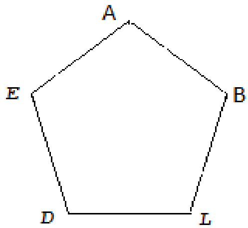
La solución positiva me dice que: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pero AB = b + a , BC = b, por lo tanto $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

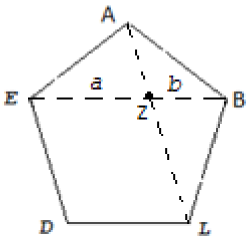
T. de Ptolomeo (Libro XIII de Elementos de Euclides pág. 251)

Proposición 8.- Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subdividen dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

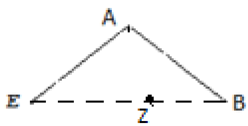
Interpretación y Comprobación: Datos

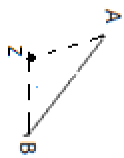


Hipótesis:



Según vimos en la Pro.7 tengo: semejantes BAE y AZB, y AEZ es isósceles.





Por tanto

EB / BA = EA / BZ , pero EA = a, BZ = b, EB = a + b, y además BA = EA = a.

Entonces $(a + b) / a = a / b \Longleftrightarrow (a + b).b = a^2$, que significa extrema y media razón,

$$\rightarrow a^2 = b^2 + a.b \rightarrow b^2 + a.b - a^2 = 0$$

Conclusión: $a^2 = b^2 + a.b$

CONSTRUCCIONES geométrica con regla y compás

A) Triángulo equilátero:

Figura (1): Dato el segmento AB, lado del triángulo

Pincho en A y trazo arco con radio AB; pincho en B y trazo arco con el mismo radio BA; obtengo el punto C, que es el tercer vértice.

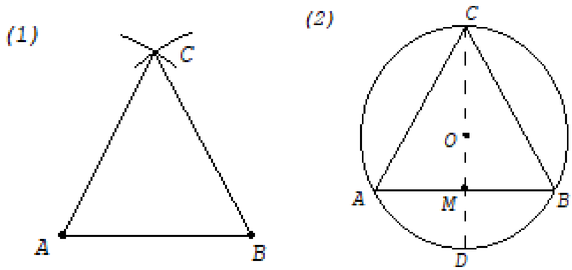


Figura (2): Dato un círculo de radio R.

Interesa tener en cuenta que el lado AB del triángulo está relacionado con el radio mediante

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} . R, \text{ o bien } R = \frac{2.\sqrt{3}}{3} . AB$$

Se ha demostrado que el punto M es el punto medio de OD. Por consiguiente:

Determino el punto medio M, y trazo por M la paralela al diámetro; esta recta corta al círculo en A, B. El vértice C es evidente.

B) El hexágono regular:

Figura (1): Dato el lado AB del hexágono

Construyo el triángulo equilátero ABO. Trazo por O la recta paralela al lado AB, y sobre esta recta tomo las distancias OC y OD. Prolongo los lados AO y BO, y sobre estas prolongaciones tomo las distancias OE y OF. Unimos los puntos obtenidos y tengo el hexágono.

(1)

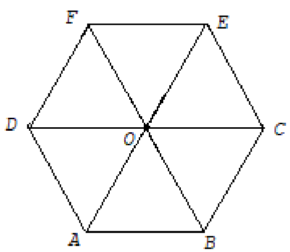
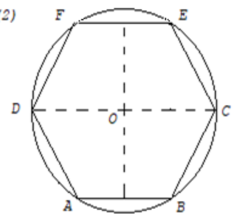


Figura (2): Dato el círculo de radio R = AB = lado del hexágono

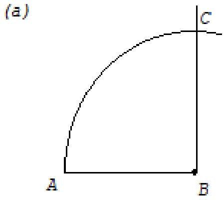
(2)



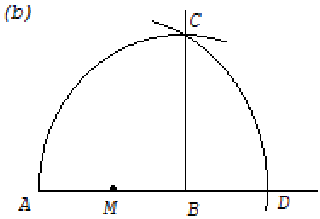
Trazo el círculo con radio R. Con el compás tomo la medida del radio, OD, y la traslado sobre la circunferencia, pinchando en D, para obtener los puntos A y F. Por A y por F trazamos paralelas al diámetro y cortarán en los puntos B y E. Tengo también el punto C. Unimos todos los puntos y resulta el hexágono inscrito.

C) Pentágono regular: Dato el segmento AB

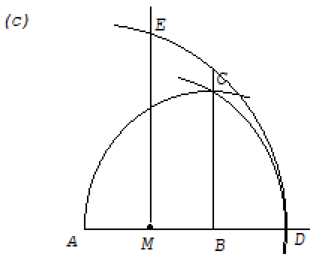
Trazo perpendicular por B. Con centro B trazo arco con radio AB, obtengo C.



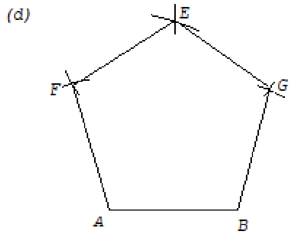
Obtengo el punto medio M. Con centro M trazo arco con radio MC, obtengo D.



Trazo por M la perpendicular a AB. Con centro A trazo arco con radio AD, obtengo E.



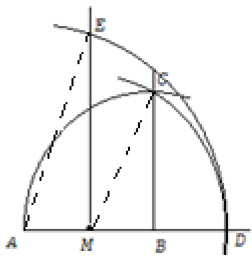
Con radio AB, trazo un arco con centro E de forma que corte al arco con centro A obteniendo F, y al arco con centro B obteniendo G.



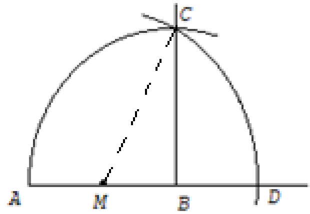
Tengo completado el pentágono.

DEDUCCIÓN: Proceso de Construcción del Pentágono regular conociendo longitud del lado.

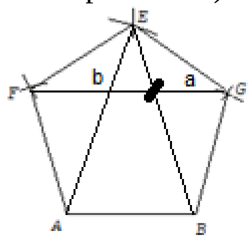
Si nos fijamos en el proceso de construcción del pentágono podemos concluir que el momento crítico lo tenemos cuando obtenemos el punto D.



Queda así determinado el vértice E, y a partir de aquí quedan también determinados los otros dos vértices F, G. Nuestro objetivo es demostrar que el punto D, obtenido como nos indica el proceso de construcción conocido, cumple la condición AD = AE.

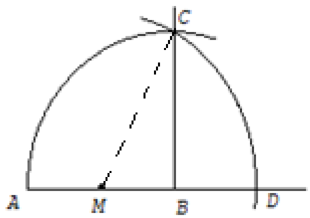


En realidad el punto más importante es C, conocido el cual obtenemos D. Por tanto nos centraremos en demostrar que el punto C, obtenido fácilmente, cumple la condición AD = AE.
Tendremos que recordar el Teorema de Ptolomeo (pág. 201-202 de GeometríaDescriptivaVol4)



$\frac{AE}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, AE = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} . L$ (L = AB)

Vamos a obtener el valor MC en función del lado L.



