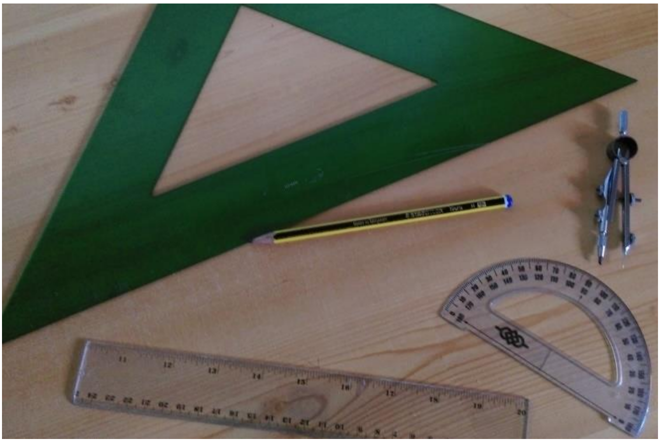
INTERPRETACIÓN ACTUALIZADA DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Teorema de Euler para los polígonos convexos



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Salamanca: Verano 2017

Revisada: Junio 2020

INTERPRETACIÓN

ACTUALIZADA

de los

Libros: I, II, III, IV, VI, XI, XII, XIII

de los

ELEMENTOS DE EUCLIDES

De la Quinta Edición: Junio 2014,
BIBLIOTECA CLÁSICA GREDOS

ÍNDICE:

PRÓLOGO:

Los libros V, VII, VIII, IX, X no son tratados aquí por carecer de interés, en mi opinión. En cada caso comento su contenido.

Libro V: 25 proposiciones

Dedicado a magnitudes, razón entre magnitudes, múltiplos y submúltiplos entre magnitudes, proporcionalidad, ….
Todo ello tratado mediante segmentos.

Libro VII: 39 proposiciones

Dedicado al estudio de los números (enteros) contemplados como segmentos. Es la aritmética de segmentos, aritmética geométrica. Es análogo al estudio actual de los números enteros, de número par e impar, de primos, etc. , pero tratándolos como segmentos.

Libro VIII: 27 proposiciones

Continúa en el estudio de los números, introduciendo el concepto de proporcionalidad, tratando los números como segmentos. Aparece el concepto de 'número plano' como el producto de dos segmentos. Se vislumbra el concepto de sucesión y de progresión, incluso como ilimitadas, lo que hace entrever la idea de 'infinito'.

Libro IX: 36 proposiciones

Continúa el estudio de los números enteros. Estudio de números planos semejantes. Por ejemplo el resultado al ser multiplicados por otro entero, … Introduce el concepto de 'número cubo' como el producto de tres segmentos, con lo cual se coloca en el espacio. Continúa hablando de proporcionalidad, y de 'continuamente proporcionales', y todo esto tratado mediante segmentos. Habla de 'tantos números como se quiera’ con lo cual entra en las sucesiones ilimitadas. Pero siempre con segmentos.

Libro X: 115 proposiciones

Vuelve al concepto de magnitud introduciendo ahora el concepto de magnitudes conmensurables y de magnitudes inconmensurables, así como de … ‘razonablemente expresables’ y de ‘no racionalmente expresable’. Siempre tratado mediante segmentos.

Presenta el concepto de rectángulo: “El rectángulo comprendido por rectas expresables conmensurables en longitud” (Prop. 19). … “Hallar rectas mediales conmensurables sólo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial” (Prop. 28), y siempre tratado con segmentos. “Halla una recta primera binomial” (Prop. 48), tratado mediante segmentos.

Conviene hacer notar que en ocasiones habla de ‘igualdad entre segmentos’ (o rectas) sin referirse a su ‘longitud’ (distancia entre dos puntos). Del mismo modo habla de ‘igualdad entre rectángulos’ sin referirse a su área (o superficie). Lo mismo ocurre cuando habla de ‘igualdad entre sólidos’ sin mencionar su volumen.

NOTAS del autor

Cuando hago referencia a “texto” lo estoy haciendo al texto de Euclides.

Los enunciados de las Proposiciones no serán modificados en absoluto, sin poner ni quitar una coma, a pesar de que en algunos casos el lector puede apreciar que debiera hacerse algún cambio. Si fuese necesario, en cada caso se hará alguna aclaración sobre el enunciado correspondiente.

Nosotros diríamos ‘segmento’ en lugar de recta finita.

Hemos de hacer notar estos dos hechos esenciales:

-En el texto se habla de "línea recta" siendo realmente "segmento", según nuestra nomenclatura.

-En el texto se habla de "circunferencia" siendo realmente "arco de circunferencia", según nuestra nomenclatura.

Utilizaremos nuestros conocimientos actuales del Álgebra operacional. No tiene sentido insistir en seguir los pasos del Método puramente geométrico del texto de Euclides. Nuestro interés reside en hacer inteligibles los resultados prácticos.

En el texto se dice: "De todo paralelogramo rectangular se dice que está comprendido por las dos rectas que comprenden el ángulo recto".

Evidentemente, podríamos extenderlo a todo paralelogramo: Queda determinado por dos lados que confluyan en uno de sus vértices.

En el texto se habla de triángulos iguales, paralelogramos iguales, …. En estos casos se refiere a la igualdad de sus superficies (o áreas). Lo mismo cuando se habla de la igualdad entre dos cuerpos: Pirámides, prismas, esferas, etc. , se refiere a la igualdad de sus volúmenes.

Cuando se habla de la igualdad de dos rectas (dos segmentos), se refiere a la igualdad de sus longitudes.

En el presente trabajo, en las comprobaciones o demostraciones, voy a utilizar los conocimientos que tenemos actualmente de las técnicas para el cálculo de áreas y volúmenes.

En resumen: En la medida de lo posible, una Interpretación Actualizada de la recopilación realizada por Euclides.

Interpretación, Profundización, Actualización

DEFINICIONES comentadas

Entrecomillado tal como viene en el original, después mi comentario.

Observación: No menciona el "segmento " tal como lo definimos actualmente. Habla de línea (en general) y de recta, que dependiendo del contexto a veces debemos interpretar como segmento.

1.- "Un punto es lo que no tiene partes".

Un punto es lo indivisible.

2.- "Una línea es una longitud sin anchura".

Es una sucesión de puntos sin lagunas interpuntuales, y tiene longitud sólo en una dirección.

3.- "Los extremos de una línea son puntos".

4.- "Una línea recta es aquella (línea) que yace por igual respecto de los puntos que están en ella".

Un segmento queda representado por un trozo de hilo tensado todo lo posible y fijado por sus extremos. Una recta es un segmento prolongado por sus dos extremos de forma ilimitada.

5.- "Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura".

Tiene longitud en más de una dirección, teniendo dos direcciones especialmente elegidas y llamadas "longitud" y "anchura".

6..- "Los extremos de una superficie son líneas".

Una superficie finita tiene "borde", que es una línea.

7.- "Una superficie plana es una superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella".

Una superficie plana es aquella en la que todas las líneas que yacen sobre ella son rectas.

8.- “Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta”.

Ángulo plano es cada una de las cuatro partes de un plano producidas sobre este por dos líneas que yacen sobre él y que tienen un único punto común.

9.- “Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo”.

Ángulo plano rectilíneo es cada una de las cuatro partes de un plano producidas sobre este por dos líneas rectas que yacen sobre él y que tienen un único punto común.

10.- “Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está”.

Ángulos adyacentes son aquellos que tienen en común una de las líneas que los determinan.
Cuando una recta tiene un punto común con otra recta y entre ellas determinan pares de ángulos adyacentes iguales entre sí, a cada uno de estos ángulos lo llamamos “ángulo recto”, y decimos que las dos rectas son “perpendiculares” entre sí.

11.- “Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto”.

Llamamos ángulo obtuso aquel que sea mayor que un recto.

12.- “Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto”.

Llamamos ángulo agudo aquel que sea menor que un recto.

13.- “Un límite es aquello que es extremo de algo”.

Punto límite es aquel que sea extremo de un segmento. Línea límite es aquella que sea borde de una superficie.

14.- “Una figura es lo contenido por uno o varios límites”.
Figura es una zona o parte de una superficie contenida o limitada por más de un límite.

15.- “Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí”.

Llamamos círculo a una figura plana comprendida por una línea finita cuyos dos extremos coinciden, y que existe un punto en la figura tal que todas las rectas que yacen en ella y contienen en común dicho punto, producen segmentos con extremos en el borde de la figura que son iguales entre sí.

16.- “Y el punto se llama centro del círculo”.

El punto común referido en la definición 15 lo llamamos “centro” del círculo.
El borde del círculo lo llamamos “circunferencia”.

17.- “Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide al círculo en dos partes iguales”.

Llamamos diámetro a cada uno de los segmentos producidos por las rectas que yacen sobre el círculo y contienen el centro, al ser limitadas por la circunferencia.
El centro del círculo determina sobre un diámetro dos segmentos iguales que llamaremos “radio” del círculo.

18.- “Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo”.

Un diámetro produce en el círculo dos zonas iguales a cada una de las cuales llamaremos “semicírculo”, cuyo centro coincidirá con el del círculo.
19.- “Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteros las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas”.
Llamaremos “figura rectilínea” o plana aquellas comprendidas por rectas, resultando: Triláteras que llamamos “triángulo”, Cuadriláteras que llamamos “cuadriláteros”, multiláteras que llamamos “polígonos”.

20.- “De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene tres lados iguales, isósceles la que sólo tiene dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales”.

Entre las rectas que limitan una figura tomamos dos que contengan un punto en común, este punto lo llamamos “vértice” de la figura. Tomando otras dos determinan otro vértice, y así obtenemos todos los vértices de la figura.
Entre los triángulos llamaremos: Equilátero el que tiene los tres lados iguales, isósceles el que tiene sólo dos lados iguales, escaleno los restantes casos.

Las rectas que limitan la figura, tomadas dos que contengan un punto común, estas determinan cuatro ángulo uno de los cuales yace sobre la figura, al cual llamaremos “ángulo de la figura”. Tomadas otras dos rectas que cumplan las condiciones estas determinan otro ángulo de la figura.

21.- “Además, de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos”.

22.- “De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado en la que es equilátera y equiangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras”.

Observa que en el caso del rombo, siendo equilátero los ángulos opuestos son iguales.

En el caso de los trapecios: Llamamos trapecio al que tiene dos lados opuestos paralelos, isósceles al trapecio que además tiene los otros dos lados iguales, recto al que tiene dos ángulos rectos; a los restantes los llamamos “trapezoides”.

23.- “Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos”.

Observa que está refiriéndose a lo que actualmente llamamos segmento, que sí tiene sentido su prolongación, mientras que una recta en sentido actual no permite más prolongación.

Dos rectas son paralelas si estando sobre el mismo plano no tienen punto en común.

POSTULADOS:

1.- “Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera”.

Es posible trazar un segmento desde un punto hasta otro punto.
Es posible trazar una línea recta que contenga dos puntos previamente fijados.

2.- “Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta”.

Es posible prolongar continuamente en línea recta por el extremo de un segmento.

3.- “Y describir un círculo con cualquier centro y distancia”.

Fijado un punto como centro es posible describir un círculo de radio fijado cualquiera.

4.- “Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí”.

Todos los posibles ángulos rectos son idénticos.

5.- “Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encuentran en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos”.

Observa que la expresión “iguales a dos rectos” o “menores que dos rectos”, …, se refiere a que “su suma es igual a dos rectos” o “su suma es menor que dos rectos”.

Si al incidir una recta sobre otras dos rectas produce ángulos internos del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, entonces estas dos rectas no son paralelas sino que tienen un punto común.

NOCIONES COMUNES:

1.- “Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí”.

Si dos cosas son iguales a una tercera, entonces aquellas son iguales entre sí.

2.- “Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales”.

Si a dos casas iguales añadimos una misma cosa, los dos totales siguen siendo cosas iguales.

3.- “Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales”.

Si a dos cosas iguales restamos una misma cosa, los dos resultados obtenidos siguen siendo iguales.

Heiberg añade las siguientes 4, 5, 6:

4.- Si a dos cosas desiguales añadimos cosas iguales, los resultados siguen siendo desiguales.
5.- Los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
6.- Las mitades de una misma cosa son iguales entre sí.

Continuamos:

7.- “Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí”.

Dos cosas cuyos atributos sean idénticos uno a uno, son cosas iguales entre sí.

8.- “Y el todo es mayor que la parte”.

El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

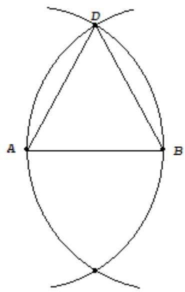
LIBRO I

Observaciones:
Las proposiciones hasta el número 24 parecen trivialidades. A pesar de ello en mi empeño está el mostrarlas todas.
El enunciado de cada proposición es copia fiel del texto original.

NOTA: En el texto llama recta a lo que ahora llamamos segmento.

1.- Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Construcción:



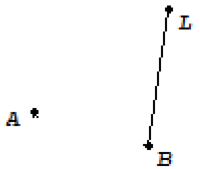
Con el compás pincho en A y trazo arco de radio AB, pincho en B y trazo arco de radio BA. Obtengo el vértice D del triángulo. Observa que es equilátero y equiángulo. c.q.d.

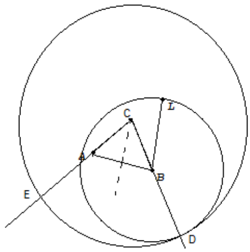
2.- Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada.

Interpretación y Solución:

Sea A el punto dado y BL la recta dada.

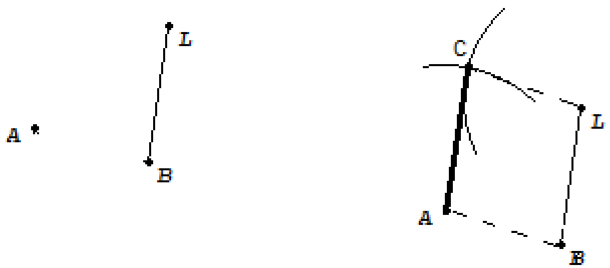
Aclaración: Observa que está pidiendo la igualdad en longitud, es decir “un segmento con un extremo en A y la misma longitud que el segmento dado”.





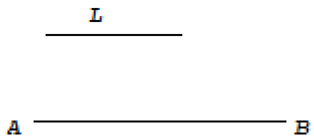
Unimos A y B. Sobre AB construimos el triángulo equilátero ABC. Prolongamos los lados CB y CA. Con radio BL trazo un círculo y otro con radio CD. Ahora bien, CE = CD y por tanto AE = BD = BL, y la solución es el segmento AE.

NOTA:
Si pidiese segmento fijado en A que sea idéntico al segmento BL, esto es: Iguales en dirección y longitud, haríamos lo siguiente.

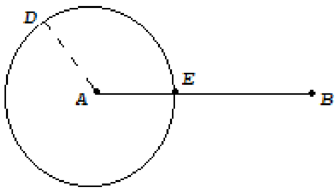


Trazo arco con centro en L y radio BA, y trazo arco con centro en A y radio BL. Obtengo el otro extremo del segmento pedido.

3.- Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor.
Interpretación y Solución: Datos:



Solución:

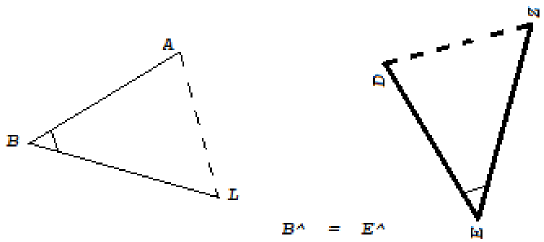


AD = L, AE = AD = radio del círculo. Queda el segmento EB después de quitar L.   c.q.d.

4.- Si dos triángulos tiene dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente.

Interpretación y Solución:

La demostración viene a decir que haciendo movimiento de uno de los dos podemos hacer coincidir el vértice E con el vértice B y el lado EZ con el lado BL, y entonces necesariamente coincidirán los restantes elementos.

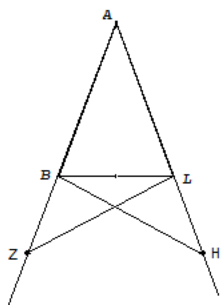


NOTA: En el texto llama 'base' al lado opuesto al ángulo. Recuerda que insistentemente llama recta a lo que actualmente llamamos segmento. c.q.d.

5.- En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.

Interpretación y Solución:

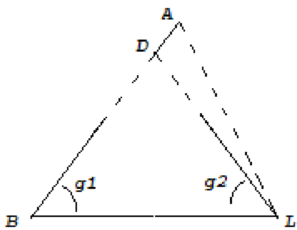
Según la definición 'es isósceles si tiene dos lados iguales'.



Sea ABL triángulo isósceles, donde AB = AL. Prolongamos los dos lados iguales y en la prolongación de AB marco un punto Z cualquiera. Sobre la prolongación de AL marco el punto H tal que AH = AZ. Trazamos los segmentos BH y LZ. Observa que AZ = AH y AB = AL, y comprenden el ángulo común ZAH, y por tanto las bases BH, LZ son iguales. Pero entonces los triángulos LBH, BLZ son iguales, con lo cual son iguales los ángulos BLH, LBZ, de donde se deduce que también son iguales los ángulos ALB, ABL.   c.q.d.

6.- Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

Interpretación y Solución:



Sea el triángulo ABL, donde los ángulos ABL, ALB son iguales. Afirmamos que los lados AB, AL también son iguales.

Supongamos que no son iguales y sea AB el mayor. Marco el punto D tal que DB = AL, lo cual es posible porque AL es menor que AB. Ahora bien, como DB = AL y BL es común, también DB, BL son iguales a los lados AL, BL, y según el enunciado los ángulos ABL, ALB también son iguales. Por tanto la base DL es igual a la base AB, y por consiguiente los triángulos DBL y ABL coinciden. Así BD no es menor que BA sino que son iguales, y como BD fue tomado igual a LA, resulta lo que queríamos probar: BA = LA.

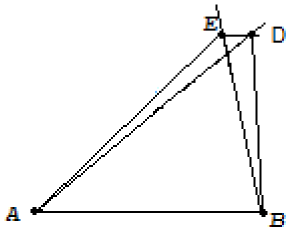
NOTA: Este hecho actualmente resulta evidente, y la demostración superflua.

7.- No se podrán levantar sobre la misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas dadas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas.

Interpretación y Solución:

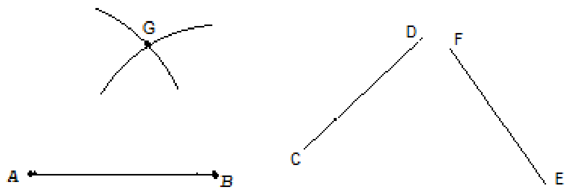
Sea dado el segmento AB, y desde cada extremos levantamos segmentos iguales a otros dos segmentos dados: AE', BE', respectivamente, con la condición de que se encuentren al menos en un punto.

Supongamos que se encuentran en dos puntos distintos D y E.



Teniendo en cuenta que AE = AD, el triángulo AED es isósceles y por tanto los ángulos AED, ADE son iguales. Puesto que el ángulo AED = AEB + DEB, tengo que AED es mayor que DEB. Pero hemos visto que AED y ADE son iguales, por lo cual ADE = AEB + DEB. Por otro lado EDB = ADE + ADB = (AEB + DEB) + ADB, de donde que EDB es mucho mayor que DEB. Según enunciado BD = BE, de donde triángulo isósceles EBD, y los ángulos DEB, EDB son iguales. Pero acabamos de probar que EDB es mucho mayor que DEB. Hemos llegado a un absurdo, por lo tanto sólo es posible un punto común.

Corolario: Dos rectas se cortan a lo más en un punto.

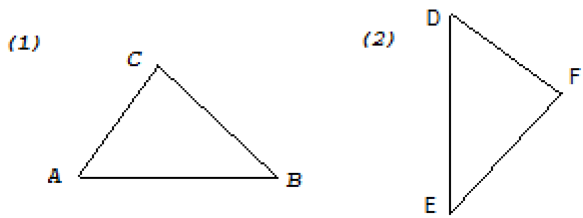


NOTA: Actualmente nos parece trivial, y no necesita demostración.

8.- Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales.

Interpretación:

Sean iguales los lados CA con FD, y CB con FE, y además las bases AB del primero y DE del segundo también iguales.



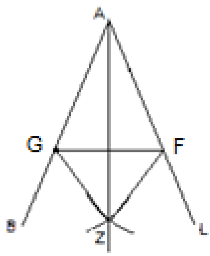
En la demostración viene a decir que, mediante un movimiento, hagamos coincidir vértice F con el vértice A, y la base DE con la base AB. Aplicando lo demostrado en [I, 7] los lados FD, FE han de coincidir con los lados CA, CB. Concluimos que también son iguales sus ángulos homólogos.

Corolario: Si dos triángulos tienen sus lados iguales, también son iguales los ángulos homólogos.

9.- Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.

Interpretación:

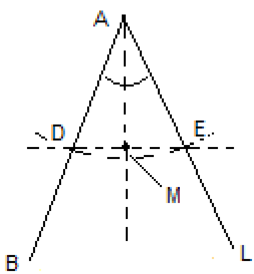
En la recta AB marco un punto cualquiera D; En la recta AL marco el punto E tal que AE = AD. Trazo el segmento ED y construyo sobre él el triángulo equilátero EDZ.



Ahora bien, el segmento AD es igual al segmento AE y AZ es común, por lo tanto las bases DZ, EZ son iguales y por tanto, según [I, 8], los ángulos DAZ, EAZ son iguales.

Solución actualizada:

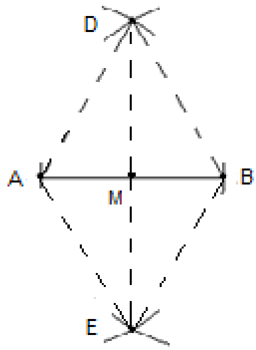
Trazo el arco de radio cualquiera y centro en A, y obtengo G y F. Tomo el punto medio M, [I, 10], del segmento GF, y trazo AM.



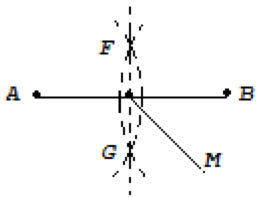
10.- Dividir en dos partes iguales una recta finita dada.

Solución:

Construyo dos triángulos equiláteros, uno a cada lado del segmento AB, uniendo los nuevos vértices obtengo el punto M en el segmento AB, que es su punto medio. Aplíquese [I, 8] para concluir la igualdad MA = MB.



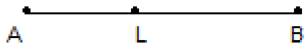
Solución actualizada:

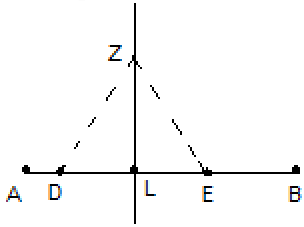


Trazamos arcos con el mismo radio y centros en A y en B, y obtengo F, G. Uniéndolos obtengo M, punto medio.

11.- Trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una recta dada, desde un punto dado en ella.

Solución: Datos: Segmento AB, punto L

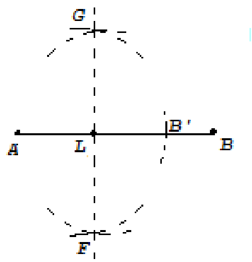




Marca el punto D cualquiera, y el punto E tal que LE = LD. Construye el triángulo equilátero sobre el segmento DE y obtienes el vértice Z. La recta LZ cumple lo que se pide en virtud de [I, 8], al poder afirmar que los ángulos DZL y BZL suman dos rectos (por ser adyacentes) y que son iguales, y por tanto son ángulos rectos. Por definición LZ es perpendicular a AB.

Solución actualizada:

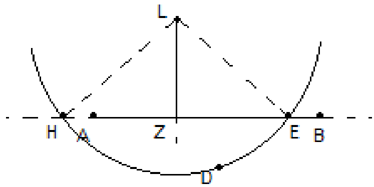
Marco el punto B’ de modo que LB’ = LA. Trazo arcos con el mismo radio y centros en A y en B’, y obtengo los puntos F,



G. La recta FG es perpendicular al segmento AB pasando por el punto L.

12.- Trazar una línea recta perpendicular a una recta infinita dada desde un punto dado que no esté en ella.

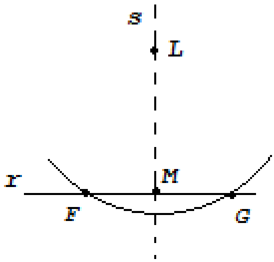
Solución: Sea la recta AB y el punto L fuera de ella.



Marco un punto D cualquiera al otro lado de AB, y trazo el círculo con centro en L y radio LD, obteniendo los puntos E y H situados a igual distancia de L y determinando el segmento HE. Obtengo a continuación el punto medio Z de este segmento. Aplicado [I, 8] podemos concluir que LZ es perpendicular a la recta AB.

Solución actualizada:

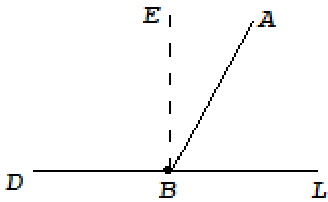
Haciendo centro en L y radio cualquiera trazo arco que cortará en F, G. Tomo el punto medio M de FG. La perpendicular es la recta LM.



13.- Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos ángulos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos.

Interpretación y Solución:

Cuando dice ‘iguales a dos rectos’ quiere decir ‘que su suma es igual a dos rectos.



Levantamos la recta BA sobre la recta DL en el punto B. Si los ángulos DBA, LBA son iguales entonces los dos son rectos, y su suma es la suma de dos rectos, y hemos terminado.

En otro caso, tengo en cuenta que los ángulos LBE = LBA + ABE. Ahora sumo a los dos miembros el ángulo DBE, con lo cual tengo

DBE + LBE = DBE + LBA + ABE,

de donde: [DBE + EBA] + LBA = DBE + LBE es la Suma de dos rectos.

Teniendo en cuenta que DBA = DBE + EBA,
tengo finalmente

DBA + LBA = DBE + LBE, y por tanto
DBA + ABL es la suma de dos rectos

c.q.d.

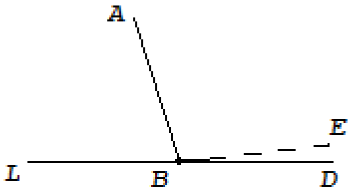
NOTA: Actualmente llamamos “ángulo llano” a la suma de dos ángulos rectos.

Corolario: La recta BA levantada sobre DL en el punto B produce siempre dos ángulos cuya suma es un ángulo llano.

14.- Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarán en línea recta.

Interpretación:

Interpreto así: Si dos segmentos BL, BD forman con el segmento BA, en el punto B, ángulos adyacentes ABL, ABD que suman dos rectos, entonces dichos segmentos BL, BD están alineados sobre una misma recta. (y no es posible su posición relativa: BL, BE).

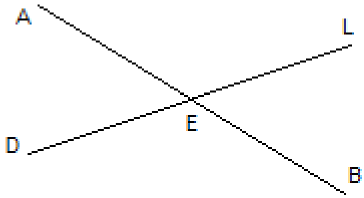


Supongamos que BL y BD no están alineados y sea BE la que sí está alineada con BL, de modo que ABL y ABE son adyacentes y por tanto suman dos rectos. Como BD y BE tienen el punto B común forman un ángulo entre sí, el ángulo DBE. Entonces tengo la igualdad en la suma de ángulos: ABL + ABD = ABL + [ABE + EBD] = [ABL + ABE] + EBD. Pero según el enunciado ABL + ABD es igual a dos rectos, y por hipótesis ABL + ABE también es igual a dos rectos. Por lo tanto EBD es vacío, es cero. Luego BL, BD sí están alineados. c.q.d.

15.- Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.

Interpretación y Solución:

Debemos entender que "Los ángulos opuestos en el vértice (o por el vértice) son iguales entre sí".



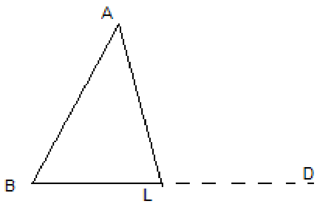
Sean las rectas AB y DL que se cortan en E.
La recta AE ha sido levantada sobre DL en el punto E, por lo tanto los ángulos AED, AEL son adyacentes y suman dos rectos. La recta DE ha sido levantada sobre AB en el punto E, y por tanto los ángulos AED, DEB son adyacentes y suman dos rectos. Entonces

$$AED + AEL = AED + DEB \text{ , de donde } AEL = DEB$$

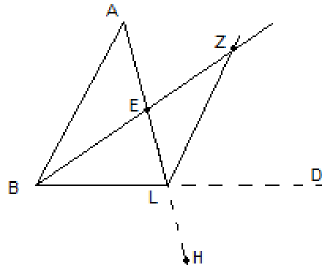
De la misma forma podemos probar que AED = LEB

16.- En un triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

Interpretación y Solución:



Sea el triángulo ABL en el que hemos prolongado el lado BL hasta el punto D. Afirmo que el ángulo ALD es mayor que cada uno de los ángulos ABL, BAL.



Marco el punto E, punto medio del segmento AL, y trazo la recta BE prolongándola hasta el punto Z tal que EZ = EB. Trazo LZ, y prolongo también AL hasta un punto H arbitrario.

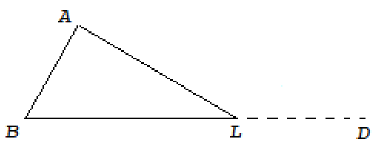
En los triángulos AEB, ZEL tengo AE = EL y EB = EZ, y además los ángulos AEB, LEZ son iguales entre sí por ser opuestos por el vértice. Entonces la base AB es igual a la base LZ, con lo cual los dos triángulos son iguales, y lo serán también los otros dos ángulos homólogos. Puesto que el ángulo ALD es mayor que el ángulo ELZ, y BAL = ELZ, también es mayor que BAL.

Si seguimos un proceso análogo marcando E como punto medio de BL podemos probar que BLH es mayor que ABL.

Teniendo en cuenta que BLH = ALD, por ser opuestos por el vértice, habremos concluido.

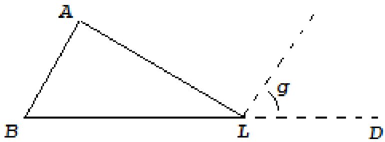
17.- En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.

Demostración:



Prolongo el lado BL y marco el punto D. El ángulo ALD es externo y según [I, 16] es mayor que el ángulo interno ABL. Les sumo el ángulo ALB de modo que ALD + ALB es mayor que ABL + ALB, donde ALD + ALB es igual a dos rectos, y por tanto ABL + ALB es menor que dos rectos.
De forma análoga llegaríamos a que la suma de otros dos ángulos internos es menor que dos rectos.

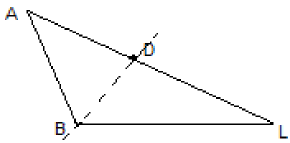
Actualmente lo probamos como sigue:



g = B^ , y mostramos que L^ + B^ < Dos rectos.
Del mismo modo si tomamos otros dos ángulos internos.

18.- En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor.

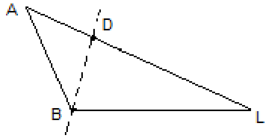
Demostración:



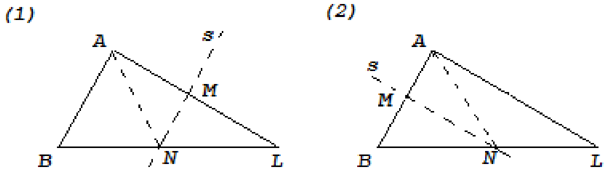
Sobre el lado AL marco el punto D tal que AD = AB, y trazo la recta BD. El triángulo BAD es isósceles.

El ángulo ADB es externo al triángulo BDL y por tanto es mayor que el ángulo interno BLD. Pero ABD = ADB, por lo cual ABD es mayor que BLD, y por tanto ABL es mucho mayor que BLA.

Del mismo modo probaríamos que ABL es mayor que BAL, marcando el punto D de tal forma que LD = LB.



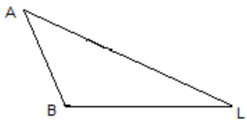
Actualmente podemos hacer lo siguiente:



En la figura (1) se muestra que A^ > L^, y en (2) que A^ > B^

19.- En todo triángulo al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.

Demostración:

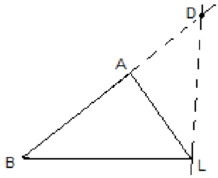


Sea el ángulo ABL mayor que el ángulo ALB. El lado AL ha de ser mayor que el lado AB, ya que de otro modo entraría en contradicción con lo demostrado en [I, 18]. Del mismo modo, si ABL es el mayor de los tres ángulos, es decir mayor que BAL, también AL ha de ser mayor que BL.

Corolario: A ángulo mayor corresponde lado mayor y recíprocamente, a lado mayor corresponde ángulo mayor.

20.- En todo triángulo dos lados tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante.

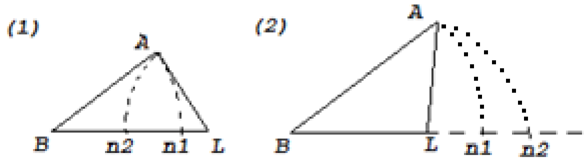
Demostración:



Prolongo el lado AB y marco el punto D tal que AD = AL. El triángulo LAD es isósceles con AL = AD. Entonces el ángulo BLD que es mayor que ALD también es mayor que ADL. Tomando el triángulo BLD, el ángulo BLD es mayor que BDL y por tanto [I, 19] el lado BD es mayor que el lado BL. Pero BD es la suma de BA + AL, por lo tanto el lado BL es menor que la suma de los otros dos.

Del mismo modo tomando otro par de lados.

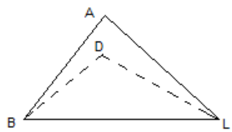
Actualmente haríamos lo siguiente:



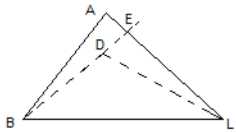
En el supuesto (1): AB + AL = Bn1 + Ln2 > BL
En el supuesto (2): AB + AL = Bn1 + Ln2 > BL

21.- Si a partir de los extremos de uno de los lados de un triángulo se construyen dos rectas que se encuentren en el interior (de él), las (rectas) construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero comprenderán un ángulo mayor.

Demostración: Datos:



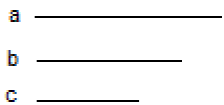
Prolongo la recta BD y obtengo el punto E común con el lado AL.

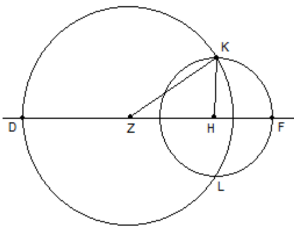


Tomando el triángulo BAE, la suma BA + AE es mayor que BE. Sumo a los dos el lado EL, y tengo (BA + AE) + EL > BE + EL, es decir: BA + AL > BE + EL.
Por otro lado tomo el triángulo LED, y tengo LE + ED > LD. Sumándoles el lado DB tengo: (LE + ED) + DB > LD + DB, es decir: LE + BE > LD + DB. Teniendo en cuenta el resultado anterior obtenemos que BA + AL es mucho mayor que BD + DL. c.q.d.

22.- Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos (de las) rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayor que la restante.

Construcción:
Sean los segmentos a, b, c

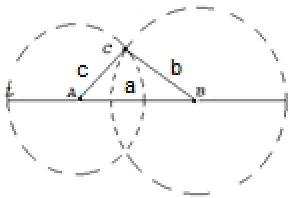


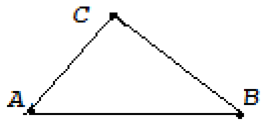


Sobre una recta tomo DZ igual al segmento a, y el segmento ZH igual al segmento b. También tomo HF igual al segmento c.

Con centro en Z y radio ZD trazo un círculo, y con centro en H y radio HF trazo otro círculo. Sea K uno de los puntos de corte de los dos círculos. El triángulo ZKH cumple la condición pedida.

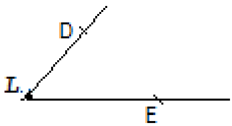
Otra forma:



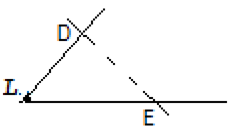


23.- Construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

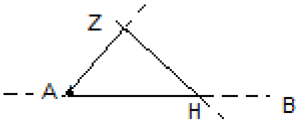
Construcción: Datos:
El ángulo rectilíneo DEL y el segmento AB



Sobre la recta AB construiré un ángulo igual al dado y con vértice en A. Marco los puntos D, E cualesquiera y trazo la recta DE.

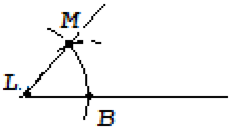


Según [I, 22] construyo el triángulo ZAH cuyos lados sean iguales a los segmentos LD, LE, DE. El ángulo en A es igual al ángulo en L.

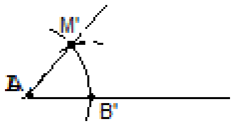


Actualmente haríamos lo siguiente:

En el ángulo dado, haciendo centro en L trazo arco de radio arbitrario, por ejemplo LB. He obtenido los puntos B y M. Después haciendo centro en B trazo arco con radio BM.

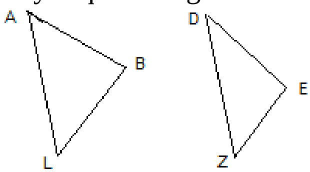


Sobre la recta dada y con centro en A trazo arco con el mismo radio LB y obtengo el punto B'. Haciendo centro en B' trazo arco con radio BM. Este arco corta al anterior en el punto M'. Uniendo A con M' obtengo el ángulo en A igual al ángulo en L.

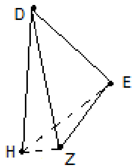


24.- Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro, pero uno tiene el ángulo comprendido por las rectas iguales mayor que el otro, también tendrá la base mayor que la otra.

Demostración:
En estos dos triángulos tenemos AB = DE, AL = DZ, pero el ángulo en A es mayor que el ángulo en D.



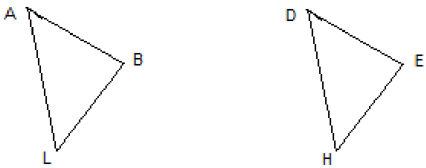
Construyo sobre la recta DE y con vértice en D un ángulo igual al ángulo en A, y tomo DH = AL. Entonces el triángulo HDE es igual al triángulo LAB.



Por tanto la base EH es igual a la base BL. Pero EH es mayor que EZ, luego BL es mayor que EZ, c.q.d.

25.- Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro, pero tienen la base (del uno) mayor que la base (del otro), también tendrán el ángulo comprendido por las rectas iguales (del uno) mayor que el del otro.

Demostración: (Es el recíproco de la Pro. 24)
Sean los dos triángulos donde suponemos que los lados DE, DH son iguales a los lados AB, AL, respectivamente, y la base BL mayor que la base EH. Afirmamos que entonces el ángulo BAL será mayor que EDH.

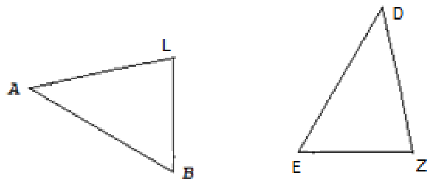


Supongamos que no se cumple. Entonces BAL es igual o es menor que el ángulo EDH. No pueden ser iguales pues entonces también serían iguales las bases EH y BL. No puede ser BAL menor que EDH pues esto contradice lo probado en [I, 24].

26.- Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los dos ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrá también los lados restantes iguales y el ángulo restante (igual) al ángulo restante.

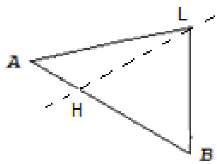
Demostración:

En los triángulos de la figura suponemos que los ángulos ABL y BLA son iguales a los ángulos DEZ, EZD, respectivamente, y además el lado EZ igual al lado BL.



En primer lugar afirmamos que AB y DE son iguales. Supongamos que no son iguales y sea AB mayor que DE.

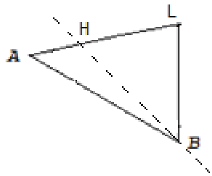
Marcamos el punto H tal que BH = DE, y trazamos la recta LH.



Entonces los lados BH, BL son iguales a los lados DE, EZ, y además el ángulo HBL es igual al ángulo DEZ. Por tanto la base HL es igual a la base DZ, y así el triángulo HBL es igual al triángulo DEZ, y en virtud de [I, 4] los otros dos ángulos también son iguales. Entonces el ángulo HLB es igual al ángulo DZE. Pero hemos supuesto que EZD y BLA son iguales, por lo que hemos de concluir que H coincide con A, y los dos lados son iguales.

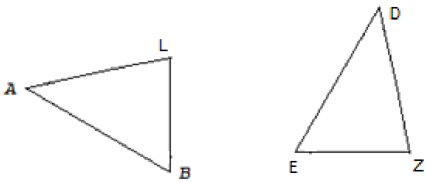
Tengo que los lados BL, BA son iguales a los lados EZ, ED y también son iguales los respectivos ángulos, por lo tanto sus respectivas bases son iguales, es decir AL = DZ.

De forma análoga podemos probar que AL y ZD son iguales. Observa la siguiente figura:

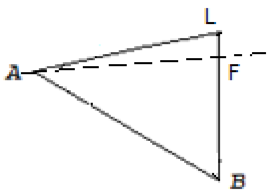


Corolario: Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales e igual el lado comprendido por ellos, entonces los triángulos son iguales.

Otro supuesto:
En los triángulos de la figura suponemos que los ángulos ABL y BLA son iguales a los ángulos DEZ, EZD, respectivamente, y además el lado ED igual al lado BA. Afirmamos que los otros dos lados también son iguales.



Supongamos que BL es mayor que EZ. Marco F de tal forma que BF = EZ, y trazo AF.



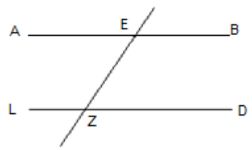
Puesto que BF = EZ y AB = ED y, por hipótesis, el ángulo ABF es igual al ángulo DEZ, las bases AF y DZ son iguales, con lo cual los triángulos AFB y DEZ. Por tanto el ángulo BFA es igual al ángulo DZE. Pero hemos supuesto que EZD es igual a BLA, con lo cual BFA es igual a BLA, y por tanto el punto F ha de coincidir con el punto L.

De forma análoga procederemos si comenzamos suponiendo que el lado AL es igual al lado DZ.

Corolario: Si dos triángulos tienen dos ángulos de uno iguales a dos ángulos del otro, y además un lado de uno igual a un lado del otro, entonces los dos triángulos son iguales.

27.- Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.

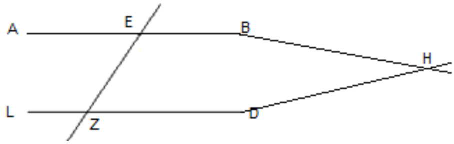
Demostración:



Sean las rectas AB y LD, y la recta EZ que las corta. Ángulos interiores alternos son: AEZ y EZD, BEZ y LZE

Supongamos que AEZ y EZD son iguales; afirmamos que las dos rectas son paralelas (no tienen punto en común).

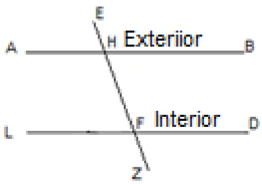
Si no fuesen paralelas, prolongando las rectas por los lados de B y D se cortarían en un punto H. Observa que ZH sigue coincidiendo con la recta ZD. Considero el triángulo HEZ.



Entonces tendríamos que, el ángulo externo AEZ es igual al ángulo interno y opuesto EZH, lo cual contradice lo demostrado en [I, 16]. No pueden cortarse prolongando por este lado. Del mismo modo probaríamos que no se cortan prolongando por el lado de A y L. Son paralelas.

28.- Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.

Demostración:



Supongamos que el ángulo externo EHB y el interno y opuesto HFD son iguales. Afirmamos que las rectas AB y LD son paralelas.

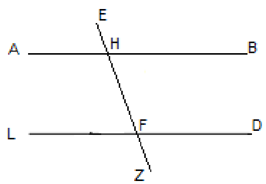
Como AHF es igual a EHB, tengo que AHF es igual a HFD, y estos ángulos son alternos entre sí. En virtud de [I, 27] podemos concluir que las rectas son paralelas.

Supongamos ahora que los ángulos internos y opuestos del mismo lado BHF y HFD suman dos rectos. Pero también AHF y BHF suman dos rectos, por lo cual AHF y HFD son iguales. Pero estos son alternos, y en virtud de [I, 27] concluimos que son paralelas.

29.- La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.

Interpretación:

Clasificación de los ángulos que la recta EZ determina al cortar dos rectas: AHF y HFD son alternos, los ángulos EHB y HFD son opuestos. Los ángulos AHE y BHE son externos, mientras AHF y BHF son internos, y del mismo modo si nos fijamos en la recta LD. Son opuestos si van asociados a distinta recta.



Si las rectas AB y LD son paralelas, afirmamos que los ángulos alternos AHF y HFD son iguales, y que el ángulo externo EHB es igual al interno y opuesto HFD, y que los dos internos del mismo lado BHF y HFD suman dos rectos.

Supongamos que AHF y HFD no son iguales, y sea AHF > HFD. Sumo a los dos miembros el ángulo BHF, con lo cual AHF + BHF > HFD + BHF. Pero AHF + BHF suma dos rectos, y por tanto BHF + HFD es menor que dos rectos. Según el Postulado 5 las rectas no son paralelas, en contra del enunciado.

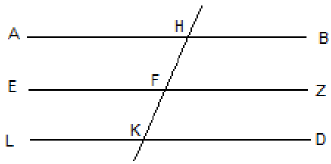
Como el ángulo EHB es igual al ángulo AHF, obtengo que EHB es igual al interno y opuesto HFD.

Si a la igualdad EHB = HFD sumo el ángulo BHF tengo EHB + BHF = HFD + BHF. Puesto que EHB + BHF es igual a dos rectos, concluyo que BHF + HFD es igual a dos rectos.   c.q.d.

30.- Las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí.

Podríamos concluir aplicando el postulado bien conocido:
“Si A y B son iguales a C, entonces A y B son iguales entre sí“

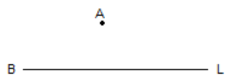
Siendo fieles al contenido del original lo demostramos.
Demostración:



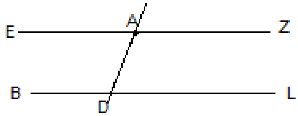
Por ser paralelas AB y EZ los ángulos AHK y HFZ son iguales.
Por ser paralelas las rectas EZ y LD, los ángulos HFZ y HKD son iguales. Pero entonces también AHK y HKD son iguales, con lo cual AB y LD son paralelas. c.q.d.

31.- Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.

Demostración:
Sean la recta BL y el punto A fuera de la recta



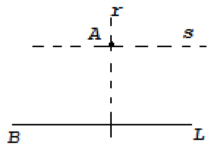
Marcamos en la recta el punto D cualquiera y trazamos AD.



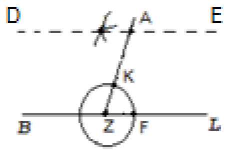
Construimos en la recta AD, en el punto A, un ángulo DAE igual al ángulo ADL. Prolongamos el segmento EA y obtenemos EZ.

Puesto que los ángulos alternos EAD y ADL son iguales podemos concluir que la recta EZ es paralela a la recta BL.

Actualmente para construir EZ haríamos lo siguiente:
Por el punto A trazo la perpendicular r a la recta BL, y después trazo, también en A, la perpendicular a r , sea s esta última. La recta s es paralela a BL.



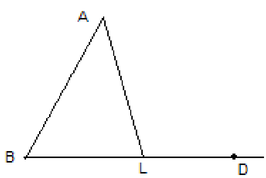
Otra forma:



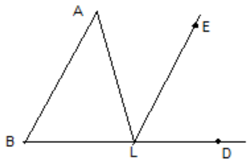
Construyo sobre la recta AZ y en el punto A el ángulo en A igual al ángulo AZL. Lo hago mediante el trazado de arcos auxiliares como muestra la figura. Construyo DAZ igual a AZL y está.

32.- En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.

Demostración:
Sea el triángulo ABL



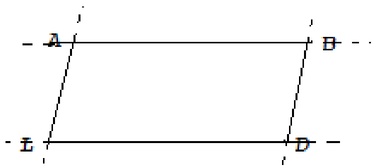
Prolongo el lado BL y marco el punto D.



Por el punto L trazo la paralela al lado AB.
Las rectas BA y LE son paralelas y son cortadas por AL, por lo tanto los ángulos alternos BAL y ALE son iguales entre sí. Por otro lado la recta BD corta a las rectas paralelas BA y LE, el ángulo externo ELD es igual al ángulo interno y opuesto ABL.
El ángulo ALD es igual a la suma ALE + ELD, y por tanto ALD es igual a BAL + ABL, ya que BAL = ALE y ABL = ELD.
Además, la suma BLA + ALE + ELD es igual a dos rectos, por lo tanto BLA + BAL + ABL suman dos rectos. c.q.d.

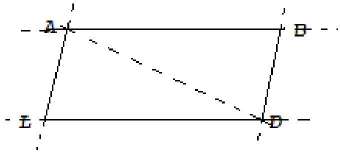
33.- Las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas.

Demostración:



Sean las rectas AB y LD paralelas e iguales (en longitud) los segmentos que determinan. Las unimos por sus extremos y por el mismo lado mediante las rectas AL y BD. Afirmamos que AL y BD son paralelas entre sí y que los segmentos son iguales (en longitud).

Trazamos la recta BL. Puesto que AB y LD son paralelas y la recta AD las corta, los ángulos BAD y LDA son iguales.

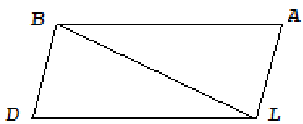


Como además los segmentos AB y LD son iguales y AD es común, las bases AL y BD son iguales. Los triángulos ADB y DAL son iguales, con lo cual también son iguales los ángulos DAL y ADB.

34.- En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.

Interpretación y Comprobación:

En el original Euclides no ha dado la definición de paralelogramo, es en esta proposición donde aparece por primera vez mención del “área de paralelogramo”, sin haberlo definido expresamente.



NUESTRA NOTA:
Def.- Llamamos paralelogramo al cuadrilátero cuyos lados son paralelos dos a dos. (Sus lados son segmentos sobre rectas paralelas dos a dos).

Vemos que nada hay que añadir ni demostrar para aceptar las afirmaciones contenidas en la proposición.

35.- Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

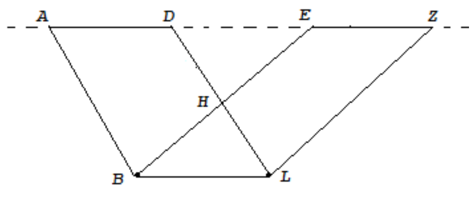
Interpretación y Comprobación:

Aclaración:
Cuando se refiere a la igualdad de paralelogramos quiere decir igualdad entre sus áreas. Entre las mismas paralelas quiere decir lo que se puede observar en la figura. Realmente la situación es: "Tienen la misma base y superiormente limitadas por segmentos que yaces sobre la misma recta paralela a la base"

Tengo los paralelogramos BLZE, BLDA con la misma base BL, y limitados superiormente por los segmentos EZ, AD que están sobre la misma recta AZ.

En la figura tengo lo siguiente: AB = DL, BE = LZ -- >

Los triángulos ABE, DLZ son iguales. A estos dos triángulos les resto el triángulo (parte común) DHE, y les sumo a cada uno el mismo triángulo BHL. Por lo tanto sigue cumpliéndose la igualdad, habiendo quedado: Área ABLD = área EBLZ.

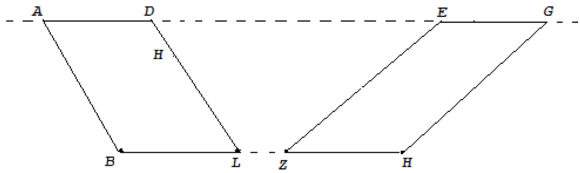


36.- Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

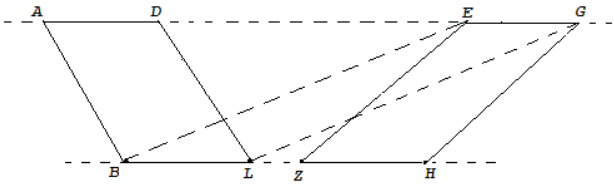
Interpretación y Comprobación:

Aclaración: Puede confundirse con Prop. 35, pero hemos de observar que ahora se dice "sobre bases iguales" y no "sobre la misma base".

En cuanto a los segmentos que limitan superiormente el área tenemos lo mismo: Segmentos iguales que yacen sobre la misma recta paralela a las bases. Observa que también las “bases iguales” deben estar sobre una misma recta.



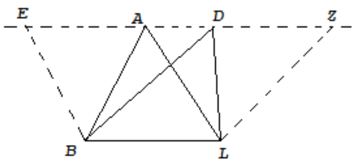
En la siguiente figura, aplicamos lo probado en el número 35, y



tengo la siguiente relación entre sus áreas: Áreas de ABLD y BLGE son iguales. Áreas de EZHG y EBLG son iguales. En consecuencia las áreas de ABLD y EZHG son iguales. c.q.d.

37.- Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación: Vale la aclaración hecha en Pro. 35

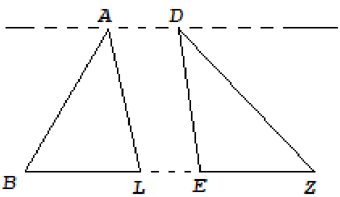


Según [I, 35] las áreas ALBE y DZLB son iguales.

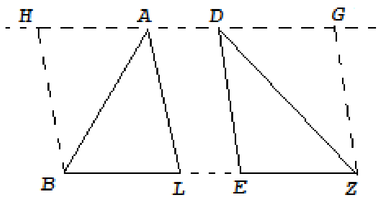
Según [I, 34] la diagonal de un paralelogramo divide su área en dos partes iguales, y como área de ABL es la mitad de uno y área de DBL es la mitad del otro, y aquellos son iguales, concluyo que estas también lo son.

38.- Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación: Vale la aclaración hecha en Pro. 36



Las bases BL, EZ son iguales, por lo cual los siguientes paralelogramos tienen la misma área.



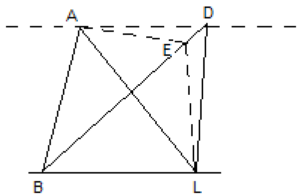
El área de cada triángulo es la mitad que la del paralelogramo, y si aquellas son iguales también lo son sus mitades.

39.- Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

Interpretación y Comprobación: Es el recíproco de Pro. 37

Triángulos iguales se refiere a su área.

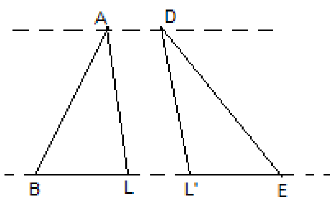
Sean los triángulos ABL y DBL sobre la misma base BL y que su área toma el mismo valor. Afirmamos que la recta AD es paralela a la base.
 Supongamos que no lo es y sea AE la recta paralela a la base. Entonces los triángulos ABL, EBL tienen igual área. Puesto que, por hipótesis, ABL y DBL son iguales (sus áreas), tengo que DBL es igual a EBL. Por tanto el punto E coincidirá con el punto D, y AD es paralela a la base.



40.- Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también entre las mismas rectas paralelas.

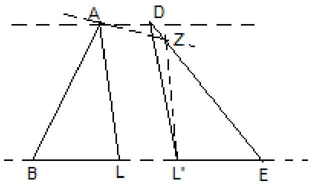
Interpretación y Comprobación:

Observa que dice “sobre bases iguales” y no sobre la misma base.



Sean los triángulos ABL y DL’E cuyas bases son iguales y están sobre la misma recta BE, y suponemos que el valor de sus áreas es el mismo. Afirmamos que la recta AD es paralela a la recta BE.

Supongamos que AD no es paralela a la recta BE, y sea AZ sí paralela a BE.

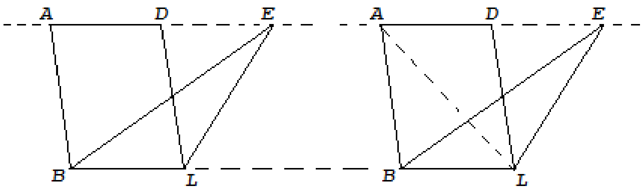


Los triángulo ABL y ZL'E son iguales (sus áreas), y por hipótesis ABL es igual al triángulo DL'E, por lo tanto ZL'E y DL'E son iguales, lo cual es imposible. Por lo tanto el punto Z coincide con el punto D y la recta AD sí es paralela a la recta base BE.

41.- Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

Interpretación y Comprobación:

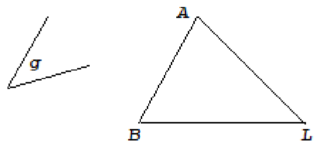
Sean paralelogramo ABLD y triángulo EBL que tienen la misma base BL y sus límites superiores están sobre la misma recta AE paralela a la base BL.



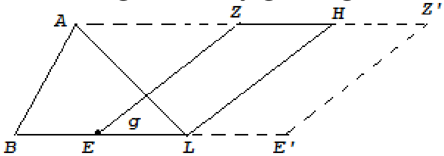
Trazo la línea AL, y el triángulo ABL es igual que el triángulo EBL, por tener la misma base y estar entre las mismas paralelas. Pero ABL es la mitad del paralelogramo.

42.- Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Interpretación y Construcción:



Sean ABL el triángulo dado y g el ángulo rectilíneo dado.



NOTA: Ver prop. 23

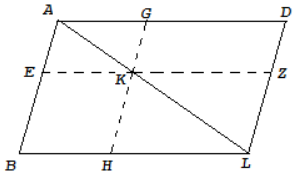
Marco el punto medio del segmento BL, sea E este punto. Sobre la recta EL y en el punto E construyo el ángulo LEZ igual al ángulo dado g, y marco el punto Z de modo que AZ sea paralela a la base BL. Completo el paralelogramo ZELH y lo duplico obteniendo el paralelogramo ZEE’Z’, cuya base es el segmento EE’ doble que EL.

El paralelogramo ZEE’Z’ es el doble del triángulo ABL, y también es doble del paralelogramo ZELH. Por lo cual este paralelogramo y el triángulo son iguales (sus áreas). c.q.d.

43.- En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación: Observa la figura

Sea el paralelogramo ABLD. Trazo la diagonal AL.
Los paralelogramos situados en torno a la diagonal son: AEKG, KHLZ, y los llamados complementos son: EKHB, GKZD.



La diagonal AL lo divide en dos triángulos iguales. La diagonal AK divide al paralelogramo AEKG en dos partes iguales. La diagonal KL divide al paralelogramo KHLZ en dos partes iguales.
Sumando triángulos tengo:

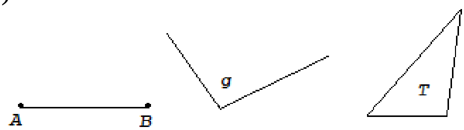
$$AEK + KHL = AKG + KZL$$

Pero también los triángulos ABL y ADL son iguales, por lo cual los paralelogramos EBHK y GKZD han de ser iguales. c.q.d.

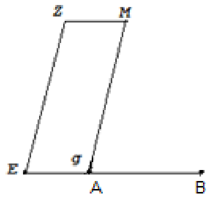
44.- Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Interpretación y Construcción:

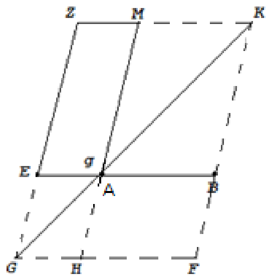
Sean dados el segmento AB, el ángulo rectilíneo g y el triángulo T (del que interesa su área).



Aplicando la Pro. 42 construimos el paralelogramo AEZM cuya área es igual al triángulo dado T.



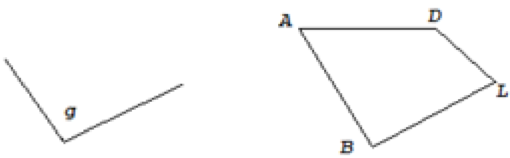
Después he completado la figura construyendo el paralelogramo GFKZ, como se muestra la figura.
El paralelogramo AHFB es igual al paralelogramo AMZE, y éste es igual al triángulo dado, por tanto la solución es el paralelogramo AHFB.



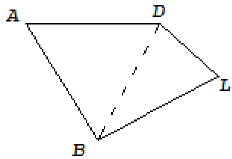
45.- Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada.

Interpretación y Construcción:

Sean ABLD la figura rectilínea dada y g el ángulo dado.

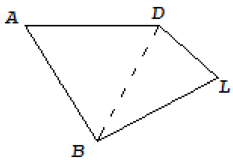


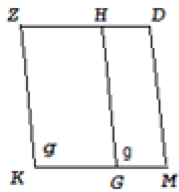
En primer lugar triangulamos la figura rectilínea dada. En este caso obtengo dos triángulos.



Aplicando la Pro. 42 construyo ZKGH cuya área sea igual a la del triángulo ABD, y bajo el ángulo dado g. He tomado KG igual a la mitad de AB, y continuamos.

A continuación, aplicando otra vez la Pro. 42 y bajo el mismo ángulo g, construyo HGMD cuya área sea igual al triángulo BLD. He tomado GM igual a la mitad de LD, y continuamos.



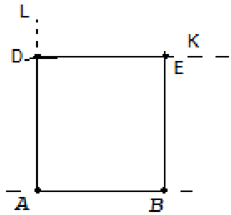


46.- Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.

Construcción:

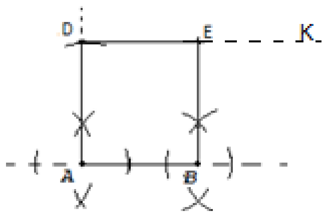
Def.- (Según el original) . Cuadrado es un cuadrilátero equilátero y además rectangular (los cuatro ángulos rectos).

Según el texto de Euclides: Por el punto A trazo la perpendicular a AB, sea AL la recta obtenida y en ella tomo AD = AB. Por el punto D trazo la paralela al segmento AB, y por el punto B trazo la paralela al lado AD. Entonces ADEB es un paralelogramo que cumple las condiciones del cuadrado.



Actualmente hacemos lo siguiente:

Con ayuda del compás levanto por A la perpendicular al segmento AB, y marco el punto D tal que AD = AB. Después trazo DK paralela a AB. Por el punto B trazo la perpendicular al segmento AB y obtengo el punto E. Por construcción, el paralelogramo ABED es un cuadrado.

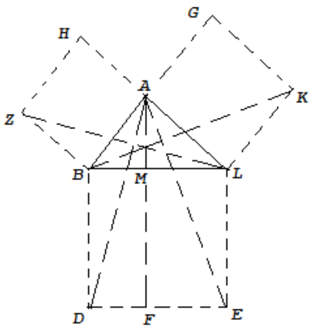


47.- En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Demostración: (Se trata del conocido T. de Pitágoras)

Sea el triángulo ABL rectángulo, esto es, el ángulo LAB es recto. Afirmamos que (en distancias) el cuadrado de BL es igual a la suma de los cuadrados de AB y AL.

Construimos los cuadrados sobre BL, sobre AB, sobre AL, como se muestra en la figura.



Según las Pro. 41, 42 tengo lo siguiente para sus áreas:

ZBAH = 2. ZBL, por tener la misma base ZB y estar entre las paralelas ZB y HL.

BDFM = 2 . ABD, por tener la misma base BD y estar entre las paralelas BD y AF.

Pero ABD = ZBL, por tener lados BZ, BA iguales, lados BL, BD iguales, ángulos ZBL, ABD iguales. Por lo tanto BAHZ = BDFM.

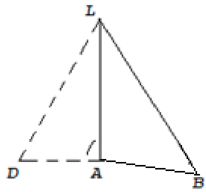
Del mismo modo pruebo que el cuadrado de AL es igual al rectángulo MFEL. Pero BLED = BMFD + MLEF. c.q.d.

48.- Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

Demostración: (Es el recíproco del T. de Pitágoras)

Sea el triángulo ABL que cumple como hipótesis: “Cuadrado de BL igual suma de los cuadrados de AL y AB”.

Construyo el triángulo ADL tal que el ángulo DAL sea recto y AD = AB.



Aplicando la Pro. 47 y por ser DAL ángulo recto se cumple

$$DL^2 = DA^2 + AL^2 = AB^2 + AL^2.$$

Pero por hipótesis es $AB^2 + AL^2 = AB^2$, y por tanto DL = LB.

Pero también, por construcción, AD = AB, y AL es común, por lo que el ángulo LAB ha de ser igual al ángulo LAD, que es recto por construcción. c.q.d.

$$$oOo$$$

LIBRO II

Observaciones:

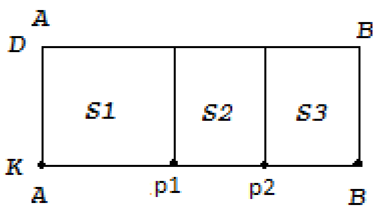
Trata la operativa con segmentos, que visto en nuestro tiempo es como la operativa con números enteros utilizando las propiedades algebraicas como conocimientos adquiridos hasta nuestros días.

1.- Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos.

Interpretación y Comprobación: Es trivial y evidente

NOTA: La igualdad se refiere a la suma de áreas

Datos:
Recta AB que será cortada por los puntos p1, p2, y recta DK

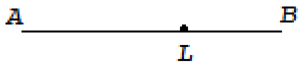


S = AB . DK, S = S1 + S2 + S3

2.- Si se corta al azar una línea recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera y cada uno de los segmentos es igual al cuadrado de la (recta) entera.

Interpretación y Comprobación:Trivial y evidente (Se refiere a la igualdad de áreas)

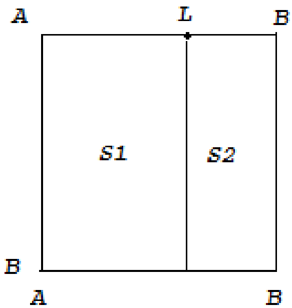
Datos: Recta AB cortada por L



Quiere decir: "Los rectángulos comprendidos por la recta entera y cada uno de los segmentos obtenidos, suman áreas que resultan igual al cuadrado de la recta entera"

$S = AB \,.\, AB = AB^2$

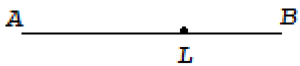
$S = S1 + S2$



3.- Si se corta al azar un línea recta, el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos es igual al rectángulo comprendido por los segmentos y el cuadrado del segmento primeramente dicho.

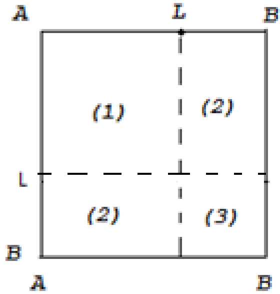
Interpretación y Comprobación:

Datos:



El enunciado, que es un tanto confuso, quiere decir esto que afirmamos.

Afirmo que: $AB \cdot AL = AL \cdot AL + AL \cdot LB$



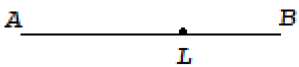
Tengo: $AB \cdot AL = (1) + (2)$

$(1) = AL \cdot AL$, $(2) = AL \cdot LB$

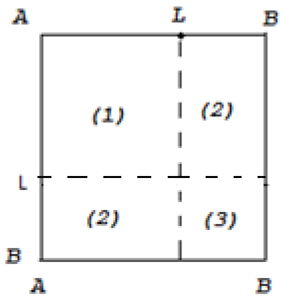
Concluyo que $AB \cdot AL = AL^2 + AL \cdot LB$

4.- Si se corta al azar una recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual al cuadrado de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Interpretación y Comprobación:Datos:



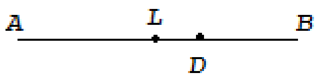
Afirmo que: $AB \cdot AB = AL^2 + LB^2 + 2 \cdot (AL \cdot LB)$



Suficiente observar la figura.

5.- Si corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Interpretación y Comprobación: Datos:



donde AL = LB, AD > DB

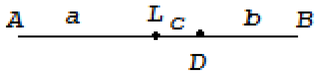
Dos formas:

A) Primer método de resolución aplicando nuestros conocimientos de Álgebra

Recta cortada en segmentos iguales por el punto L, y en segmentos desiguales por el punto D.

Afirmo que: $AD \cdot DB + LD^2 = LB^2$

Tengo, con la notación indicada



$a^2 = (c + b)^2 = c^2 + b^2 + 2.b.c$

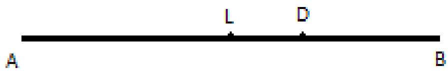
$(a + c) . b + c^2 = a.b + c.b + c^2 = (c + b).b + c.b + c^2 =$

$= b^2 + 2.c.b + c^2$

c.q.d.

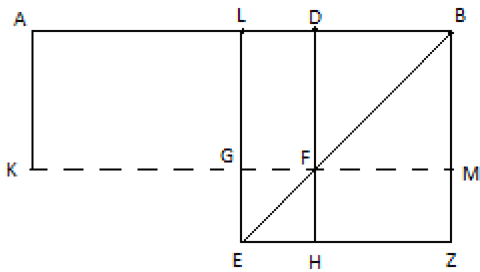
B) Segundo método conforme el texto de Euclides (Interesa porque aquí es donde se presenta por primera vez el concepto de gnomon, no definido expresamente, pero que lo utiliza en varias ocasiones).

Datos: AL = LB, AD > DB



Construyo el cuadrado LEZB, y trazo su diagonal BE. Trazo por D paralela a LE, y obtengo F y H. Por F trazo paralela a AB, y obtengo G, K y M.

(1)

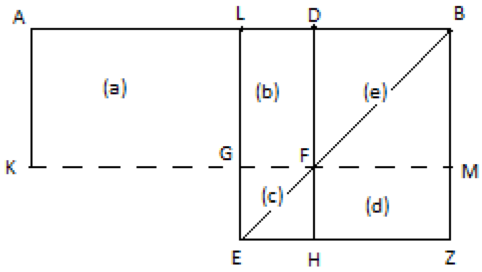


Afirmo que:

“El rectángulo determinado por AD y DB más el cuadrado de lado LD es igual al cuadrado de lado LB”.

Dem.:

(2)



Según (L. I, 43) se cumple (b) = (d).
Rectángulo determinado por AD y DB más el cuadrado de lado LD es igual a:

(a) + (b) + (c)

Cuadrado de lado LB es igual a:

(e) + (c) + (b) + (d) = (e) + (c) + 2.(b)

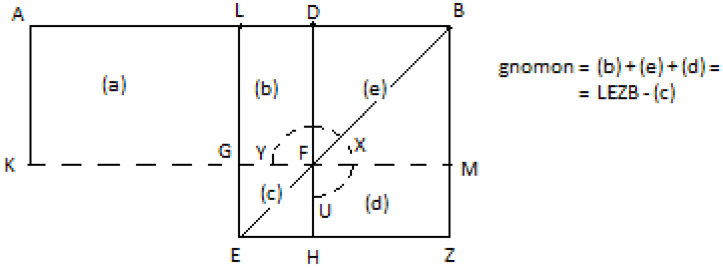
Pero (a) = (b) + (e), y (d) = (b), por lo tanto

(a) + (b) + (c) = [(b) + (e)] + (b) + (c) = (e) + (c) + 2.(b)

c.q.d.

NOTA:
No ha sido necesario introducir el concepto de ‘gnomon’. Con el fin de que el lector compruebe de qué hablamos lo presento en la siguiente figura (3)

(3)

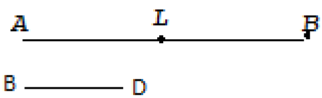


En los números 6, 7 y 8 muestro otras figuras donde se visualiza el llamado gnomon.

Con el fin de que el lector tenga una muestra de cómo utiliza este concepto en el texto, al final del presente trabajo incluyo la transcripción del razonamiento seguido (en el texto de Euclides) para esta proposición Libro II, nº 5.

6.- Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera con la (recta) añadida y la (recta) añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida.

Interpretación y Comprobación: Datos:



Dos formas:

A) Primer método aplicando los conocimientos de Álgebra

Divido el segmento AB en dos segmentos iguales por el punto L, y añado el segmento BD. Obtengo

Afirmo que: $AD \cdot BD + LB^2 = LD^2$

Utilizando nuestra notación, tengo:

$(2.a + b) \cdot b + a^2 = 2.a.b + b^2 + a^2$
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b$

Queda así probado.

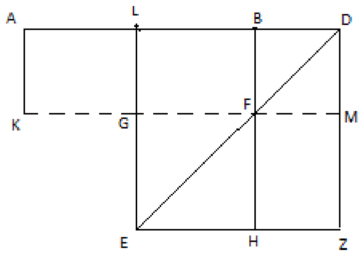
B) Segundo método conforme al texto de Euclides

Datos:

Afirmo que:
“El rectángulo determinado por AD y BD más el cuadrado de lado LB es igual al cuadrado de lado LD”.

Construyo el cuadrado LEZD y trazo la diagonal ED. Por el punto B trazo paralela a LE, y obtengo F y H. Por el punto F trazo paralela a AB, y obtengo M, G y K.

(1)



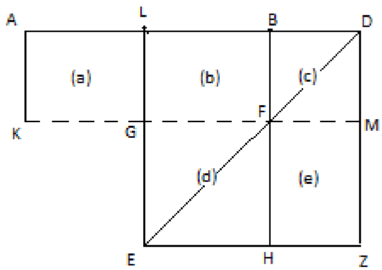
El rectángulo determinado por AD y BD es AKMD. El cuadrado de lado LB es GEHF. El cuadrado de lado LD es LEZD.

Observa la siguiente fig. (2).

Recuerda que (b) = (e), según (L. I, 433), y observa que (a) = (b)
Tengo AKMD = (a) + (b) + (c) = 2.(b) + (c)
AKMD + GEHF = 2.(b) + (c) + (d)

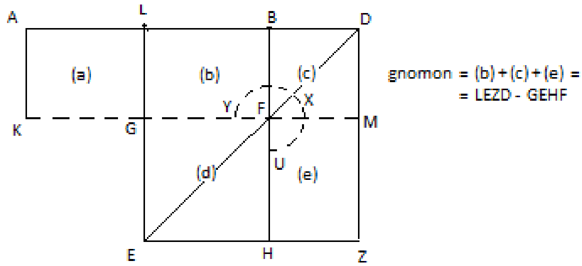
LEZD = (b) + (c) + (d) + (e) = 2.(b) + (d) + (c)

(2)



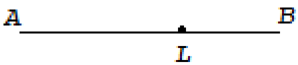
NOTA: En el texto sigue un razonamiento que hoy nos resulta algo tedioso. Llega un momento, próximo al final, que hace pone en juego lo que llama 'gnomon' (véase su definición en el nº 5) y que no define en el texto.

(3)



7.- Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera y el de uno de los segmentos tomados conjuntamente son iguales a dos veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y el segmento antedicho más el cuadrado del segmento restante.

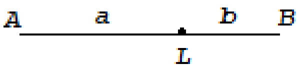
Interpretación y Comprobación: Datos



Afirmo que: $AB^2 + LB^2 = 2 .(AB. LB) + AL^2$

A) Primer método utilizando nuestros conocimientos de Álgebra

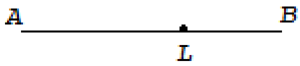
Con nuestra notación, tengo:



$(a + b)^2 + b^2 = a^2 + b^2 +2 .a.b + b^2 = a^2 +2 .b^2 +2 .ab$

$2. (a + b) .b + a^2 = 2. [a.b + b^2] + a^2 = a^2 + 2. b^2 + 2 .a.b$

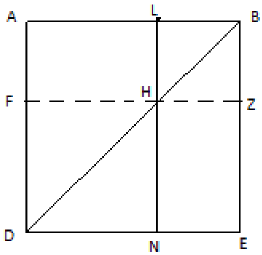
B) Segundo método conforme al texto de Euclides

Datos: 

Afirmo que: $AB^2 + LB^2 = 2 .(AB. LB) + AL^2$

Dem.: Construyo el cuadrado de lado AB y trazo la diagonal BD. Trazo por L paralela a AD y obtengo los puntos H, N . Trazo por H paralela al lado AB y obtengo los puntos Z, F.

(1)



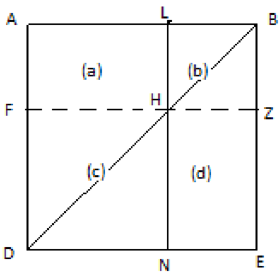
Observa la siguiente figura (2)

Recuerda que (a) = (d)

$AB^2 + LB^2$ **-->** ADEB + LHZB = [2.(a) + (b) + (c)] + (b) =

= 2.(a) + 2.(b) + (c)

(2)



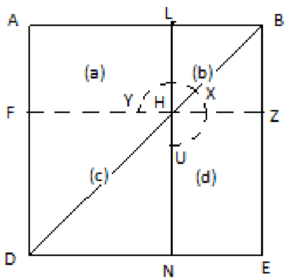
Por otro lado

2 .(AB. LB) + AL^2 -- > 2. AFZB + FDNH = 2. [(a) + (b)] + (c)

Y queda probado.

NOTA: En este caso el gnomon queda visible en la siguiente

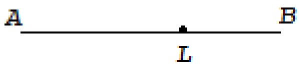
(3)



Se la nombra mediante UXY

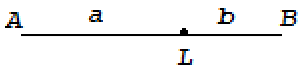
8.- Si se corta al azar una línea recta, cuatro veces el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos junto con el cuadrado del segmento restante es igual al cuadrado construido a partir de la (recta) entera y del segmento primeramente dicho, tomados como una sola recta.

Interpretación y Comprobación: Datos:

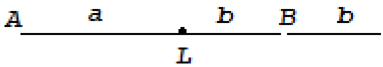


Afirmo que: 4 .(AB . LB) + AL^2 = (AB + LB)^2

A) Primer método aplicando nuestra notación y el Álgebra



Tengo: 4 .(a + b) . b + a^2 = 4 .[a.b + b^2] + a^2

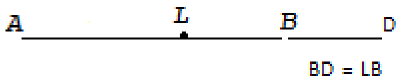


$[(a + b) + b]^2 = a^2 + 4.b^2 + 4 .a.b$

Queda probado.

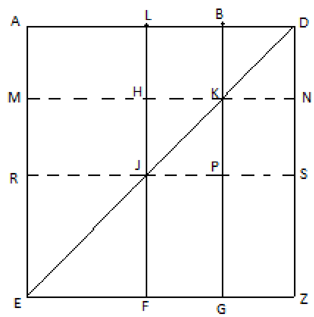
B) Método geométrico conforme al texto de Euclides

Datos:



Construyo el cuadrado de lado AD y trazo la diagonal. Trazo por L y por B paralelas al lado AE, y obtengo los puntos H, K, J, P, F, G. Trazo por H y K paralelas al lado AB, y obtengo los puntos M, N, R, S.

(1)



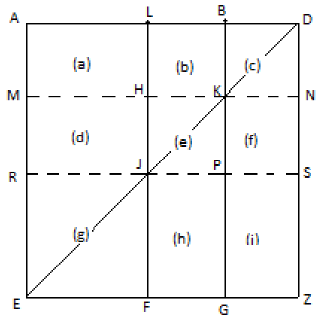
Afirmo que: $4 .(AB . LB) + AL^2 = (AB + LB)^2$

Observa la siguiente figura (2)

Tengo: $AB.LB = (a) + (b)$, $AL^2 = REFJ = (g)$

Por lo tanto $4 .(AB . LB) + AL^2 = 4. [(a) + (b)] + (g)$

(2)



Por otro lado, teniendo en cuenta que (a) +(d) = (h) + (i), y que (f) = (b), (e) = (c), tengo

$$(AB + LB)^2 = AEZD = 2.[(a) + (d)] + 2.[(b) + (c)] + (g)$$

Pero (d) = (a), y (c) = (b), y por tanto

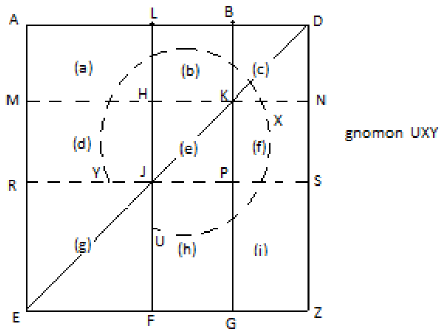
$$(AB + LB)^2 = 2.[2. (a)] + 2.[2. (b)] + (g), \text{ es decir}$$

$$(AB + LB)^2 = 4. [(a) + (b)] + (g), \text{ y queda probado.}$$

NOTA: Una vez más, aunque no hacemos uso de ella, presento la fig. (3) donde se visualiza el 'doble gnomon'.

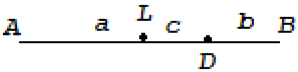
Al final del presente trabajo transcribo el razonamiento seguido en el texto de Euclides donde hace aplicación de este concepto.

(3)



9.- Si se corta una recta en partes iguales y desiguales, los cuadrados de los segmentos desiguales de la (recta) entrea son el doble del cuadrado de la mitad más el cuadrado de la (recta situada) entre los (puntos) de sección.

Interpretación y Comprobación: Datos:



, L es el punto medio

Afirmo que: $AD^2 + DB^2 = 2. [AL^2 + LD^2]$

Con nuestra notación y nuestro método (algebraico) tengo:

$(a + c)^2 + b^2 = a^2 + c^2 + 2. a.c + b^2$

$2 .[a^2 + c^2] = 2 .a^2 + 2 .c^2$

Pero $a = c + b$, por lo cual $a^2 = c^2 + b^2 + 2. c.b$

Entonces: $2 .a^2 + 2 .c^2 = a^2 + (c^2 + b^2 + 2. c.b) + 2. c^2 =$

$= a^2 + 3. c^2 + b^2 + 2. c.b$

Por otro lado

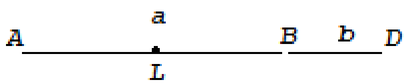
$$a^2 + c^2 + 2.\ a.c + b^2 = a^2 + c^2 + 2.\ (c + b).c + b^2 =$$

$$= a^2 + 3.\ c^2 + 2.\ c.b + b^2$$

Queda probado.

10.- Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el cuadrado de la (recta) entera con la (recta) añadida y el (cuadrado) de la añadida, tomados conjuntamente, son el doble del (cuadrado) de la mitad y el cuadrado construido a partir de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida, tomadas como una sola recta.

Interpretación y Comprobación: Datos:



L es el punto medio de AB, $a = AB$

Afirmo que: $AD^2 + BD^2 = 2.\ [AL^2 + LD^2]$

Tengo: $(a + b)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2.\ a.b + b^2 = a^2 + 2.\ b^2 + 2.a.b$

Por otro lado

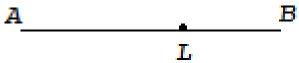
$$2.\ [(a / 2)^2 + (a / 2 + b)^2] = 2\ .[\ a^2 / 4 + a^2 / 4 + b^2 + a.b] =$$

$$= a^2\ \ 2\ .b^2 + 2\ .a.b$$

Queda probado.

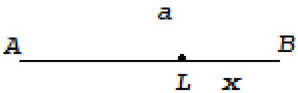
11.- Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Interpretación y Comprobación:Datos:



Deseo que el punto L sea tal que: $AB . LB = AL^2$

Llamo $x = LB$, $a = AB$



Tengo:

$a .x = (a - x)^2$, $a. x = a^2 + x^2 - 2. a.x$ -- >

$x^2 -3.a.x + a^2 = 0$

Resolviendo: $x = \frac{3.a+\sqrt{5.a^2}}{2} = \frac{(3+\sqrt{5}).a}{2} > 0$

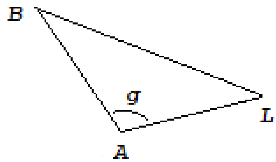
$x = \frac{3.a-\sqrt{5.a^2}}{2} = \frac{(3-\sqrt{5}).a}{2} < 0$

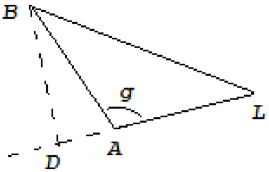
Solo es válida la primera. El punto L está situado en $a - x$, es decir $LB = a - x$

12.- En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Interpretación y Comprobación:Datos:

Nota:
No utilizaré el conocido Teorema de Pitágoras, sino lo probado en las anteriores proposiciones.