Observa que BC = L. Tenemos $MC^2 = L^2 + \frac{L^2}{4} = \frac{5.L^2}{4}$, y por tanto

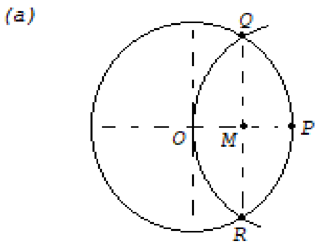
$$MC = \frac{\sqrt{5}\,.\,L}{2}$$

Teniendo en cuenta que MD = MC, tenemos: AD = AM + MD =

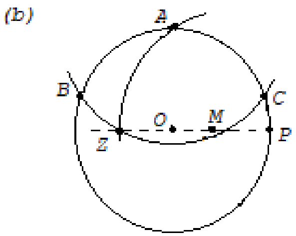
$$= \frac{L}{2} + \frac{\sqrt{5}\,.\,L}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.\,L\,,\ \text{ es decir } \ AD = AE.$$

Conclusión: El punto C obtenido sin más datos que el valor L es el punto correcto para que el proceso de construcción sea válido.

D) Pentágono regular: Inscrito en círculo con radio AB

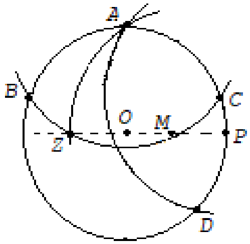


Con centro en P trazo arco con radio OP, obtengo Q, R y el punto medio M.



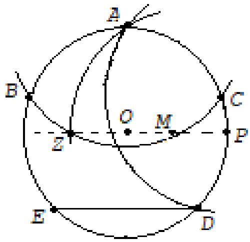
Con centro en M trazo arco con radio MA, obtengo Z. Con centro en A trazo arco con radio AZ, obtengo B, C.

(c)

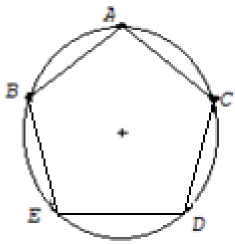


Con centro C trazo arco con radio CA, obtengo D.

(d)



Por D trazo paralela al diámetro y obtengo E.

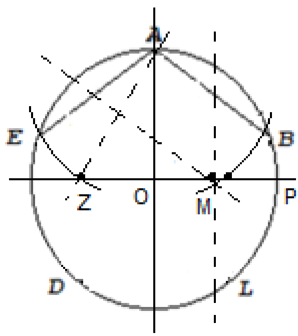


Los cinco puntos A, B, C, D, E son los vértices del pentágono.

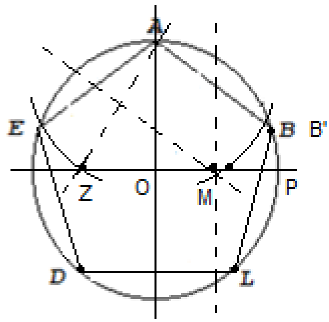
DEDUCCIÓN: Proceso de Construcción del Pentágono regular inscrito en un círculo.

Si nos fijamos en el proceso de construcción al que nos referimos podemos concluir que el momento crítico lo tenemos cuando obtenemos el punto Z, y para llegar al punto Z también es crítico el punto M.

Realizado el proceso manualmente, pero en sentido contrario partiendo de que tenemos el lado AE, con centro en A y radio AE obtengo el punto Z. Este punto Z puede considerarse obtenido trazando un arco que pase por A y con centro en un hipotético punto M, que debemos determinar, y esta será la clave final. Trazo por el punto medio del segmento AE la perpendicular a este segmento y esta corta al radio OP en un punto M. Si el trazado está bien hecho nos permite sospechar que este punto M coincide con el punto medio de OP, previa determinación de dicho punto.



Admitida la hipótesis de que M coincide con el punto medio del segmento OP, solo tenemos que comprobar y confirmar que AE y AB son lados del pentágono regular. Para esto los trasladamos marcando los puntos D, L y B', y observando que B' coincide con B.



4.- El Problema de Napoleón (División del círculo en cuatro partes)

El problema de Napoleón es un famoso problema de construcción con sólo compás en geometría euclídea.

Fue su amigo, el matemático Lorenzo Mascheroni, quien introdujo la limitación de usar solo el compás y lo expuso en 1802 en su libro "*La geométrie du compas*".

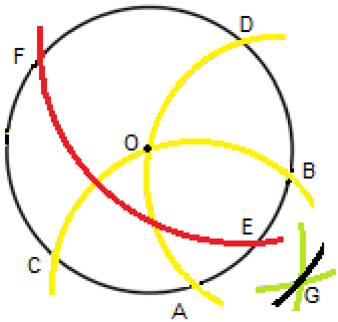
Enunciado:

Dado un círculo con radio R y su centro O, se trata de dividir el círculo en cuatro arcos iguales empleando solo un compás, o lo que es lo mismo, hallar los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia dada.

Proceso: Pincho en A y trazo arco con radio R, obtengo los puntos B, C. A continuación pincho en B y trazo arco con radio R, obtengo el nuevo punto D. Con centro en C trazo arco con radio CB, y con centro en D trazo arco con radio DA. Obtengo el punto G.

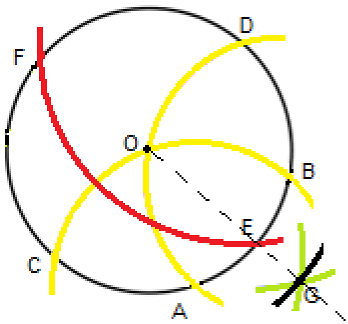
(Si pudiéramos utilizar la regla uniendo los puntos OG nos daría el punto medio E del arco AB, y el arco DE sería el primero de los cuatro arcos deseados).

Para evitar el uso de la regla este punto E lo obtenemos trazando un arco con centro en D y radio OG. Este arco nos da los puntos E y F.



Debemos confirmar que el arco con centro en D y radio OG pasa por el mismo punto E, punto medio del arco AB.

Hecho el trazado con regla parece que así es



Conclusión:

Prescindiendo de la regla podemos conseguirlo utilizando solo el compás.

NOTA: Todavía cabe preguntarse. ¿Este hallazgo habrá sido coincidencia?. Sería interesante demostrar que el punto E, obtenido mediante el arco de referencia coincide con el punto medio del arco AB.

5.- SOBRE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

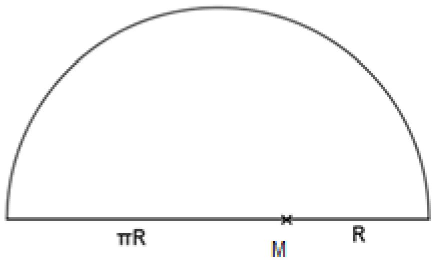
Estamos ya hartos de leer/escuchar que la cuadratura del círculo es algo imposible, que no se puede «cuadrar» un círculo, que es una construcción que no se puede realizar. Lo tenemos tan oído que hasta como frase ha pasado a formar parte de nuestro lenguaje habitual (la propia RAE recoge dentro de «cuadratura» que *la cuadratura del círculo* se usa *para indicar la imposibilidad de algo*).

Y así es. Como ya sabemos, **Lindemann** demostró que π es un número trascendente, hecho que implica que la cuadratura del círculo es una construcción imposible…¿Seguro? Sí, siempre que añadamos la coletilla *con regla y compás*, que en realidad significa *utilizando solamente una regla y un compás con las normas para construcciones marcadas en la antigua Grecia* (aquí tenéis esas condiciones y también algunas construcciones sencillas con regla y compás). Es decir, **la cuadratura del círculo es imposible si como únicas herramientas tenemos una regla y un compás y solamente podemos utilizar las normas que se establecieron en la antigua Grecia**. Bien, ¿y qué ocurre si no imponemos esa restricción? ¿Qué pasa con esta construcción si abrimos un poco el campo, si no somos tan restrictivos? Pues…

…**que la cuadratura del círculo sí es posible**. Y no me refiero a aproximaciones más o menos buenas, sino a la construcción exacta. Es decir:
Si eliminamos la restricción de utilizar solamente regla y compás y las normas establecidas en la antigua Grecia, se puede realizar la cuadratura del círculo. Esto es, partiendo de un círculo de área A se puede construir un cuadrado de área A.
Vamos a ver cómo hacerlo.
Partimos de una círculo de radio R cuya área es S = πR^2.
Sobre la superficie de un rodillo de radio R marcamos un punto P, y rodando sobre una superficie plana deja marcado un segmento L de longitud $L = 2.\pi.R$.