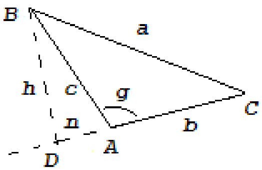




Afirmo que:

$$BL^2 = AB^2 + AL^2 + 2 .(AL . AD)$$

Con nuestra notación:



Tengo

$$(n + b)^2 = b^2 + n^2 + 2. b.n \text{ , por (Libro II, 4)}$$

Agrego a los dos miembros BD^2, con lo cual

$$(n + b)^2 + h^2 = b^2 + n^2 + 2. b.n + h^2 \text{ , pero (Libro I, 47),}$$

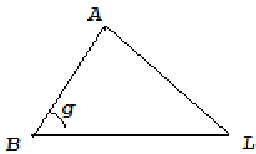
$$(n + b)^2 + h^2 = a^2 \text{ , por lo cual tengo:}$$

$$a^2 = b^2 + n^2 + 2. b.n + h^2 \text{ , pero } n^2 + h^2 = c^2$$

y por tanto $a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.n$ c.q.d.

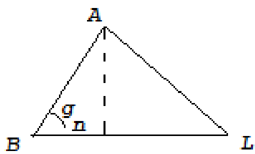
13.- En los triángulos acutángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo agudo.

Interpretación y Comprobación: Datos:



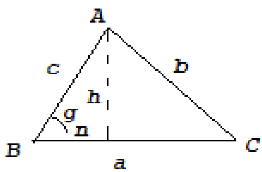
Afirmo que:

$$AL^2 = AB^2 + BL^2 - 2 .n .BL$$



En la siguiente figura, y teniendo en cuenta (L.II, 7), tengo:

$$a^2 + n^2 = 2. (a .n) + (a - n)^2$$



Agrego b^2 a los dos miembros:

$$a^2 + n^2 + b^2 = 2. (a .n) + (a - n)^2 + b^2$$

Pero $c^2 = n^2 + h^2$, por (Libro I, 47), y por igual razón:

$$b^2 = h^2 + (a - n)^2 = h^2 + a^2 + n^2 - 2. a.n$$

de donde: $(a - n)^2 = b^2 - h^2 = b^2 - (c^2 - n^2)$

Entonces: $a^2 + n^2 + b^2 = 2. (a .n) + (a - n)^2 + b^2$ -- >

$a^2 + n^2 + b^2 = 2. (a. n) + b^2 - c^2 + n^2 + b^2$ -- >

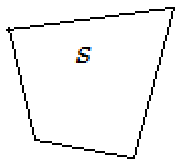
$a^2 = 2. a.n) - c^2 + b^2$ -- > $b^2 = a^2 + c^2 - 2. (a. n)$

c.q.d.

NOTA: Es una de las generalizaciones del conocido Teorema de Pitágoras.

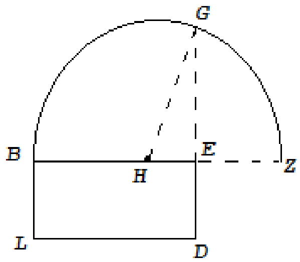
14.- Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

Interpretación y Construcción: Datos:



Resolución: Según (L. I, 45), construyo el rectángulo BEDL.

Triangulamos la figura dada y teniendo en cuenta (L. I, 45) obtengo el rectángulo BEDL en la siguiente figura.



Si fuese ED = BE tendría ya el cuadrado pedido. En otro caso supongo que BE > ED.

Prolongo BE hasta Z haciendo que EZ = ED. Marco el punto H, punto medio de BZ. Con radio HZ y centro en H trazo el semicírculo y levanto por E la perpendicular que me da el punto G.

Hecho el trazado anterior, tengo lo siguiente.

Por (Libro II, 5), $BE . EZ + HE^2 = HZ^2 = HG^2$

Por otro lado: $HE^2 + EG^2 = HG^2$, por lo cual y siendo EZ = ED,

$$BE. ED + HE^2 = HE^2 + EG^2 \dashrightarrow BE. ED = EG^2$$

Conclusión:
El cuadrado pedido es el de lado EG.

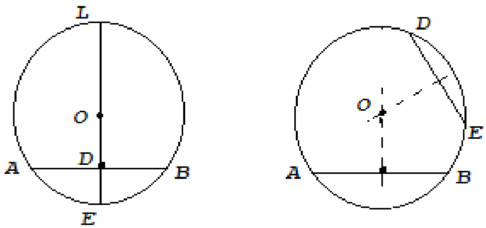
c.q.d.

$$$oOo$$$

LIBRO III

1.- Hallar el centro de un círculo dado.

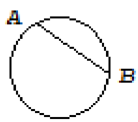
Presento dos formas:



A)
Trazo AB cualquiera, y por su punto medio levanto la perpendicular. En el punto medio de EL tengo el centro O.

B)
Otra forma: Trazo además el segmento DE, y por su punto medio levanto la perpendicular. El punto O común a las dos perpendiculares es el centro.

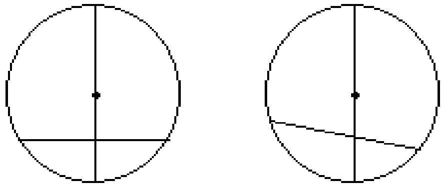
2.- Si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos caerá dentro del círculo.



Es una evidencia. Es un postulado.

3.- Si en un círculo una recta (trazada) a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no (trazada) a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

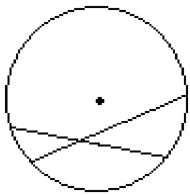
Mostramos dos situaciones:



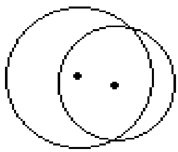
No precisa más explicación.

4.- Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales.

Es suficiente la figura:



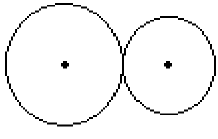
5.- Si dos círculos se cortan entre sí, su centro no será el mismo.



Es suficiente la figura:

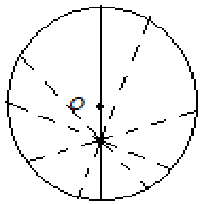
6.- Si dos círculos se tocan uno a otro, su centro no será el mismo.

Suficiente la figura:



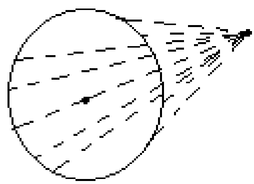
7.- Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la restante y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Suficiente observar la figura:



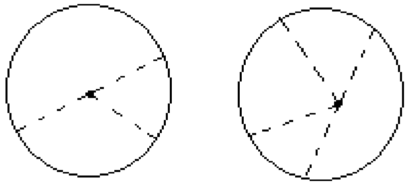
8.- Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se trazan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más cercana a la que pasa por el centro es mayor a la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más cercana a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

Es suficiente observar la figura:

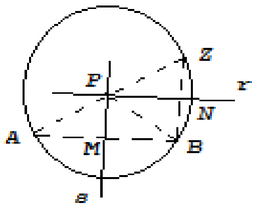


9.- Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto tomado es el centro del círculo.

Interpretación y Comprobación:Observa:



En la siguiente figura lo probamos:



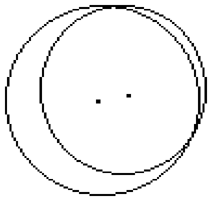
Sean PA = PZ = PB; trazo AB, BZ, y por su punto medio M, N, trazo las rectas r, s . Teniendo en cuenta que AM = MB y AP = BP, y que MP es común, los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales y por lo tanto los ángulos en M serán rectos, y así la recta s es perpendicular al segmento AB. Del mismo modo llego a que la recta r es perpendicular al segmento BZ. Entonces el punto común es el centro del círculo.

10.- Un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos.

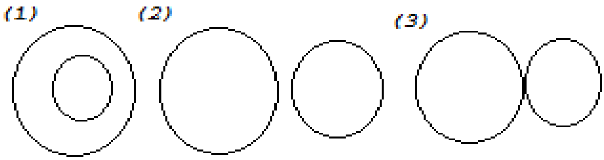
Interpretación y Comprobación:

Imposible conseguir que tengan más de dos puntos en común:

Interpretación, Profundización, Actualización

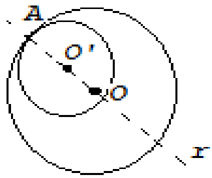


Otras situaciones:



11.- Si dos círculos se tocan uno a otro por dentro, y se toman sus centros, la recta que une sus centros prolongada caerá sobre el punto de contacto de los círculos.

Interpretación y Comprobación: Lo evidencia la figura

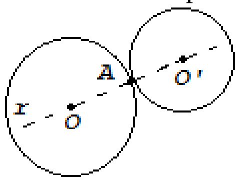


Si r pasa por O y O' , no podemos evitar que pase por A.
Debe tomarse como un postulado.

12.- Si dos círculos se tocan uno a otro por fuera, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto.

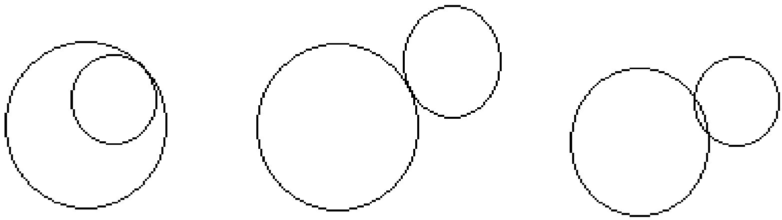
Interpretación y Comprobación: Lo evidencia la figura

Si la recta r pasa por los centros O y O' es inevitable que pase por el punto A de contacto. Debe ser tomado como un postulado.



13.- Un círculo no toca a otro círculo en más de un punto, ya sea por dentro o por fuera.

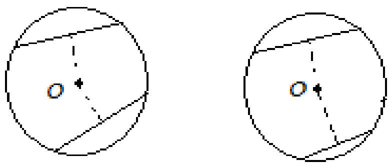
Interpretación y Comprobación: Suficiente observar las figuras



El contacto sólo es posible en un punto, en otro caso, como en la tercera figura, se trata de corte entre los dos círculos.

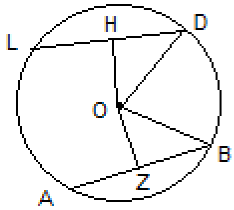
14.- En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación:Es una evidencia



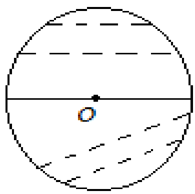
Justificación:

OZ, OH son perpendiculares; OB = OD y ZB =HD, por lo tanto OH y OZ son iguales.



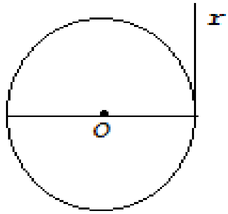
15.- En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más cercana al centro es siempre mayor que la más lejana.

Interpretación y Comprobación: Suficiente observar la figura

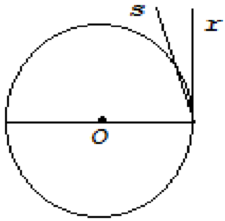


16.- La (recta) trazada por el extremo de un diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

Interpretación y Comprobación: Observa la figura



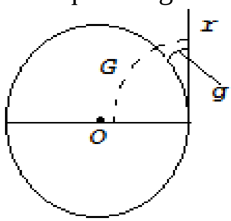
Otra situación:
Cualquiera que sea la recta s, tan próxima a r como queramos, no forma ángulo recto y además corta a la circunferencia en dos puntos.



Esta propiedad debe ser tomada como un postulado.

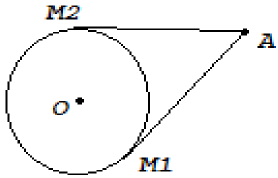
Si señalamos los ángulos su interpretación es la siguiente figura.

El ángulo G es mayor que cualquier ángulo agudo, G es recto.

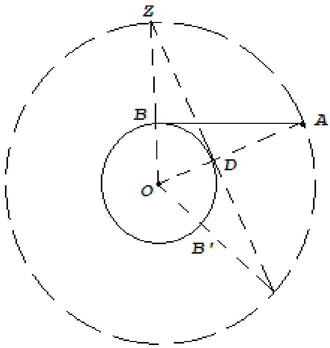


17.- Desde un punto dado traza una línea recta tangente a un círculo dado.

Interpretación y Construcción:



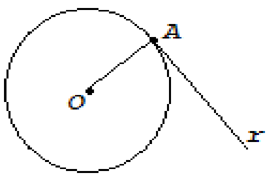
Construcción:



Trazo OA, y por D la perpendicular DZ, de modo que el ángulo ODZ es recto. Trazo OZ y obtengo B. Trazo AB, y es fácil comprobar que OBA es ángulo recto, por lo cual la recta AB es tangente en el punto Z.
También puedo trazar AB', siendo ésta otra tangente.

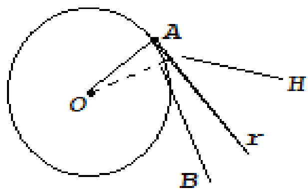
18.- Si una recta toca un círculo, y se traza una recta desde el centro al punto de contacto, la (recta) trazada será perpendicular a la tangente.

Interpretación y Comprobación:



Justificación:

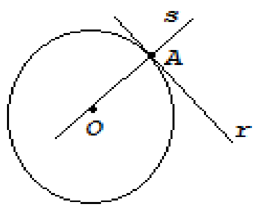
Supongo que no forman ángulo recto. Trazo desde O la perpendicular con r, y obtengo los puntos H en r, B en la circunferencia. Si OHA es recto entonces OAH es agudo. Como el lado mayor lo subtiende el ángulo mayor afirmo que OA es mayor que OH. Pero OB es igual que OA por lo que OB será mayor que OH, lo cual es contradictorio.



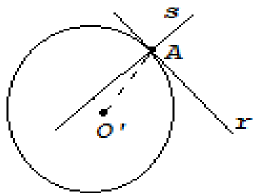
Por lo cual OA es perpendicular con la recta r que toca el círculo en A.

19.- Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto se traza una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo está en la recta trazada.

Interpretación y Comprobación:



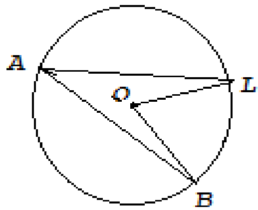
Justificación:



Supongo que el centro O' no está en la perpendicular s. Trazo O'A desde el centro al punto de contacto, y sabemos que ésta es perpendicular con la recta r de contacto en A. Por lo tanto forma ángulo recto como lo forma la recta s. Entro en contradicción y por tanto el centro O' está en la recta s.

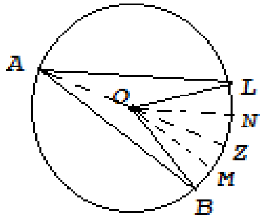
20.- En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tiene como base la misma circunferencia.

Interpretación y Comprobación:



Decimos que el vértice A del ángulo BAL está en la circunferencia (ángulo inscrito), y el vértice del ángulo BOL está en el centro, (ángulo central).

Justificación:



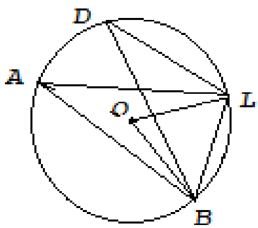
Los ángulos OAB y OBA son iguales. El ángulo BOZ =
= 2 .OAB . Del mismo modo OAL y OLA son iguales y el ángulo LOZ = 2 .OAL. Por lo tanto BOL = 2 . BAL

c.q.d.

21.- En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación:

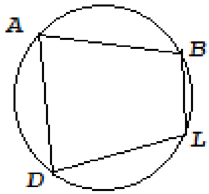
Debemos entender "en el mismo segmento del círculo" (o de la circunferencia).



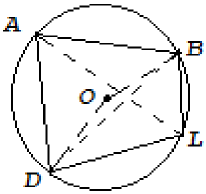
Es una consecuencia del número anterior.

22.- Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos.

Interpretación y Comprobación:



Justificación:



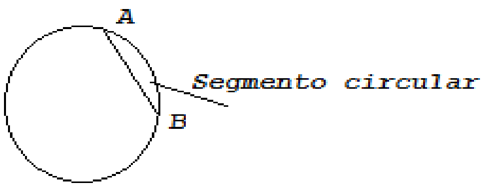
Observa que la orientación para medir ángulos es la contraria al movimiento de las agujas del reloj.

Tengo: BAD = 1 / 2 .BOD, DLB = 1 / 2 .DOB

BAD + DLB = 1 / 2 .[BOD + DOB] = 1 / 2 .[4 rectos] =
= 2 rectos.
Del mismo modo para los ángulos opuestos LBA, ADL.

NOTA:
Para lo que sigue es preciso recordar y matizar aquí algunas de las definiciones según el texto de Euclides. Las transcribo tal cual figuran en dicho texto.

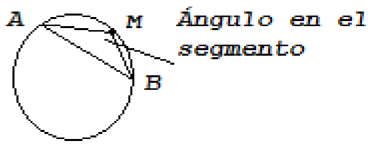
Def.1.- Un segmento de un círculo es la figura comprendida por una recta y una circunferencia de un círculo.



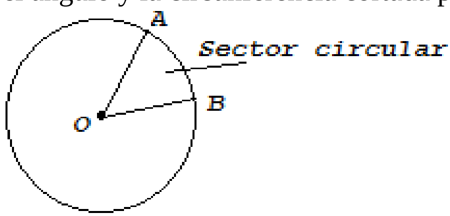
Observamos que llama ‘circunferencia’ lo que nosotros llamamos ‘arco de circunferencia’. En el texto habla de ‘recta’ cuando nosotros lo llamamos ‘segmento’ (de recta).

Def.2.- Ángulo en un segmento es el ángulo que, cuando se toma un punto sobre la circunferencia del segmento y se trazan rectas desde él hasta los extremos de la recta que es la base del segmento, está comprendido por las rectas trazadas.

Cuando las rectas que comprenden el ángulo cortan una circunferencia se dice que el ángulo está sobre ella.

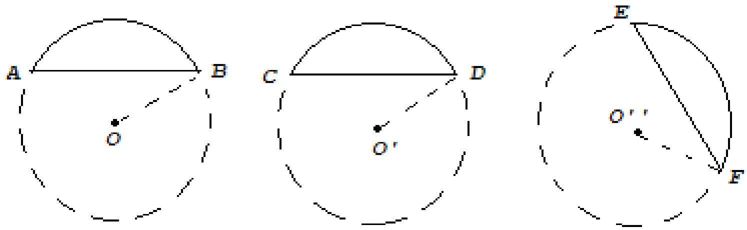


Def.3.- Un sector de un círculo es la figura que, cuando se construye un ángulo en el centro del círculo, está comprendida por las rectas que comprenden el ángulo y la circunferencia cortada por ellas.



Def.4.- Son segmentos de círculo semejantes los que admiten ángulos iguales, o aquellos en que los ángulos son iguales entre sí.

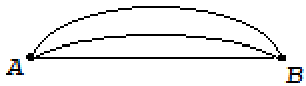
Esta definición está contaminada por ambigüedad que se debe a la definición 7 del texto.



Las figuras muestran cómo debemos entender la semejanza de segmentos de círculo: Arcos AB = CD = EF , y radios iguales.

23.- Sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales en el mismo lado.

Interpretación y Comprobación:



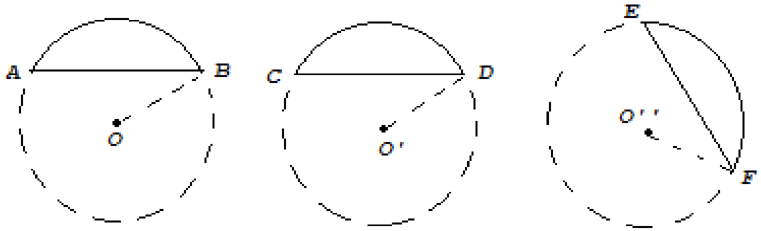
Justificación:

NOTA:
No convence el razonamiento del texto, y la definición de semejanza de segmentos de círculos es muy deficiente. Me quedo con lo que dicta la evidencia.

Debía ser tomado como un postulado.
Queda confirmado en el siguiente número 24.

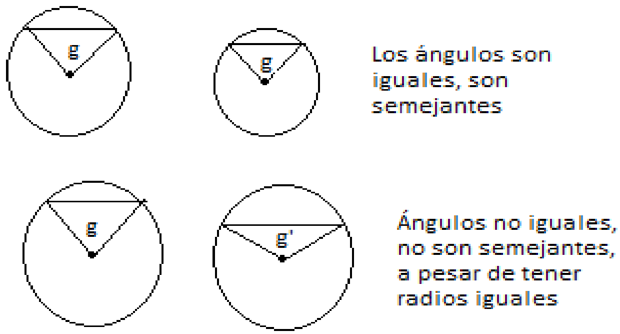
24.- Los segmentos circulares semejantes que están sobre rectas iguales son iguales entre sí.

Es una evidencia.



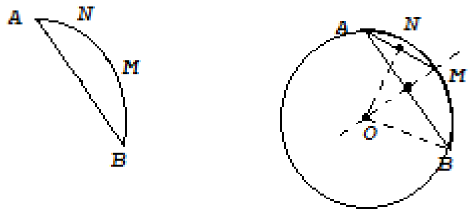
NOTA: Son iguales si los círculos tienen el mismo radio, en otro caso, si son semejantes las rectas no podrán ser iguales.

Hemos de decir que el concepto de segmentos semejantes debe ser este: "Longitud de arco de circunferencia y longitud de rectas han de ser proporcionales". Esto exige como condición necesaria que los ángulos centrales sean iguales.



25.- Dado un segmento de círculo completar el trazado del círculo del que es segmento.

Mi reconstrucción:

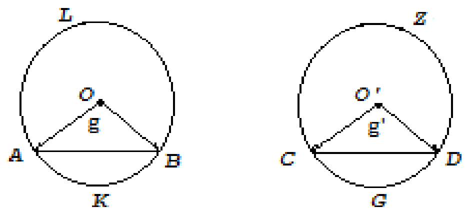


Por el punto medio de AB trazo la perpendicular y obtengo M. Por el punto medio N de AM trazo la perpendicular que corta a la anterior en el punto O. Este punto O es el centro del círculo cuyo radio es la distancia OB = OM.

26.- En los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya estén en los centros o en las circunferencias.

Interpretación y Comprobación:

Primer caso:



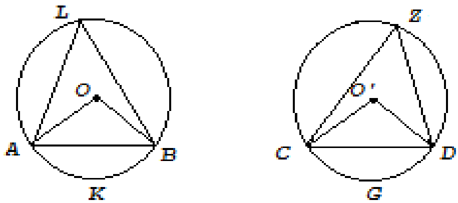
Sean dos círculos iguales. Supongo que los dos ángulos centrales son iguales.

Afirmo que: Los arcos AKB, CGD también son iguales.

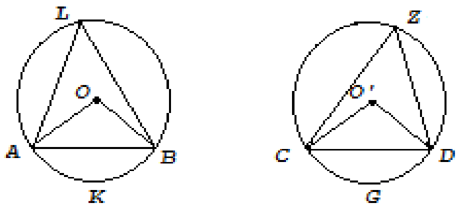
Si los círculos son iguales, y lo son también los ángulos g y g’ , es evidente que los arcos también lo son.

Segundo caso:
Dos círculos iguales. Supongo que los dos ángulos inscritos ALB, CZD también lo son.

Afirmo que: Los arcos AKB, CGD son iguales.



Si los dos ángulos ALB, CZD son iguales también lo son los ángulos centrales, y por lo tanto también lo serán los arcos.

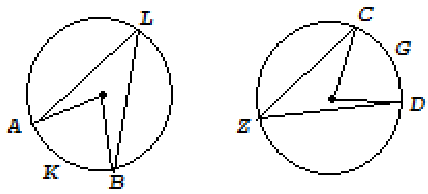


27.- En los círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias.

Interpretación y Comprobación:

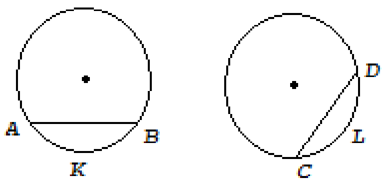
Sean círculos iguales, y los arcos de circunferencia AKB, DGC también iguales.

Afirmo que: Los ángulos centrales, y los ángulos inscritos con vértices L y Z, son iguales.



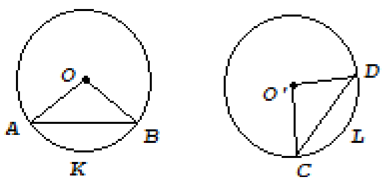
Evidentemente los ángulos centrales son iguales, y para los otros dos basta tener en cuenta lo ya probado para un ángulo inscrito.

28.- En los círculos iguales las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor (igual) a la mayor y la menor a la menor.



Es evidente, si los círculos y los segmentos de línea AB, CD son iguales, los arcos de círculo AKB, CLD también lo son.

29.- En los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales.



Aclaración:
He dicho en varias ocasiones que tomo los enunciados del texto tal cual. Parece que el presente enunciado ha sido erróneamente transcrito, pues parece idéntico al del número 28.

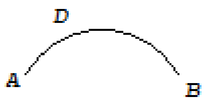
Según el texto, en su parte resolutiva, lo que hay que 'justificar' es que los segmentos (de línea) AB y CD son iguales.

Por lo que el enunciado debiera ser este:

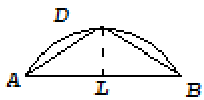
"En los círculos iguales, circunferencias iguales (arcos de círculo iguales) se corresponden con rectas iguales (segmentos de línea iguales)."

Es una evidencia:
Arcos iguales en círculos iguales -- > ángulos centrales iguales -- > segmentos de línea iguales.
30.- Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada.

Interpretación y Construcción: (Arco de circunferencia)



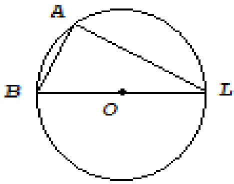
Su resolución se explica por sí misma: L es el punto medio.



31.- En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el (ángulo) en el segmento mayor es menos que un recto, el (ángulo) en el segmento menor es mayor que un recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un recto y el ángulo del segmento menor es menor que un recto.

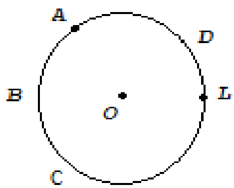
Interpretación y Comprobación:

A) Ángulo inscrito, vértice A, siendo el diámetro uno de sus lados:

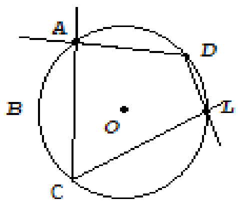


Cualquiera que sea el punto A, si BL es un diámetro, el ángulo A^ es recto, pues A^ = 1 / 2 . (2 rectos)

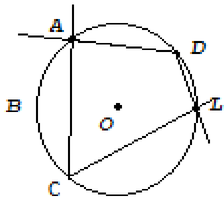
B) El segmento de círculo mayor es ABL, y el menor es LDA



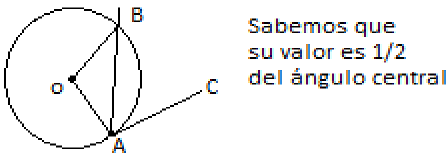
El ángulo en D (punto cualquiera del segmento menor) es mayor que un recto.
El ángulo en C (punto cualquiera del segmento mayor) es menor que un recto



C) Ángulo del segmento mayor, ángulo del segmento menor. Ángulo del segmento mayor es ADL. Ángulo del segmento menor es ACL.



NOTA: En el texto de Euclides, para el resto de esta proposición interviene la Def. 7 del texto: “Ángulo comprendido por una circunferencia (arco de circunferencia) y una recta”, que no se hace inteligible. Quizás se refiera al ángulo que actualmente llamamos “semi-inscrito”, o simplemente “seminscrito”:



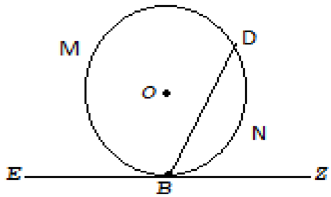
32.- Si una recta toca un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se traza una recta que corte el círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo.

Interpretación y Comprobación:

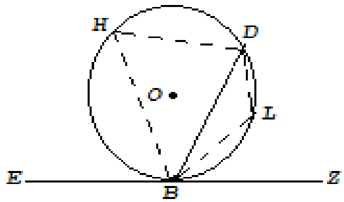
Tengo el círculo y la recta EZ tangente en B. Trazo por B la recta BD que corte al círculo.

Afirmo que:
El ángulo ZBD es igual a los ángulos en el
segmento del círculo BMD, es decir cuyo vértice esté en este segmento del círculo, y sus lados pasen por B y D. También, el ángulo EBD es igual a los ángulos en el segmento BND, es decir

cuyo vértice esté en este segmento del círculo, y sus lados pasen por B y D.

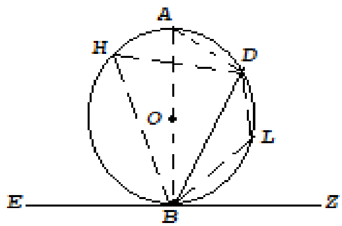


En resumen afirmo que:



Entre ángulo DBZ = DHB ; EBD = BLD , donde H y L pueden ser cualquier punto dentro del segmento de círculo correspondiente.

Demostración:

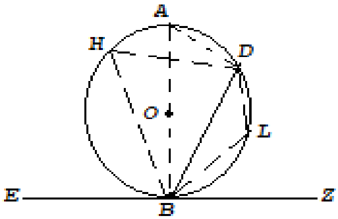


Trazo además BA coincidiendo con el diámetro. El ángulo BDA es recto como es sabido, y ABD + DAB suman un recto (porque los tres suman dos rectos).

Entonces, teniendo en cuenta que ABZ es recto, tengo ABZ = ABD + DAB. Si a los dos miembros resto ABD me queda:

DBZ = DAB . Pero DHB = DAB , porque subyacen al mismo segmento del círculo. Queda probado.

Por otro lado tengo: Tomando el cuadrilátero BLDA sabemos que BLD + DAB = 2 rectos, por ser opuestos en un cuadrilátero; por tanto: BLD + DAB = DBZ + DBE ; pero DAB = DBZ , por cubrir el mismo arco del círculo, por lo cual

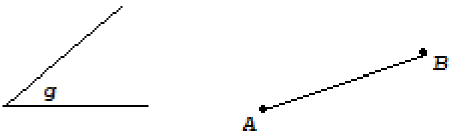


BLD + DBZ = DBZ + DBE , de donde BLD = DBE

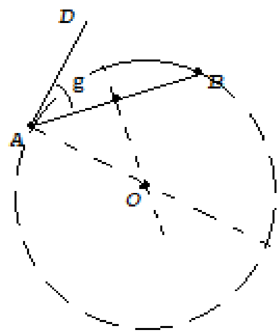
Observa que BLD y DBE cubren el mismo arco del círculo.

c.q.d.

33.- Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

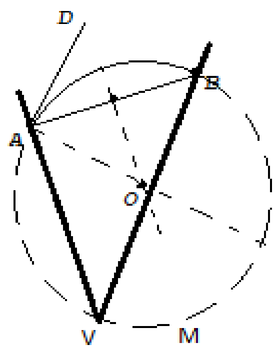


Construcción:



Trazo el ángulo BAD = g ; trazo por A la perpendicular a AD; Después trazo la perpendicular al segmento AB por su punto medio. Las dos perpendiculares se cortan en el punto O que es el centro. El segmento del círculo pedido es AMB.

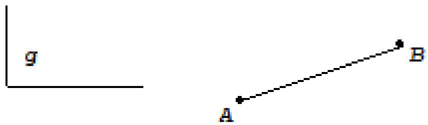
"… segmento que admita un ángulo g dado", significa que el valor del ángulo seminscrito DAB sea igual a g.



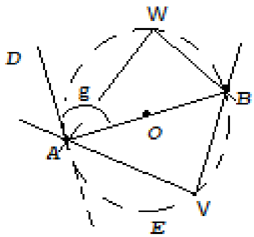
NOTA: Este segmento del círculo conlleva la siguiente importante propiedad: "Para todo punto V dentro del segmento de círculo AMB, el ángulo cumple AVB = DAB.

Llamamos arco capaz al arco AMB, porque desde cualquier punto V en él vemos el segmento AB bajo el mismo ángulo.

Otras situaciones: Datos

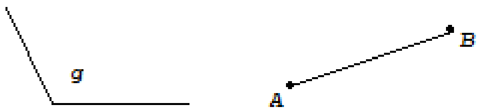


Construcción:

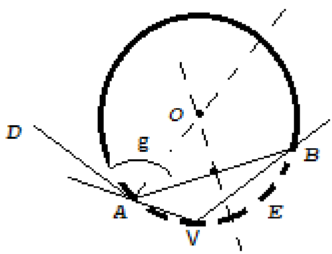


Trazo el ángulo BAD = g, que es recto; marco el punto medio del segmento AB. Trazo el círculo con centro en O y tangente en A la recta AD. El segmento pedido es AEB.

Datos:



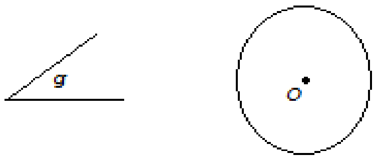
Construcción:



Trazo el ángulo BAD = g; trazo por A la perpendicular al segmento AD. Trazo por el punto medio de AB la perpendicular al segmento AB. Estas dos rectas se cortan en el punto O, centro del círculo. El segmento del círculo pedido es AEB. Para cualquier punto V, el valor del ángulo AVB coincide con el valor g.

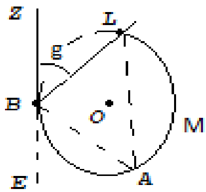
34.- A partir de un círculo dado cortar un segmento que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Datos:



Construcción:

Trazo por un punto B de la circunferencia la recta tangente al círculo. Trazo el ángulo ZBL = g



Cualquiera que sea el punto A dentro del segmento BML se cumple que BAL = ZBL, igual al ángulos dado g. El segmento cortado que nos piden es BML.

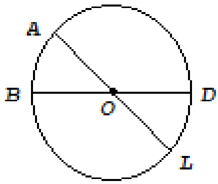
35.- Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los dos segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los dos segmentos de la otra.

Interpretación y Comprobación:

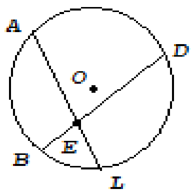
A) Las dos rectas coinciden con dos diámetro, por lo que el punto de corte es el centro del círculo.

Afirmo que: AO . OL = BO . OD

Su comprobación es inmediata, ya que cada segmento es igual al radio.

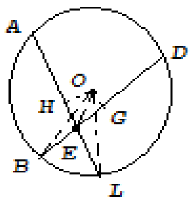


B) No pasan por el centro, o una de ellas no lo hace, y por tanto el punto común E no es el centro del círculo.



Afirmo que: AE . EL = BE . ED

Trazo OH perpendicular a AL, y OG perpendicular a BD.



El segmento AL ha sido dividido en partes iguales por H, y en partes desiguales por E. Entonces (Libro II, 5), se cumple

$AE \cdot EL + HE^2 = HL^2$, y añado a cada miembro el valor HO^2

$$AE \cdot EL + HE^2 + HO^2 = HL^2 + HO^2$$

y teniendo en cuenta que

$$HO^2 + HE^2 = OE^2 , \qquad HO^2 + HL^2 = OL^2 , \; OB = OL$$

resulta

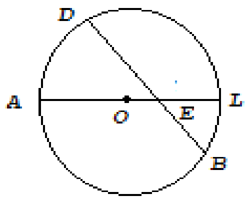
$$AE \cdot EL + OE^2 = OB^2$$

Por otro lado, de forma análoga obtengo

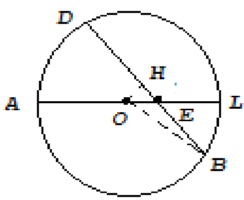
$DE \cdot EB + OE^2 = OB^2$, y por tanto $AE \cdot EL = DE \cdot EB$

c.q.d.

C) Una de las rectas pasa por el centro la otra no:



Afirmo que: $AE \cdot EL = DE \cdot EB$



Tengo $AE \cdot EL + OE^2 = OL^2$, y añado $-HO^2$ a los dos miembros , con lo cual

$$AE \cdot EL + OE^2 - HO^2 = OL^2 - HO^2$$

pero $OL = OB$, $OE^2 = HO^2 + HE^2$, con lo cual queda

$$AE \cdot EL + HE^2 = OB^2 - HO^2$$

Por otro lado:

$$DE \cdot EB + HE^2 = HB^2$$

pero $HB^2 = OB^2 – HO^2$, por lo cual

$$DE \cdot EB + HE^2 = OB^2 – HO^2$$

y por tanto

$$AE \cdot EL + HE^2 = DE \cdot EB + HE^2$$

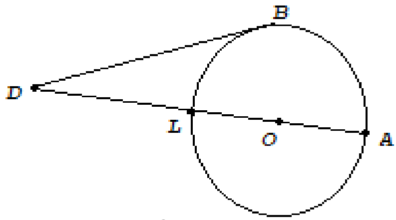
de donde concluyo: $AE \cdot EL = DE \cdot EB$

c.q.d.

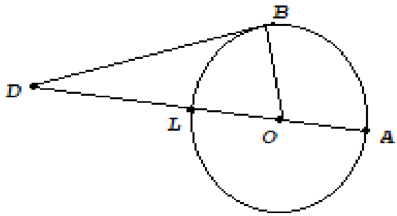
36.- Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra lo toca, el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.

Interpretación y Comprobación:Dos supuestos

A) La secante pasa por el centro



Afirmo que: DA . DL = DB^2
Demostración:



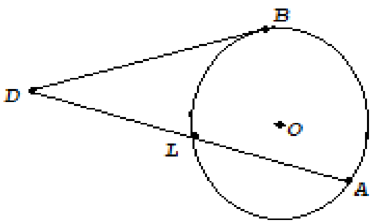
$DO^2 = DB^2 + OB^2$,

El segmento AL ha sido dividido por O en dos partes iguales y después se ha añadido LD. Entonces (Libro II, 6) se cumple:

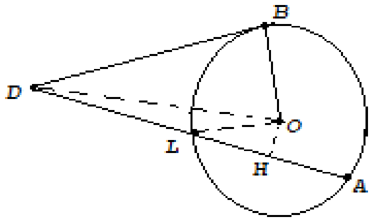
$AD \cdot LD + LO^2 = OD^2 = DB^2 + OB^2$

Pero LO = OB , y por lo tanto tengo AD . LD = DB^2

B) La secante no pasa por el centro:



Afirmo que: DA . DL = DB^2



Por (Libro II, 6) tengo:

$$DA \cdot DL + LH^2 = DH^2 ,$$

y añado a cada miembro el valor OH^2, tengo

$$DA \cdot DL + LH^2 + OH^2 = DH^2 + OH^2 ,$$

pero $LH^2 + OH^2 = OL^2$, con lo cual

$$DA \cdot DL + LO^2 = DH^2 + OH^2 ,$$

pero $DH^2 + OH^2 = OD^2$, con lo cual

$$DA \cdot DL + LO^2 = OD^2$$

Por otro lado: $DO^2 = DB^2 + OB^2 = DB^2 + OL^2$,

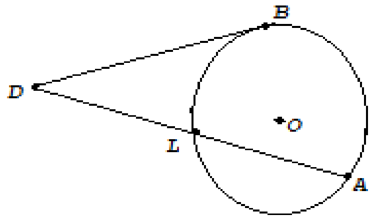
con lo cual $DA \cdot DL + LO^2 = DB^2 + OL^2$, de donde

$$DA.DL = DB^2$$ c.q.d.

37.- Si se toma un punto fuera de un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo, y la otra cae (sobre él), y además el (rectángulo comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la parte que cae, la (recta) que cae tocará el círculo.

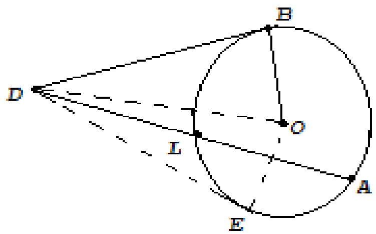
Evidentemente es el recíproco del anterior.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis: Además de lo que muestra el gráfico, se supone que se cumple DA . DL = DB^2

Tesis: El punto B es 'punto de contacto', y el segmento DB es tangente al círculo en B.



Trazo DE tangente al círculo, y DO , OE ;

Por lo probado en el número 36, se cumple: DA.DL = DE^2

Por hipótesis DA . DL = DB^2 , por lo cual DB = DE.

Pero también OE = OB, y OD es común, por lo que los ángulos DEO y DBO son iguales. Como DEO es recto también lo será DBO. El punto B es punto de tangencia.

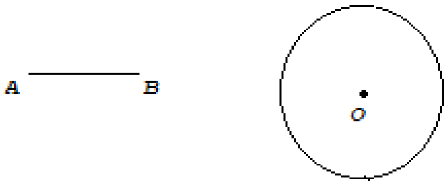
c.q.d.

$$$oOo$$$

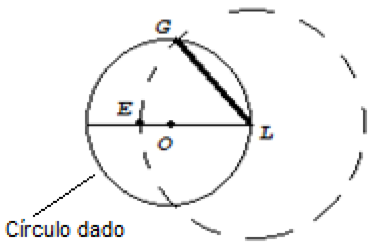
LIBRO IV

1.- Adaptar a un círculo dado una recta dada que no sea mayor que el diámetro del círculo.

Interpretación y Construcción: Datos



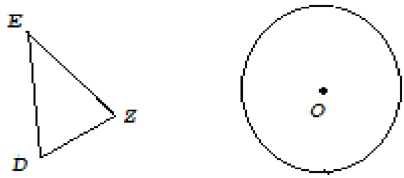
Construcción:



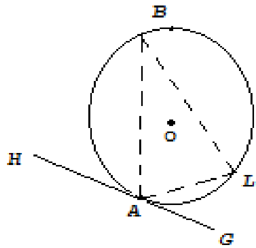
He marcado el punto E tal que EL = AB, y he trazado el círculo con centro en L y radio LE. Obtengo el punto G; LG es la adaptación pedida del segmento AB dado.

2.- Inscribir en un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.

Interpretación y Construcción: Datos



Construcción:

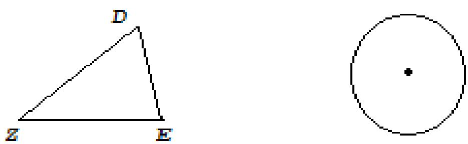


Marco el punto A cualquiera y trazo la tangente al círculo en el punto A. En el punto A adapto el ángulo GAL igual al ángulo DEZ. También adapto en el punto A el ángulo HAB igual al ángulo DZE. Uniendo B con L tengo el resultado.

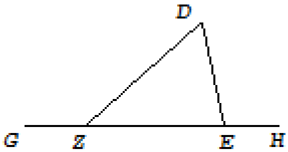
En efecto, en ángulos B^ = GAL por cubrir el mismo segmento del círculo, por lo que B^ = E^ . Lo mismo L^ = HAB, por lo que L^ = Z^ . Necesariamente A^ = D^ .

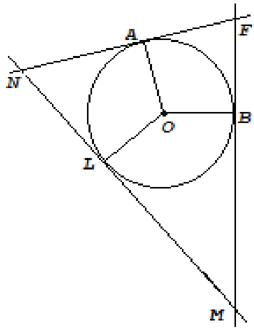
3.- Circunscribir en torno a un círculo dado un triángulo de ángulos iguales a los de un triángulo dado.

Interpretación y Construcción: Datos



Construcción:





Marco un punto B en el círculo, y trazo OB ; En O adapto el ángulo BOA = HED; adapto también en O el ángulo BOL = DZG.

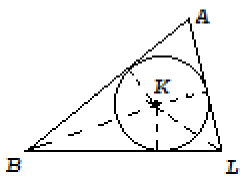
Marco los puntos A y L , y trazo por B, por A y por L, rectas tangentes al círculo en estos puntos. Queda construido el triángulo FNM, cuyos ángulos son:

BOA + BFA = 2 rectos -- > BFA = E^
BOL + BML = 2 rectos -- > BML = Z^

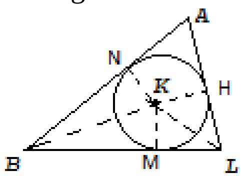
y necesariamente ANL = D^ . Solución: FNM

4.- Inscribir un círculo en un triángulo dado.

Interpretación y Construcción:



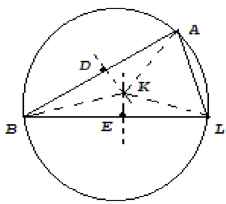
Trazo las bisectrices de los ángulos B^ , L^ , que se cortan en el punto K. Para probar que K es el centro del círculo trazo desde él los segmento perpendiculares a cada lado. Evidentemente estos segmentos son iguales:



KM = KN por ser opuestos a ángulos iguales; KH = KM por ser opuestos a ángulos iguales, por lo que los tres son iguales, y es el radio del círculo.

5.- Circunscribir un círculo en torno a un triángulo dado.

Interpretación y Construcción:



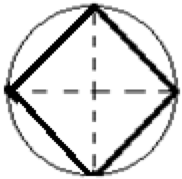
Marco los puntos medios D, E ; trazo por D y E rectas perpendiculares al lado que los contiene. Obtengo el punto K.

Pruebo que K es el centro del círculo: Trazo KA, KB y KL, y es fácil comprobar que son iguales:

Los triángulos BDK y ADK tienen iguales los ángulos en D y B^ = A^ por ser común el lado DK. Los lados AK y BK son iguales por ser opuestos a ángulos iguales y siendo además BD = AD. Del mismo modo llego a que BK = LK, y por tanto los tres son iguales. Su valor nos da el radio del círculo.

6.- Inscribir un cuadrado en un círculo dado.

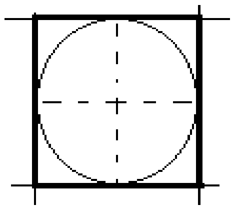
Interpretación y Construcción:



Se explica por sí mismo.

7.- Circunscribir un cuadrado en torno a un círculo dado.

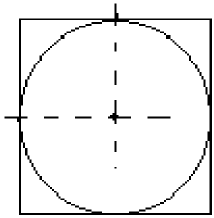
Interpretación y Construcción:



Se explica por sí mismo.

8.- Inscribir un círculo en un cuadrado dado.

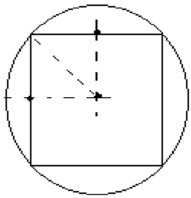
Interpretación y Construcción:



Se explica por sí mismo.

9.- Circunscribir un círculo en torno a un cuadrado dado.

Interpretación y Construcción:



Se explica por sí mismo.

10.- Construir un triángulo isósceles cada uno de cuyos ángulos de la base sea el doble del restante.

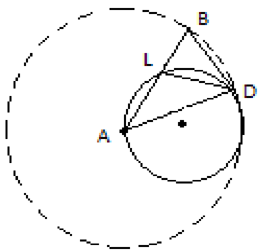
Interpretación y Construcción: Datos: Ningulo

Construcción:

Tomo un segmento AB cualquiera. Marco el punto L tal que

$AB \cdot LB = AL^2$ (Consultar Libro II, 11)

NOTA: Significa: Área del rectángulo determinado por los segmentos AB, LB, es igual al área del cuadrado de lado AL.



Trazo el círculo con centro en A y radio AB, y adapto en B el segmento AL al círculo, obtengo el punto D.

Afirmo que: El triángulo pedido es ABD

Demostración:

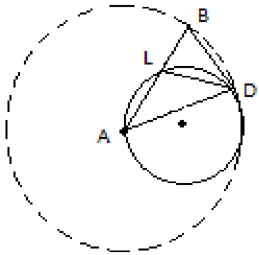
Trazo LD y AD. Trazo el círculo que circunscribe al triángulo ALD, ver (L.IV, 5).

Tengo: AB .LB = AL^2 -- > AB .LB = BD^2 , y teniendo en cuenta (Libro III, 37) esto me garantiza que DB es tangente en D al círculo menor.

Según (Libro III, 32), en el círculo menor, el ángulo (seminscrito) BDL es igual al ángulo DAL: BDL = DAL

Añado a los dos miembros el ángulo LDA, con lo cual

BDL + LDA = DAL + LDA, y por tanto
BDA = DAL + LDA



Por otro lado, teniendo en cuenta que BLD + DLA = 2 rectos
y que DAL + LDA + DLA = 2 rectos, y por tanto

BLD + DLA = DAL + LDA + DLA

obtengo

BLD = DAL + LDA , y teniendo en cuenta que
obtuvimos

BDA = DAL + LDA, resulta BLD = BDA

Necesariamente (y por construcción) será DBL = DBA.

Así, los triángulos DAB y BDL son semejantes.

NOTA: Creo tener un camino más corto. Después de haber probado que BDL = DAB, por construcción tengo que también DBL = DBA , y por tanto necesariamente será BLD = BDA. Los citados triángulos son semejantes.

Ahora bien, puesto que AB = AD, los ángulos ABD y BDA son iguales. El triángulo ADB es isósceles.

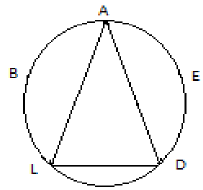
Por otro lado vimos que BLD = DAL + LDA
Por ser BLD = DBL deduzco que LD = BD, y por tanto AL = LD, (ya que AL = BD por construcción); por tanto los ángulos

DAL = LDA, y entonces BLD = 2.DAL

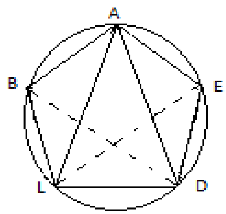
y por tanto ABD = 2. BAD, y lo mismo ADB = 2.BAD c.q.d.

11.- Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

Construcción:



Inscribo el triángulo isósceles ADL, de tal forma que D^ = L^ = 2. A^ .
Trazo las bisectrices de L^ y de D^ , y obtengo los puntos B, E.
Trazando los segmentos AB, AE, LB, DE, junto con LD, tengo el pentágono pedido.



Compruebo que es equiángulo y equilátero.

Teniendo en cuenta que los ángulos ALD y ADL son el doble que LAD, tengo los cinco ángulos iguales: ALE, ELD, ADB, BDL, LAD.

Por otro lado el ángulo BAL = BDL porque abarcan el mismo segmento, y por igual razón ALB = ADB , EAD = ELD, EDA = ALE. También, puesto que ABD es semejante con ALD y lo mismo ALE, ABD = 2.ADB, AEL = 2.ALE. De modo que, si designo por g = LAD, cada uno de los ángulos iguales a LAD, puedo concluir que

A^ = 3.g, B^ = 3.g, L^ = 3.g, D^ = 3.g, E^ = 3.g
luego es equiángulo.

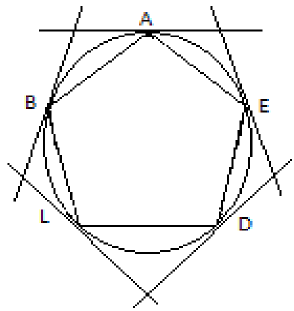
También es equilátero ya que cada lado es opuesto a un ángulo de amplitud g, y son iguales los lados que lo comprenden.

12.- Circunscribir un pentágono equilátero y equiángulo en torno a un círculo dado.

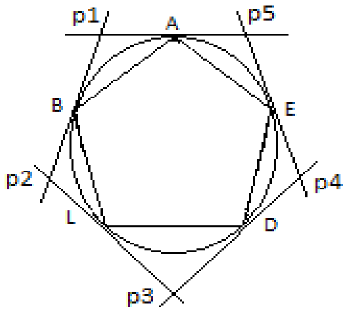
Construcción:

Inscribo un pentágono como en el número 11 anterior.

Después por cada vértice trazo la recta tangente al círculo, y el resultado será el pentágono pedido.



Justificación:



Los ángulos p1AB y p1BA son iguales y por tanto Ap1 = Bp1.

Por igual razón

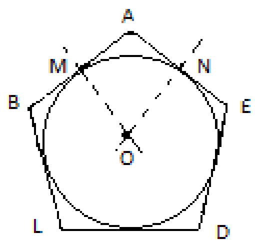
Bp2 = Lp2 , Ap1 = Ap5,

e igual los restantes, de modo que puedo concluir que el pentágono es equilátero.

El mismo razonamiento anterior nos permite afirmar que p1^ = p2^ = …,   es decir, es equiángulo.

13.- Inscribir un círculo en un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

Construcción:

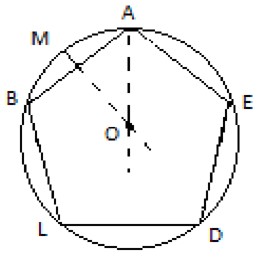


He trazado la perpendicular por los puntos medios de AB y de AE, y estas se cortan en O, el centro del círculo, ya que las distancias OM, ON son iguales, evidentemente.

14.- Circunscribir un círculo en torno a un pentágono dado que es equilátero y equiángulo.

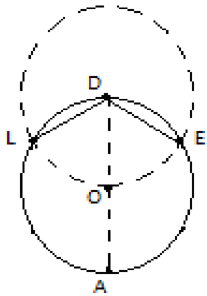
Construcción:

Por el vértice A trazo la recta que pasará por el punto medio de LD siendo además perpendicular a éste, y por el punto medio de AB trazo la perpendicular a AB. Se cortan en O, y se cumple que OA = OB = OE = … Por lo cual O es el centro y OA es el radio.



15.- Inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

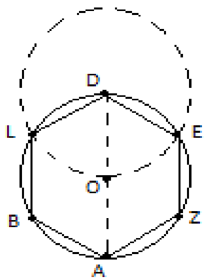
Construcción:



Marco el centro O del círculo dado y trazo un diámetro, por ejemplo el que corta en los puntos A, D. Haciendo centro en D y tomando radio igual a DO trazo un segundo círculo. Este círculo corta al primero en los puntos E, L, y trazo los segmentos DE, DL.

Trazo por E y L paralelas al diámetro AD y cortan en los puntos B, Z, y trazo los segmentos AB, AZ.

Trazo también los segmentos LB, EZ.

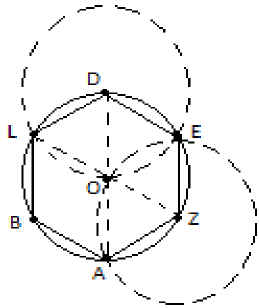


Evidentemente los segmentos DE, DL, AB, AZ son iguales.

Ahora trazo otro círculo con centro Z y radio OZ, el cual evidentemente corta al primero en los puntos E, A.

Observa que DOL es equilátero, y lo mismo AOZ.

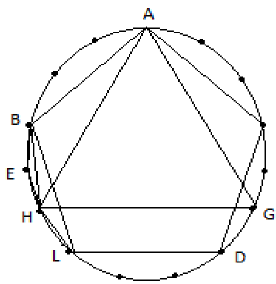
Así obtengo que EZ = AZ, y teniendo en cuenta que LB = EZ, puedo concluir que el polígono es equilátero, seis lados iguales.



Por ser equilátero y estar inscrito en un círculo puedo concluir que es equiángulo.

16.- Inscribir un pentadecágono equilátero y equiángulo en un círculo dado.

Construcción: Pentadecágono es polígono con quince lados



Inscribo un triángulo equilátero y el pentágono equilátero de modo que un vértice de éste coincida con un vértice del triángulo. El arco de circunferencia subyacente a un lado del triángulo quedará dividido en cinco arcos iguales, y bajo el lado del pentágono subyacen tres arcos iguales.

En la figura han sido marcados los puntos extremos de los lados del pentadecágono, que son los vértices de sus ángulos.

Suficiente adaptar el segmento BE sobre la circunferencia del círculo, y el resultado es el pentadecágono pedido.

NOTA:
Justifico que HL = EH. En efecto, tanto el triángulo como el pentágono son equiláteros. En cada arco determinado por un lado del triángulo caben exactamente cinco lados del pentadecágono, y en cada arco determinado por un lado del pentágono caben tres. Los arcos asociados a AH y a BL comparten dos lados de pentadecágono, siendo éstos exactamente iguales a los que tengo en el arco asociado a AB. Del mismo modo los arcos asociados a HG y BL comparten el lado HL, siendo éste igual a los restantes del arco asociado a HG. Pero estos lados coinciden con los correspondientes al arco asociado a AB. Conclusión: Los lados BE, EH, HL son iguales entre sí, e iguales al resto de los lados. Es lo que deseaba justificar.

$$$oOo$$$

LIBRO VI

Geometría sobre un plano.

NOTAS:

En el texto, cuando habla de triángulos iguales, paralelogramos iguales, …, se refiere a la igualdad de sus superficies (o áreas).

Interesa exponer aquí algunas definiciones que figuran en este Libro VI.

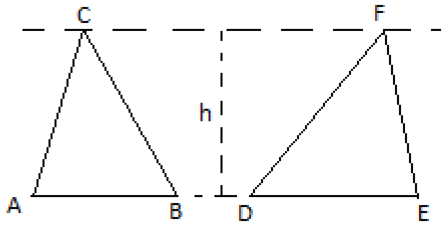
Def.1.- Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.

Def.3.- Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.

Def.4.- En toda figura, la altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base.

1.- Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Interpretación y Comprobación: (Se refiere a sus áreas)



S1 = 1 / 2.AB .h , S2 = 1 / 2. DE .h

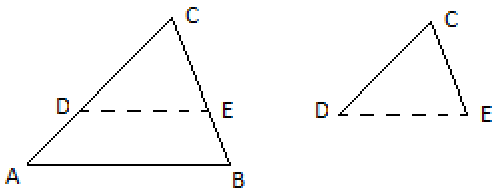
S1 / S2 = … = AB / DE

Del mismo modo se prueba en el caso de dos paralelogramos.

NOTA: Consecuencia: Si además las bases son iguales, entonces sus áreas son iguales.

2.- Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

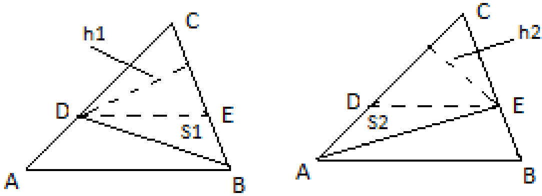
Interpretación y Comprobación:



Afirmo que: AD / DC = BE / EC

Demostración: Observa siguientes figuras

S2 = S1, por tener la misma base ED y estar comprendidas entre las mismas paralelas. Sea S el área del triángulo DEC.



Por otro lado: S1 = 1 / 2 .BE . h1 , S = 1 / 2 .EC .h1 ,
y por lo probado en Prop. 1 tengo

S1 / S = BE / EC

S2 = 1 / 2 .AD .h2 , S = 1 / 2. DC .h2, por lo tanto
S2 / S = AD / DC

Pero S2 = S1, por lo cual: AD / DC = BE / EC

c.q.d.

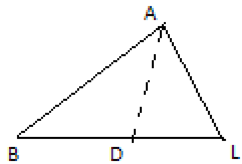
El recíproco es evidente.

NOTA: Esta proposición encierra lo que llamamos Teorema de Thales.

3.- Si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los restantes lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo.

Interpretación y Comprobación:

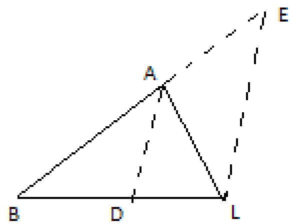
Hipótesis: Triángulo ABL y la recta AD que divide el ángulo en A en dos partes iguales.



Tesis: BD / DL = BA / AL

Demostración:

Trazo por L la paralela a AD, y prolongo AB hasta obtener el punto común E.



Por ser LE paralela a DA se cumple entre ángulos: ALE = DAL, y AEL = BAD. Teniendo en cuenta que por hipótesis es BAD = DAL concluyo que ALE = AEL, con lo cual el triángulo LAE es isósceles, y así AE = AL.

Por otro lado, puesto que AD corta las rectas BL y BE siendo paralela al lado LE, se cumple

BD / DL = BA / AE, pero AE = AL , con lo cual tengo
BD / DL = BA / AL

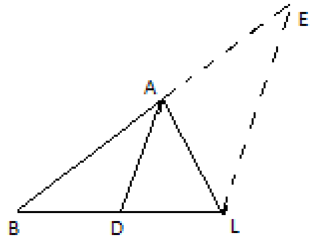
c.q.d.

Recíproco:

Hipótesis: Trazo la recta AD y compruebo que se cumple
BD / DL = BA / AL

Afirmo que: La recta AD divide el ángulo A^ en dos partes iguales.

Realizo un trazado parecido al anterior, trazando LE paralela a AD.



Entonces BD / DL = BA / AE . Pero por hipótesis

BD / DL = BA / AL, y por tanto AE = AL

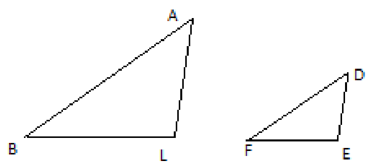
Entonces los ángulos AEL = ALE. Pero también, por paralelismo BAD = AEL, DAL = ALE, y por tanto

BAD = DAL

c.q.d.

4.- En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

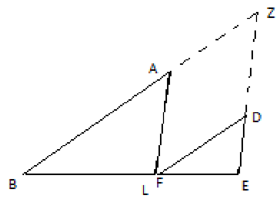
Interpretación y Comprobación: Datos



NOTA: Cuando dice que "son correspondientes" significa que también son proporcionales con el mismo coeficiente de proporcionalidad.

Hipótesis: D^ = A^, F^ = B^ , E^ = L^ ;

Tesis: BA / FD = BL / FE = AL / DE



ALDZ es paralelogramo.

Teniendo en cuenta que AL es paralela a ZE tengo:

BA / AZ = BL / LE.

Pero AZ = FD, y por tanto BA / FD = BL / FE. (F coincide con L)

Por otro lado, teniendo en cuenta que FD es paralela a BZ tengo:

EF / LB = ED / DZ,

pero DZ = LA, y por tanto EF / LB = ED / LA.

Invirtiendo los dos miembros de esta última queda: BL / FE = AL / DE . c.q.d.

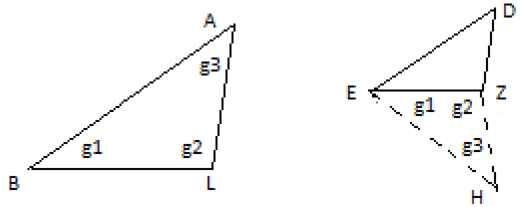
5.- Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

Interpretación y Comprobación:
Es el recíproco de lo probado en el núm. 4

Hipótesis:

BA / BL = ED / EZ,   BL / AL = EZ / DZ , y también   BA / AL = ED / ZD.

Tesis: Los triángulos son equiángulos entre sí, es decir tendrán sus ángulos iguales dos a dos.



Comprobación:

He construido el triángulo EZH haciendo que los ángulos sean iguales a g1, g2, g3 del triángulo ABL. Entonces los triángulos ABL y HEZ son equiángulos, y por tanto:

NOTA: Consultar prop.

BA / BL = EH / EZ

Pero por hipótesis: BA / BL = ED / EZ , y por tanto EH = ED.

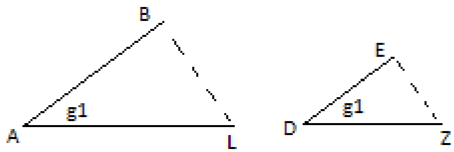
Por otro lado AB / AL = EH / ZH, y por tanto AB / AL =

= ED / ZH. Pero por hipótesis AB / AL = ED / DZ, y por tanto DZ = ZH ,

He llegado a que los triángulos EDZ, EHZ son iguales, y como éste es equiángulo con ABL, también lo es con EDZ.   c.q.d.

6.- Si dos triángulos tienen un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.

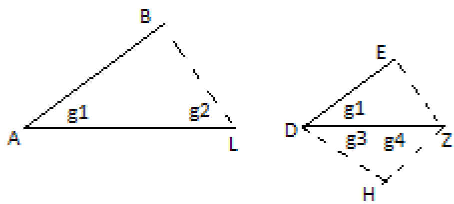
Interpretación y Comprobación: Datos



Hipótesis: AB / AL = DE / DZ, y A^ = D^

Tesis: Los triángulos son equiángulos entre sí (que tienen los ángulos iguales dos a dos)

Comprobación:



He construido el triángulo DHZ equiángulo con ABL, haciendo g3 = g1, g4 = g2. Entonces se cumple

AB / AL = DH / DZ

Pero por hipótesis: AB / AL = DE / DZ

y por tanto DH = DE, y por construcción los ángulos

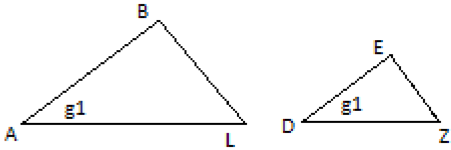
EDZ = HDZ, y por tanto también EZ = HZ.

Así puedo concluir que los triángulos DEZ y DHZ son iguales, y por tanto equiángulos, y por tanto DEZ es equiángulo con ABL.

c.q.d.

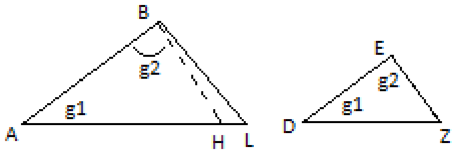
7.- Si dos triángulos tienen un ángulo del uno igual a un ángulo del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos, y tienen los otros ángulos parejamente menores o no menores que un resto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.

Interpretación y Comprobación: Datos



Hipótesis: A^ = D^ , BA / BL = ED / EZ ,
LA / LB = ZD / ZE

Tesis: Los triángulos tienen sus ángulos iguales dos a dos.



Supongo que ABL no es igual a DEZ, y que ABL > DEZ.

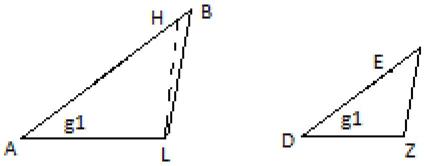
Trazo BH de modo que ABH = DEZ, y entonces los ángulos BHA = EZD; así, los triángulos ABH, DEZ son equiángulos.

Sabemos que entonces BA / BH = ED / EZ

Pero por hipótesis BA / BL = ED / EZ , y por tanto ha de ser BH = BL, y por consiguiente ABL = g2 = DEZ. Además, necesariamente será

L^ = Z^ , y los triángulos dados son equiángulos.

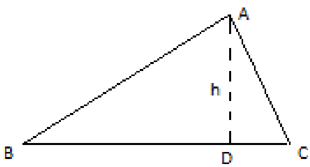
De forma análoga se prueba en el supuesto de que L^ y Z^ sean obtusángulos, como muestra la figura:



NOTA: Diremos que son triángulos semejantes.

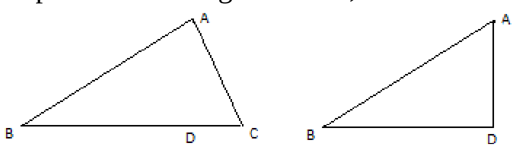
8.- Si en un triángulo rectángulo se traza la perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.

Interpretación y Comprobación: Dato



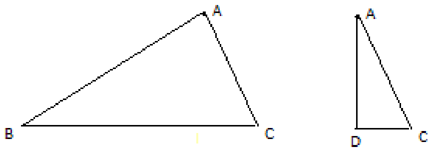
Comprobación:

Sean por separado los triángulos BAC, ADB.



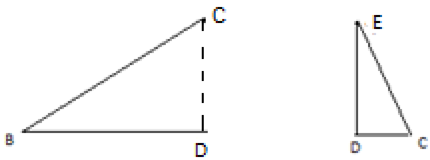
Tienen dos ángulos iguales: A^ = recto = D^ y B^ es común, por lo tanto sus tres ángulos son iguales, son equiángulo y por tanto semejantes.

Tomo ahora los triángulos BAC y ADC



Tiene dos ángulos iguales ya que A^ = recto = D^ , y A'^ + C^ = recto, y B^ + C^ = recto, por tanto A'^ = B^, por lo que sus tres ángulos son iguales, son equiángulos y por tanto semejantes.

Además

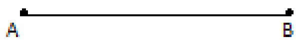


Observa que los ángulos: DBC + C^ = un recto, y lo mismo DEC + C^ = un recto, de donde E^ = B^ , y por tanto los triángulos CDB, CDE son equiángulos, y por tanto semejantes.

NOTA: Designando por N, M y L los tres triángulos, sabemos que si N es semejante a M y M es semejante a L, entonces N es semejante a L. (Silogismo).

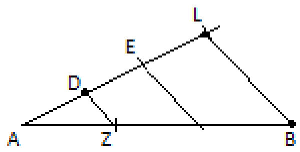
9.- Quitar de una recta dada la parte que se pida.

Construcción: Dato



Se pide cortar del segmento AB su tercera parte, por ejemplo.

Construcción:



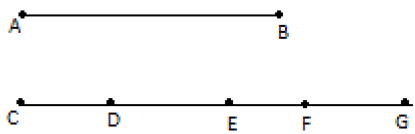
Trazo la recta AL y marco en ella el punto D cualquiera; después traslado sobre AL el segmento AD obteniendo los puntos E y L. Trazo LB, y por E y D trazo paralelas a LB.

Evidentemente AZ es la tercera parte de AB, basta aplicar la proporcionalidad entre segmentos. El segmento ZB es lo que queda después de cortar su tercera parte.

10.- Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida.

Interpretación y Construcción: Datos:

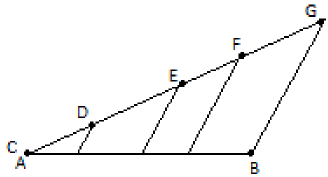
Recta (segmento) no dividida, recta (segmento) sí dividida



Tengo el segmento AB que deseo dividir en cuatro partes proporcionales a los segmentos marcados en la división del segmento CG.

Construcción:

Sitúo el segmento dividido CG en la posición de la figura.



Trazo BG, y paralelas a ésta por los puntos F, E, D, y lo tengo.

Observa que los subsegmentos no son iguales, en general pueden ser o no iguales, la condición es que sean (son) proporcionales a los de la recta (segmento) dividido.

11.- Dadas dos rectas, hallar una tercera proporcional.

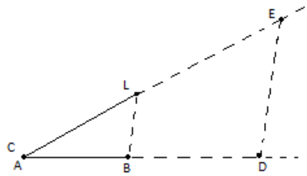
Interpretación y Construcción: Datos

Dadas las rectas (segmentos) AB, CL, se pide otro segmento LE tal que AB / CL = CL / LE

Construcción:

Sitúo los segmentos dados formando un ángulo agudo cualquiera, y prolongo los segmentos AB, CL suficientemente. Marco el punto D de modo que BD = CL; trazo BL uniendo los puntos B y L y trazo DE paralela a BL.

Interpretación, Profundización, Actualización



Por ser BL paralela a DE, sabemos que

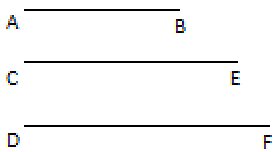
AB / BD = CL / LE , pero BD = CL, y por tanto

AB / CL = CL / LE

LE es la tercer proporcional pedida.

12.- Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional.

Interpretación y Construcción: Datos



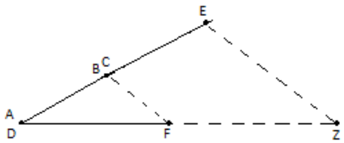
Dados los tres segmentos AB, CE, DF, se pide otro segmento FZ tal que

AB / CE = DF / FZ

Construcción:

Sitúo los segmentos AB y DF formando ángulo agudo cualquiera, y prolongando AB tomo el segmento CE con origen en B.

Prolongo DF suficientemente, trazo CF y EZ paralela a CF.



Por ser EZ paralela a CF sabemos que

AB / CE = DF / FZ

La cuarta proporcional pedida es el segmento FZ.

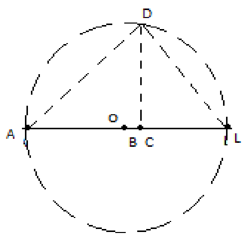
NOTA: También AB/AE = DF/DZ, AB/AF = … otros.

13.- Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.

Interpretación y Construcción: Datos

Dados los segmentos AB, CL, se pide otro segmento CD tal que AB / CD = CD / CL

Construcción:



Sitúo AB y CL en línea y consecutivos. (Observa figura de más abajo)

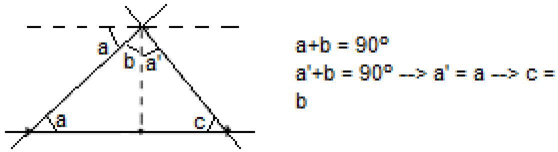
Trazo el semicírculo con diámetro AL (centro en O punto medio), y trazo la perpendicular por el punto B obteniendo el punto D. Trazo DA y DL.

Sabemos que D^ = recto porque AL es el diámetro; los triángulos ABD, DCL son semejantes, y por tanto

AB / DC = DC / CL

lo cual significa que DC es media proporcional entre AB y CL.

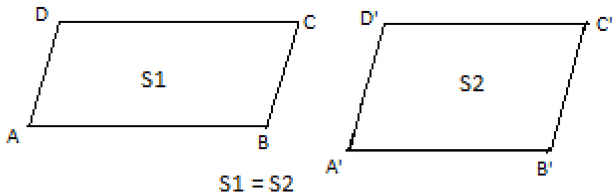
NOTA:



14.- En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.

Interpretación y Comprobación: Datos

NOTA:
Que son iguales significa igual superficie (igual área).



Afirmo que:

Los lados AB, A'B' y AD, A'D', están inversamente relacionados, esto es

$$AB / A'B' = A'D' / AD,$$ equivalente a la igualdad

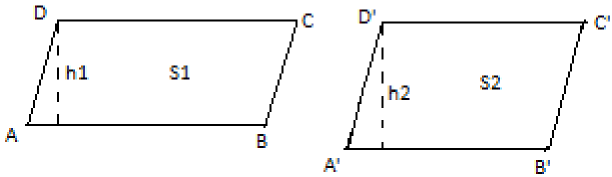
$$AB \cdot AD = A'B' \cdot A'D'$$

Comprobación:

Utilizando los conocimientos que poseemos para el cálculo de áreas planas, tengo lo siguiente.

Trazo las alturas h1, h2, y por semejanza tengo:

$$h1 / h2 = AD / A'D' \dashrightarrow h1 = AD / A'D' \cdot h2$$



$S2 = A'B' \cdot h2$, $S1 = AB \cdot h1 = AB \cdot [AD / A'D' \cdot h2]$

Pero por hipótesis S1 = S2, por lo cual

$$A'B' \cdot h2 = AB \cdot [AD / A'D' \cdot h2] \dashrightarrow$$

$$A'B' = AB \cdot AD / A'D' \dashrightarrow A'B' / AB = AD / A'D'$$

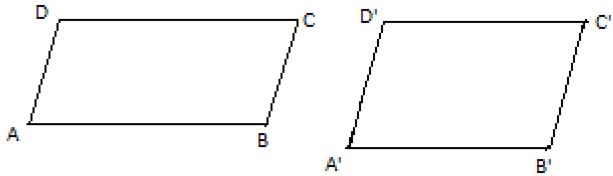
c.q.d.

Equivalentes son las igualdades

$$A'B' \cdot A'D' = AB \cdot AD ,$$

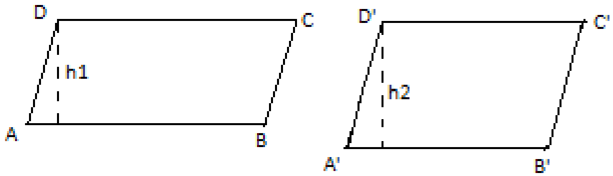
y también $AB / A'B' = A'D' / AD$

Recíproco: Resto del enunciado



Hipótesis: A'B' / AB = AD / A'D'
Tesis: Tienen el mismo área (Son iguales)

A'B' / AB = AD / A'D' -- > A'B' . A'D' = AB . AD



S1 = AB . h1, S2 = A'B' . h2

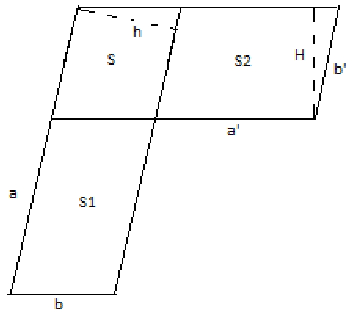
Por semejanza tengo: h1 / h2 = AD / A'D' -- > h1 = …

Por tanto:

S1 = AB . (AD / A'D') . h2 = (AB .AD) / A'D' . h2 = (por la hipótesis) = (A'B' .A'D') / A'D' . h2 = A'B' . h2 = S2

c.q.d.

OTRA FORMA: (Según texto de Euclides)



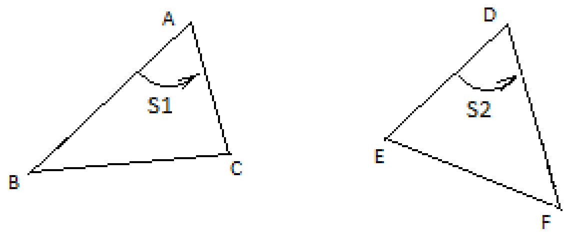
S1 = a . h ,   S2 = a' .H,   S = b'.h = b .H
S1 / S = a / b',   S2 / S =a' / b,   pero S1 = S2 por hipótesis, y por tanto

a / b' = a' / b, o bien: a / a' = b' / b

15.- En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales.

Interpretación y Comprobación: Datos

NOTA:
Triángulos iguales significa igual superficie (área).



Hipótesis:
Sus áreas son iguales: S2 = S1,   y A^ = D^

Tesis:
Los lados de los ángulos iguales están inversamente relacionados, esto es, son inversamente proporcionales:

$$AB / DE = DF / AC, \quad \text{o bien} \quad AC.AB = DE.DF$$

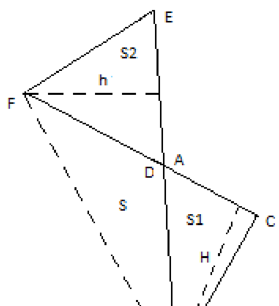
Comprobación:

Realizo el trazado de la siguiente figura de modo que hago coincidir los dos ángulos iguales.

$S = 1 / 2 .(DF .H)$ y $S = 1 / 2 .(AB .h)$,

por otro lado $S1 = 1 / 2.(AC . H)$, $S2 = 1 / 2.(DE .h)$, entonces

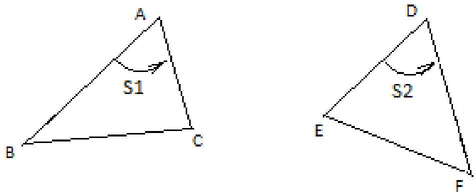
Hago los cocientes $S1 / S = AC / DF$, $S2 / S = DE / AB$



Pero, por hipótesis, $S2 = S1$, por lo cual $AC / DF = DE / AB$, equivalente a

$$AC.AB = DE.DF$$ c.q.d.

Recíproco:

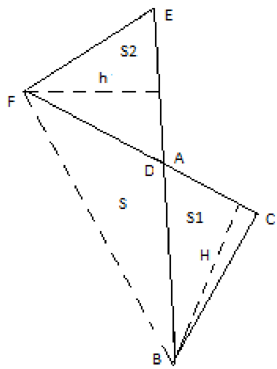


Hipótesis:
Sean los triángulos de las figuras en los que se supone que: A^ = D^ , y que los lados que comprenden estos ángulos son inversamente proporcionales:

AB / DE = DF / AC, o bien AC.AB = DE.DF

Tesis:
Tienen áreas iguales.

Tomo la misma figura de más arriba. En A confluyen los dos ángulos iguales.



Observa que h es altura de DEF pero también de DBF, mientras que H es altura de ACB y también de ABF.

Ahora tengo en cuenta lo probado en (L.VI, 1), y designando por S1, S2, S, sus áreas, tengo

$$S/S2 = AB/DE; \quad S/S1 = DF/AC$$

Pero por hipótesis AB / DE = DF / AC, por cual

$$S / S1 = S / S2 \quad , \text{ de donde } \quad S2 = S1$$

c.q.d.

16.- Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales.

Interpretación y Comprobación:

Sean los cuatro segmentos AB, CD, A'B', C'D', proporcionales entre sí, es decir:

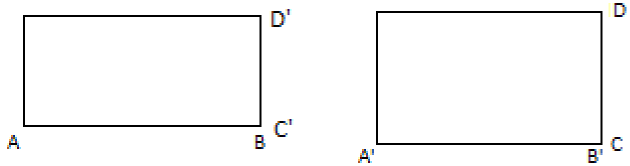
$$AB / CD = A'B' / C'D' \qquad (1)$$

Afirmo que:
"El rectángulo determinado por las extremas AB, C'D', es igual al rectángulo determinado por las medias CD, A'B'.

Es evidente ya que sabemos que (1) es equivalente a

$$AB \cdot C'D' = A'B' \cdot CD$$

Los rectángulos son:



17.- Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.

Interpretación y Comprobación:

Es consecuencia del anterior.

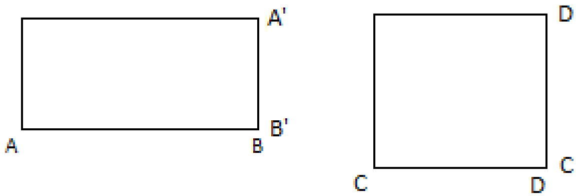
Sean los tres segmentos AB, CD, A'B', proporcionales, es decir:

$$AB / CD = CD / A'B' \quad (1)$$

Afirmo que el rectángulo determinado por AB y CD es igual al cuadrado de lado CD.

En efecto, (1) equivale a que AB . A'B' = CD . CD

Los rectángulos son:

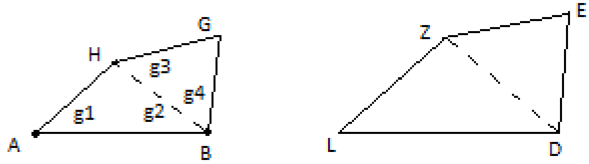


El recíproco es evidente.

18.- A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura dada.

Interpretación y Comprobación: Datos

Construcción:



En el punto A construyo el ángulo g1 = ZLD, en el punto B construyo el ángulo g2 = ZDL, y obtengo el triángulo AHB.

Después hago lo mismo construyendo los ángulos g3, g4, y hemos terminado.

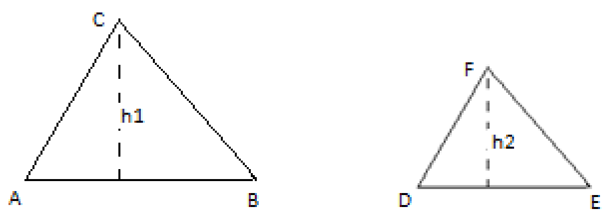
NOTA: Consultar la prop.(LI, 23)

19.- Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.

Interpretación y Comprobación:

(Se refiere a sus áreas)

En el enunciado se refiere a la razón entre las superficies (áreas) de los triángulos, y … duplicada se refiere al producto de razones, en este caso al cuadrado de la razón lineal entre lados.



Triángulos semejantes significa

$$AB / DE = AC / DF = BC / EF = k$$

Afirmo que $S1 / S2 = k^2$

Demostración:
Lo haré de dos formas: A) Método actual; B) Según Euclides

A) Aplicando nuestras fórmulas

$$S1 = 1 / 2.AB.h1, \quad S2 = 1 / 2.DE.h2$$

Por semejanza: $h1 / h2 = AC / DF = AB / DE \dashrightarrow$

$$AB = DE . (h1 / h2)$$

$$S1 / S2 = (AB.h1) / (DE.h2) = [DE . (h1 / h2)].h1 / (DE.h2) =$$

$$= h1^2 / h2^2 = (h1 / h2)^2 = (AC / DF)^2$$

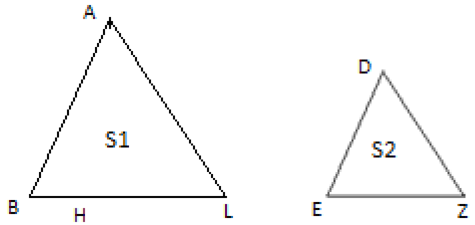
c.q.d.