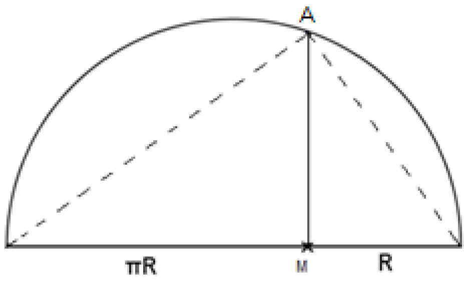
Marcamos el punto medio del segmento L, lo que podemos hacer con un compás, y obtengo el segmento L' de longitud L' = $\pi.R$.

Unimos este segmento L' con otro de longitud R, obteniendo un único segmento de longitud $\pi.R + R = (1+\pi).R$, que será el diámetro de un nuevo círculo.



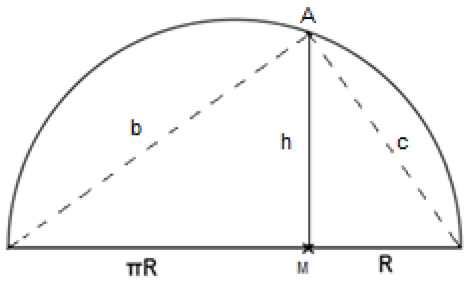
NOTA: Observa que la longitud del segmento πR no es racional, pero lo hemos obtenido marcando el punto medio de aquel y trasladándolo con el compás.

Por el punto M trazamos un segmento perpendicular al diámetro y lo prolongamos hasta que corte a la semicircunferencia.



Sabemos que el triángulo formado por las líneas de puntos y el diámetro es rectángulo, con ángulo recto en A.

Pretendemos ahora obtener el valor de h, o su relación con $\pi R \;\; y \;\; R$.



Un resultado importante cuando en geometría estudiamos el triángulo rectángulo es precisamente el teorema de la altura, que afirma la relación: $h^2 = \pi R \,.\, R = \pi R^2$.

Para llegar a esta relación hemos aplicado el Teorema de Pitágoras teniendo en cuenta los tres triángulos rectángulos bien visibles.
El valor numérico de h, su longitud, es $R.\sqrt{\pi}$, que es un valor irracional. Pero hemos de fijarnos en su representación segmentaria y su traslado con el compás.

La relación $h^2 = \pi R^2$ demuestra que un cuadrado de lado h tiene área igual a la del círculo de partida. Si con la regla y compás construimos el referido cuadrado hemos probado que sí es posible la llamada "cuadratura del círculo con regla y compás".

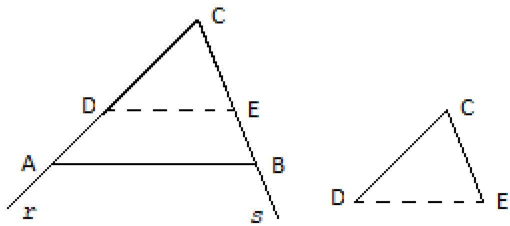
Bibliografía:

Vitaminas matemáticas, de **Claudi Alsina**.

APÉNDICE III: Demostración del Teorema de Thales.

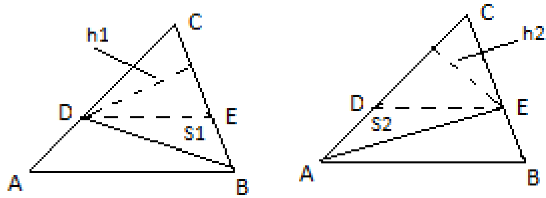
Tengo las semirectas r, s, que se cortan en C. Trazamos rectas paralelas entre sí que cortan a las anteriores dando los segmentos AB y DE.

Afirmo que: AD / DC = BE / EC



Demostración: Observa siguientes figuras

S2 = S1, por tener la misma base ED y estar comprendidas entre las mismas paralelas. Sea S el área del triángulo DEC.



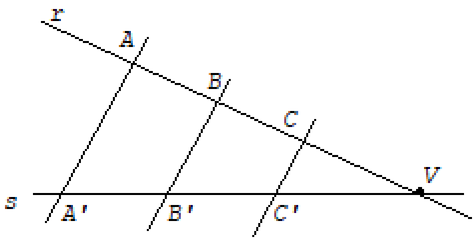
Por otro lado: S1 = 1 / 2 .BE . h1 , S = 1 / 2 .EC .h1 ,
y por lo probado en Prop. 1 tengo

S1 / S = BE / EC

S2 = 1 / 2 .AD .h2 , S = 1 / 2. DC .h2, por lo tanto
S2 / S = AD / DC
Pero S2 = S1, por lo cual: AD / DC = BE / EC

c.q.d.

Caso más general: Observa la figura



Tengo dos rectas r, s que se cortan en V. Trazo tres paralelas entre sí que al cortar a r y s producen los segmentos AA', BB', CC'.

Afirmo que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

Demostración: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CV}{A'V}$, y $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CV}{C'V}$

Pero tenemos una propiedad que nos dice lo siguiente

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ -- > $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$, y recíprocamente, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ -- > $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Entonces

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} < -- > \frac{AB+BC}{A'B'+B'C'} = \frac{BC}{B'C'} < -- > \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Pero sabemos que

$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CV}{C'V}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CV}{C'V}$, por lo tanto es cierta la igualdad $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ c.q.d.

APÉNDICE IV:

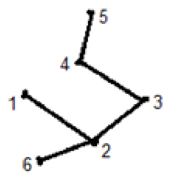
El Teorema de Euler para los poliedros
Ángulos de Euler

INTRODUCCIÓN:

Grafo:
En un plano o en el espacio, llamamos "Grafo" a todo conjunto V de puntos, que serán los vértices del grafo, más un conjunto L de segmentos cuyos extremos sean dos puntos de V, que serán las aristas del grafo. Lo podemos representar mediante G = (V, L), o simplemente G.

En otros contestos se habla de "nodos" en lugar de vértices.

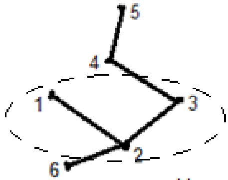
Ejemplo:



Árbol G V = (Aristas recorridas) + 1

Cadena en un grafo:
Dentro de un grafo llamamos cadena a todo subconjunto de vértices más las aristas que permiten comunicar un primer vértice con un último vértice.

Ejemplo:



Una cadena

En un grafo, dados dos vértices puede o no ser posible comunicarlos (unirlos) recorriendo una arista o más aristas y pasando por otros vértices. Esto es una cadena.

En un grafo puede ocurrir que dos vértices puedan ser unidos por más de una cadena. Decimos que es un lazo.

Árbol:
Llamamos "Árbol" a un grafo en el cual dos vértices cualesquiera están comunicados por una sola cadena. No contiene lazos.

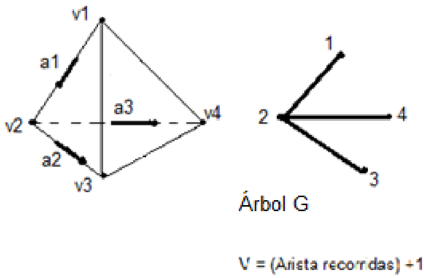
Sea un poliedro P. Partiendo de uno de sus vértices, y siguiendo el camino marcado por algunas de las aristas del poliedro, podemos recorrer algunos de los restantes vértices, obteniendo así una cadena formada por vértices y aristas.