Conclusión:
La superficie (área) de figuras semejantes: S1, S2, guardan una razón igual al cuadrado de la razón entre dos de sus lados homólogos.

Más adelante quedará probado para cualquier figura en el plano.

B) SEGÚN Texto de Euclides

A título de ejemplo presento la demostración de la Proposición 19 según texto de Euclides:

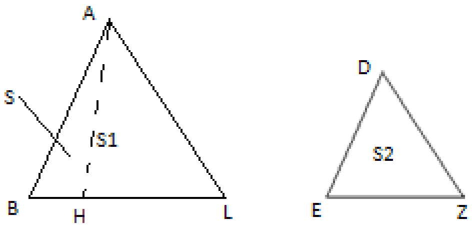


Hipótesis: Los triángulos ABL, DEZ son semejantes, es decir, se cumple:

AB / DE = AL / DZ = BL / EZ

Tesis: $S1 / S2 = (BL / EZ)^2$

Comprobación: Observa la siguiente figura



Tomo el segmento BH igual a la tercera proporcional de BL y EZ, esto es

BL / EZ = EZ / BH

Trazo AH y considero el triángulo ABH

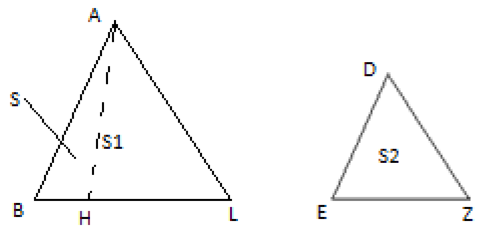
Por semejanza tengo: AB / BL = DE / EZ, o bien

AB / DE = BL / EZ, pero

BL / EZ = EZ / BH, por lo que AB / DE = EZ / BH.

Esto significa que, en los triángulos ABH, DEZ, los lados BA, BH y ZE, DE, que comprenden los ángulos iguales (B^ = E^), son inversamente proporcionales.

Según (L. VI, 15), si los lados que comprenden ángulos iguales son inversamente proporcionales, entonces los triángulos son iguales (tienen igual área), por lo cual S = S2.



Según lo probado en el corolario, BL / BH = $(BL / EZ)^2$, y según (L. VI, 1), puesto que ABH, y ALH tienen la misma altura, sus áreas guardan la misma razón que sus bases:

$$BL / BH = S1 / S$$

y por tanto

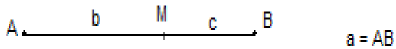
$$S1 / S = (BL / EZ)^2$$

Pero vimos que S = S2, por lo tanto concluyo que

$$S1 / S2 = (BL / EZ)^2 \qquad \text{c.q.d.}$$

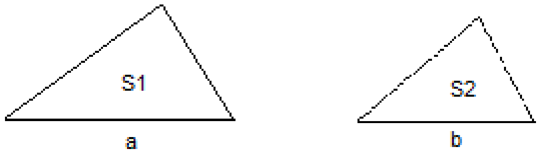
COROLARIO:

Si a, b, c son tres segmentos (o tres valores) proporcionales, es decir: a / b = b / c, entonces $a / c = (a / b)^2$.



Además, si construyo sobre a, sobre b, figuras planas (triángulos o cuadriláteros) semejantes entre sí, entonces

a / c = S1 / S2, donde S1 es la superficie de la construida sobre a, S2 es la de la construida sobre b.



Demostración: Por hipótesis a / b = b / c

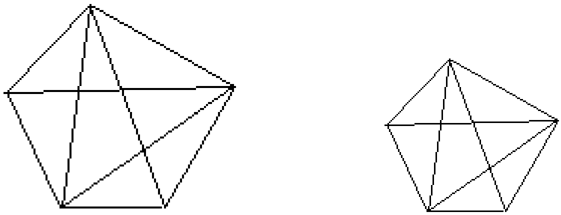
Tengo: $a / c = a / b \,.\, b / c = a / b \,.\, a / b = (a / b)^2$, por lo cual
$a / c = (a / b)^2$

Por otro lado sabemos que la razón entre las superficies S1 y S2 es igual al cuadrado de la razón entre dos de sus lados homólogos, en este caso entre a y b. Esto significa que

$S1 / S2 = (a / b)^2$, por tanto $S1 / S2 = a / c$

20.- Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.

Interpretación y Comprobación:
(Razón entre polígonos se refiere a la razón entre sus áreas)



Polígonos semejantes al ser triangulados resultan triángulos semejantes. Evidentemente, como se vio en el número 19, la razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón entre dos de sus lados homólogos.

Corolario:
En dos polígonos semejantes, la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre dos de sus lados homólogos.

21.- Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.

Este hecho viene garantizado por el conocido silogismo:

"Si A y B son semejantes entre sí y B es semejante a C, entonces A y C son también semejantes entre sí "

O bien, "Si A y B son semejantes con C, entonces A y B son semejantes entre sí"

22.- Si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.

Interpretación y Comprobación:

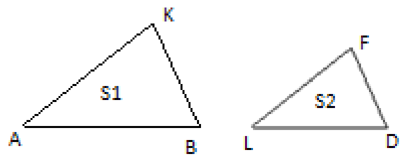
NOTA:
El enunciado es muy ambiguo. Observando lo que sigue en el texto de Euclides quiere decir lo siguiente:

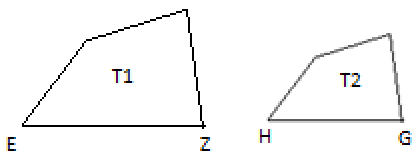
"Sean cuatro segmentos AB, LD, EZ, HG, proporcionales entre sí, esto es: AB / LD = EZ / HG "

Y cuando dice: " serán también proporcionales se refiere a sus superficies, es decir: $S1 / S2 = (AB / LD)^2$

Continuar observando las figuras y las conclusiones.

Construyo dos pares de figuras semejantes, que pueden ser de distinto tipo, con bases los segmentos AB y LD, y otras con bases EZ y HG. Obsérvense los dos pares de figuras.





Afirmo que: S1 / S2 = T1 / T2

$S1 / S2 = (AB / LD)^2$ = (por hipótesis) =
$= (EZ / HG)^2 = T1 / T2$

y por tanto S1 / S2 = T1 / T2

c.q.d.

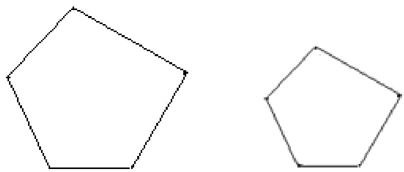
El recíproco no lo trato, tomándolo como evidente.

NOTA: Otra situación (Generalización):

Por ejemplo cinco segmentos m1, m2,m3,m4,m5, y otros cinco segmentos n1, n2, n3, n4, n5, tales que: mi / ni = k para todo par de valores homólogos.
Construyo figuras semejantes poligonales tomando para el primero los segmentos mi, y para el segundo los segmentos ni.

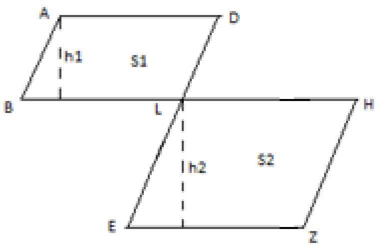
Entonces la razón entre sus áreas es k^2.

Ejemplo: Suponed 'desmontadas' las dos figuras siguientes y montarlas de nuevo.



23.- Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados.

Interpretación y Comprobación:



Por semejanza (de los triángulos): h1 / h2 = AB / LE , S1 = BL .h1, S2 = EZ . h2, S1 / S2 = BL / EZ . h1 / h2 =

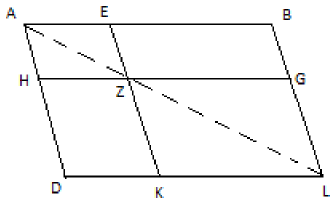
= (BL / EZ) . (AB / LE)

NOTA: Observa que los paralelogramos no tienen por qué ser semejantes. Los de la figura claramente no son semejantes, a pesar de tener sus ángulos iguales.

c.q.d.

24.- En todo paralelogramo, los paralelogramos situados en torno a su diagonal son semejantes al (paralelogramo) entero y entre sí.

Interpretación y Comprobación:



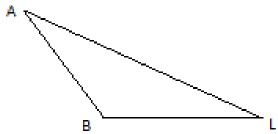
Es evidente la semejanza entre triángulos y paralelogramos teniendo en cuenta la igualdad de ángulos y el concepto de paralelismo.

25.- Construir una misma (figura) semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra (figura) dada.

Interpretación y Construcción:

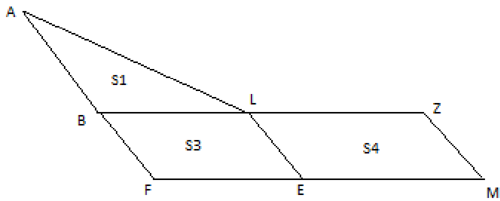
Me dan una figura plana (en este caso un triángulo) semejante a la cual he de construir otra figura plana, y cuya superficie sea igual a la superficie de otra figura plana también dada (en este caso un cuadrilátero (1)).

Datos:
ABL es el triángulo al cual debe ser semejante el que construya, y el cuadrilátero (1) representa la superficie que ha de tener el triángulo construido.



(1)


Construcción:

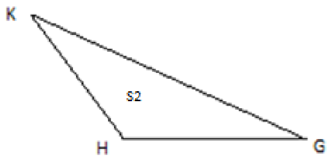


Sobre el lado BL construyo un paralelogramos cuya área sea igual a la del triángulo ABL dado (véase Nota al final de la prop.(LI, 44)) .

Sobre LE construyo otro paralelogramos (véase prop.(LI, 45)) cuya área sea la de (1), siendo los ángulos: ZLE = LBF.

BL y LZ están en línea recta, y lo mismo FE y EM.

Sea ahora HG la media proporcional entre BL y LZ prop. (L. VI, 13), y construyo a partir de HG la siguiente figura KHG, semejante y situada de manera semejante al triángulo ABL prop.(L. VI, 18):



Por ser HG la media proporcional tengo: BL / HG = HG / LZ,
y teniendo en cuenta lo probado en prop.(LVI, 19, y Corolario) tenemos: BL / LZ = S1 / S2 ,

Por otro lado sabemos prop.(LVI, 1) que BL / LZ = S3 / S4, y por tanto

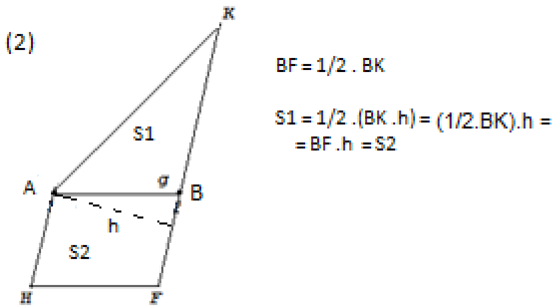
S1 / S2 = S3 / S4 , de donde

S1 / S3 = S2 / S4. Pero, por construcción S3 = S1, y por tanto S2 / S4 = 1, y S2 = S4.

Puesto que por construcción S4 = área de la figura (1) dada, tengo S2 = área (1).

Concluyo:
La figura que responde a la petición del enunciado es el triángulo KHG construido.

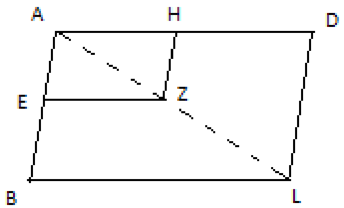
NOTA: Recuerdo aquí la construcción de prop.(LI, 44)



La figura (2) muestra cómo construir un paralelogramo cuya área sea la del triángulo.

26.- Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el (paralelogramo) entero.

Interpretación y Comprobación:

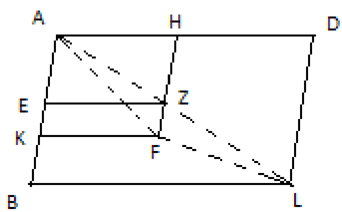


Interpretación del enunciado:

Viene a decir que si quitamos un paralelogramo como AEZH, este paralelogramo está situado en torno a la misma diagonal que el paralelogramo entero.

Parece evidente que se cumple la afirmación: ‘Las dos diagonales están alineadas.

Supongamos que las diagonales no están alineadas y que la diagonal del suprimido es AF.



Por semejanza: AD / AB = AH / AK

Pero por hipótesis los paralelogramos AZ, AL son semejantes, y entonces

$$AD / AB = AH / AE,$$ lo que me lleva a $AK = AE$

y por tanto las diagonales están alineadas.

c.q.d.

NOTA: En los números 27, 28 y 29 la respuesta por mi parte será una transcripción de la solución expuesta en el texto de Euclides, con alguna aclaración cuando sea oportuna.

‘Aplicar’ significa ‘construir. ‘Deficiente’ significa ‘no llegar a’. Un paralelogramo será nombrado por dos vértices opuestos.

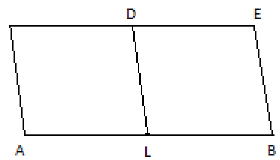
27.- De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramas semejantes y situadas de manera semejantes al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto.

Interpretación, Construcción y Demostración: Dato

Construcción:

La recta AB será dividida en dos partes iguales por el punto L. Aplico a la recta AB (construyo sobre la recta AB) el paralelogramo AD deficiente en el paralelogramo BD construido sobre la misma recta (sobre LB).

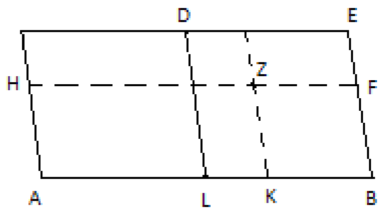
(1)



Afirmo que:
De todos los paralelogramos construidos sobre AB y deficientes en las figuras semejantes y situadas de manera semejante a BD, el mayor es (el paralelogramo) AD.

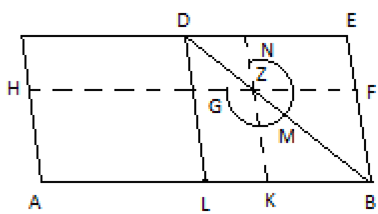
Dem.:
Construyo el paralelogramo AZ de modo sea deficiente en el paralelogramo BZ semejante y situado de manera semejante a BD.

(2)



Afirmo que el paralelogramo AD > AZ.
Puesto que BZ y BD son semejantes sus diagonales quedan en línea recta, es decir, están situados en torno a la misma diagonal (L. VI, 26). Completo la siguiente figura (3).

(3)



Según (L. I, 43), se cumple LZ = ZE, y por tanto también LF = KE.

Pero LF = LH, y por tanto LH = KE. Sumo LZ a los dos miembros, con lo cual

AZ = KE + LZ = gnomon GMN.

Esta igualdad muestra claramente que BD > AZ, y como AD = BD, tengo finalmente

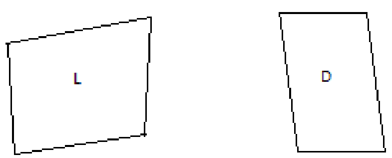
AD > AZ

c.q.d.

28.- Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.

Interpretación, Construcción y Demostración: Datos

Los datos son:
Un segmento de recta AB. Una figura plana L a la que debe ser igual el paralelogramo construido sobre AB, sin que sea mayor que el paralelogramo construido sobre la mitad de AB y semejante al defecto. Un paralelogramo D al que ha de ser semejante el defecto.

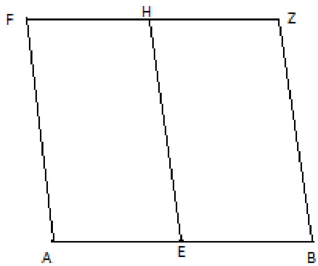


En resumen:

Sobre el segmento AB hay que construir un paralelogramo igual a L deficiente en la figura paralelograma (un paralelogramo) semejante a D.

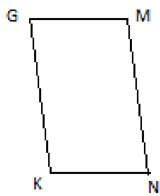
Divido AB en dos partes iguales por el punto E, construyo sobre EB el paralelogramo EZ semejante y situado de manera semejante a D. Completo el paralelogramo AH.

(2)



Si coincide que AH es igual (en sus áreas) a la figura L, habría finalizado, ya que sobre AB se ha construido un paralelogramo igual a la figura L, deficiente en la figura paralelogramo BH semejante al paralelogramo D.   En lo que sigue suponemos que AH no igual a L. Supongo que EF > L; por tanto también BH > L.

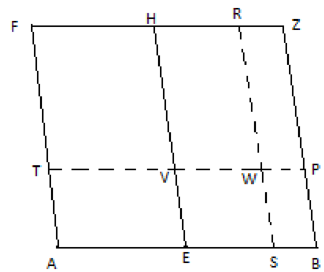
Construyo el paralelogramo KM igual a lo que BH excede a L, es decir: BH = L + KM , de modo que sea semejante y situado de manera semejante al paralelogramo D (L. VI, 25).



Por construcción BH es semejante a D, por lo cual KM es semejante a BH. Sea que el lado KG se corresponde con EH y GM con HZ. Teniendo en cuenta que BH > KM, es evidente que EH > KG, HZ > GM.

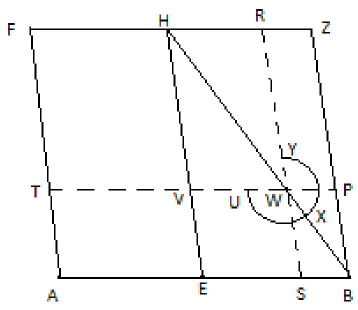
En la siguiente figura (3), sea HV = GK, HR = GM. Entonces el paralelogramo HW es semejante e igual a KM, por lo cual HW es también semejante a HB.

(3)



Entonces HW está en torno a la misma diagonal que HB. Trazo la diagonal y completo la figura (4).

(4)



Teniendo en cuenta que, en sus áreas, HB = L + KM, y que HW = KM, entonces el gnomon UXY es igual a L.

Ahora recuerda que SV = RP, y sumando a los dos miembros el paralelogramo BW, tengo que BR = BV. Pero BV = TE, con lo cual TE = BR. Sumo a éstos dos el paralelogramo SV, de modo que TS = gnomon UXY, y por tanto TS = L.

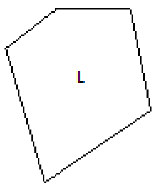
Resumen:
He construido sobre el segmento AB el paralelogramo TS igual a la figura dada L, deficiente en la figura paralelograma BW (deficiente en el paralelogramo BW) semejante al paralelogramo dado D.

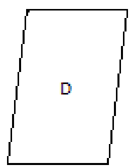
c.q.d.

29.- Aplica a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.

Interpretación, Construcción y Demostración: Datos

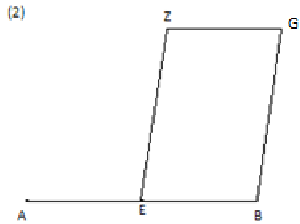
Los datos son:
Un segmento de recta AB. Una figura plana L a la que debe ser igual el paralelogramo construido sobre AB, y D el paralelogramo al cual ha de ser semejante el paralelogramo en que es necesario que exceda el construido.





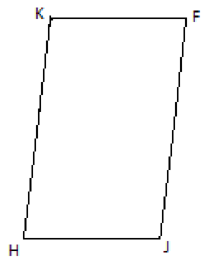
En resumen:
Sobre el segmento AB hay que construir un paralelogramo igual a L y que exceda en un paralelogramo semejante a D.

Divido AB en dos partes iguales por el punto E, construyo sobre EB el paralelogramo BZ semejante y situado de manera semejante a D.

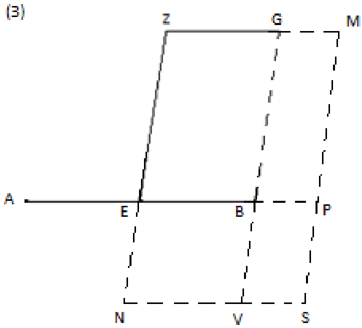


(Siguiente figura)
Construyo HF semejante y situado de manera semejante a D y que se cumpla (en sus áreas) HF = L + BZ (L. VI, 25).

Sea KF correspondiente a ZG, KH correspondiente a ZE. Puesto que HF > BZ , será KF > ZG y KH > ZE.



Prolongo ZG hasta ZM de modo que ZM = KF, y ZE hasta ZN de modo que ZN = KH. Completo la figura y obtengo (3).

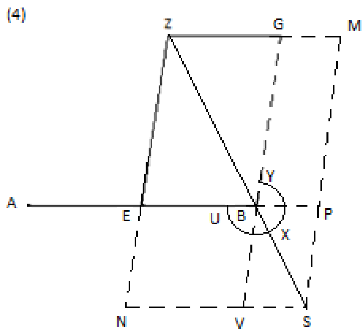


El paralelogramo MN es semejante e igual a KF, y teniendo en cuenta que KF es semejante a BZ, será también MN semejante a EG. Por tanto BZ estará en torno a la misma diagonal que MN.

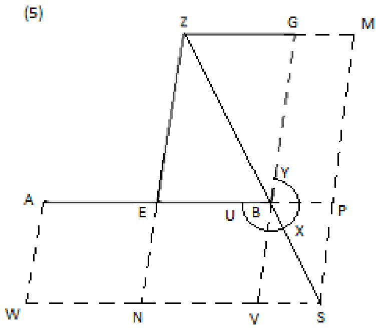
Trazo la diagonal ZS y completo la figura (4).

Teniendo en cuenta que entre paralelogramos (sus áreas) se cumple HF = L + EG, y que HF = MN, tengo que MN = L + EG.

Si a los dos miembros resto EG, entonces gnomon UXY = L.



Completo la figura (5)



Puesto que AE = EB, también los paralelogramos AN = BN, y por tanto AN = BM (L. I, 43). Sumo a los dos miembros el paralelogramo ES, con lo cual AS = gnomon UXY.
Pero vimos antes que gnomon UXY = L, por lo tanto AS = L.

Resumen:
He construido sobre AB el paralelogramo AS igual (sus áreas) a la figura L dada, y de modo que AS excede en el paralelogramo PV que es semejante al paralelogramo D dado (observa que PV es semejante a EG).

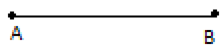
c.q.d.

30.- Dividir una recta finita dada en extrema y media razón.

Interpretación y Construcción:

Tengo un segmento AB y debo dividirlo en dos partes AE, EB tales que

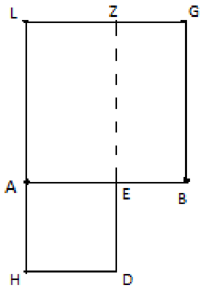
AB / AE = AE / EB



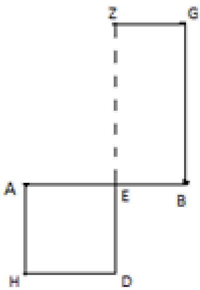
EB es la “extrema”, AE es la “media”

Construcción:

Construyo el cuadrado ABGL, y el paralelogramo HDZL de forma que HDEA sea un cuadrado, y de modo que HDZL sea igual (sus áreas) al cuadrado ABGL. (¿Cómo conseguirlo?)



Es evidente que el cuadrado HDEA es igual al rectángulo EBGZ. Retirando de la figura el paralelogramo AEZL me quedan el cuadrado menor y el rectángulo EBGZ, que son iguales.

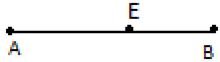


Para estas dos figuras, por tener ángulos iguales, prop.(LVI, 14), los lados son inversamente proporcionales:

$$EZ / ED = AE / EB,$$

pero EZ = AB y ED = AE, por lo tanto

AB / AE = AE / EB



Resumen: El segmento AB ha sido dividido en el punto E en extrema y media razón, siendo la "media" el segmento mayor AE, y la "extrema" el segmento menor EB.

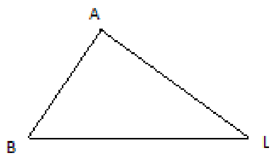
NOTA: Algebraicamente procederíamos como sigue. llamo L = AB, y sea $y = L – x$, cumpliendo $L / x = x / y$. Operando

$x^2 = L.(L – x) \text{--} > x^2 + L.x – L^2 = 0$, de donde obtenemos el valor de x. (x es el valor de la 'media', y es el valor de la 'extrema')

31.- En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

NOTA: La referida igualdad se refiere a las áreas.

Interpretación y Comprobación: A^ = recto



Hipótesis:

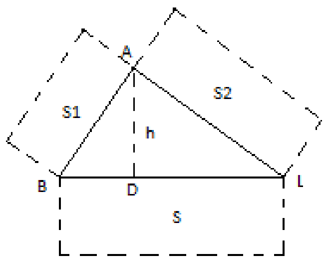
Triángulo ABC donde A^ es recto, y las figuras rectilíneas construidas sobre sus lados son semejantes entre sí.
(En este caso construimos paralelogramos)

Tesis:

Las citadas figuras cumplen (sus superficies) la igualdad S = S1 + S2 (Ver figura)

Sabemos que los triángulos BDA, ADL, LAB son semejantes entre sí. Entonces

BL / BA = BA / BD



NOTA: Aplicamos aquí el Corolario de prop.(LVI,19). Nos dice que

BL / BA = BA / BD -- > S / S1 = BL / BD , y por otro lado
BL / AL = AL / DL -- > S / S2 = BL / DL

Es decir, tenemos según la prop.(LVI, 19 Corolario)

BL / BD = S / S1, BL / DL = S / S2

Sus inversos me dicen que

BD / BL = S1 / S, DL / BL = S2 / S

Sumándolas (BD + DL) / BL = (S1 + S2) / S

Pero (BD + DL) / BL = 1, por lo cual S1 + S2 = S

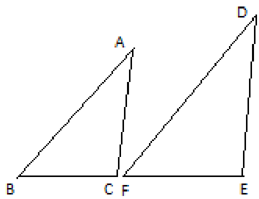
c.q.d.

Corolario: Si construimos cuadrados sobre cada lado tenemos

$AB^2 + AL^2 = BL^2$ (T. de Pitágoras)

32.- Si dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta.

Interpretación y Comprobación:
Hipótesis: El enunciado quiere decir



Si los lados AB y AC son proporcionales a DF y DE, es decir

AB / AC = DF / DE

y que la construcción de los triángulos sea tal que, estando unidos por un vértice, estos lados citados sean paralelos cada uno con su homólogo, es decir AB y DF paralelos, AC y DE paralelos.

Tesis: Los lados BC y FE están alineados.

Comprobación:

Evidentemente los ángulos BAC = FDE, porque los lados son paralelos dos a dos. Si hacemos coincidir los puntos C y F, los ángulos anteriores coinciden con el valor de ACD (ó AFD).

Según (L. VI, 6) los dos triángulos son equiángulos entre sí: ACB = DEF, además de ser evidente.

Por otro lado ACE = ACD + DFE = BAC + ABC

Añado a los dos miembros el ACB:

ACB + ACE = ACB + BAC + ABC = 2 rectos,

y por tanto ACB + ACE = 2 rectos, lo cual prueba que BC y FE están alineados. c.q.d.

NOTA: Los segmento BC y FE pueden o no estar sobre la misma recta.

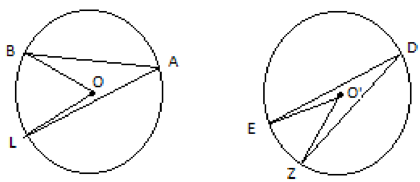
33.- En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias.

Interpretación y Comprobación:

NOTA: Los ángulos, cuyos vértices están situados en (borde del) el círculo, guardan la misma razón que los arcos (centrales) que abarcan.

Hipótesis:

Tengo dos círculos con el mismo radio. En cada círculo tengo ángulos inscritos: BAL, EDZ, asociados a los arcos de circunferencia BL, EZ.

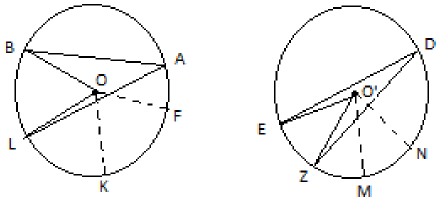


NOTA:
Cuando nombro los arcos BL, EZ me refiero a su longitud como parte de la circunferencia. También, para abreviar, al nombrar un

ángulo me refiero a su amplitud, escribiendo simplemente: BOL, EO'Z, siendo O y O' sus vértices.

Tesis: BOL / EO'Z = BL / EZ
Demostración: Algo que parece evidente, veámoslo

Observa las figuras



Supongamos que repito el arco BL un número n de veces:

LK = BL, KF = BL, …

y lo mismo el arco EZ: ZM = EZ, MN = EZ, …, el mismo número n de veces. Si el arco BF = n.BL también BOF = n.BOL, y del mismo modo, si el arco EN = n.EZ, entonces EO'N = n.EO'Z .

Podríamos hacer el arco BL tan pequeño como deseemos, y del mismo modo será BOL muy pequeño. Lo mismo podemos hacer en el segundo círculo. Observa que el arco EZ será , en general, distinto de BL.
Este razonamiento me dice que los arcos BF y EN, y los ángulos BOF y EO'Z, son equimúltiplos, esto es, son múltiplos de BL ó de EZ con el mismo factor n.
Cuando hago BL y EZ muy pequeños y n muy grande, llego a la conclusión de que siempre se cumple

BF / EN = BOF / EO'N

y por tanto

BL / EZ = BOL / EO'Z c.q.d.

$$$oOo$$$

LIBRO XI

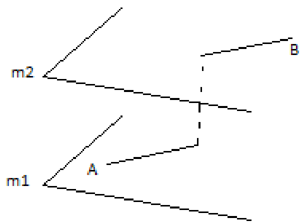
Trata la Geometría Espacial, Geometría en el Espacio.

Es propósito no modificar bajo ningún concepto el enunciado de las proposiciones del texto de Euclides. Si fuese necesario se harán aclaraciones sobre dicho enunciado.

Varias de las siguientes proposiciones, por su evidencia, debieran ser tomadas como un "Postulado".

1.- No cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en un plano más elevado.

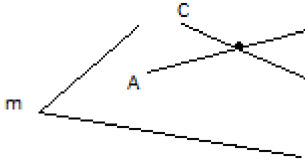
Interpretación y Comprobación:



Es evidente por definición de segmento. Será un Postulado.

2.- Si dos rectas se cortan una a otra están en un plano, y todo triángulo está en un plano.

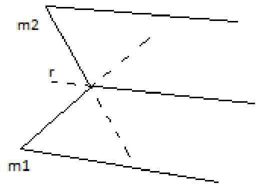
Interpretación y Comprobación:



Es evidente, dos rectas que se cortan determinan un plano, el plano que las contiene.

3.- Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.

Interpretación y Comprobación:

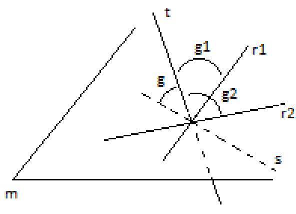


Se puede comprobar empíricamente tomando, por ejemplo, dos cartulinas.

4.- Si se levanta una recta formando ángulo recto con dos rectas que se cortan una a otra en su sección común, formará también ángulo recto con el plano que pasa a través de ellas.

Interpretación y Comprobación:

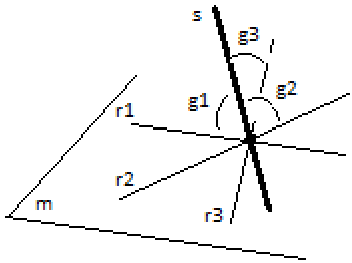
Teniendo en cuenta la Def. 3 de recta ortogonal a un plano es suficiente mostrar que la citada recta también es ortogonal con cualquier otra recta s que pase por el punto común de las citadas y esté sobre el plano.



Es fácil comprobar (empíricamente) que el ángulo g es también recto.

5.- Si se levanta una recta formando ángulos rectos con tres rectas que se cortan, en su sección común, las tres rectas están en un plano.

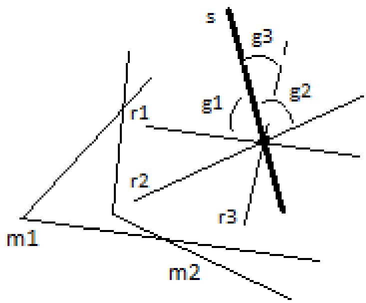
Interpretación y Comprobación:



Hipótesis: Los ángulos gi son rectos.

Tesis: Las tres rectas están sobre un mismo plano.

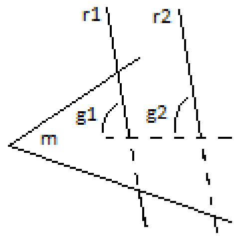
Demostración:



Supongamos que r2 no está en el plano m1 determinado por r1, r3. Sea m2 el plano determinado por r2, r1. Por hipótesis, la recta s forma ángulo recto con r2, y estando r2 sobre el plano m2, también s debe formar ángulo recto con m2. Pero esto sólo es posible si m2 coincide con m1.

6.- Si dos rectas forman ángulos rectos con el mismo plano, las rectas serán paralelas.

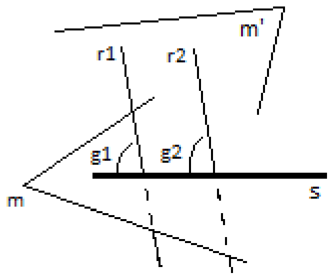
Interpretación y Comprobación:



Hipótesis: Los ángulos g1, g2 son rectos.

Tesis: Las rectas r1, r2 son paralelas.

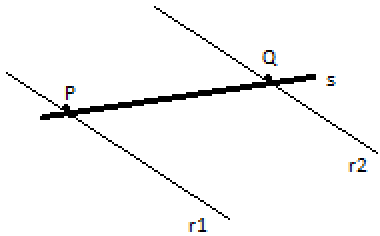
Comprobación:



Las dos rectas r1, r2 determinan un plano m’, que será ortogonal con el plano m. Si s es la recta sección común de m y m’, las rectas r1, r2 forman ángulo recto con s. Esto me garantiza que son paralelas.

7.- Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que une los puntos están en el mismo plano que las paralelas.

Interpretación y Comprobación:

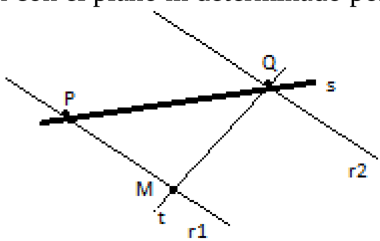


Hipótesis:
Las rectas r1, r2 son paralelas, y la recta s las toca en P y en Q, respectivamente.

Tesis:
Las tres rectas están sobre el mismo plano.

Comprobación:

En efecto, fijándonos en los puntos P, Q, r1 y s determinan un plano m1, mientras que r2 y s determinan otro plano m2. Por se r1 y r2 paralelas entre sí, determinan un plano m, y los dos planos anteriores coinciden con el plano m determinado por ellas.



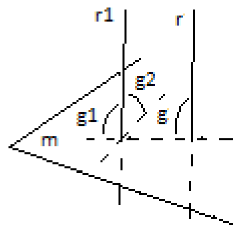
Tomando otro punto M en la recta r1, y uniéndolo con Q, obtengo el triángulo PQM, que está sobre cada uno de los tres planos:

m1, m2, m

Por tanto éstos planos son coincidentes.

8.- Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la restante formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Interpretación y Comprobación:



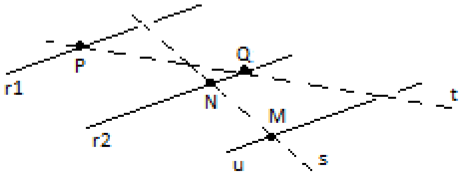
Hipótesis:
La recta r1 forma ángulos rectos con el plano m, y la recta r es paralela a r1.

Tesis:
La recta r forma también ángulos rectos con m.

Es evidente.

9.- Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.

Interpretación y Comprobación: Estamos en el espacio



NOTA:
Debiera decir: " …, aunque no estén en el mismo plan, …"
Si están en el mismo plano la comprobación es trivial.

Hipótesis:
Las restas r1, r2 son paralelas a la recta u (pudiendo o no ser coplanarias las tres retas).

Tesis:
Las rectas r1, r2 son paralelas entre sí.

Es evidente: Silogismo
"Si A es a C como B es a C, entonces A es igualmente a B".

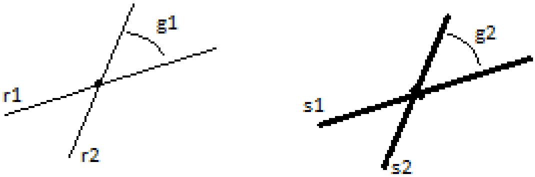
Si r1 es paralela a s, y r2 también es paralela a s, entonces r1 es paralela a r2.

NOTA: Observa la figura anterior.

Observación:
La recta s se apoya en las rectas r2 y u, pero no en r1. La recta t se apoya en r1 y r2, pero no en u. Esto prueba que las tres rectas mencionadas pueden no ser coplanarias.

10.- Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en el mismo plano, comprenderán ángulos iguales.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis:
r1 y s1 son paralelas entre sí, y lo mismo r2 y s2, y, r1 y r2 se cortan, y, s2 y s2 se cortan.

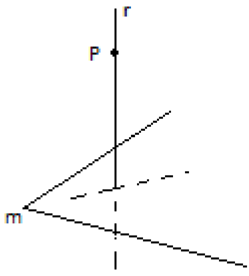
Tesis:
Los ángulos g1, g2 son iguales, sean o no coplanarias las cuatro rectas.

Es evidente.

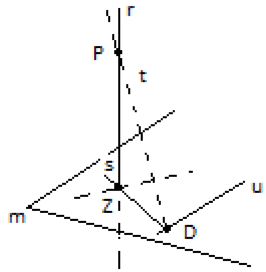
11.- Trazar una línea recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado.

Interpretación y Construcción:

Hipótesis:
Tengo un plano m y un punto P fuera de m.
Tesis: Deseo obtener una recta r perpendicular al plano m y que pase por P.



Construcción:



Trazo la recta u cualquiera sobre m; trazo desde P la recta t perpendicular a u, y obtengo el punto D. Trazo por D la recta s perpendicular a u; ahora desde P trazo r perpendicular a la recta s, y obtengo el punto Z. Basta comprobar que r es perpendicular al plano.

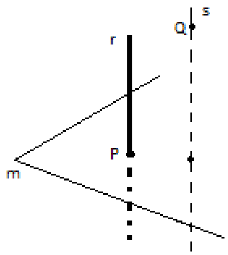
12.- Levantar una línea recta formando ángulos recto con un plano dado desde un punto dado en él.

Interpretación y Construcción:

Hipótesis:
Plano m y un punto P en él;
Tesis:
Deseo trazar por P una recta perpendicular a m (será única).

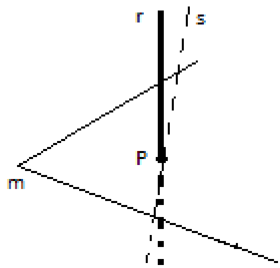
Construcción:

Tomo un punto Q cualquiera fuera de m y trazo por él, como en el número 11 que precede, la recta s perpendicular a m. Si trazo por P la recta r paralela a s obtengo lo deseado.



13.- No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos con el mismo plano desde el mismo punto.

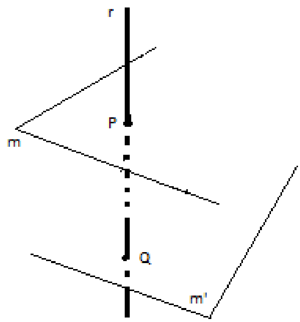
Interpretación: Observa la figura



Es evidente que la perpendicular es única. No precisa más comentario.
Cualquier recta s, distinta de r, trazada por P forma con m ángulo no recto.

14.- Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.

Interpretación y Comprobación: Observa la figura



Hipótesis:
La recta r corta perpendicularmente a los planos m, m' .

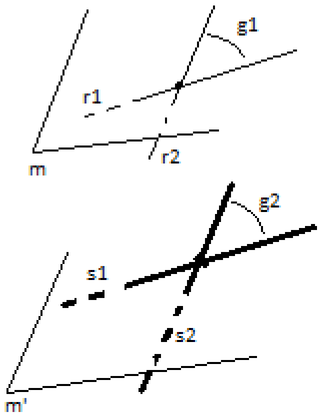
Tesis:
Los planos m y m' son paralelos entre sí.

Es evidente.

15.- Si dos rectas que se tocan son paralelas a dos rectas que se tocan sin estar en el mismo plano, los planos que pasan a través de ellas son paralelos.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:
Rectas r1, r2 que se cortan y determinan el plano m; rectas s1, s2 paralelas a aquellas, que se cortan y determinan el plano m'.

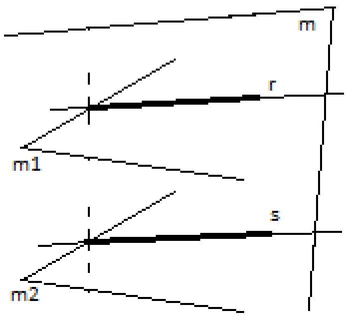


Tesis:
Los planos m, m' son paralelos.

Es evidente. Puede ser comprobado empíricamente.

16.- Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis:

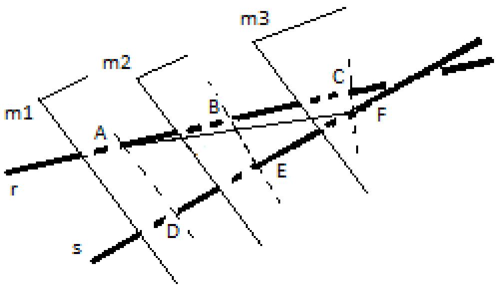
Los planos m1, m2 son paralelos y son cortados por el plano m produciendo las dos rectas r, s

Tesis:
Las rectas r y s son paralelas entre sí

Es evidente, y puede comprobarse empíricamente.

17.- Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas en las mismas razones.