Árbol asociado a un poliedro:
Si en el proceso anterior recorremos todos los vértices, obtenemos un árbol asociado a ese polígono. Este árbol no es único.

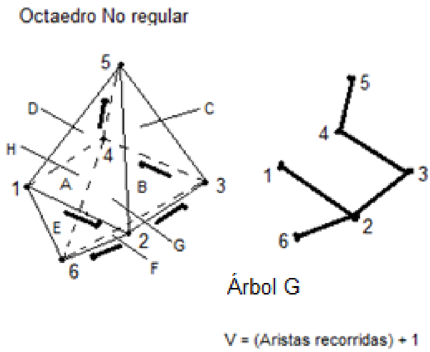
Si comenzamos el camino en otro vértice obtenemos otro árbol. Partiendo del mismo vértice podemos recorrer caminos diferentes, y resultarán árboles diferentes.

Observa:
Partiendo de uno de los vértices, nos movemos por las aristas hasta completar todos los vértices, sin repetir ninguno, y sin pasar dos veces por el mismo vértice.

Ejemplos:
1.-



2.-



Observa que se cumple siempre:

No. vértices = No. Aristas + 1

Teorema de Euler

Enunciado:

Sea P un poliedro convexo, esto es: Cada par de vértices pueden ser unidos mediante un segmento contenido por completo en la superficie o en el interior del polígono.

Afirmamos que se cumple la igualdad: V + C = A + 2

Demost.:
Tomando origen en un vértice V1 construyo el árbol G que resulta de unir todos los restantes vértices recorriendo justamente las aristas necesarias. En este grafo se cumple V = [Aristas recorridas] + 1 .

Después construyo otro árbol G', que llamaremos "dual" del anterior, del siguiente modo. Para cada cara del poliedro P marco un punto que será vértice del futuro árbol. Sea n1, n2, …, nk la sucesión de estos puntos (Los tendré marcados sobre papel). Los puntos n_i , n_j serán unidos formando un segmento si, y sólo entonces, las caras asociadas tienen una arista común que no figura en el árbol G construido antes. Por las condición de convexidad impuesta al poliedro P este árbol, dual del primero, es conexo y en él figuran todas las aristas no recorridas en la construcción de G, por lo cual tengo: V' = [Aristas no recorridas] + 1, y como estos vértices V' representan las caras, tengo: C = [Aristas no recorridas] +1.

Evidentemente, Aristas = [Aristas recorridas] + [Aristas no recorridas].

Resumiendo:

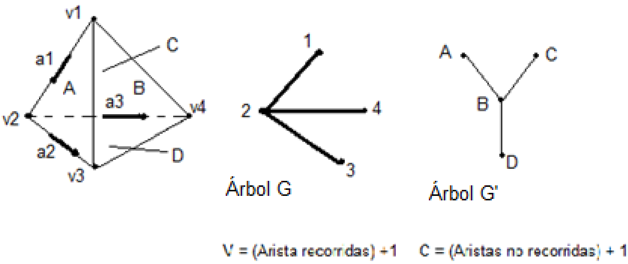
Árbol G: V = [Aristas recorridas] + 1
Árbol G': C = [Aristas no recorridas] + 1

y sumándolas miembro a miembro: $V + C = A + 2$

c.q.d.

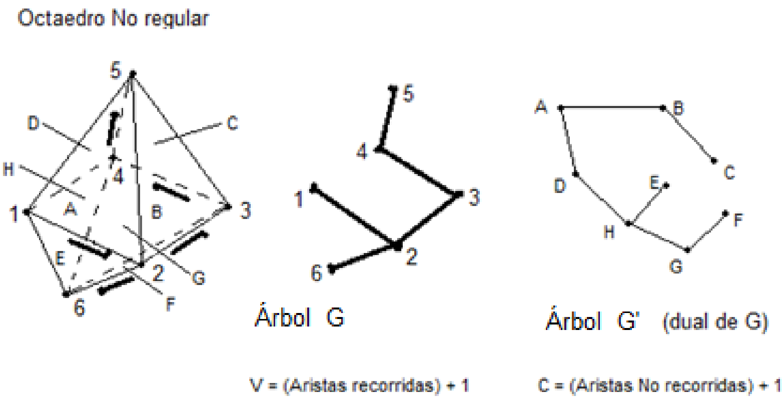
Ejemplos:

1.- El Tetraedro



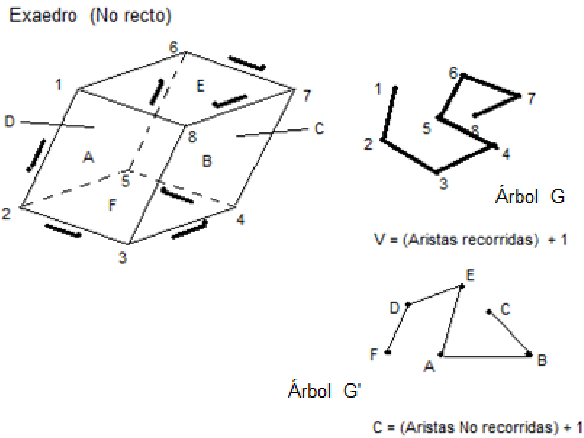
Sumando miembro a miembro tengo: $V + C = A + 2$

2.- El Octaedro



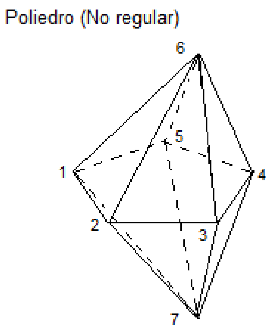
Sumando miembro a miembro: $V + C = A + 2$

3.- Exaedro

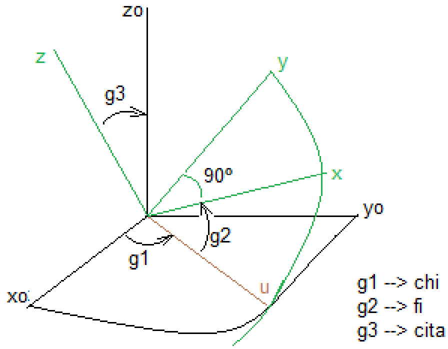


Por tanto: V + C = A + 2

4.- Aplíquelo el alumno para el siguiente poliedro



Ángulos de Euler:



En Matemáticas llamamos ángulos de Euler a los ángulos:

g1, g2, g3

3.- El Teorema de Napoleón (De los triángulos equiláteros)

NOTA:

Para lo que sigue necesitamos recordar lo siguiente. Es fácil comprobar que la altura de un triángulo equilátero de lado l es H = $\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,l$. El baricentro (o centro de gravedad) de dicho triángulo es un punto de la altura situado a $\frac{1}{3}$ de la base y a $\frac{2}{3}$ del vértice. Llamo h a la distancia hasta el vértice, h = $\frac{2}{3}\,.H = \frac{2}{3}\,.\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,l = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.\,l$, por tanto $l = \frac{3}{\sqrt{3}}\,.\,h = \sqrt{3}\,.\,h$

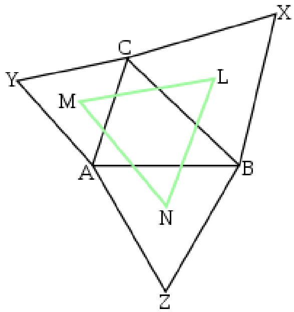
Teorema del triángulo de Napoleón

Tenemos un triángulo cualquiera ABC. Sobre cada lado construimos un triángulo equilátero. Unimos los baricentros (centros de gravedad) de estos tres triángulos y obtenemos un nuevo triángulo MNL. Afirmamos que este triángulo MNL es equilátero.