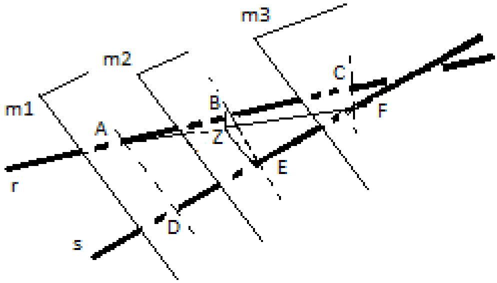
Interpretación y Comprobación:



Hipótesis:
Los tres planos m1, m2, m3 son paralelos entre sí, y cortan a las rectas r, s, coplanarias o no. (En la figura se suponen no coplanarias)

Tesis:
Se cumple AB / BC = DE / EF

Comprobación: Observa la siguiente figura



Trazo la línea AF, sea Z el punto de corte con m2. Trazo ZB y ZE. El plano AZED, que contiene el triángulo DFA, corta a los dos planos paralelos m1, m2, y por tanto los segmento AD, ZE son paralelos. Por la misma razón los segmentos ZB, FC son paralelos.

Teniendo en cuenta el triángulo AFD, y habiendo trazado EZ paralelo a DA, proporcionalmente tengo: AZ / ZF = DE / EF.

Del mismo modo fijándonos en el triángulo AFC, y siendo ZB paralelo a CF, proporcionalmente tengo: AB / BC = AZ / ZF.

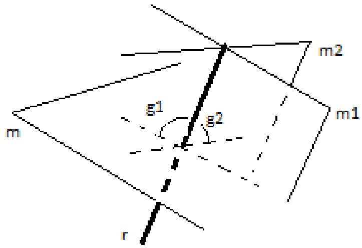
Entonces, conjuntando las dos igualdades tengo: AB / BC = DE / EF

c.q.d.

18.- Si una recta forma ángulos rectos con un plano cualquiera, todos los planos que pasen a través de ella formarán también ángulos rectos con el mismo plano.

Interpretación y Comprobación:

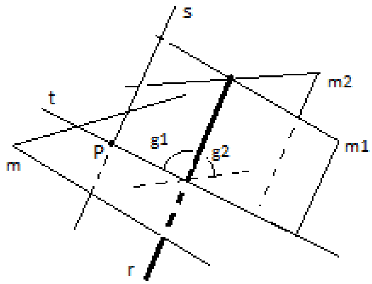
Hipótesis:
La recta r es perpendicular al plano m, y los planos m1, m2 pasan por r. (g1 = g2 = ángulo recto)



Tesis:
Los planos m1, m2 también son perpendiculares al plano m.

Comprobación:

Sea t la recta común de los planos m y m1 (sección común), donde m es el plano fijado y m1 es un plano cualquiera que pasa por la recta r .



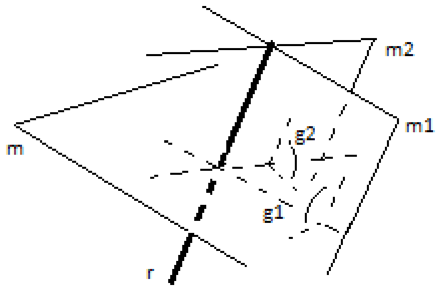
Tomo un punto P cualquiera de la recta t, y trazo por P la recta s, sobre el plano m1, y que sea perpendicular a la recta t. Evidentemente las rectas r y s son paralelas entre sí, por estar las dos sobre el plano m1 y perpendiculares a t. Si r es ortogonal al plano m también lo es s.

Pero, por definición: “El plano m1 es ortogonal con el plano m si toda recta s sobre él y que sea perpendicular con la sección común, es también perpendicular al otro plano (en este caso m)”.

Concluyo que m1 es ortogonal con m. Del mismo modo lo probamos para m2, y para otro cualquiera que pase por r.

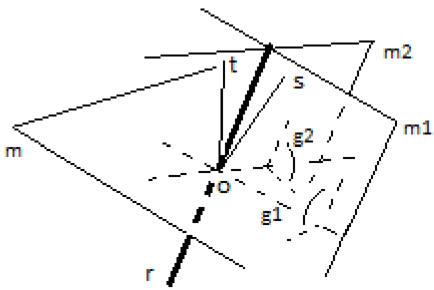
19.- Si dos planos que se cortan forman ángulos rectos con un plano, su sección común formará también ángulos rectos con el mismo plano.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis:
Los planos m1, m2 se cortan entre sí y son ortogonales al plano m.

Tesis:
La recta r, sección común de m1 y m2, también es perpendicular al plano m.



Trazo por o la recta s en el plano m1 y que sea perpendicular a la sección de m1 con m. Entonces s es también perpendicular al plano m.
Por otro lado levanto por o la recta t en el plano m2 y que sea perpendicular a la sección de m2 con m. Entonces t es perpendicular también al plano m.
Pero sabemos que por un punto P de un plano sólo es posible trazar una perpendicular a dicho plano.
Por lo tanto las rectas s, t coinciden, y siendo m1, m2 distintos, esa coincidencia no puede darse en otra recta que la sección común r.

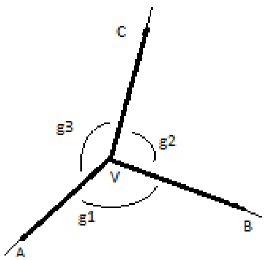
c.q.d.

20.- Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:
Tengo un ángulo sólido comprendido por tres ángulos planos:

AVB, AVC, BVC .



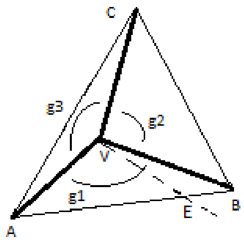
Tesis:
La suma de dos cualesquiera tomados de estos tres es mayor que el restante.

Demostración:

Si los tres ángulos planos son iguales lo que afirmamos se cumple evidentemente.

Sea el mayor el ángulo AVB. Trazo una línea VE formando ángulo AVE = AVC, y marco el punto E tal que VE = VC . Trazo por E una línea que cortará en los puntos A y B a las líneas VA, VB. Trazo CA, CB.

Puesto que AVC = AVE , y VE = CV , siendo VA es común, concluyo que CA = AE.



Por otro lado sabemos que, en el triángulo ACB, se cumple: CA + CB > AB, esto es CA + CB > AE + EB, y como CA = AE, deduzco que CB > EB.

Además, como VE = VC, y VB es común y la base CB > EB, deduzco que para los ángulos: CVB > EVB, y por tanto

$$AVE + EVB < AVE + CVB.$$

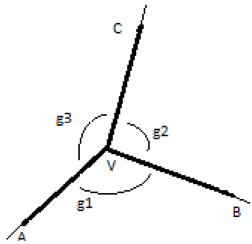
Pero AVE + EVB = AVB, y AVE = AVC , por lo cual puedo concluir que

$$AVB < AVC + CVB$$

c.q.d.

21.- Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro ángulos rectos.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis:
Tengo un ángulo sólido comprendido por tres ángulos planos:

AVB, AVC, BVC

Tesis:
Los tres ángulos planos suman menos de cuatro rectos.

Demostración:
Marco arbitrariamente los puntos A, B, C, y trazo las rectas AB, AC, BC.

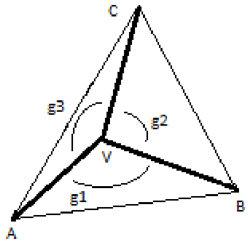
Considero el ángulo sólido con vértice en A, limitado por los ángulos planos: CAV, VAB, CAB.

Estos ángulos, según el número anterior, dos cualesquiera suman más que el restante, por tanto CAV + VAB > CAB.

Del mismo modo obtengo que, fijándome en el ángulo sólido con vértice B, CBV + VBA > CBA.

Y fijándome en el ángulo sólido con vértice en C tengo: ACV + BCV > ACB. Pero CAB + CBA + ACB = 2 rectos,

por tanto
(CAV + VAB) + (CBV + VBA) + (ACV + BCV) > 2 rectos



En cada cara del ángulo sólido con vértice en V, los tres ángulos suman 2 rectos, por lo cual la suma de estos nueve ángulos suman 6 rectos.

Pero de estos nueve tengo seis que
(CAV + VAB) + (CBV + VBA) + (ACV + BCV) > 2 rectos

y por tanto los tres restantes sumarán:

AVC + AVB + BVC < 4 rectos

c.q.d.

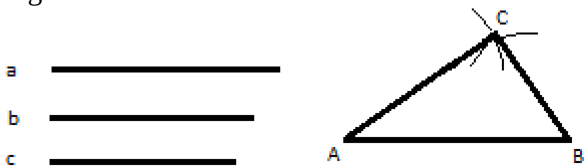
22.- Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las (rectas) que unen (los extremos) de las rectas iguales.

Interpretación y Construcción:

NOTA:
En realidad, si nos fijamos solo en el hecho: “Dados tres segmentos a, b, c construir un triángulo cuyos lados sean estos segmentos”, bastaría con la condición: “Dos cualesquiera de los segmentos suman más que el restante”.

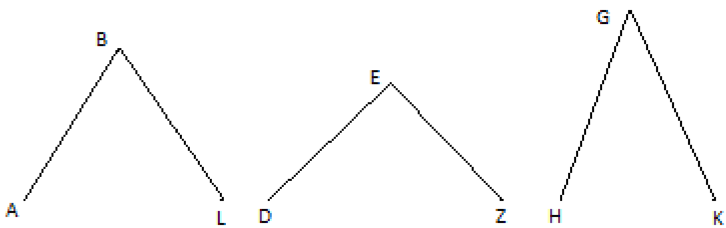
Como ejemplo construyo un triángulo en estas condiciones:

Tomo el segmento a. Con el compás pincho en A y tomando radio igual a b trazo un arco. Pincho en B y con radio igual a c trazo otro arco que corte al anterior. El punto común C es el tercer vértice. Siguiente figura:



Construcción conforme a los datos del enunciado del texto. Se observa que lo plantea así porque va a ser útil en la proposición núm. 23.

Datos:



Hipótesis:
Tengo tres ángulos planos, de los cuales dos cualesquiera suman más que el restante, y los comprenden rectas iguales: BA = BL = ED = EZ = GH = GK

Tesis:
Es posible construir un triángulo a partir de las rectas que unen los extremos de las rectas iguales que comprenden los ángulos.

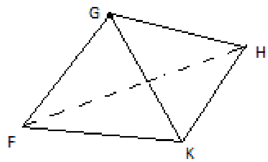
Según lo indicado en el propio texto, dadas las rectas a = AL, b = DZ, c = HK, debemos demostrar que la suma de dos cualesquiera es mayor que la restante. Cumplida esta condición su construcción es siempre posible.

Demostración:

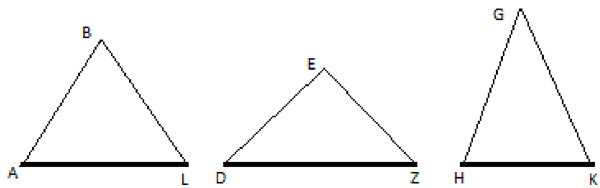
Si los tres ángulos dados fuesen iguales la prueba sería trivial.

En otro proseguimos como sigue.

Construyo (sobre el plano) la siguiente figura donde los ángulos: FGK = ABL, KGH = HGK, y que los lados GF, GK, GH son iguales a AB .



Entonces, evidentemente los lados FK y KH son iguales a los lados AL, HK en los triángulos dados.



Teniendo en cuenta que, según los datos, para los ángulos ABL + HGK > DEZ, y que, entre los datos y la nueva figura tengo FGK = ABL, KGH = HGK, entonces

FGH > DEZ . Pero además los lados GF, GH son iguales a los lados ED, EZ , y FGH > DEZ, y esto garantiza que FH > DZ. Por otro lado FK + KH > FH, y por tanto FK + KH > DZ. Pero FK = AL, y KH = HK , luego AL + HK > DZ.

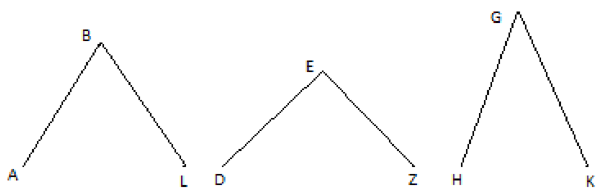
Del mismo modo se prueba que AL + DZ > HK, y que DZ + HK > AL.

c.q.d.

NOTA: Cumplidas estas condiciones la construcción del triángulo se realiza como mostré más arriba.

23.- Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; entonces, es necesario que los tres ángulos sean menores que cuatro rectos.

Interpretación y Construcción: Datos



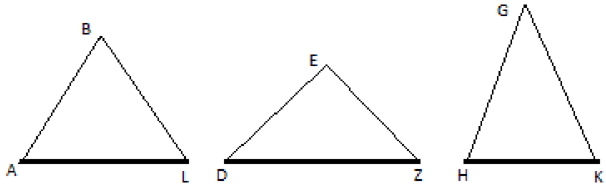
He marcado los extremos de cada lado de modo que los seis lados sean iguales.

Hipótesis:
Tengo tres ángulos planos, de los cuales dos cualesquiera suman más que el restante, y que los tres juntos suman menos que cuatro rectos.

Tesis:
Es posible construir un ángulo sólido comprendido por los tres ángulos planos dados.

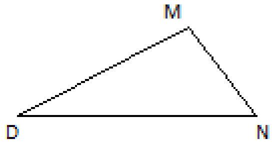
Construcción:

Enlazo los extremos de los lados de los triángulos dados, obteniendo



Construyo en el plano un triángulo tomando los segmentos

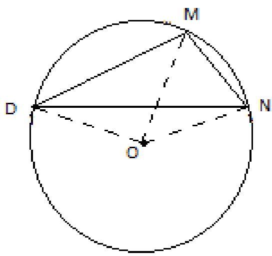
a = AL, b = DZ, c = HK , sea la figura



donde DM = AL, MN = HK, DN = DZ

Circunscribo un círculo al triángulo DNM, y trazo OD, ON, OM.

(1)

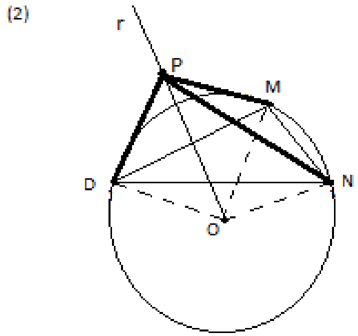


Completo esta fig. (1) para obtener la siguiente fig. (2)

Trazo la recta r perpendicular al plano, y marco el punto P de tal modo que $OP^2 = AB^2 - DO^2$, (Ver (*) al final) y trazo PD, PM, PN

Observa: $AB^2 = OP^2 + DO^2$ (T. Pitágoras)

OP es perpendicular al plano y por tanto lo es también a las rectas lados del triángulo. OD y OM son iguales, y OP es común y forma con ellos ángulo recto, es claro que PD = PM, y del mismo modo obtengo PN = PM, con lo cual las tres son iguales entre sí.



Se ha tomado OP de tal forma que $AB^2 = OP^2 + OD^2$, y $DP^2 = OD^2 + OP^2$, y por tanto DP = AB.

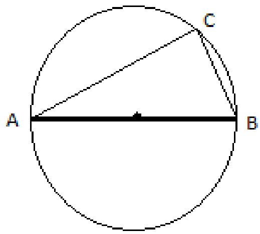
Pero, en los datos iniciales se cumple que cada una de las rectas BL, ED, EZ, GH, GK son iguales a AB, y hemos probado que PM, PN son iguales a PD, y en consecuencia, los segmentos PD, PM, PN son iguales a aquellos lados de los triángulos dados como datos.

Por otro lado, por construcción se tomó DM = AL (de los datos), y como PD = BA, PM = BL, puedo concluir que entre ángulos DPM = B^.
Por la misma razón obtengo: DPN = DEZ, NPM = HGK.

Tengo así construido el ángulo sólido pedido.

(*) Tomo el segmento AB y trazo el siguiente círculo con diámetro AB. Adapto al círculo en el punto A el segmento AC = OD .

Sabemos que $AB^2 = AC^2 + CB^2$, de donde $CB^2 = AB^2 - AC^2$. Ahora tomo OP = CB. Observa: $AB^2 = OD^2 + OP^2$.

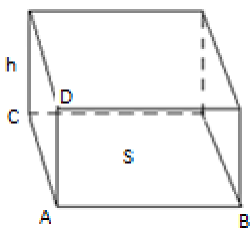


24.- Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos.

Interpretación y Comprobación:Datos

Es evidente, basta observar la figura

Su volumen: V = S . h



25.- Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido.

Interpretación y Comprobación:Datos

Aclaración:

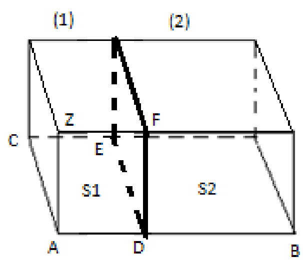
En el texto no define el concepto de ‘paralelepípedo’. En nota al pie de página toma por definición: “Sólido limitado por seis planos paralelos dos a dos”. Observa que no impone la condición de ser perpendiculares entre sí.

Nosotros tomamos como “paralelepípedo” imponiendo que las caras formen ángulo diedro recto. En otro caso será un prisma.

Se diferencia del concepto de prisma: “Dos caras sobre planos paralelos entre sí, y las restantes caras son paralelogramos”.

Paralelogramos: “ Figura plana comprendida por cuatro rectas paralelas dos a dos”.

Hipótesis:
Paralelepípedo cortado por un plano paralelo a dos de sus caras.



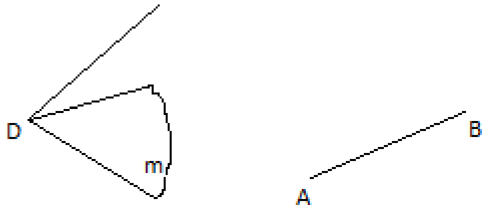
Tesis: V2 / V1 = S2 / S1

Es evidente porque tienen la misma altura.

NOTA: Esto es válido también en el caso de un prisma.

26.- Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos.

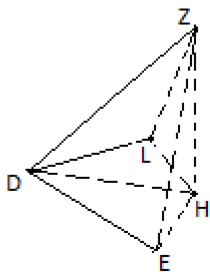
Interpretación y Construcción: Datos



Construcción:

En el ángulo sólido dado realizo el trazado de la figura siguiente, he marcado Z y he trazado ZH perpendicular al plano m.

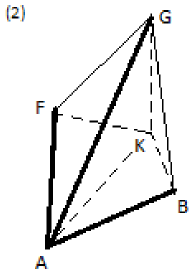
(1)



Sobre la recta AB construyo el ángulo BAF igual al ángulo EDL, y el ángulo BAK igual al ángulo EDH. Hago AK = DH y por el punto K levanto la perpendicular KG. Tomo KG = HZ, y trazo las rectas AG, AF.

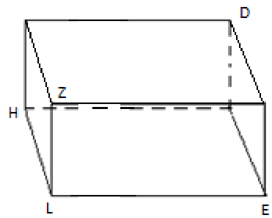
Por construcción es evidente que el ángulo sólido con vértice en A, limitado por los ángulos planos BAF, BAG, FAG, es igual al ángulo sólido dado con vértice en D.

La figura (2) es la solución.

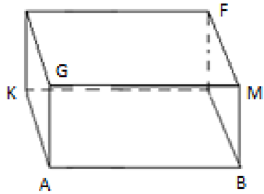


27.- Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado.

Interpretación y Construcción: Datos



Construción:



En el punto A del segmento dado construyo un ángulo sólido de forma que sus caras sean los ángulos planos GAK = ZLH, GAB = ZLE, KAB = HLE. Tomo los segmentos AG, AK de modo que guarden con LZ, LH la misma proporción que AB con LE, esto es:

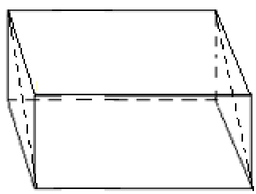
$$k = AB / LE \dashrightarrow AG = k.LZ, \quad AK = k.LH$$

Ahora es suficiente trazar paralelas a las aristas AB, AG, AK.

28.- Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de los lados opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano.

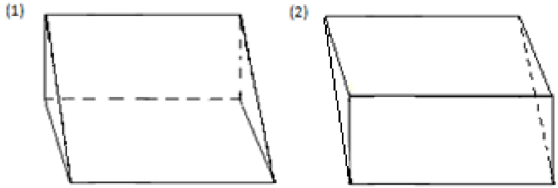
Interpretación y Comprobación: Datos

He señalado las diagonales (homólogas) en dos de sus caras paralelas entre sí.



Comprobación:

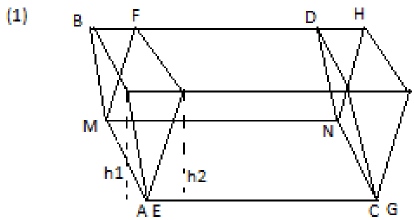
Secciono mediante un plano que pase por las diagonales marcadas y obtengo (1) y (2)



La igualdad en volumen de las partes (1) y (2) es evidente. Nada más que decir.

29.- Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que (los extremos superiores) de las aristas laterales están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación: Datos



Hipótesis:

La misma base ACNM, alturas iguales: h2 = h1, y los extremos B, F, y D, H, están sobre la misma recta, y lo mismo los extremos de las otras dos aristas laterales.

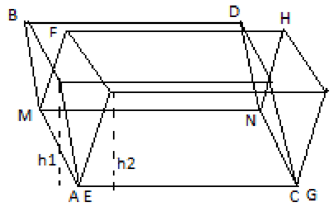
Tesis:
Sus volúmenes son iguales.

Comprobación:
Teniendo en cuenta los métodos de cálculo de volúmenes en la Matemática actual, la comprobación es muy simple.

30.- Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura y en los que (los extremos superiores de) las aristas laterales no están en las mismas rectas son iguales entre sí.

Interpretación y Comprobación: Datos

La diferencia con la proposición anterior es que no es necesario que los extremos de las aristas laterales estén sobre la misma recta.



Hipótesis:
Están sobre la misma base AMNC, y las alturas iguales: h2 = h1.

Aclaración:
En el texto se detecta que, por la forma de proceder en su razonamiento, en el enunciado ha querido decir "bases iguales" y no "la misma base". En cualquiera de los dos casos la comprobación es trivial.

Tesis: Sus volúmenes son iguales.

Comprobación:
Teniendo en cuenta los métodos de cálculo de volúmenes en la Matemática actual, la comprobación es muy simple. Nada que añadir.

31.- Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

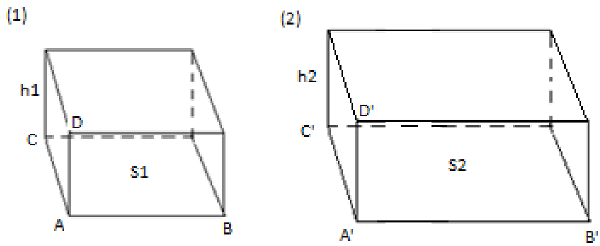
Aclaración:

En el texto se detecta que, por la forma de proceder en su razonamiento, en el enunciado ha querido decir "bases iguales" y no "la misma base". En cualquiera de los dos casos la comprobación es trivial.

Ha quedado sobradamente probado en los dos números anteriores.

32.- Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Interpretación y Comprobación: Datos



Hipótesis: Tienen iguales sus alturas: h2 = h1

Se refiere a sus volúmenes y el área de sus bases.
Tesis: V2 / V1 = S2 / S1

En efecto: V2 = S2 . h2, V1 = S1 .h1

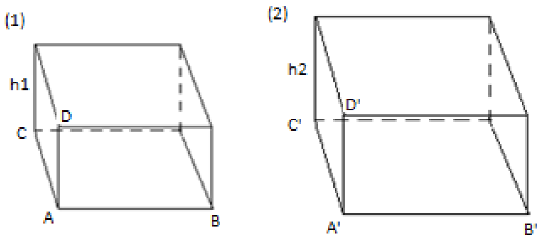
$$V2 / V1 = (S2.h2) / (S1.h1) = S2 / S1$$

NOTA:

A) Se cumple también en el caso del paralelepípedo dado en la definición general: “Sólido limitado por seis planos paralelos dos a dos”.
B) Se cumple también en el caso de dos prismas cualesquiera (“Sólido limitado por dos bases paralelas, y cerrado mediante paralelogramos”) cuyas bases sean polígonos equiláteros (igual número de lados).

33.- Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

Interpretación y Comprobación:



Hipótesis: Los paralelepípedos (1) y (2) son semejantes:

$$A'B' / AB = A'C' / AC = h2 / h1$$

Tesis: $V2 / V1 = (A'B' / AB)^3$
Demostración:

Hago uso de los conocimientos que hoy tenemos en relación con el cálculo de volúmenes.

Sea $k = A'B' / AB$, entonces tengo

$$A'B' = k.AB, \quad A'C' = k.AC, \quad h2 = k.h1$$

Para los volúmenes tengo

$$V2 = k^2. (AB.AC).(k.h1) = k^3. V1, \text{ de donde}$$

$$V2 / V1 = k^3$$

c.q.d.

NOTA:

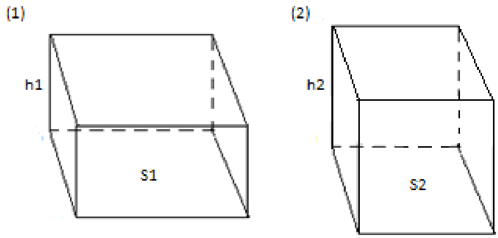
A) Se cumple también en el caso del paralelepípedo dado en la definición general: "Sólido limitado por seis planos paralelos dos a dos".
B) Se cumple también en el caso de dos prismas ("Sólido limitado por dos bases paralelas, y cerrado mediante paralelogramos") cualesquiera cuyas bases sean polígonos equiláteros (igual número de lados).

34.- Las bases de los sólidos paralelepípedos iguales están inversamente relacionadas con las alturas; y aquellos sólidos paralelepípedos cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:
Los sólidos (1) y (2) son paralelepípedos iguales, es decir, sus volúmenes son iguales:

$$V1 = S1 . h1, \quad V2 = S2 . h2$$



Tesis: Afirmo que S1 / S2 = h2 / h1

Demostración: S1 . h1 = S2 . h2 --> S1 / S2 = h2 / h1

c.q.d.

Recíproco:

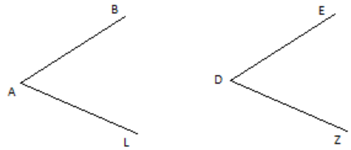
En efecto, si S1 / S2 = h2 / h1, entonces
S1 . h1 = S2 . h2

Pero V1 = S1 . h1, V2 = S2 . h2, y está probado.

NOTA: Es válido lo dicho en la nota de los números anteriores

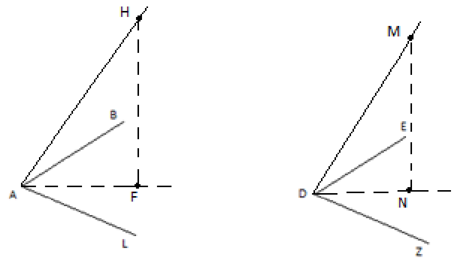
35.- Si hay dos ángulos planos iguales y se levantan desde sus vértices rectas elevadas que comprendan ángulos iguales respectivamente con las rectas iniciales, y se toman unos puntos al azar en las rectas elevadas y, desde ellos, se trazan perpendiculares a los planos en los que están los ángulos iniciales y se trazan rectas de los puntos producidos en los planos a los (vértices de) los ángulos iniciales, (éstos) comprenderán con las rectas elevadas ángulos iguales.

Interpretación y Comprobación:Datos



Hipótesis: Los ángulos planos BAL y EDZ son iguales

Realizamos el siguiente trazado conforme al enunciado:



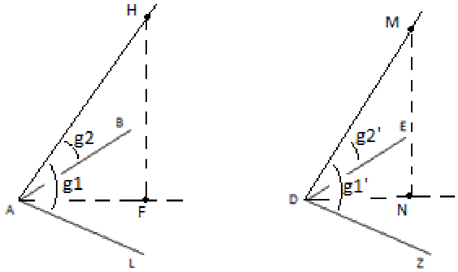
No es necesario que los ángulos base BAL y EDZ estén sobre el mismo plano.

Trazo las rectas AH y DM de modo que los ángulos cumplan HAB = MDE y HAL = MDZ. Ahora fijo los puntos H, M cualesquiera. Trazo por H y por M perpendiculares a los planos que contienen los ángulos dados, y obtengo los puntos F y N. Trazo las rectas AF, DN.

Tesis:
Los ángulos HAF, MDN son iguales.

Corolario: También son iguales los ángulos sólidos que han quedado construidos.

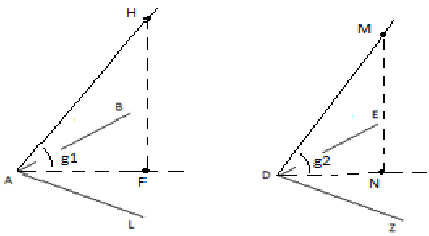
Demostración:



Por la forma en que se han trazado AH y DM, estas rectas son paralelas entre sí, por lo cual forman con el plano base um ángulo igual a HAF, MDN, respectivamente, porque HF y MN son perpendiculares al citado plano.

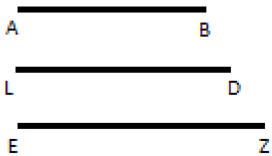
Queda probado.

Corolario:
En dos ángulos triedros iguales, como los de la figura, cada par de aristas (una de uno, otra del otro) homólogas forman igual ángulo con el plano determinado por las otras dos. Es decir g2 = g1



36.- Si tres rectas son proporcionales, el sólido paralelepípedo (construido) a partir de ellas es igual al sólido paralelepípedo (construido) a partir de la media (proporcional), equilátero y equiangular con el antedicho sólido.

Interpretación y Comprobación: Datos

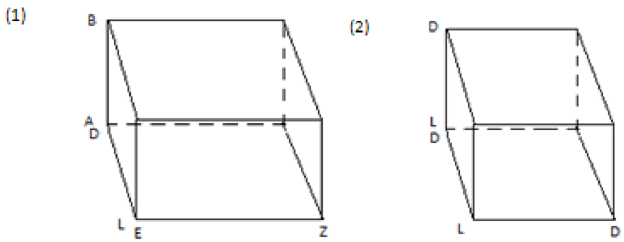


Recuerda:
Si tengo tres rectas AB, LD, EZ, proporcionales (entre sí), significa que AB / LD = LD / EZ, y decimos que LD es media proporcional entre AB y LD.

Hipótesis: El enunciado es ambiguo. Lo interpreto como sigue.
Tengo tres segmentos AB, LD, EZ, proporcionales entre sí, esto es:

AB / LD = LD / EZ

El paralelepípedo (1) cuyas aristas sean las tres rectas dadas, (construido dotándole de determinados ángulos cualesquiera) es igual (en volumen) al sólido (2) (paralelepípedo) cuyas tres aristas son iguales a la media proporcional de aquellas (es decir LD) y construido dotándole de los mismos ángulos que el anterior.



Tesis:
Sean V1 el volumen de (1), V2 el volumen de (2). Se cumple

V2 = V1,

Demostración: Por hipótesis tengo

$$AB / LD = LD / EZ \dashrightarrow AB \cdot EZ = LD^2$$

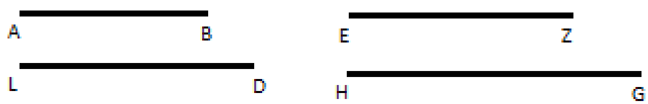
$$V1 = (EZ.DL).AB = (AB.EZ).DL = (LD)^2 \cdot DL =$$

$$= LD^3 = V2$$

c.q.d.

37.- Si cuatro rectas son proporcionales, los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si los sólidos paralelepípedos semejantes y construidos de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, también las propias rectas serán proporcionales.

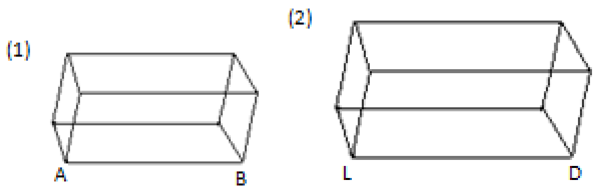
Interpretación y Comprobación: Datos



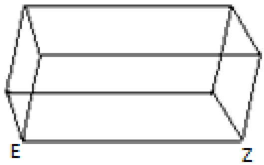
Hipótesis:
Tengo cuatro segmentos proporcionales, esto es:

$$AB / LD = EZ / HG$$

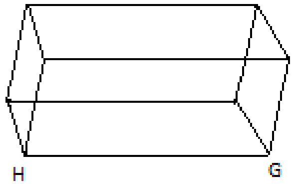
Construyo los paralelepípedos (1), (2), y (3), (4), construidos respectivamente sobre AB, LD, EZ, HG, semejantes entre sí, guardando entre sus aristas la misma relación de proporcionalidad que los segmentos dados.



(3)



(4)



Tesis:
Si V1 y V2, V3 y V4 son sus volúmenes, respectivamente, se cumple

$$V1 / V2 = V3 / V4$$

Demostración:
Se ha probado que $V1 / V2 = (AB / LD)^3$, y lo mismo para el otro par de prismas: $V3 / V4 = (EZ / HG)^3$.

Por hipótesis: $AB / LD = EZ / HG$, y por lo tanto sus potencias también son iguales:

$$(AB / LD)^3 = (EZ / HG)^3$$

y por tanto

$$V1 / V2 = V3 / V4$$

c.q.d.

Recíproco:

Sean cuatro rectas AB, LD, EZ, HG tales que los paralelepípedos semejantes construidos sobre ellas, como más arriba, de manera semejante, y que sus volúmenes resulten ser proporcionales, es decir:

$$V1 / V2 = V3 / V4$$

Tengo que probar que los segmentos AB, LD, EZ, HG son igualmente proporcionales:

$$AB / LD = EZ / HG$$

Por hipótesis V1 / V2 = V3 / V4 , y sabemos que V1 / V2 = $(AB / LD)^3$, y que V3 / V4 = $(EZ / HG)^3$.

Entonces $(AB / LD)^3 = (EZ / HG)^3$, de donde

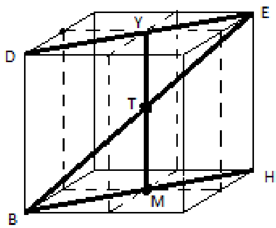
$$AB / LD = EZ / HG \qquad \text{c.q.d.}$$

38.- Si los lados de los planos opuestos de un cubo se dividen en dos partes iguales y se trazan planos a través de las secciones, la sección común de los planos y el diámetro del cubo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:

La sección común citada es el segmento MY, y el diámetro del cubo (diagonal) del cubo es el segmento BE. Las diagonales secundarias son DE y BH.



Un cubo, secciones mediante planos como indica la figura, trazado de las diagonales DE, BH, BE, y marcaje de la sección común, MY, de los planos.

Tesis:
YM y BE se cortan en el punto T tal que YT = TM, BT = TE.

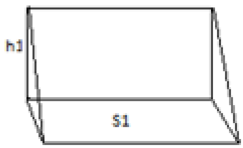
Observando la construcción (figura) anterior, No precisa más explicaciones.

39.- Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo y el paralelogramo es el doble del triángulo, los prismas serán iguales.

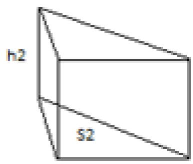
Interpretación y Comprobación:

El enunciado resulta ambíguo porque no aclara cómo es el primer prisma. Deduzco que se refiere a los representados en las figuras (1) y (2).

(1)



(2)



Hipótesis: $S1 = 2.S2, \quad h2 = h1$

Tesis: Sus volúmenes son iguales: $V1 = V2$

Demostración: Calculando volúmenes tengo

$$V1 = 1 / 2 .(S1 . h1) = 1 / 2. (2.S2.h1) = S2 . h1$$
$$V2 = S2 . h2$$

y por ser $h2 = h1$ me queda $V2 = V1$ c.q.d.

$$$oOo$$$

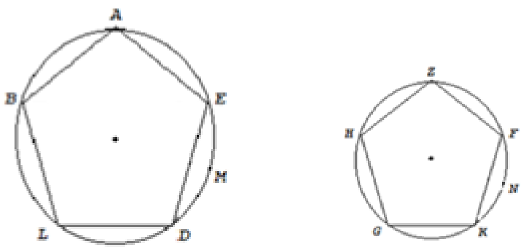
LIBRO XII

Polígonos en un plano. Cuerpos geométricos en el espacio.

> Es propósito no modificar bajo ningún concepto el enunciado de las proposiciones del texto de Euclides. Si fuese necesario se harán aclaraciones sobre dicho enunciado.

1.- Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como el cuadrado de los diámetros.

Interpretación y Comprobación: Datos

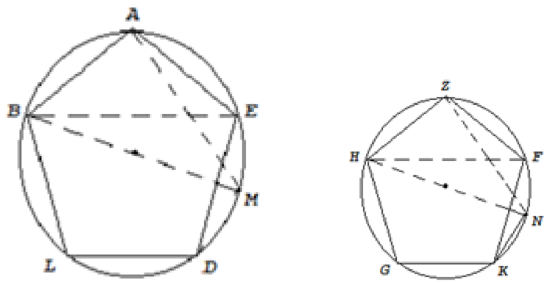


En primer lugar hemos de aclarar que se refiere a la razón entre las áreas limitadas por los polígonos. El tipo de polígono puede ser o no regular, la condición es que cada uno esté inscrito en un círculo y sean semejantes.

En el texto de Euclides hace el razonamiento tomando la figura del pentágono regular. Intentaré mostrarlo después para un polígono cualquiera. Observa figuras más abajo.

NOTA:
En lo que sigue, como se hace en el texto de Euclides, se da por demostrado que: "En figuras planas semejantes la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre dos lados homólogos".

Realizo el trazado (líneas de trazo) de las dos figuras haciendo que BM, ZN coincidan con sus diámetros.



Los ángulos proporcionales AME y ZNH son iguales por ser inscritos abarcando arcos (centrales) iguales, y A^ , Z^ son rectos por ser BM y HN diámetros; por lo tanto los ángulos ABM y ZHN son también iguales.

Los triángulos BAM y HZN son semejantes (son rectángulos porque la hipotenusa coincide con el diámetro).

Entonces los triángulos BAM, HZN son semejantes, y por tanto se cumple la igualdad

$$BM / HN = AB / HZ$$

Si k es el valor de esta razón entre dos lados homólogos:

$$k = AB / HZ,$$

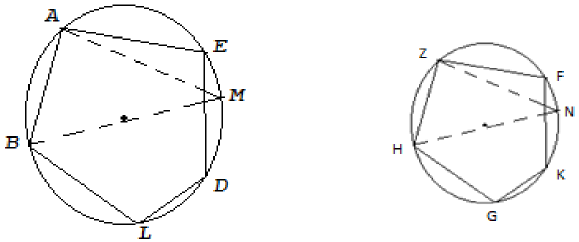
entonces:

$$S1 / S2 = k^2,$$

Pero también k = BM / HN, que es la razón entre los diámetros.
Queda probado.

CASO de polígonos semejantes cualesquiera inscritos en un círculo.
Sigo tomando polígono pentagonal aunque no regular.

Observa las figuras.



Evidentemente los triángulos AMB, ZNH son semejantes, Por lo tanto se cumple la igualdad

BM / HN = AB / HZ

Si llamo k = AB / HZ, tengo

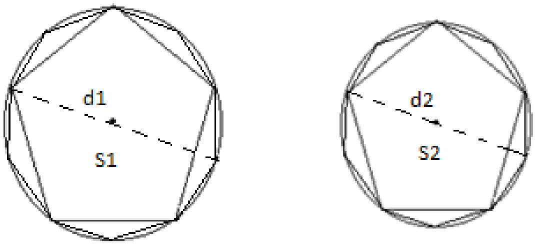
$S1 / S2 = k^2$

Pero también   k = BM / HN

Queda probado.

2.- Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.

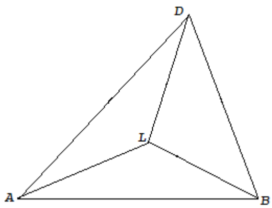
Interpretación y Comprobación: Datos



Es corolario directo de lo probado en el número 1, inscribiendo polígonos regulares con n lados, y realizando el proceso llamado de “paso al límite”, cuando n se hace arbitrariamente grande.

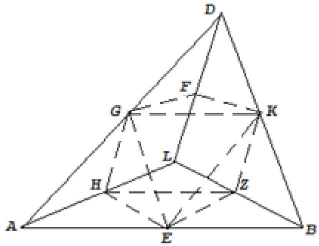
3.- Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a otra y a la pirámide entera, que tienen triángulos como bases, y se divide en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.

Interpretación y Comprobación: Dato



Mi redacción quedaría así: Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides iguales, semejantes una a otra y a la pirámide entera, que tienen triángulos como bases, y además dos prismas iguales. Estos cuatro elementos llenan la pirámide entera, de forma que los dos prismas llenan más que la mitad de la pirámide entera. (De las dos opciones que siguen la que nos pide es la B)

Realizo el trazado que muestra la siguiente figura.

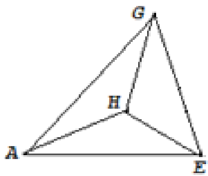


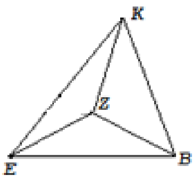
He marcado el punto medio de cada una de las aristas, obteniendo los puntos: E,   H, Z, G, K, F .

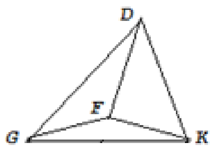
He unido estos puntos como se muestra, y ha resultado lo que, con un poco de imaginación, podemos describir como sigue, de dos formas distintas:

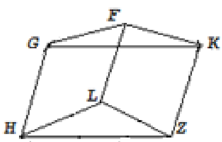
(A) Observa las siguientes figuras y comprueba

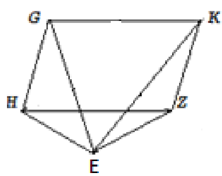
3 pirámides iguales: AEHG, EBZK, GKFD
1 prisma: Bases HZL y GKF, aristas HG, ZK, LF
No llenan la pirámide dada, quedando libre el espacio ocupado por:
Base HEZ, caras: EHG, EZK, HZKG



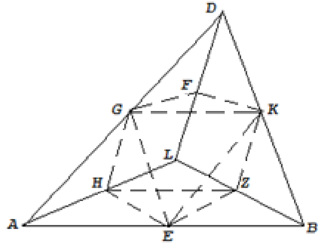


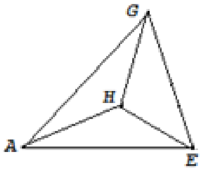


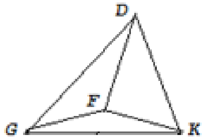




(B) Observa las siguientes figuras y comprueba

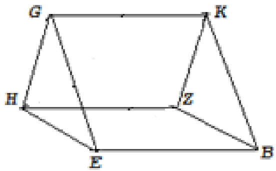


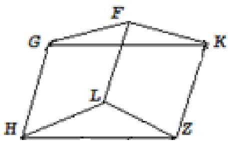




2 pirámides iguales: AHEG,   GKFD
1 prismas: Bases EHG, BZK, caras: EBZH, EBKG, HZKG
1 prisma: Bases HZL, GKF,   caras: HZKG, HLFG, ZLFK

Esta distribución sí llenan la pirámide dada inicialmente.





Compruebo si los dos prismas son o no iguales:
El paralelogramo EBZH es el doble que el triángulo HZL: S2 = 2.S1, donde S1 es el triángulo. Su altura h es la misma, por lo que sus volúmenes son:

$$V1 = S1 \,.\, h,$$
$$V2 = 1 / 2.\,(S2 \,.\, h) = 1 / 2.\,(2 \,.S1 \,.\, h) = V1$$

Luego son iguales.

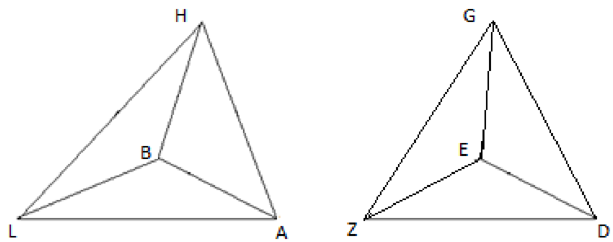
La pirámide entera queda completada con dos pirámides menores más los dos prismas.

Los dos prismas incluyen una pirámide igual a cada una de las dos pirámides menores, y el resto del volumen que ocupan estos dos prismas es claramente mayor que el volumen de una pirámide menor igual a aquellas (es la pirámide situada en la parte superior). Esto me dice que los dos prismas ocupan un volumen mayor que dos pirámides menores: La situada en la parte inferior izquierda más la situada en la parte superior.

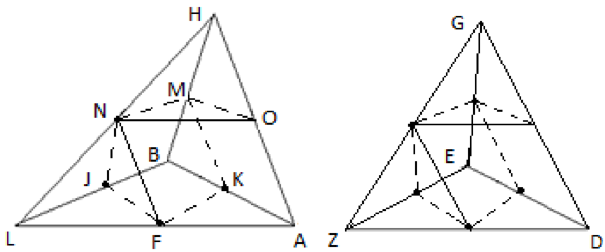
Teniendo en cuenta que la unión de estos prismas, más estas dos pirámides llenan el total, concluyo que los dos prismas ocupan más de media de la pirámide completa.

4.- Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como bases, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; (entonces) como la base de una pirámide es a la base de la otra pirámide, así serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número de la otra pirámide.

Interpretación y Comprobación: Datos



Dos pirámides con la misma altura y bases triangulares.
Realizo el trazado al que se refiere el enunciado, y como en el número 3.



Pirámides: Base LFJ, vértice N ; Base NOM, vértice H

Prismas: Bases FNJ, KMB, aristas FK, JB, NM
Bases FAK, NOM, aristas AO, KM, FN

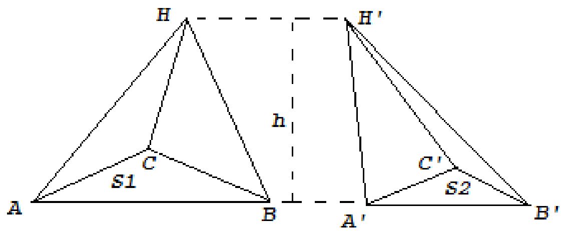
Lo que se pide comprobar, según el enunciado, resultan ser evidencias:

Como la base mayor de una es a la base mayor de la otra así es una base menor de una a la base menor homóloga de la otra.

Lo mismo para los prismas.

5.- Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases.

Interpretación y Comprobación: Datos
Ignoro las figuras que contiene el propio texto de Euclides, porque parece mostrar figuras semejantes. Lo que se pide y sigue a continuación es válido para cualquier par de pirámides con la única condición de que las bases sean triángulos y tengan la misma altura. Suponemos que las bases se apoyan sobre un mismo plano.



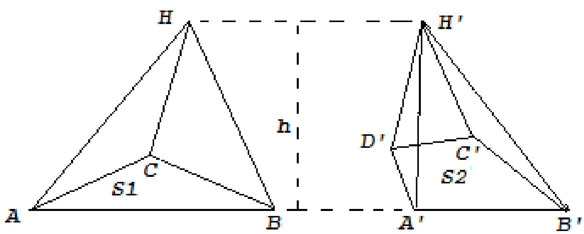
Tengo: V1 = 1 / 3 . S1 . h, V2 = 1 / 3 .S2.h

Entonces: V1 / V2 = (S1.h) / (S2.h) = S1 / S2 , y esto es lo que literalmente pide el enunciado.

c.q.d.

6.- Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.

Interpretación y Comprobación: Datos



La diferencia con el número 5 es que las bases son polígonos cualesquiera, y pueden ser de distinto tipo en cada pirámide. Suponemos que las bases se apoyan sobre un mismo plano.

Tengo: V1 = 1 / 3 . S1 . h, V2 = 1 / 3 .S2.h

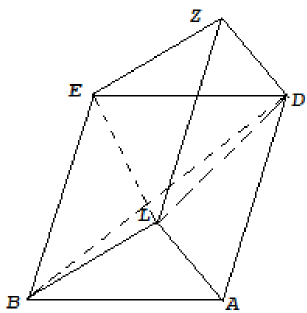
Entonces: V1 / V2 = (S1.h) / (S2.h) = S1 / S2 , y esto es lo que literalmente pide el enunciado.

c.q.d.

7.- Todo prisma que tiene como base un triángulo se divide en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.

Interpretación y Comprobación: Datos

Observa el siguiente trazado.



Evidentemente las citadas pirámides son:

Base ALB, vértice E
Base ALB, vértice D
Base EDZ, vértice L

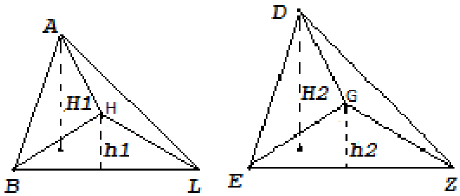
Llenan el prisma por completo, siendo el volumen de cada una de ellas 1 / 3 del volumen total.
NOTA: Este hecho ha permitido obtener la fórmula para el cálculo del volumen de una pirámide cualquiera con base triangular, que después, triangulando, se hace extensible a una pirámide con base poligonal cualquiera.

8.- Las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.

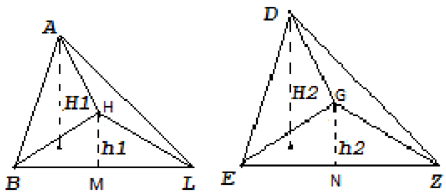
Interpretación y Comprobación: Datos

Observa las figuras

Sean pirámides semejantes y k = EZ / BZ, y evidentemente la misma razón guardan 'arista de la segunda' con su homóloga en la primera:
k = EG / BH = …



Veamos que lo mismo se cumple con las alturas h1, h2. (Siguiente figura)

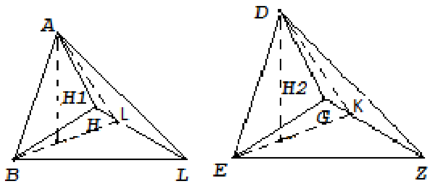


Por semejanza de los triángulos ENG, BMH, tengo:

h2 / h1 = EG / BH = k
Veamos ahora entre las alturas H1, H2. Siguiente figura.

Por semejanza entre los triángulos EKD y BLA, tengo para sus alturas:

H2 / H1 = ED / BA = k



Calculamos ahora el volumen de cada una.

V1 = 1 / 3 .[1 / 2.(BL.h1) .H1] = 1 / 6 . (BL . h1 . H1)

V2 = 1 / 3 .[1 / 2.(EZ.h2) .H2] = 1 / 6 . (EZ . h2 . H2) =

= 1 / 6 . (BL .k .h1 .k.H1 .k) = 1 / 6 .(BL .h1 .H1). k^3

La razón entre volúmenes es: V2 / V1 = … = k^3

c.q.d.

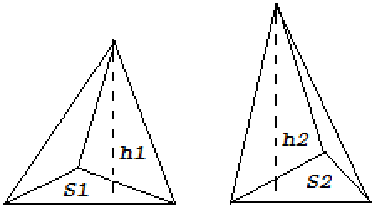
Corolario:

Es fácil comprobar que el resultado anterior es válido para las pirámides semejantes con base poligonal cualquiera. Sería suficiente triangular su base.

9.- Las bases de las pirámides iguales que tienen como base triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas; y aquellas pirámides que tienen bases triangulares, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.

Interpretación y Comprobación: Datos

Aclaración: “Pirámides iguales” significa “sus volúmenes iguales”.



V1 = 1 / 3. S1. h1,   V2 = 1 /3 . S2 .h2

V2 = V1 -- > S1 . h1 = S2 . h2,
y por lo tanto: S1 / S2 = h2 / h1

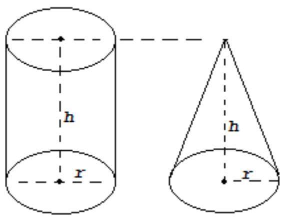
El recíproco: S1 / S2 = h2 / h1 -- > S1 . h1 = S2 . h2 -- >

-- > V1 = V2

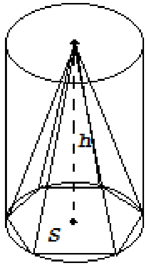
c.q.d.

10.- Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura.

Interpretación y Comprobación: Datos



Inscribo en el círculo un polígono regular de n lados, y construyo una pirámide;   sea S el área limitada por dicho polígono. Sabemos que el volumen de la pirámide es V = 1 / 3 .S .h



$V = 1/3.S.h$

Si incremento el valor de n el perímetro del polígono llega a aproximarse al perímetro del círculo tanto como queramos, y entonces también el valor de S, área limitada por el polígono, llega a aproximarse tanto como queramos al área T del círculo.

Dicho lo anterior, el volumen V = 1 / 3. S . h , de la pirámide llega a aproximarse, tanto como queramos, al valor 1 / 3 .T .h

Por otro lado, el volumen del cilindro es: W = T .h, y por tanto el volumen V de la pirámide llega a aproximarse tanto como queramos a 1 / 3. W .

Por lo tanto, en el "límite" llegan a coincidir:

Vol.Cono = 1 / 3 . Vol.Cil.

c.q.d.

11.- Los conos y cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.

Interpretación y Comprobación: Datos

El enunciado resulta ambiguo. Quiere decir: "Los conos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases". "Los cilindros que tienen la misma altura son entre sí como sus bases".

Parece evidente con el siguiente razonamiento.

Sean dos conos cuyas bases tienen áreas S1, S2 y altura h. Sus volúmenes son

$$V1 = 1 / 3 .S1 .h, \quad V2 = 1 / 3 .S2 .h$$

Entonces $V1 / V2 = S1 / S2$

Del mismo modo para dos cilindros.

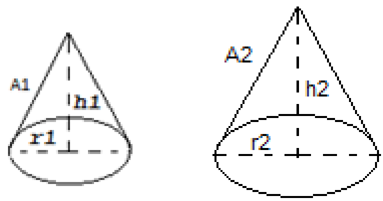
c.q.d.

12.- Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de (la que guardan) los diámetros de sus bases.

Interpretación y Comprobación: Datos

El enunciado resulta ambiguo. Quiere decir: "Los conos semejantes guardan entre sí (sus volúmenes) una razón triplicada de la razón entre sus diámetros". "Los cilindros semejantes guardan entre sí (sus volúmenes) una razón triplicada de la razón entre sus diámetros".

Sean dos conos semejantes, cuyas bases tienen diámetros D1, D2.
Sea $k = D1 / D2$



Por semejanza tengo:

$$r1 / r2 = A1 / A2 = h1 / h2 = k,$$

ya que $r1 / r2 = (2.r1) / (2.r2) = D1 / D2$

Sus volúmenes son: $V1 = 1 / 3 .S1 .h1, \quad V2 = 1 / 3 .S2 .h2$

Pero sabemos que $S1 / S2 = k^2$, de donde $S1 = k^2 .S2$, y teniendo en cuenta que $h1 = k .h2$, obtengo

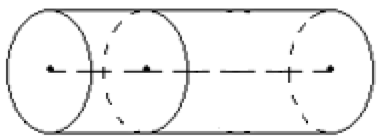
$$V1 = 1 / 3 .(k^2 .S^2) .(k .h2) = 1 /3 .(S2 .h2) . k^3$$

Entonces: $V1 / V2 = [(S2 .h2) .k^3] / (S2 .h2) = k^3$

De forma análoga en el caso de los cilindros.

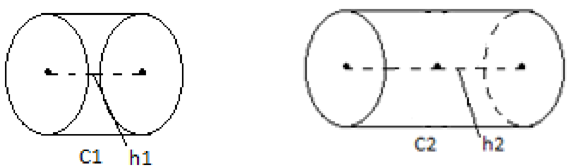
13.- Si un cilindro es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como el cilindro es al cilindro, así el eje al eje.

Interpretación y Comprobación: Datos



La figura aclara la posible ambigüedad del enunciado.

Sean los cilindros C1, C2, con eje = altura, h1, h2.



$V1 = S .h1$, $V2 = S .h2$ ---> $V1 / V2 = h1 / h2$

c.q.d.

14.- Los conos y cilindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.

Interpretación y Comprobación: Datos

El enunciado resulta ambiguo. Quiere decir: "Los conos sobre bases iguales guardan entre sí (sus volúmenes) una razón igual a la razón entre sus alturas". "Los cilindros sobre bases iguales guardan entre sí (sus volúmenes) una razón igual a la razón entre sus alturas".

Es evidente. Sean dos conos sobre bases iguales y alturas h1, h2. Tengo:

$$V1 = 1 / 3 .S .h1, \qquad V2 = 1 / 3 .S .h2$$

$$V1 / V2 = \ldots = h1 / h2$$

Del mismo modo en el caso de dos cilindros.

c.q.d.

15.- Las bases de los conos y cilindros iguales están inversamente relacionadas con sus alturas, y aquellos conos y cilindros cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.

Interpretación y Comprobación: Datos

En enunciado puede resultar ambiguo. Se refiere a conos iguales (igual volumen), y por otro lado cilindros iguales (igual volumen).

Sean dos conos tales que V 1 = V2.

$$V1 = 1 / 3 .(S1 . h1), \qquad V2 = 1 /3 .(S2 .h2)$$

$$V1 = V2 \dashrightarrow S1 .h1 = S2 .h2 \dashrightarrow S1 / S2 = h2 / h1$$

Recíproco: Supongo que los conos son tales que se cumple

$$S1 / S2 = h2 / h1$$

Entonces, $S1 . h1 = S2 . h2$, es decir $V1 = V2$
Del mismo modo en el caso de dos cilindros.

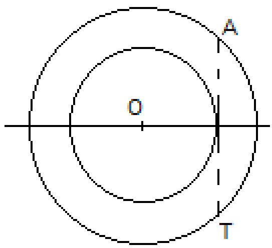
16.- Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque al círculo menor.

Interpretación y Construcción: Datos: Los dos círculos concéntricos

Es una construcción geométrica.

Es importante hacer notar que se trata de un número par de lados, y que el círculo interior es cualquiera, concéntrico con el exterior. Observando la construcción se nota cómo el número par de lados posibles depende de la diferencia entre las medidas de sus radios, cuanto menor sea esa diferencia mayor ha de ser el número de lados.

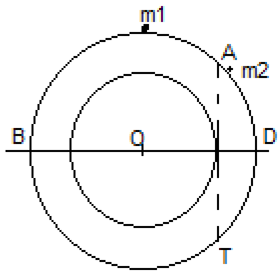
Construcción:



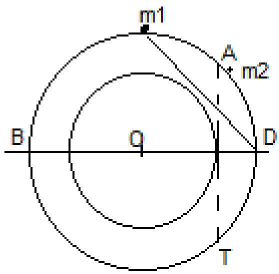
Trazo la tangente AT al círculo interior.

Divido el arco BAD en dos partes iguales, obtengo el punto m1.
Divido el arco m1AD en dos partes iguales, obtengo el punto m2.

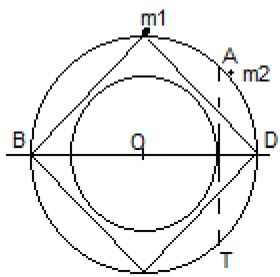
Continuamos hasta que el segmento m_iD no corte, ni toque, el círculo interior.



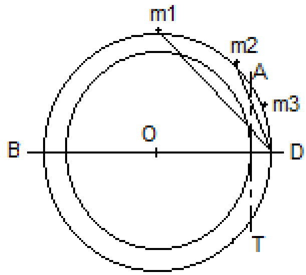
En este caso



con lo cual podemos inscribir el cuadrilátero (cuadrado).



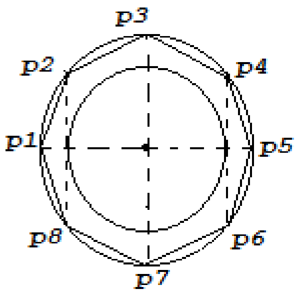
En el siguiente caso podemos ver que es válido el segmento m2D, con lo cual el polígono inscrito va a tener 8 lados. También sería válido el segmento m3D con lo cual obtendríamos el de 16 lados. Observamos que el número de lados es una potencia de dos.



Después de decidir el segmento que será el lado del polígono, lo aplicamos a lo largo del círculo.

Observa: El trazado de la tangente AT tiene como único objetivo garantizar que si el punto m_i está situado en el arco AD, entonces el segmento m_iD no toca al círculo interior.

Ejemplo: Hemos trazado el octógono regular completo.



17.- Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.

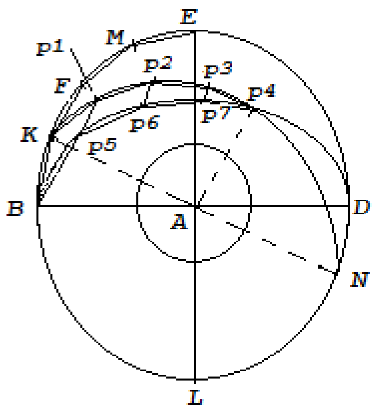
Interpretación y Construcción:

Se trata de una construcción geométrica.

Sean dos esferas con el mismo centro A. Fijamos un plano BEDL, que llamamos principal, pasando por el centro A. Sobre este círculo construimos un polígono equilátero, por ejemplo el de lados: BK, KF, FM, ME, … Para mostrar el proceso a seguir concretamos a un cuadrante.

Trazo KA y la prolongo hasta N, y por el punto A levanto la perpendicular al plano principal BEDL, que cortará a la esfera en p4. Trazo dos planos pasando por la recta Ap4, uno que pase además por BD que llamaré m1, otro que pase además por KN que llamaré m2.

Los planos m1, m2 producen círculos máximos sobre la esfera, que llamaré C1: B, p5, p6, p7, D; C2: K, p1, p2, p3, p4, N



Sobre estos semicírculos (en el primer cuadrante) construyo el mismo polígono equilátero que fue construido sobre el círculo principal, obteniendo los puntos: p1, p2, p3, p4, … en C2, y p5, p6, p7, p4, … en el círculo C1.

Unimos los puntos p1-p5, p2-p6, p3-p7, …, y de esta forma hemos inscrito cuatro cuadriláteros: Bp5p1K, p5p6p2p1, p6p7p3p2, y un triángulo p7p4p3.

Obviamos toda demostración, y lo expuesto es suficiente para reconocer el proceso completo.

Parece evidente que, por construcción, el poliedro construido no toca la esfera menor.

c.q.d.

Corolario:
Si unimos los vértices del poliedro con el centro de la esfera obtengo pirámides, de modo que la mayor parte del interior de la esfera ha quedado ocupado por el volumen de la familia de pirámides. Puesto que el volumen de cada pirámide viene dado por $V_i = 1 / 3 .S_i .h_i$, y teniendo en cuenta que el conjunto de todas las áreas S_i aproximan la superficie total de la esfera, y que cada altura h_i es una aproximación del radio de la esfera, podemos concluir que el conjunto de todos los valores V_i aproximan el volumen de la esfera.

Es evidente que si incrementamos el número de lados del polígono inscrito, y por tanto el números de pirámides y valores V_i, el error cometido en la aproximación es menor.

En un proceso de paso al límite, que significa hacer n tan grande como sea necesario, podemos hacer que el error sea < e, donde e es un valor infinitesimal, es decir tan pequeño como deseemos.

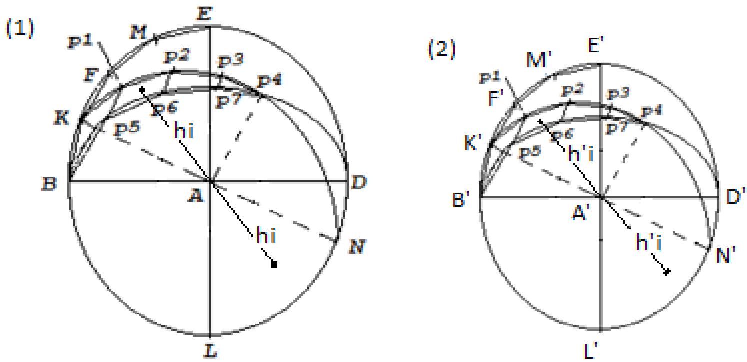
Concluyo que el volumen de la esfera es: $V = 1 / 3. S .R$, donde S es la superficie de la esfera de radio R.

18.- Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.

Interpretación y Comprobación:

Tomo la figura del número anterior, una para cada esfera.

Las pirámides que se mencionan en el número 17, anterior, van emparejadas situándose de forma simétrica con centro de simetría el centro de la esfera.



Si W_i , W'_i representan el volumen suma de esas dos pirámides simétricas, en cada una de las esferas. Estas pirámides son semejantes y se cumple:

$$V_i / V'_i = (hi / h'i)^3$$

y por lo tanto

$$Wi / W'i = [(2.hi) / (2.h'i)]^3$$

Si el número n de estos pares de pirámides lo incremento, tanto como quiera, los volúmenes la suma de los volúmenes Wi aproxima, tanto como queramos, el volumen de la esfera (1), mientras que la suma de los volúmenes W'i aproxima, con semejante aproximación, el volumen de la esfera (2).

Teniendo en cuenta que 2.hi y 2.h'i aproximan en igual medida los diámetros de las esferas, puedo concluir que, en el "límite", se cumple

$$V1 / V2 = (d1 / d2)^3$$

$$$oOo$$$

LIBRO XIII

1.- Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con la mitad del segmento entero (segmento inicial) es cinco veces el cuadrado de la mitad (del segmento inicial).

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:

Dado el segmento AB, cortarlo en extrema y media razón por el punto L significa que

$$AB/AL = AL/LB$$

de donde

$$AB.LB = AL^2$$

Tesis: Con la notación que se muestra se cumple

$$(a + (a+b) / 2)^2 = 5. ((a + b) / 2))^2$$

Comprobación:
Por razonamiento algebraico tengo

Por hipótesis: $(a+b).b = a^2 \; -> b^2 = a^2 - a.b$, entonces

$[a+(a+b) / 2]^2 = [(3.a + b)/2]^2 = 1/ 4. (9.a^2 + b^2 +6.a. b) =$

$= 1/ 4. (9.a^2 +(a^2 - a.b) +6.a.b) = 1/ 4 . (10.a^2 +5.a.b] =$

$= 5/ 4 .(2.a^2 + a.b)$

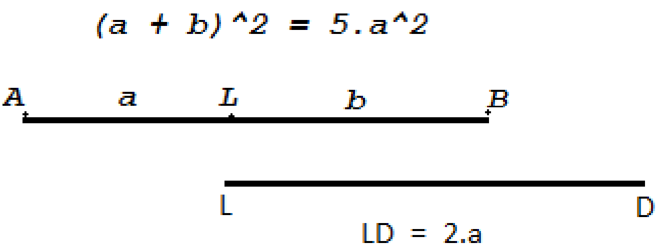
Por otro lado: $5. [(a+b) / 2]^2 = 5/4. [a^2 +b^2 +2.a.b] =$
$= 5/4. [a^2 + (a^2 -a.b) +2.a.b] = 5/4 .[2.a^2 + a.b]$

c.q.d.

2.- Si el cuadrado de una línea recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis: Con la notación que se muestra podemos ver la interpretación del enunciado.



Tesis:

Cortando el segmento LD en extrema y media razón por el punto K, el segmento mayor (la media) c coincide con LB del segmento AB inicial.

Comprobación:

En el número 1 ha quedado probado que

$$[c+(c+d) / 2]^2 = 5.[(c+d) / 2]^2$$

Pero $c + d = 2.a$, por lo que

$[c + a]^2 = 5.[a]^2$, y teniendo en cuenta la hipótesis

$(c + a)^2 = (a + b)^2$, obtengo $c = b$.

c.q.d.

3.- Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.

Interpretación y Comprobación:
Hipótesis:

$$(a + b) / a = a / b$$

Tesis:

$$(b + a / 2)^2 = 5.(a / 2)^2$$

Tengo: $1 / 4 .(2b + a)^2 = 1 / 4 . (4.b^2 + a^2 +4.a.b) =$

$= 1/\ 4\ .\ (4.b^2 + b^2 + a.b + 4.a.b) = 1/\ 4\ .\ (5.b^2 + 5.a.b) =$

$= 5/\ 4\ .\ (b^2 + a.b)$

Por otro lado: $5\ .\ (a\ /\ 2)^2 = 5\ /\ 4\ .\ a^2 = 5\ /\ 4\ .(a.b + b^2)$

c.q.d.

4.- Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado de la recta entera y el del segmento menor juntos son el triple del cuadrado del segmento mayor.

Interpretación y Comprobación:

Hipótesis:

$(a+b)\ /\ a = a\ /\ b \quad <\text{--}> \quad (a + b)\ .\ b = a^2$

Tesis: $(a + b)^2 + b^2 = 3\ .a^2$

Tengo: $(a^2 + b^2 + 2.a.b) + b^2 = a^2 + 2.b^2 + 2.a.b =$

$= (a.b + b^2\ ) + 2.b^2 + 2.a.b = 3.b^2 + 3.a.b = 3.(b^2 + a.b)$

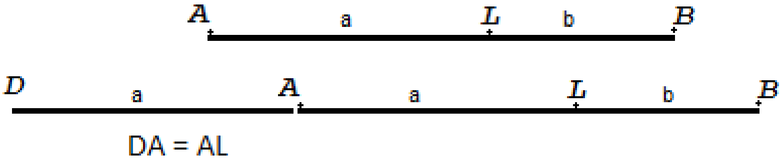
Por otro lado: $3.a^2 = 3\ .(a+b).b = 3\ .(a.b + b^2)$

c.q.d.

5.- Si se corta una línea recta en extrema y media razón y se le añade (otra) igual al segmento mayor, la recta entera queda cortado en extrema y media razón, y la recta inicial es el segmento mayor.

Interpretación y Comprobación:

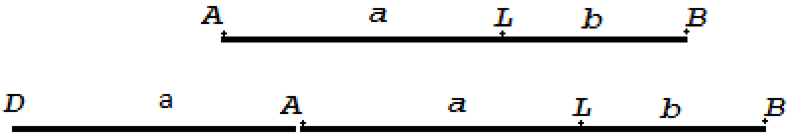
Hipótesis:



$(a + b) / a \; = \; a / b \quad <\text{--}> \quad (a+b).b = a^2$

Tesis: $\quad DB / AB = AB / DA$

Comprobación:



Tengo: $(2.a + b) / (a + b) = (a + b) / a$

o de forma equivalente

$$(2.a + b) . a = (a + b)^2$$

Cada miembro

$(2.a + b).a = 2.a^2 + a .b =$ (por hipótesis) $=$
$= 2.(a + b).b + a.b = 2.b^2 + 3.a.b$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b =$ (por hipótesis) $=$
$= (a + b).b + b^2 + 2.a.b = 2.b^2 + 3.a.b$

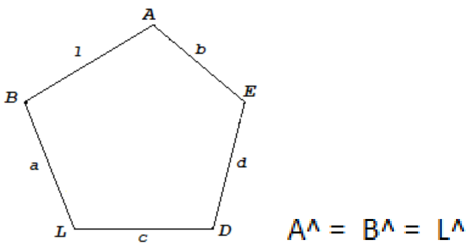
c.q.d.

6.- Si una recta expresable se corta en extrema y media razón, cada uno de los segmentos es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

No interesa en absoluto, utiliza conceptos no definidos.

7.- Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sean sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.

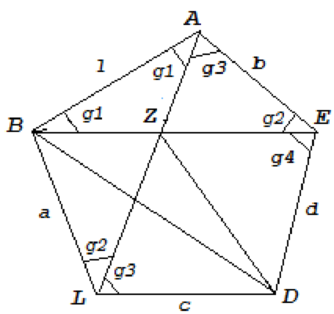
Interpretación y Comprobación: Datos: Un pentágono con tres ángulos iguales (figura)



Comprobación:

Realizo el trazado que puede verse en la siguiente figura.

En principio el pentágono no es regular ya que si lo fuera no tendría nada que probar.

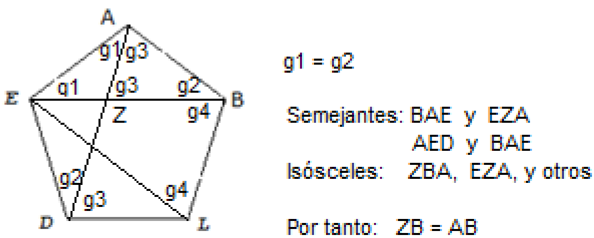


Por ser equilátero: a = l = b = c = d , y evidentemente: g2 = g1, AZ = BZ, y por ser AL = BE, tengo también ZL = ZE, y teniendo en cuenta que ZD es común, los triángulos ZED y ZDL son iguales, de donde g4 = g3, y por tanto E^ = L^ .

Teniendo en cuenta que d = a, tengo EL = BD,   y por tanto D^ = L^ .
Suponiendo iguales los ángulos A^ , B^ , D^ , se probará siguiendo un proceso paralelo.   c.q.d.

IMPORTANTE consecuencia: El pentágono es regular, y observa la semejanza entre triángulos y los triángulos isósceles, en la siguiente figura.

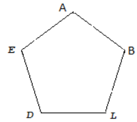
Observa que: AZ = EZ y g2 = g1 -- > AZE es isósceles y semejante a ABE. Los triángulos EDZ y ZBA son isósceles e iguales, y son semejantes con el triángulo isósceles LEB. Además ZDLB es un paralelogramo.



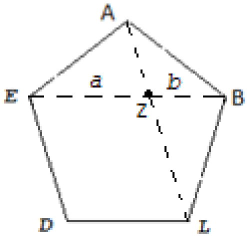
8.- Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subdividen dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Interpretación y Comprobación: Datos

Se trata de un pentágono regular y por tanto inscribible en un círculo.

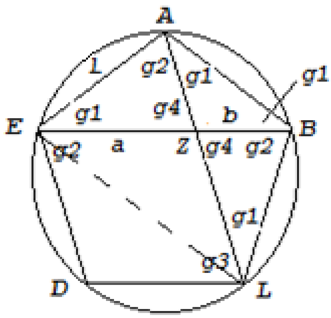


Hipótesis: Dos rectas que subdividen los ángulos sucesivos A y B, se cortan en el punto Z.



Tesis: EB / EZ = EZ / ZB

El siguiente trazado es equivalente al realizado en el nº 7 anterior.



Según vimos en IMPORTANTE consecuencia:

Semejantes BAE y AZB, y, AEZ y ZLB son isósceles e iguales. He marcado a = EZ, b = ZB, y EB = a + b

Teniendo en cuenta que AB = AE = EZ -- > AB = a, tenemos

EB / AB = AE / BZ -- > (a + b) / a = a / b < -- > (a + b).b = a^2 ,

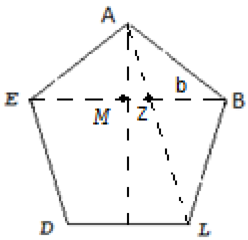
Significa que el segmento EB ha quedado dividido en extrema y media razón: a es la media, b es la extrema. Observa que a = AB es el lado del pentágono.

Además podemos expresarlo así: $a^2 = b^2 + a.b$, $b^2 + a.b – a^2 = 0$
Conclusión: $a^2 = b^2 + a.b$

NOTA/Corolario:

Esta proposición puede ayudar en la construcción del pentágono regular, dependiendo del dato de partida.

Observa la figura



A) Si conocemos el lado AE = a. De la igualdad $a^2 = b^2 + a.b$ obtengo el valor de b. Construyo el triángulo isósceles AEZ, donde AZ = b, y a continuación el paralelogramo EZLD, que es un cuadrado y me queda resuelto el problema del ángulo.

B) Si conocemos la diagonal EB, obtengo el valor de x, y después el de y. Continúo como en A).

Divido el segmento de modo que $y^2 = x^2 + y.x$, L = EB, y = L - x

$(L - x)^2 = x^2 + x.(L - x)$ -- > $L^2 - 2.L.x + x^2 = x^2 + x.L - x^2$

$$x^2 - 3.L.x + L^2 = 0$$

c.q.d.

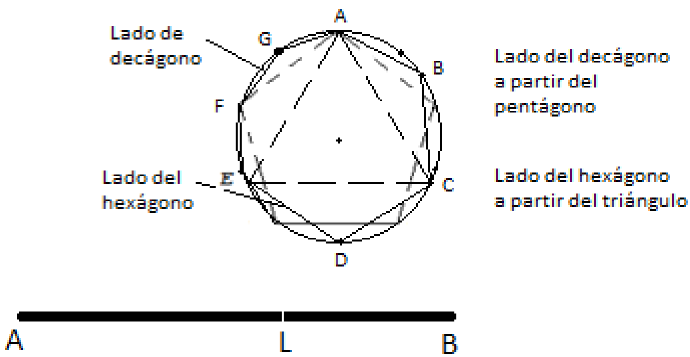
(*) Véase también T. de Ptolomeo en Apéndice II

9.- Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortado en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.

Interpretación y Comprobación: Aclaración:

En la figura (1) represento inscritos en el mismo círculo el lado del hexágono regular y el lado del decágono regular.

Construyo el segmento AB formado por la unión de un lado del hexágono, AL, y otro del decágono, LB, colocados formando un único segmento. El punto L es el punto de unión.

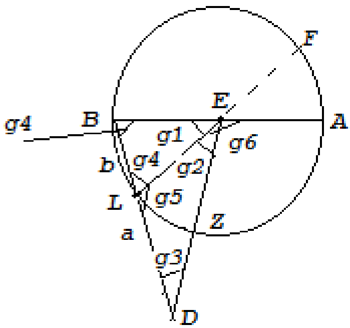


Tesis:
Afirmo que

AB / AL = AL / LB, y por lo tanto que el segmento unión de aquellos queda dividido por el punto L en extrema y media razón, siendo el lado del hexágono el mayor de los segmentos.

Demostración:

Hago el siguiente trazado tomando como base el círculo en el que están inscritos el hexágono y el decágono. En la figura, b = BL es el lado del decágono, a = LD es el lado del hexágono.



El arco AZB abarca cinco lados del decágono y por tanto el arco AZL abarca cuatro lados, y por tanto arc(AZL) = 4.arc(BL), de lo cual se deduce que el ángulo AEL es cuatro veces g1: g6 = 4.g1.

Por otro lado, evidentemente g3 = g2, porque EL = LD (por ser LD el lado del hexágono y este es igual al radio), y teniendo en cuenta que 2.g2 + g5 = g5 + g4 tengo también g4 = 2.g2.

Considerando g4 como ángulo inscrito y trazando la línea (trazos) LF, llegamos a que g4 = 1/ 2 .(4.g1), y por tanto g4 = 2.g1, y por tanto que g2 = g1.

Conclusión: Los triángulo EDB y BEL son semejantes.
Por semejanza tengo

$$BD / BE = BE / BL$$

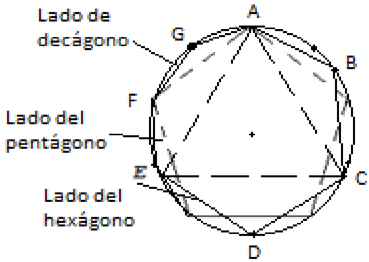
lo cual significa que el segmento BD queda cortado por L en dos segmentos según la proporción de extrema y media razón.

c.q.d.

10.- Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los cuadrados de los lados del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo.

Interpretación y Comprobación:

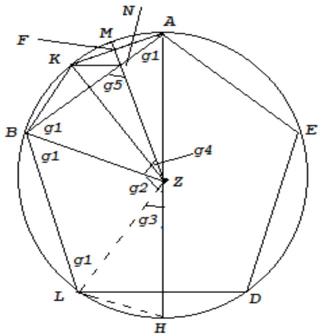
Siendo equilátero e inscrito en un círculo será también equiángulo, es decir regular.



Afirmo que: $AF^2 = GF^2 + ED^2$

Demostración: Realizo el siguiente trazado

El arco BKA corresponde al lado del pentágono, el arco BK corresponde al lado del decágono, y sabemos que arc(BKA) = arc(2.BK). Evidentemente arc(LD) = 2.arc(BK) -- > arc(LH) = arc(BK) -- > LH = BK = 2.KM .



También: arc(BH) = 2.arc(BM) -- > ángulo HZB = 2.(MZB)

Por otro lado, por ser ángulo HAB inscrito su valor es g1 =
= 1/ 2.(HZB) -- > HZB = 2.g1, y por tanto g4 = g1.

El ángulo g1 = ABZ es común a los triángulos AZB, BNZ, y por tener dos ángulos iguales el tercero también han de ser iguales: g5 = AZB , por tanto son triángulos semejantes. Entonces, proporcionalmente se cumple

AZ / BN = AB / BZ = BZ / ZN -- > AB.BN = BZ^2 , ya que AZ = BZ.

Probaremos también que los triángulos BKA y KNA son semejantes.

Evidentemente, ángulo KBA = KAB , por lo que el triángulo es isósceles. Además ángulo AKN) = KAB), por lo que este también es isósceles, y es semejante con el anterior.

Proporcionalmente:

AB / AK = AK / KN -- > AB.AN = AK^2 , porque KN = AN

Reuniendo este resultado con el anterior tengo

$$AB.BN + AB.AN = BZ^2 + AK^2 ,$$

$AB .(BN + NA) = BZ^2 + AK^2$, pero $BN + NA = AB$, por lo cual

$$AB^2 = BZ^2 + AK^2$$

c.q.d.

11.- Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo que tenga diámetro expresable, el lado del pentágono es la (recta) sin razón expresable llamada menor.

No interesa en absoluto, menciona conceptos no definidos.

12.- Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del cuadrado del radio del círculo.

Interpretación y Comprobación: Observa siguiente figura

Siendo equilátero e inscrito en un círculo será también equiángulo, es decir regular.

BE = lado del hexágono = radio = BO; AE = 2.BO, y por tanto

$$AE^2 = 4 .BO^2 ,$$

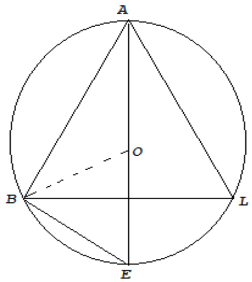
Por otro lado sabemos que el ángulo en B es recto, por lo cual podemos aplicar la igualdad ya conocida (Pitágoras):

$AE^2 = AB^2 + BE^2$, y teniendo en cuenta que BE = BO tengo

$AB^2 + BO^2 = 4 .BO^2$ --> $AB^2 = 3 .BO^2$, $AB = \sqrt{3} . OB$

c.q.d.

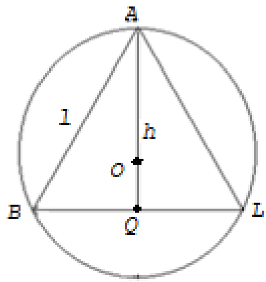
Si L es el lado y R el radio: $L = \sqrt{3} . R$



Corolario 1: Teniendo en cuenta que $BO^2 = 1 / 3. AB^2$, y que BE = BO, el lado del hexágono lo obtengo así:

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{3} . AB$$, donde AB es el lado del triángulo.

NOTA: Demostramos aquí la relación entre el lado l del triángulo equilátero y su altura h.



l = lado del triángulo

$l^2 = h^2 + (l / 2)^2$ -- > $h^2 = 3 / 4. l^2$ -- > $h = \frac{\sqrt{3}}{2} .l$

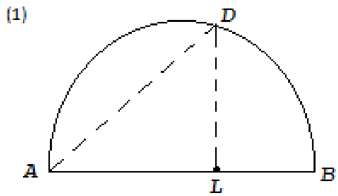
Corolario 2: $OQ = h - R = \frac{\sqrt{3}}{2} .l - R = \frac{\sqrt{3}}{2} . \sqrt{3} .R - R = 1 / 2. R$

13.- Construir una pirámide, envolverla en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.

Aunque en el enunciado no se menciona cómo ha de ser la base de la pirámide, por el razonamiento que sigue en el texto puedo deducir que se refiere a base triangular y pirámide regular.

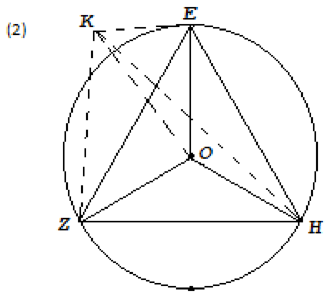
Cuando habla del lado de la pirámide se está refiriendo a una de sus aristas.

Construcción:



En la figura (1) el segmento AB es el diámetro de la esfera dada. El punto L es tal que AL = 2.LB, y entonces

AB = 3 .LB



Ahora trazo el círculo con radio LD, y el triángulo equilátero EZH inscrito en el círculo, uniendo el centro O con cada uno de los vértices. Situándonos en el espacio levanto por O la perpendicular OK al plano del círculo, de modo que OK = AD (va a ser la altura de la pirámide) . Trazo KE, KZ, KH, que van a ser las aristas de la pirámide.