Dem.:

Dicho esto, si hacemos el giro de 30º con centro en C los puntos L cae sobre CX, mientras que M cae sobre CA. Si a continuación aplicamos la homotecia multiplicando por $\sqrt{3}$, entonces L coincide con X, y M con A. Tenemos así el lado de un triángulo de lado AX.

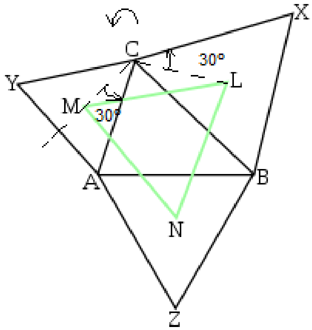
Tenemos la situación de la figura (1)



(1)

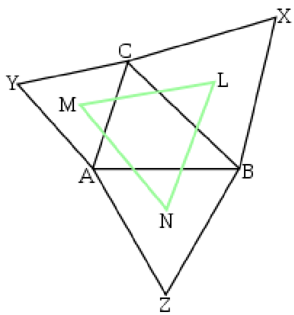
Observa la figura (2):

Aplico al triángulo *MCL* una rotación (contra agujas del reloj) de 30° centrada en *C*, y a continuación aplico una una homotecia de razón $\sqrt{3}$. Al final los puntos *M* y *L* coinciden con *A* y X por lo que el segmento *AX* es igual a $\sqrt{3}$ por segmento *ML:* $|AX| = \sqrt{3}$.|*M/*|.



(2)

Por otro lado, observa que mediante un giro de 60º , aplicado a YCB y con centro en C, hacemos coincidir los triángulos *YCB* y *ACX*, y por tanto los segmentos *AX* y *YB* son iguales.

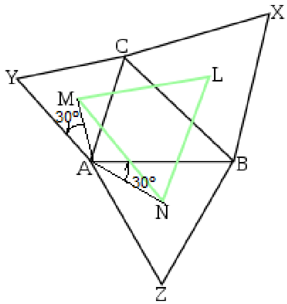


(1)

Observa la figura (3):

Aplico el mismo razonamiento al triángulo MAN, tomando como centro de rotación el punto A. Obtengo que $|BY| = \sqrt{3}\,.\,|MN|$

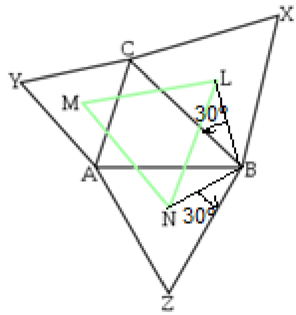
Por otro lado, mediante un giro de 60º , aplicado a YAB y con centro en A, hacemos coincidir los triángulos *YAB* y *CAZ*, y por tanto los segmentos CZ y *YB* son iguales.



(3)

Observa la figura (4)

Haciendo lo mismo con el triángulo NBL, con centro en B, obtenemos que $|CZ| = \sqrt{3}\,.\,|NL|$



(4)

Por tanto tenemos las siguientes relaciones:

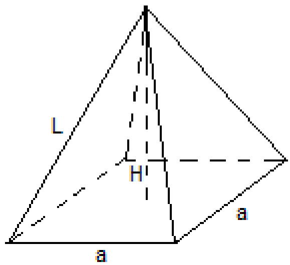
$|CZ| = |BY| = |AX|$, y por tanto

$\sqrt{3}\,.\,|NL| = \sqrt{3}\,.\,|MN| = \sqrt{3}\,.\,|ML|$, *de donde*

$|NL| = |MN| = |ML|$, *y por tanto es el triángulo MNL es equilátero.*

COLECCIÓN de Problemas geométricos resueltos:

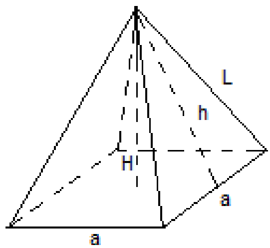
1.- Pirámide con base cuadrada



Datos: a = 10 , Sl = 240 (área lateral)

Calcula: a) La arista L , b) Su volumen

SUGERENCIA:



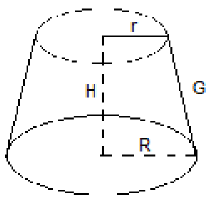
Una cara: S = 60

60 = 1/2.(a.h) --> h = 12

H^2 = 5^2 + 12^2 --> H = 13

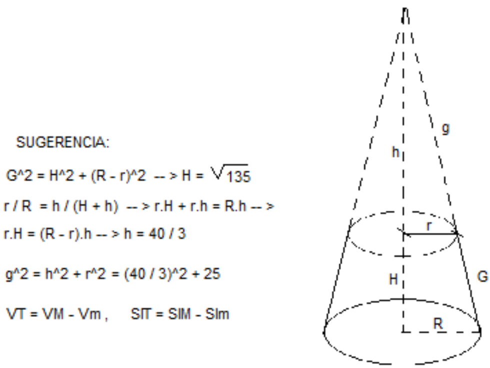
V = 1/3.(100.13) = 1300 / 3

2.- Tronco de cono



Datos: R = 8, r = 5, G = 12

Calcula: a) Volumen del tronco de cono
b) Área lateral del tronco de cono

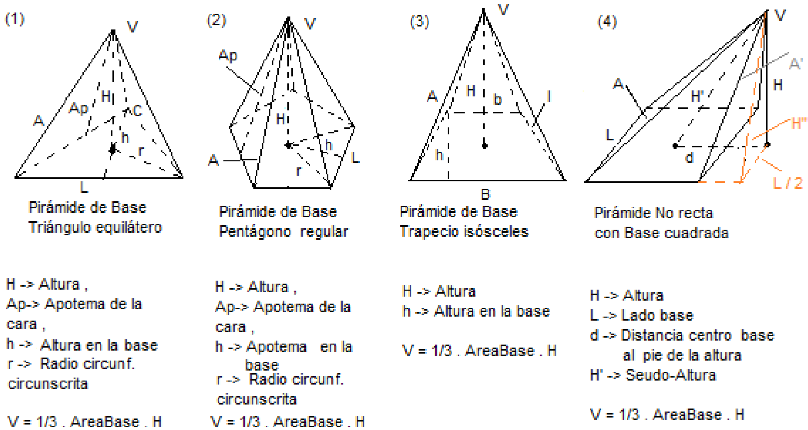


Geometría Descriptiva en el Espacio

Referencia: Las siguientes figuras

48.- Pirámide recta de base triángulo equilátero: Fig. 1:

Pirámide recta de base regular triángulo equilátero. Datos: Lado L, arista A, en este orden.
Datos: L = 30, A = 40
Area base = 389,711
Área lateral = 1668,644
V = 4683,743



49.- Pirámide recta de base pentágono regular: Fig. 2:

Pirámide recta de base pentágono regular. Datos: Lado L, arista A, valor de r.
Datos: L lado base = 20, A arista = 30
r radio circunf. circuns. = 15
h apotema = 11,18
Area base = 559
Apotema en la cara = 28,284
Superficie lateral= 1414,2
Superficie total = 1973,2
Altura H = 25,98
Volumen V = 17087,912

50.- Pirámide recta de base trapecio isósceles: Fig. 3:

Pirámide recta de base trapecio isósceles. Datos: Base B, lado l, altura h. Altura H, en este orden. Calcula su Volumen .
Datos: B Base mayor = 30, l lado = 20

h Altura en la base = 15, H Altura = 30
Base menor = 3,542
Área base = 251,565
Volumen = 2515,65

51.- Pirámide No recta de base cuadrada: Fig. 4:

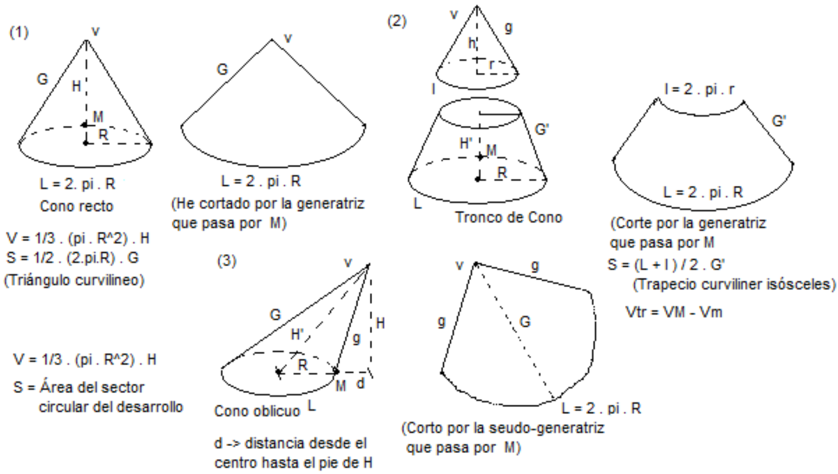
Pirámide No recta de base cuadrada. Datos: Lado L, distancia d, distancia H ' .
Datos: L lado base = 30
d distancia desde el centro al pie de l altura = 20
H' Seudo-Altura = 40
Altura H = 34,641
Altura-Apotema en cara Mayor = 49,244
Área cara Mayor = 738,66
Altura-Apotema en cara menor = 34,999
Área cara menor = 524,985
Altura H" = 37,749
Superf. dos caras laterales = 1132,47
Superf. lateral total = 1263,645

Referencia: Siguientes figuras

52.- Cono recto: Fig. 1

Cono recto. Datos: La generatriz G y el radio R, en este orden.

Datos: G = 30, R radio base = 15
Altura H = 25,98
Volumen V = 6121,392
Longitud circunf. = 94,247
Superficie lateral = 1413,705
St = 2120,563, V = 6121,392



53.- Cono y Tronco de Cono, rectos: Fig. 2

Datos: R Radio mayor = 15, H' = 10
r = 5, G' = 20
Altura h = 5
Altura H = 15
Volumen cono menor Vcm = 130,899
Volumen cono Mayor VcM = 3534,291
Volumen Tronco = 3403,392
Generatriz g = 7,071
Superf. lateral cono menor = 111,07
Superf. lateral cono Mayor = 1275,69
Superf. lateral Tronco = 1164,62

54.- Cono oblicuo: Fig. 3:

Cono oblicuo: Datos: El perímetro L de la base, valor g, distancia d, en este orden. Calcula su Volumen.

Datos: L perímetro de la base = 90,
g generatriz = 20, d distancia = 20
Radio círculo = 14,323
Área círculo = 644,492
Altura H = 19,177
Volumen cono = 4119,807

Referencia: Siguientes figuras

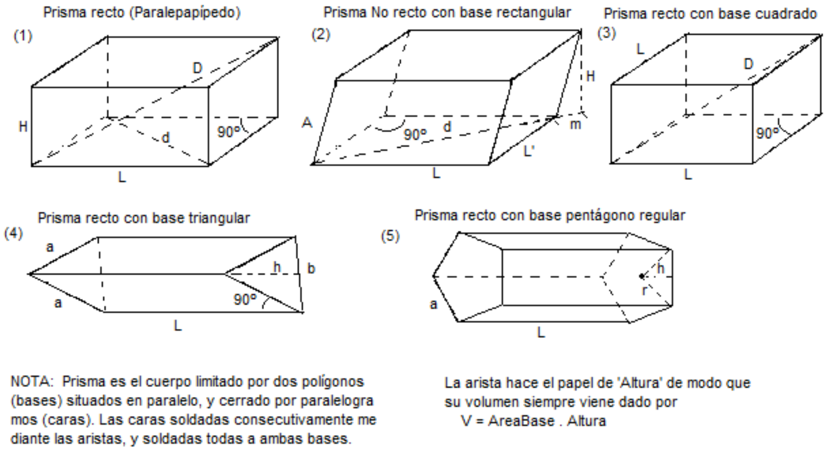
55.- Prisma recto con base rectangular: Fig. 1:

Datos: Lado L, diagonal d, diagonal D, en este orden.
Datos: L lado base = 30, d diagonal base = 40
D Diagonal del prisma = 50
Altura del prisma = 30
Volumen V = 23811,761
Superf. lateral S = 3387,45
Superf. total St = 4974,9

56.- Prisma No recto: Fig. 2:

Datos: Lado L', arista A, diagonal d, valor m, en este orden
Datos: L' un lado de la base = 20
A arista = 15
A diagonal en la base = 30
m desviación = 5
El otro lado de la base L = 22,36
Altura H = 14,142
Volumen = 6324,302
Superf. lateral = 1232,43024

Superf. total = 2126,83024



57.- Prisma recto, con bases triángulos isósceles: Fig. 3:

Datos: Arista L, arista a, lado b, en este orden
Datos: L arista = 30, a lado base = 15
b lado base = 10
Altura en la base = 14,142
Área base = 70,71
Volumen = 2121,3
Superf. lateral = 1200
Superf. lateral = 1341,42

58.- Prisma recto, con bases pentágono regular: Fig.5:

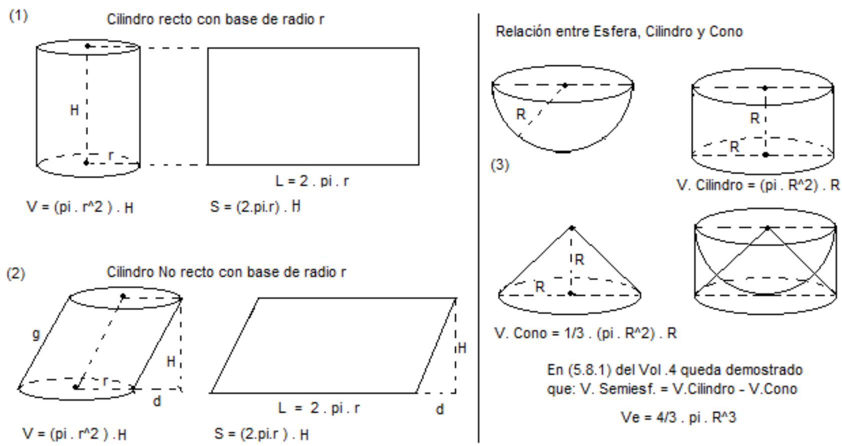
Datos: Arista L, arista a, lado b, en este orden
Datos: S Superf. lateral = 200, a lado base = 20
r = 15
Altura en la base = 11,18

Arista L = 2
Área base = 559
Área base = 559
Superf. total = 759

Referencia: Siguientes figuras

59.- Cilindro recto (base circular): Fig.1:

Cilindro recto: Datos: Perímetro L del círculo base, superficie lateral S, en este orden
Datos: L perímetro base = 100
S Superficie lateral = 10
Radio base = 15,915
Area disco base = 795,725
Altura cilindro H = 0,1
Volumen V = 79,5725
Superf. total = 1601,45



60.- Cilindro No recto (base circular): Fig.2:

Cilindro oblicuo: Datos: Radio r, superficie lateral S, distancia d, en este orden
Datos: r radio base = 10, S Superf. lat. = 300
d desviación = 5
Altura cilindro H = 4,774
Area disco base = 314,159
Volumen V = 1499,795066
Superf. total = 614,159

61.- Esfera: Fig.3:

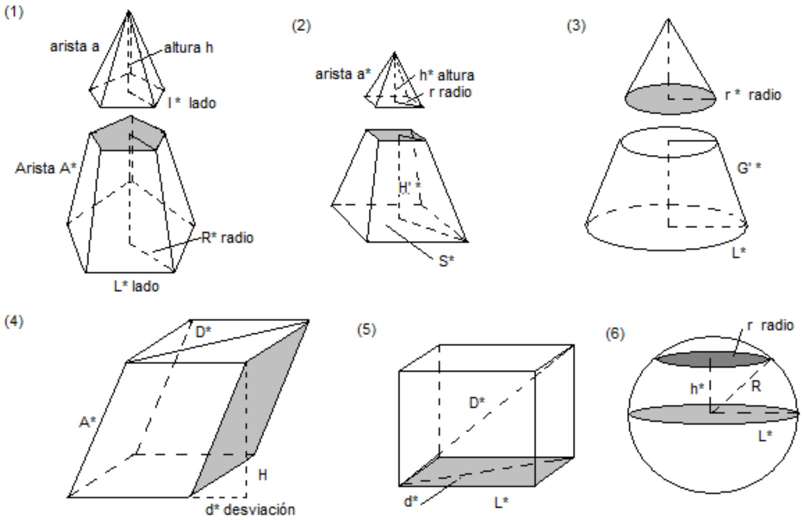
Datos: Radio r, superficie lateral S, distancia d, en este orden
Datos: Volunen del cono = 250
Valor de R = 6,203
Volumen Ve = 999,755
Superficie Se = 483,518

NOTA: Los siguientes proceden de la Aplicación asociada al Vol.5, pero son igualmente interesantes

Referencia: Siguientes figuras

64.- Figura 1

Tronco de Pirámide y pirámide menor, recta de base regular pentagonal,
Calcula sus volúmenes y sus superficies laterales
Datos: L = 10, l = 5
A = 20, R = 15



VOLÚMENES:
Radio menor = 7,5
Altura H' del tronco = 18,54
Apotema en base Mayor = 0
Area base Mayor = 0
Apotema en base menor = 7,071
Area base menor = 88,387
Altura pirámide menor h = 18,54
Altura pirámide Mayor H = 37,08
Volumen pirámide Mayor = 0
Volumen pirámide menor = 546,231
Volumen Tronco de pirámide = -546,231
SUPERFICIES laterales:
Apotema en cara del tronco: 19,8431348329844
Superficie lateral tronco = 744,117
Apotema = Altura en cara pirámide menor = 19,843
Superficie lateral pirámide menor = 248,037

65.- Figura 2

Tronco de Pirámide y pirámide menor, rectos, de base regular cuadrada. Calcula sus volúmenes y sus superficies laterales

Datos: S Área base Mayor = 30, H' del tronco = 15
a Arista pirámide menor = 8, h altura = 6

VOLÚMENES:
Lado en base Mayor L = 5,477
Área base Mayor = 29,997529
Lado base menor l = 7,483
Area base menor = 55,995
Altura pirámide Mayor H = 21
Volumen pirámide Menor = 111,99
Volumen pirámide Mayor = 209,982
Volumen Tronco pirámide = 97,992

SUPERFICIES ...:
Arista de pirámide Mayor A = 5,855
Superf. lateral pirámide menor = 89,796
Apotema en cara pirámide Mayor zAp = 5,175
Superf. lateral pirámide Mayor = 56,686
Superf. lateral Tronco = -33,11

66.- Figura 3

Tronco de Cono y Cono menor, rectos
Calcula sus volúmenes y sus superficies laterales
Datos: L Perímetro Base mayor = 60, G' Generatriz tronco = 15
r Radio del cono menor = 8

VOLUMENES:
Radio Mayor R = 9,549

Area base Mayor = 286,461
Generatriz cono menor g = 77,469
Generatriz cono Mayor G = 92,469
Altura cono menor h = 77,054
Volumen cono menor:5164,207
Altura cono Mayor H = 91,974
Volumen cono mayor:8782,322
Volumen tronco:3618,115

SUPERFICIES ...:
Superf. lateral cono menor = 1947,007
Superf. cono Mayor = 2773,983
Superf. lateral tronco = 826,976

67.- Figura 4

Prisma No recto, Bases cuadradas
Calcula su volumen y su superficie total

Datos: A Arista = 30, D Diagonal base = 20
d desviación = 5

VOLUMEN:
Lado base L = 14,142
Altura H = 29,58
Volumen = 5915,886

SUPERFICIE :
Superf. lateral = 1685,16
Superf. total = 2085,152

68.- Figura 5

Prisma recto, Bases rectángulos,
Calcula su volumen y su superficie total

Datos: L uno de los lados = 25, d diagonal base = 30
D Diagonal prisma = 50

VOLUMEN:
El otro Lado l de la base = 16,583
Area base = 414,575
Altura H = 40
Volumen = 16583
SUPERFICIE:
Superf. lateral = 3326,64
Superficie total = 4155,79

69.- Figura 6

Esfera y Cono inscrito.
Calcula volúmenes y superficies de la esfera y del cono.
Datos: L Perímetro círculo máximo = 80
h Distacia entre planos = 8

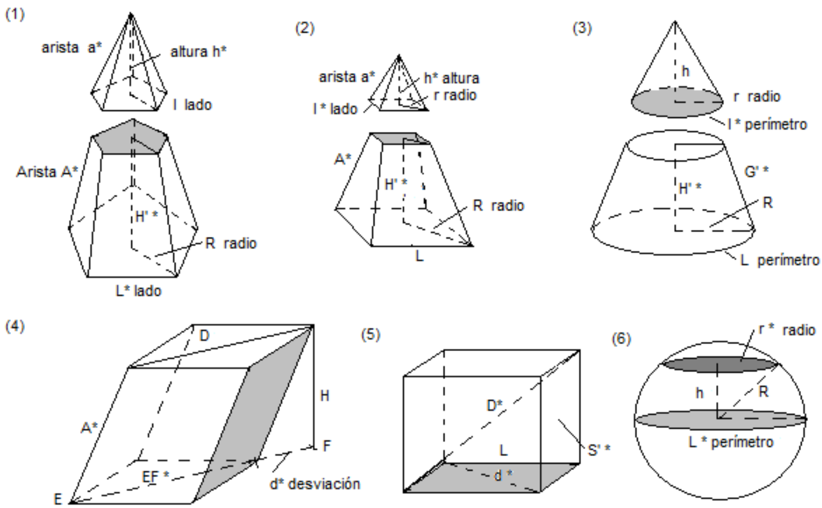
VOLÚMENES:
Radio esfera, R = 12,732
Volumen esfera = 8645,266
Radio base del cono, r = 9,904
Volumen cono = 821,75

SUPERFICIES:
Superficie esfera = 2037,056
Superf. lateral cono = 396,147
Superficie total cono = 704,303

Referencia: Siguientes figuras

70.- Figura 1

Tronco de Pirámide y pirámide menor, rectos, de base regular pentagonal. Calcula sus volúmenes y sus superficie laterales
Datos: L = 10, H' = 20
h = 12, a = 15



PIRÁMIDE MAYOR:
Radio r = 9
Altura H = 32
Radio R = 24
Apotema en base Mayor = 23,473
Área base Mayor = 586,825
Volumen Pirámide Mayor = 6259,466

SUPERFICIE pirámide mayor:
Arista Pirámide Mayor = 40

Apotema en cara Pirámide Mayor = 39,686
Superf. lateral Pirámide Mayor = 992,15

PIRÁMIDE menor:
Lado base menor: 3,75
Apotema en base pirámide menor = 8,802
Área base menor = 82,518
Volumen pirámide menor: 330,072
Apotema en cara pirám. menor: 14,882
Superf. lateral pirámide menor = 139,518
TRONCO de pirámide:
Volumen Tronco Pirámide = 5929,394
Superf. lateral Tronco ... = 852,632

71.- Figura 2

Tronco de Pirámide y pirámide menor, rectos, de base regular cuadrada. Calcula sus volúmenes y sus superficies laterales.

Datos: A arista tronco = 20, H' del tronco = 12
a arista pirámide menor = 10, l altura = 8

PIRÁMIDE menor:
Radio menor: 5,656
Altura pirám. menor: 8,246
Volumen pirám. menor: 175,914
Apotema en cara pirám. menor: 9,165
Superf. lateral pirám. menor = 146,64

PIRÁMIDE mayor:
VOLUMEN pirámide mayor:
Radio base mayor: 21,656
Lado base mayor: 30,626
Altura pirám. mayor: 20,246

Volumen pirám. mayor: 6329,924

SUPERFICIE lateral pirámide mayor:
Apotema en cara tronco pirámide = 16,492
Apotema en cara pirámide mayor = 25,657
Superf. lateral pirám. mayor = 1571,542

TRONCO de pirámide:
Superf. lateral Tronco Pirámide = 1424,902
Volumen Tronco Pirámide = 6154,01

72.- Figura 3

Tronco de Cono y Cono menor, rectos
Calcula sus volúmenes y sus superficies totales
Datos: H' = 15, G' = 20
l Perímetro base menor = 10

VOLÚMENES:
Radio menor r = 1,591
Radio Mayor R = 14,819
Altura menor h = 1,804
Altura Mayor H = 16,804
Volumen cono menor yV = 4,781
Volumen Cono Mayor xV = 3864,372
Volumen Tronco cono = 3859,591

SUPERFICIES:
Generatriz cono menor: 2,405
Superf. lateral cono menor = 12,02
Generatriz cono mayor: 22,405
Superf. lateral cono Mayor = 1043,07
Superf. lateral Tronco cono = 1031,05

73.- Figura 4

Prisma No recto, Bases cuadradas
Calcula su volumen y su superficie total
Datos: A Arista = 20, distancia EF = 15
desviación d = 5

VOLUMEN:
Lado base L = 7,071
Altura H = 19,364
Volumen V = 968,181

SUPERFICIE:
Superfi. lateral SL = 556,685
Superfi. total St = 656,683

74.- Figura 5
Prisma recto, Bases rectángulos
Calcula su volumen y su superficie total
Datos: S' = 25, d diagonal base = 15
D Diagonal prisma = 20

VOLUMEN :
Altura H = 13,228
Lado menor l = 1,889
Lado mayor L = 14,88
Volumen V = 371,816

SUPERFICIE:
Supef. lateral SL = 443,640664
Supef. total St = 499,857304

75.- Figura 6

Esfera y Cono
Calcula volumen y superficie total de la esfera y del cono (base plana)
Datos: L Perímetro Círculo máximo = 50
r Radio disco menor = 5

VOLÚMENES:
Radio esfera R = 7,957
Altura Cono h = 6,189
Volumen esfera Ve = 2110,263
Volumen Cono Vc = 162,027

SUPERFICIES:
Superf. esfera Se = 795,625
Superf. lateral Cono Slc = 124,988
Superf. total Cono Stc = 203,527

Ejemplos:

76.- Ejemplo 1:

Esfera: Calcula su superficie y volumen,
conociendo el perímetro L del circulo máximo.

Datos: 100
Radio esfera = 15,9154976203148
Resultado: V = 16886,87, S = 3183,099

77.- Ejemplo 2:
Esfera: Calcual su superfifie y volumen,

conociendo el volumen V de un octante de esfera

Datos: 50
Resultado: V = 400, S = 262,537

BIBLIOGRAFÍA

Geometría Métrica (Curso de ..), Tomo I – Fundamentos
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, 13ª Edición 1977

Geometría Métrica (Curso de ..), Tomo II- Complementos
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, Novena Edición 1970

Álgebra y Geometría Analítica
Autor: Francisco Granero Rodríguez
Edita: McGraw-Hill (Ediciones La Colina, S.A. (España))
Edición de 1985

Geometría Descriptiva
Autor: Fernando Izquierdo Asensi
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1979

Geometría Descriptiva Superior y Aplicada
Autor: Fernando Izquierdo Asensi
Editorial Dossat, S.A., Madrid, Año: 1975

Elementos de Matemáticas
4ª Edición
Julio Rey Pasto y A. de Castro
S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)
Madrid 1967

Álgebra Moderna
Autor: A. Lentin y J. Rivaud
Traducción: Emilio Motilva Ylarri
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1965

Ejercicios de Álgebra Moderna

Autor: A. Lentin y J. Rivaud
Traducción: Emilio Motilva Ylarri
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1965

Lecciones de Álgebra Moderna
Autor: P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin
Traducción: R. Rodríguez Vidal
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1971

Álgebra Lineal
Autor: Daniel Hernández Ruipérez
Ediciones Universidad de Salamanca, año: 1990

Geometría Vectorial
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Editorial Alhambra, S.A., Madrid 1968

Traté de Mathématiques Speciales: 3 GÉOMÉTRIE
Autores: G. Cgnac, E.Ramis, J.Commeau
Editorial: MASSON y Cie., 1971, Francia

Teoría de Conjuntos y Temas Afines (Teoría y Proble.)
Autor: Seymour Lipschutz
Editorial: Libros McGraw-Hill, 1969,México
Serie compendios SCHAUM

Geometría Básica
Autor: Pedro Abellanas
(Copyright by the Author)
Editorial Romo, S.L., Madrid, año: 1969

Álgebra Lineal
Autor: Daniel Hernández Ruipérez
Ediciones Universidad de Salamanca, año: 1990

Geometría Vectorial
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Editorial Alhambra, S.A., Madrid 1968

NOTACIÓN y Nomenclatura. Valores:

Símbolo	Significado
*	Producto
.	Producto
^	Potencia
sqr(a)	Raíz cuadrada
rad(a)	Raíz cuadrada
rad(a;n)	Radical con índice n
rad(a;n/m)	Radical con índice n/m

∈ significa 'pertenece a'

∞ infinito

exp(x)	Exponencial: $\exp(x) = e^x$
exp(x;a)	Exponencial de base a>0: $\exp(x;a) = a^x$
ln(x)	Logaritmo neperiano: $y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^y$
log(x;a)	Logaritmo base a>0: $y = \log(x;a) \Longleftrightarrow x = a^y$

≅ aproximado
Δ incremento ∇ siguiente
< menor que …, > mayor que …, Ej: $x < y$, $x > y$
≤ menor que …, ≥ mayor que …, Ej: $x \leq y$, $x \geq y$

∪ unión de conjuntos,
∩ intersección de conjuntos
≡ equivalencia
∈ pertenencia

¬ negación
→ implicación
↔ doble implicación

Valores:

π = 3,1415927... (número pi, en radianes)
pi = 3,1415927... (número pi, en radianes)

e = 2,7182818... (número e, base de ln(x))

sen(0) = 0 cos(0) = 1
sen(pi/6) = $\frac{1}{2}$ cos(pi/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
sen(pi/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(pi/3) = $\frac{1}{2}$
sen(pi/2) = 1, cos(pi/2) = 0