Veamos; OK es perpendicular al plano y por tanto lo es también a las rectas OE, OH, OZ, en el punto O. Puesto que OE = LD y OK = AD, y, por ser perpendiculares del mismo modo, concluyo que KE = AD, y lo mismo KZ = AD, KH = AD.
Tengo así construida una pirámide con base el triángulo equilátero EZH, vértice en K, y sus aristas iguales a AD.

Deseamos probar que la base EZH y las tres caras de esta pirámide son triángulo equiláteros iguales.

En el siguiente Lema se prueba que

$$AB / BL = AD^2 / DL^2$$

que ahora tomo como probado.

Entonces tengo: $AB \cdot DL^2 = BL \cdot AD^2$, $3 \cdot BL \cdot DL^2 =$

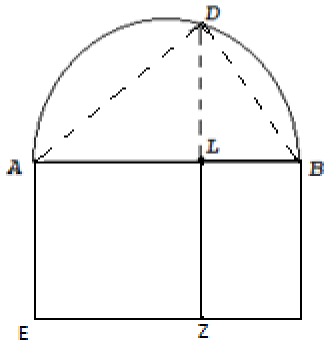
$= BL \cdot AD^2$, y por tanto $AD^2 = 3 \cdot DL^2$.

Por otro lado en (L. XIII, 12) quedó probado que cuadrado del lado del triángulo (equilátero) es tres veces el cuadrado del radio:
$EZ^2 = 3 \cdot OE^2$, y teniendo en cuenta que OE = DL concluyo que

$$EZ^2 = AD^2, \text{ de donde } EZ = AD$$

Pero antes vimos que las restantes aristas son iguale a AD, por lo tanto todas son iguales.

LEMA:
Construyo el cuadrado de lado igual a AL, y lo completo con el rectángulo de lados LZ, LB



El ángulo D^ = recto, y por tanto ADB y DLA son semejantes, por lo cual

$$AB / AD = AD / AL, \quad \text{de donde}$$

$$AB.AL = AD^2$$

También sabemos que la altura DL es media proporcional de AL, LB, es decir

$$AL.LB = DL^2$$

Por ser paralelogramos con la misma altura, según (L. VI, 1) se cumple

$$AB / LB = \text{área}(EB) / \text{área}(ZB), \quad \text{y como}$$

área(EB) = AB.AE = AB.AL, y área(ZB) = LZ.LB = AL.LB

queda $AB / LB = (AB.AL) / (AL.LB) = AD^2 / DL^2$, concluyendo

$$AB / LB = AD^2 / DL^2$$

c.q.d.

14.- Construir un octaedro y envolverlo en una esfera como en la (proposición) anterior, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del (cuadrado) del lado del octaedro.

Construcción:

fig.(1):
Sea AB el diámetro de la esfera, y el punto L lo divide en dos partes iguales. Trazo LD perpendicular y trazo DB. Observa que $AB^2 = 2.BD^2$

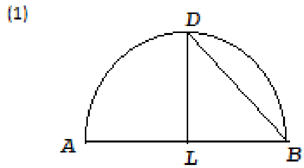
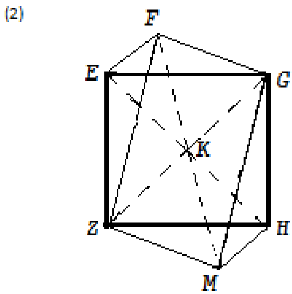


fig.(2):

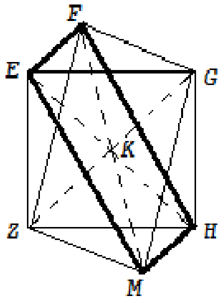


He dibujado el cuadrado EZHG cuyo lado es BD, y trazamos ZG y EH que se cortan en K. Por K trazo la perpendicular KF al plano que contiene el cuadrado y prolongándola obtengo también el punto M, tomando KF = KE, y lo mismo KM = KE. Los segmentos KZ, KH, KG también son iguales a KE.

fig.(3):
Completo el trazado, remarcando el rectángulo EMHF sobre el cual se soldarán las dos pirámides, como se muestra en la siguiente figura. En ella KE = KG, y las rectas EH y ZG se cortan el K formando ángulo recto, por lo cual

$$EG^2 = EK^2 + GK^2 = 2.\ EK^2$$

(3)



También FK = EK, y las rectas ZG, FM se cortan formando ángulo recto, por lo cual $EF^2 = EK^2 + FK^2 = 2.EK^2$. Pero también $EG^2 = 2.EK^2$. Entonces EF = EG.

Del mismo modo puedo llegar a que FG = EG, por lo que el triángulo FEG es equilátero. Del mismo modo se demuestra que los triángulos cuyas bases sean los lados del cuadrado EMHF son equiláteros.

Queda así construido un octaedro cuyas caras son los ocho triángulos equiláteros cuya base es alguno de los lados del referido cuadrado EMHF.

Observa que las caras del Octaedro son los siguientes triángulos:

EGF, EZF
EMG, EZM
MGH, MZH
HGF, HZF

Se asemeja a la soldadura sobre el borde del cuadrado de las pirámides cuyos vértices son G y Z.
El cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado (arista) del octaedro.

15.- Construir un cubo y envolverlo en una esfera como la pirámide, y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del (cuadrado) del lado del cubo.

Construcción:

Sea AB el diámetro de la esfera dada y córtese por el punto L de modo que AL = 2. LB.

fig.(1):
Realizo el trazado de la figura semicírculo:

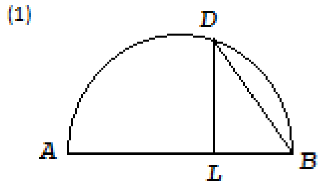
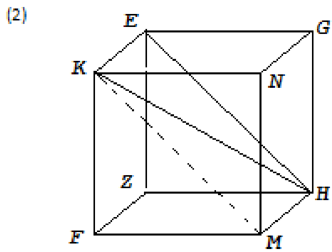


fig.(2):
Trazo el cuadrado EZHG cuyo lado sea BD, y completo la figura como se muestra:

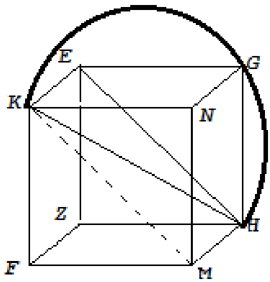


He construido un cubo cuyas caras son seis cuadrados iguales.

Lo inscribo en una esfera.

Trazo KH y EH. El triángulo KEH tiene el ángulo E^ = recto. Entonces el semicírculo cuyo diámetro sea KH, trazado en el espacio, pasa por E.

(3)



Si dejando fijo el eje KH hago girar el semicírculo anterior, pasará por los restantes vértices: Z, H, F, M, G, N, y por tanto es la esfera deseada.

Además: Evidente que $EH^2 = 2.\ EZ^2$, y $KH^2 = KE^2 + EH^2 =$
$= KE^2 + 2.EZ^2 = 3.\ EZ^2$

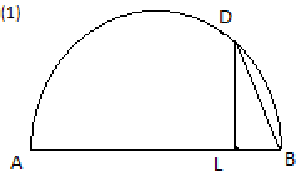
c.q.d.

16.- Construir un icosaedro y envolverlo en un esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la (recta) sin razón expresable llamada "menor".

Construcción:

fig.(1):

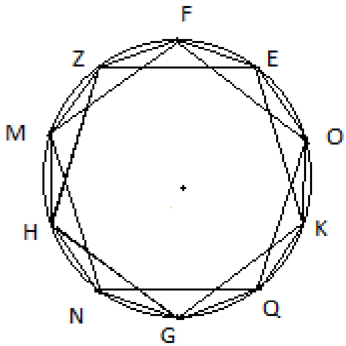
(1)



El segmento AB es el diámetro de la esfera, el punto L está fijado de modo que AL = 4. LB . He descrito el semicírculo, trazo LD perpendicular, y trazo BD.

fig. (2):
Ahora trazo un círculo con radio BD, e inscribo en él un pentágono regular: EZHGK

(2)

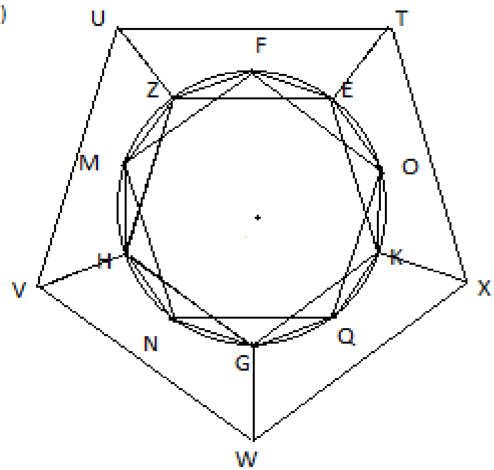


Marco los puntos medios de los arcos: F, M, N, Q, O , y uniéndolos tengo: FM, MN, NQ, QO, OF, resultando otro pentágono regular: FMNQO

Observa que el segmento EO, y siguientes, son los lados del decágono inscrito.

fig. (3):

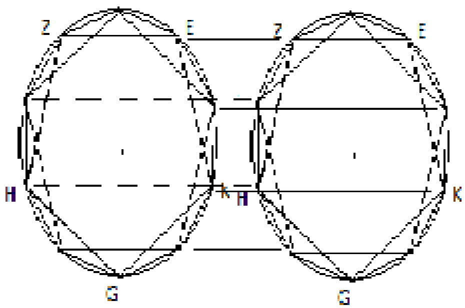
(3)



Por los puntos E, Z, H, G, K, (en el espacio), levanto rectas perpendiculares al plano de círculo (llevándolas hacia atrás), y sobre cada una tomo los segmentos ET, ZU, HV, GW, KX, todos iguales al radio (BD fig. 1) del círculo inicial.

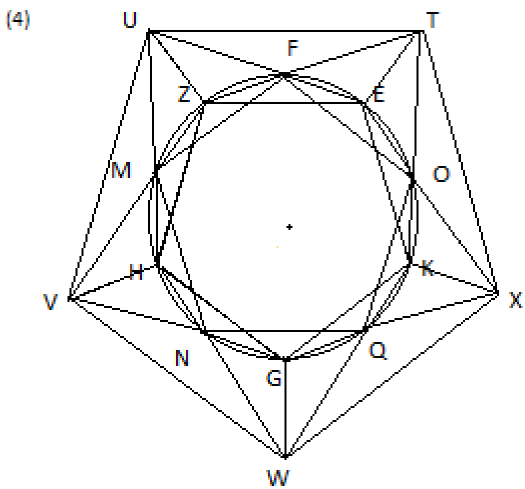
Trazo ahora TU, UV, VW, WX, XT, y (en el espacio) es fácil comprobar que son paralelas a EZ, …, KE.

Teniendo en cuenta que ET, KX son perpendiculares al plano del círculo, puedo afirmar que TX es paralela a EK, y además son iguales ya que son los lados del pentágono inscrito en el círculo base opuesta del cilindro levantado sobre el círculo inicial EZHGK, de altura ET = radio = BD.



Así, el pentágono TUVWX es equilátero (además es regular).

fig. (4):



Trazo ahora TF, FU, …, XO, OT

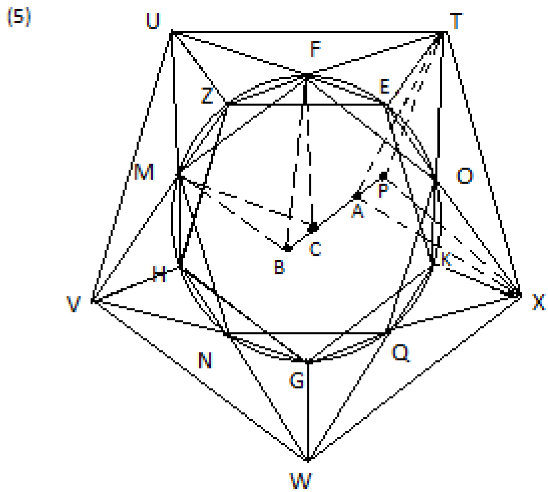
Teniendo en cuenta que ET es como el lado del hexágono (porque ET = BD = radio), mientras que EO es el lado de decágono, y TEO

es ángulo recto, llego a que, según (L.XIII, 10), TO es como el lado del pentágono ya que :
$TO^2 = ET^2 + EO^2$.

Con el mismo razonamiento obtengo que OX es como el lado del pentágono, y hemos probado antes que TX también es un lado del pentágono, y por lo tanto el triángulo TOX es equilátero (en el espacio). Por el mismo razonamiento lo son los triángulos TFU, …, WQX.

También, teniendo en cuenta que EF, TO son como el lado del pentágono, concluyo que TFO es triángulo equilátero, y lo mismo en los restantes casos: UFM, …, XOQ .

fig. (5):



Sea C el centro del círculo inicial EZHGK. Por C levanto la recta CP formando ángulo recto con el plano del círculo, y marco CA igual al lado del hexágono, y AP y CB iguales al lado del decágono.

Puesto que CA y ET son perpendiculares al plano del círculo, son paralelas entre sí, y además son iguales (por construcción iguales al radio), y por tanto CE y AT también son paralelas e iguales (porque CA = ET y estas son perpendiculares al plano).

Pero CE es como el lado del hexágono, y por tanto AT es también como el lado del hexágono.

Teniendo en cuenta que AT es como el lado del hexágono y AP es (por construcción) como el lado del decágono, y el ángulo TAP es recto, concluyo que PT es como el lado del pentágono:

$$PT^2 = AT^2 + AP^2$$

Por un razonamiento análogo obtengo que PX es como el lado del pentágono, y como TX también lo es, concluyo que el triángulo TPX es equilátero.

Del mismo modo puedo afirmar que los triángulos cuyas bases son: TU, UV, VW, WX , y vértice en el punto P son equiláteros.

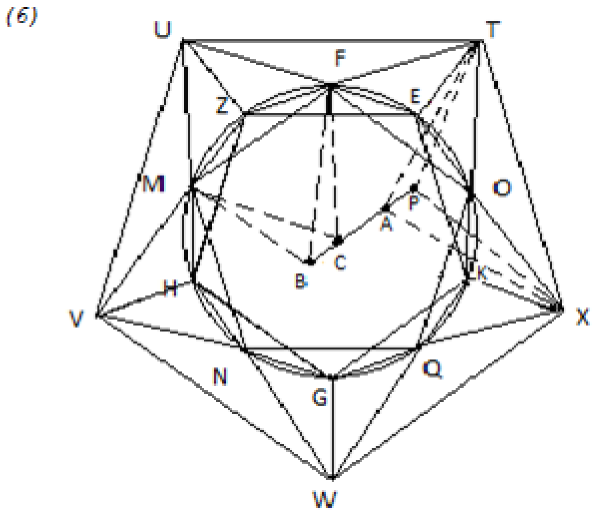
Por otro lado CB es como el lado del decágono mientras que CF es como el lado del hexágono, y el ángulo BCF es recto, y por tanto BF es como el lado del pentágono:

$$BF^2 = CB^2 + CF^2$$

De forma análoga pruebo que MB es como el lado de un pentágono, y concluyo que el triángulo MBF es equilátero.
Mediante un razonamiento análogo, puedo probar que los triángulos cuyas bases son MN, NQ, QO, OF, y su vértice el punto B son equiláteros.

Ha quedado construido un icosaedro comprendido por veinte triángulos equiláteros.

fig.(6): ESFERA ENVOLVENTE



Por construcción CA es como el lado del hexágono mientras que AP es como el lado del decágono. Esto me dice que el segmento CP ha sido cortado por el punto A en extrema y media razón, siendo CA el segmento mayor. Entonces

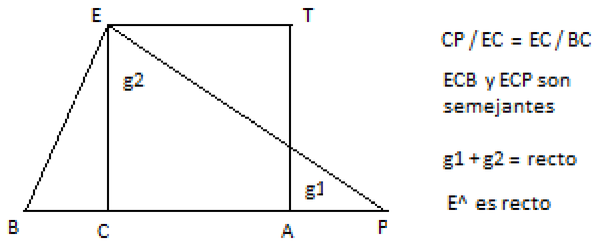
$$CP / CA = CA / AP$$

pero CA = CE y CB = AP, y por tanto

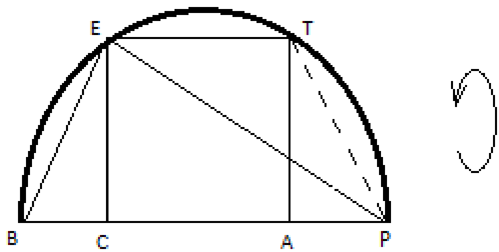
$$CP / CE = CE / CB$$

Esto prueba la semejanza de los triángulos ECB y ECP, como muestra además la siguiente figura.

Observa que por construcción, los ángulos PCE, ECB son rectos.



Concluyo que BEP es recto y lo mismo PTB.



Esto nos dice que el semicírculo con diámetro BP pasará por E y por T. Haciendo girar este semicírculo engendra una esfera que pasa por los vértices E y T, y lo mismo por los restantes vértices del poliedro.

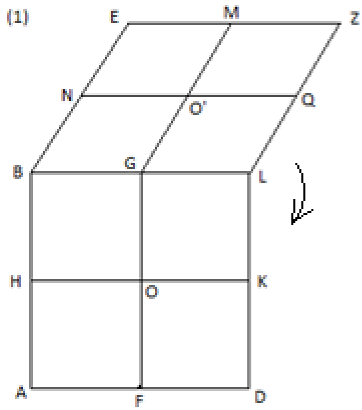
c.q.d.

17.- Construir un dodecaedro y envolverlo en una esfera como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del dodecaedro es la (recta) sin razón expresable llamada apótoma.

Es el polígono con doce caras pentágonos regulares.

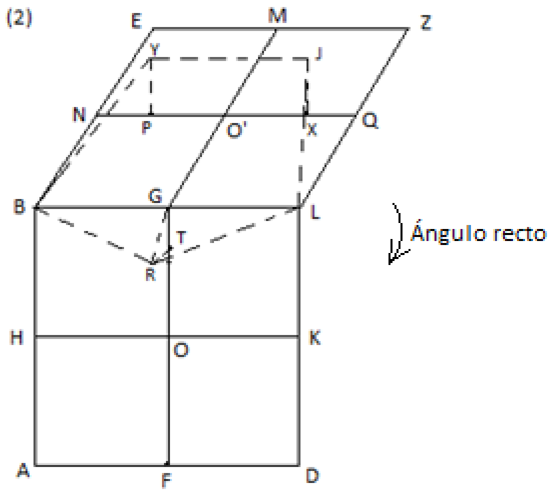
Construcción:

fig. (1):



He tomado dos caras consecutivas del cubo como muestra la figura (1). Lo vemos en perspectiva pero el giro señalado es ángulo recto.

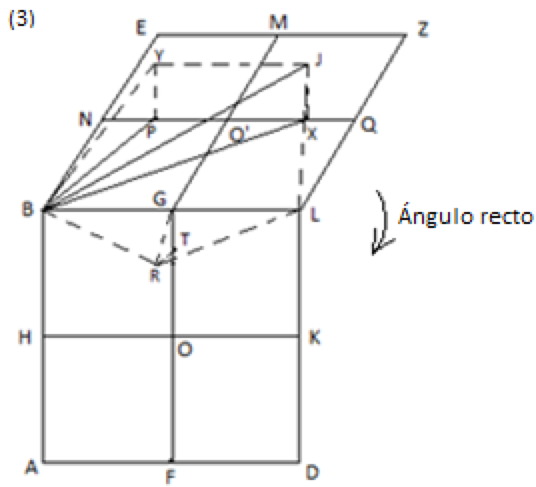
Paso a la fig.(2):



Marco P X T de modo que dividen al segmento O'N, O'Q, OG, respectivamente, en extrema y media razón. Por los puntos P, X, T levanto perpendicular al plano del cubo correspondiente, hacia el exterior, resultando las rectas PY, XJ, TR, de modo que los segmentos PY, XJ, TR sean iguales a O’P, O’X, OT, respectivamente.

Afirmo que el pentágono YBRLJ está sobre un plano y es equilátero y equiángulo (polígono regular).

fig. (3): Pruebo que es equilátero



Para comprobarlo trazo BP, BJ, BX, ….

El segmento O’N ha sido cortado por P en extrema y media razón siendo O’P el segmento mayor. Según (L. XIII, 4) se cumple

$$O'N^2 + NP^2 = 3 \cdot O'P^2$$

Teniendo en cuenta que O’N = BN y O’P = PY, la anterior me dice que

$$BN^2 + NP^2 = 3 \cdot PY^2$$

Por otro lado, puesto que BN y PN forman ángulo recto, tengo

$BP^2 = BN^2 + NP^2$, y por tanto $BP^2 = 3.PY^2$

llegando a que $BP^2 + PY^2 = 4.PY^2$

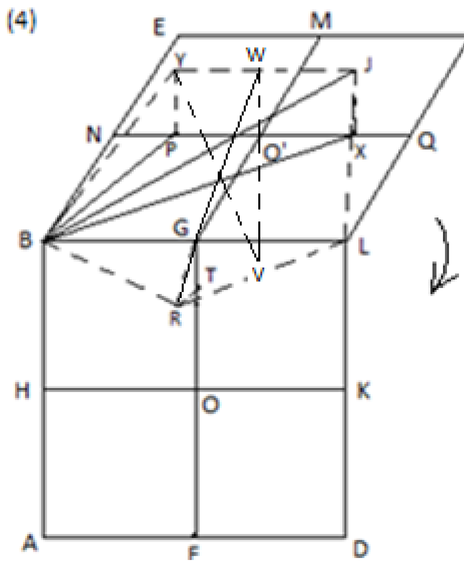
Por otro lado vemos en la figura que se cumple

$BY^2 = BP^2 + PY^2$, y por tanto $BY^2 = 4.PY^2$, de donde
$BY = 2.PY$

Pero por construcción PY = PO’ = O’X, y por tanto 2.PY = YJ, de modo que BY = YJ, que son lados del pentágono.

De forma análoga se prueba que BR = BY, RL = BR, LJ = RL, concluyendo que es equilátero.

fig. (4): Paso a probar que el polígono está sobre un plano.



Trazo la recta O’V prolongándola hasta que V incida en la diagonal del cubo y haciendo que O’V sea paralela a PY (y a XJ). El punto V coincidirá con el punto medio de la citada diagonal del cubo. Prolongo esta recta en sentido contrario hasta encontrar el punto W del lado YJ.

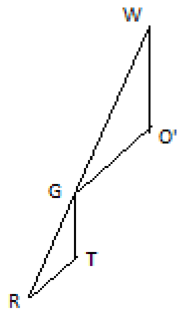
Trazo ahora WG y G R, y afirmo que WGR es una recta.

En efecto, teniendo en cuenta que GO ha sido cortada por T en extrema y media razón, y siendo TO el segmento mayor, se cumple

GO / TO = TO / TG

Pero GO = GO’ , y TO es igual a TR y a O’W, y entonces

GO’ / TR = TR / TG



Ahora bien, GO’ es paralela a TR, porque las dos forman ángulo recto con el plano BD (plano frontal), y GT es paralela a O’W, porque las dos forman ángulo recto con el segundo plano BZ.

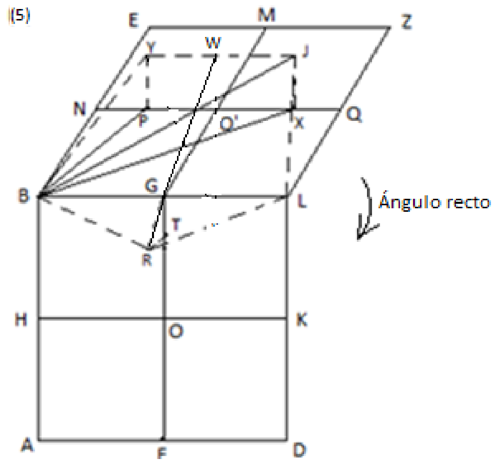
Pero sabemos que si dos triángulos, como GTR y WO’G tienen dos lados proporcionales, y los colocamos de modo que los lados proporcionales queden en posición paralela y además unidos por un vértice, los otros dos lados uno de uno y el otro del otro quedan el línea recta. Ver figura:

Queda probado que el pentágono está sobre un plano.

fig. (5): Afirmo ahora que es equiángulo

El segmento O'N ha sido cortado por P en extrema y media razón siendo O'P el segmento mayor. Tomo ahora el segmento NX y aplicando (L.XIII, 5) tengo que NX es cortado por O' en extrema y media razón siendo NO' el segmento mayor.

Entonces, según (L.XIII, 4), $NX^2 + XO'^2 = 3.NO'^2$



Pero NO' = NB y O'X = XJ, y entonces $NX^2 + XJ^2 = 3.NB^2$

por lo cual $NX^2 + XJ^2 + NB^2 = 4.NB^2$
Por otro lado, observando la figura, $BX^2 = NX^2 + NB^2$, y entonces
$BX^2 + XJ^2 = 4.NB^2$, y teniendo en cuenta que JXB es ángulo recto,

$$BJ^2 = BX^2 + XJ^2 \text{ , por lo cual}$$
$$BJ^2 = 4.NB^2, \quad \text{de donde} \quad BJ = 2.NB \text{ ,}$$

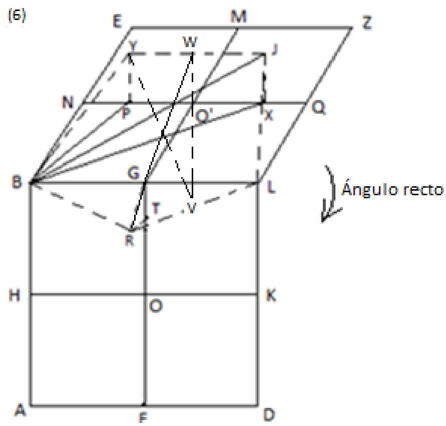
y como BL = 2.NB, de donde BJ = BL.

Tengo así los dos triángulos BYJ, BRL con dos lados de uno iguales a dos lados del otro y además iguales sus bases BJ, BL, y por tanto los ángulos BYJ, BRL son iguales.

De forma análoga se prueba que los ángulos BYJ, YJL, son iguales. Según (L ,) si tres ángulos de un pentágono equilátero son iguales, el pentágono es equiángulo.

Si seguimos la misma construcción sobre cada arista del cubo, obteniendo un pentágono regular, llegamos al sólido llamado un dodecaedro (doce aristas del cubo) .

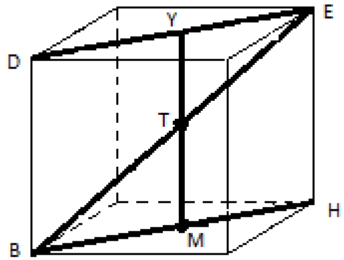
fig. (6): ESFERA ENVOLVENTE



Prologo WO' hasta tocar la diagonal de cubo y siendo V el punto de corte en el punto medio de dicha diagonal (L.XI, 38), fig.(7).

El punto V va a ser el centro de la esfera envolvente. Observa que O'V coincide con la mitad del lado del cubo.

(7)



Trazo VY; teniendo en cuenta que NX ha sido cortado en extrema y media razón por el punto O', siendo NO' el segmento mayor, según (XIII,4) se cumple

$$NX^2 + O'X^2 = 3.NO'^2$$

Pero WV = NX, ya que O'V = NO' y WO' = O'X , y también O'X = WY, entonces

$$WV^2 + WY^2 = 3.NO'^2$$

Observando la figura $YV^2 = YW^2 + WV^2$, y por tanto

$$YV^2 = 3.NO'^2 \quad , \quad \text{es decir}$$

"Cuadrado del radio = Triple del cuadrado de la mitad del lado"

Pero sabemos que (L.XIII, 15) el cuadrado del diámetro de la esfera es triple del cuadrado del lado del cubo, y lo mismo ocurre para el radio, que es el significado de

$$YV^2 = 3.NO'^2$$

luego VY es el radio de la esfera.

He llegado a que el punto Y (vértice del poliedro) está en la superficie de la esfera con centro V y radio VY.

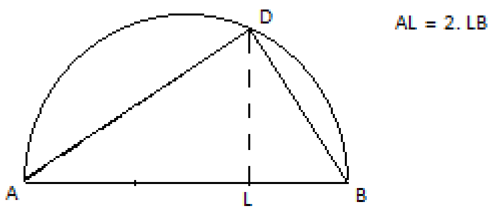
18.- Poner los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

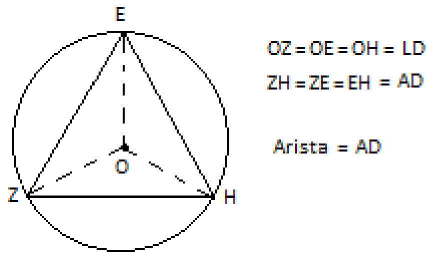
Quiere decir que hagamos un esquema en el que se refleje la arista de cada uno de los cinco poliedros construidos en los anteriores: Pirámide, Octaedro, Cubo, Icosaedro, Dodecaedro.

Pide también compararlos entre sí, pero esta relación respecto su medida quedará patente en el referido esquema.

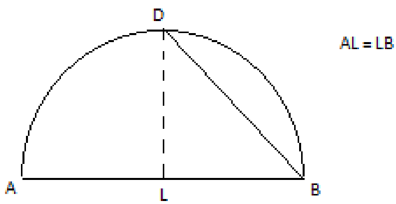
El referido esquema lo muestro al final como resultado de un análisis de cada una de las cinco construcciones.

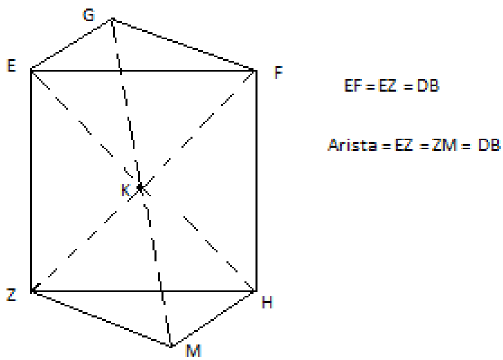
PIRÁMIDE inscrita en una esfera (núm. 13):



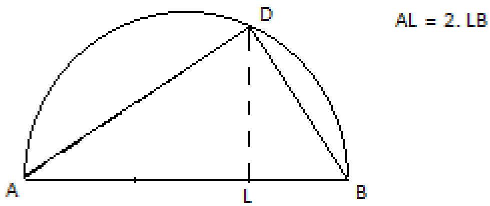


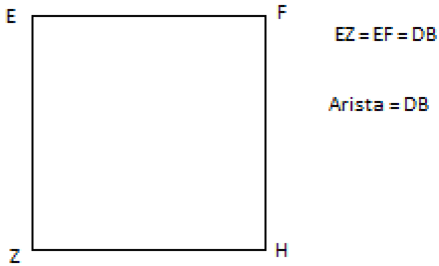
OCTAEDRO inscrito en una esfera (núm. 14):



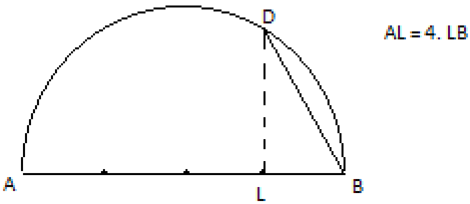


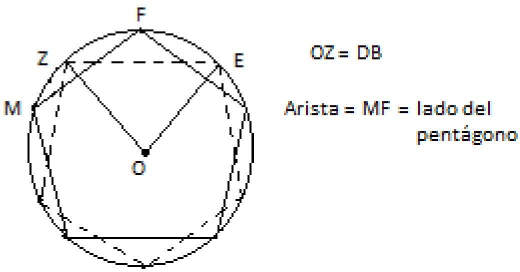
CUBO inscrito en una esfera (núm. 15):



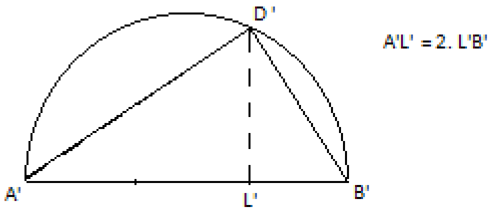


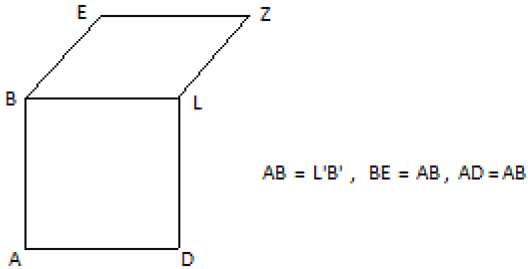
ICOSAEDRO inscrito en una esfera (núm. 16):





DODECAEDRO inscrito en una esfera (núm. 17):





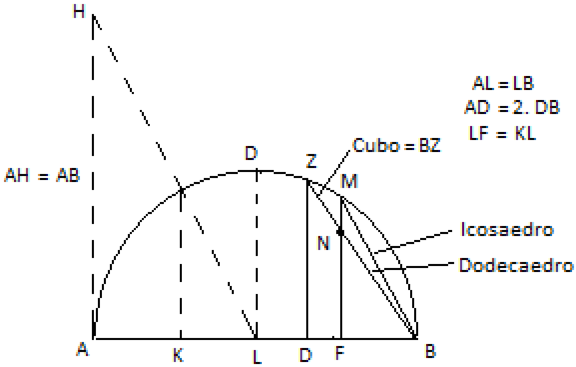
Su arista se obtiene así:

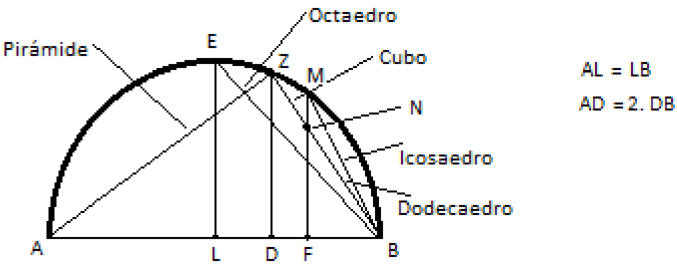
Tomo BZ que es la arista del cubo. Divido el segmento BZ en extrema y media razón por el punto N (esquema siguiente).

Arista = BN , que se muestra en el siguiente esquema

ESQUEMA final:

Esquema auxiliar para obtener el punto F





Evidentemente la relación entre las cinco aristas es:

Dodecaedro < Icosaedro < Cubo < Octaedro < Pirámide

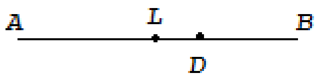
$$$oOo$$$

EJEMPLO que muestra el razonamiento en el texto original:

Razonamiento seguido en (L. II, 5) donde hace uso del concepto de gnomon.

5.- Si corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

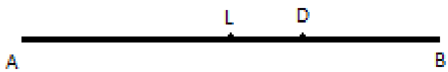
Interpretación y Comprobación: Datos:



donde AL = LB, AD > DB

Segundo método conforme el texto de Euclides (Interesa porque aquí es donde se presenta por primera vez el concepto de gnomon, no definido expresamente, pero que lo utiliza en varias ocasiones).

Datos: AL = LB, AD > DB



Afirmo que:

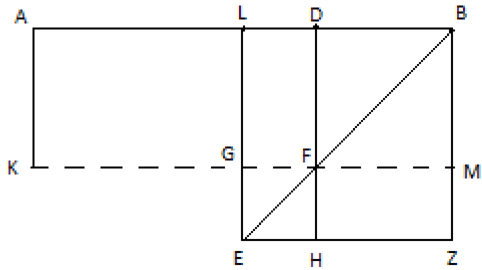
“El rectángulo determinado por AD y DB más el cuadrado de lado LD es igual al cuadrado de lado LB”.

Demostración:

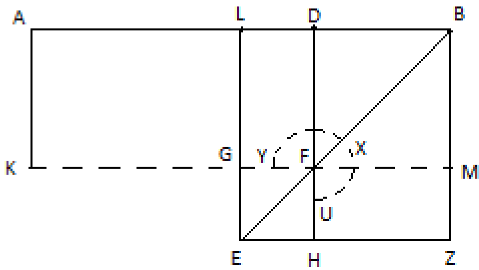
Siguiendo estrictamente el razonamiento seguido en el texto de Euclides. Sí agrego alguna figura más; en el texto sólo incluye la figura que muestro al final.

Dice así:
Pues constrúyase a partir de LB el cuadrado LEZB [L. I, 46], y trácese BE, y por el punto D trácese DH paralela a una de las dos (rectas) LE, BZ, y por el punto F trácese a su vez KM paralela a una de las dos (rectas) AB, EZ, y por el (punto) A trácese, asimismo, AK paralela a una de las dos (rectas) LG, BM [L. I, 31]. Y como el complemento LF es igual al complemento FZ [L. I, 43], añádase a ambos DM; por tanto, el (rectángulo) entero LM es igual al rectángulo entero DZ. Pero el (rectángulo) LM es igual al (rectángulo) AG, puesto que la (recta) AL es igual a la (recta) LB [L. I, 36]; por tanto, el (rectángulo) AG es también igual al (rectángulo) DZ. Añádase a ambos LF; entonces el (rectángulo) entero AF es igual al gnomon UXY (fig. (2)). Pero AF es el

(1)



(2)



(rectángulo comprendido) por AD, DB: porque DF es igual a DB; entonces el gnomon UXY es igual al (rectángulo comprendido) por AD, DB. Añádase a ambos GH, que es igual al cuadrado de LD; entonces el gnomon UXY y GH es igual al rectángulo comprendido por AD, DB y el cuadrado de LD. Ahora bien, el gnomon UXY y GH es el cuadrado entero LEZB, que es el cuadrado de LB; por tanto, el rectángulo comprendido por AD, DB junto con el cuadrado de LD es igual a cuadrado de LB.

Por consiguiente, si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad. Q.E.D.

(Hasta aquí el razonamiento que sigue en el texto, tal cual consta en él. Sólo se ha añadido la fig. (1), la fig. (2) es la única del texto).

COMPLEMENTOS:

AXIOMA: (Gran Enc. Larousse)

Iniciado inicial de una teoría axiomátizada, que sirva de punto de partida para las demostraciones (subsiguientes) en esta teoría. (Lóg. y Mate.)

Tesis inicial de un sistema sintáctico, (que se toma como verdadera).

Enunciado indiscutido, admitido como base de una construcción intelectual, social, moral, …; verdad admitida por todos sin discusión.

Ejemplos:

"El punto tiene medida cero"

"Dos rectas, o se cortan en un punto o son paralelas.

POSTULADO: (Gran Enc. Larousse)

Proposición que se toma como principio de un Sistema deductivo y que no está demostrada ni es evidente por sí misma. (Logica)

Proposición indemostrada, aunque cierta, que el maestro pide al discípulo reconocer como cierta, aunque no sea evidente por ella misma ni lógicamente demostrable. (Filos. Aristóteles)

Según Aristóteles: "Puede ser contrario a la opinión del discípulo, y ser demostrable, pero se le pide utilizarlo sin demostración".

Kant: "Hipótesis en un punto de vista necesariamente práctico … que dan realidad objetiva a las ideas de la razón especulativa"

… allí donde termina el saber teórico del conocimiento comienza la "fe racional moral" , que arranca como hecho fundamental de la libertad, a base de la cual no deduce, pero sí puede postular la certeza de Dios y la inmortalidad. (Kan)

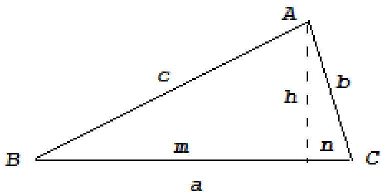
Ejemplos:

"Dos rectas paralelas no se cortan", y su equivalente y recíproco: "Si dos rectas no se cortan entonces son paralelas"

$$$oOo$$$

APÉNDICE I: Sobre el triángulo rectángulo

1.-
Recordamos que en un triángulo rectángulo BAC, A^ = 90º, se cumplen:

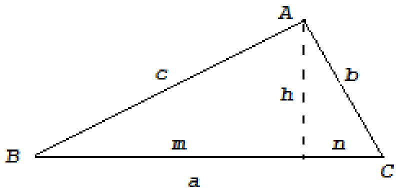


T.Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ < = > A^ = recto

Consecuencias: $b^2 = a.n$, $c^2 = a.m$, $m.n = h^2$

Deseo demostrar que también se cumple el recíproco:

Dado un triángulo ABC, como mostramos en la figura



Si se cumplen dos de las consecuencias, entonces A^ = recto.

a) $b^2 = a.n$, $c^2 = a.m$ - > $b^2 + c^2 = a.n + a.m = a.(m + n) = a^2$

b) $b^2 = a.n$, $m.n = h^2 = c^2 - m^2$ - >

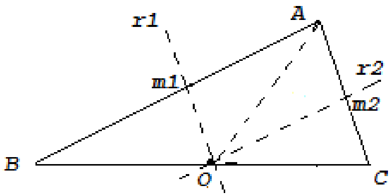
$b^2 + c^2 = a.n + m.n + m^2 = a.n + m.(n + m) = a.n + m.a = a.(n + m) = a^2$

c) $c^2 = a.m$, $m.n = h^2 = b^2 - n^2$ - >

$$b^2 + c^2 = m.n + n^2 + a.m = n.(m + n) + a.m =$$
$$= n.a + a.m = a. (n + m) = a^2$$

En cualquiera de los casos se demuestra que el triángulo satisface el T. de Pitágoras, y por tanto es rectángulo.

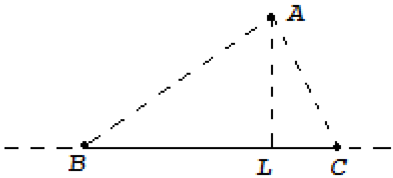
2.-
Si BAC es triángulo rectángulo con A^ = recto, el semicírculo cuyo diámetro sea el segmento BC, pasa también por el punto A.
Sean m1, m2 los puntos medios de BA, AC, y trazo por m1 la recta r1 paralela al lado AC, mientras que por m2 trazo r2 paralela al lado AB. Por el Teorema de Tales sabemos que las dos rectas se cortan en el punto medio de BC, dando el punto O que es el centro del círculo con radio OB pasará por B y C. Teniendo en cuenta que además r1 y r2 son perpendiculares a BA , AC, respectivamente, el ángulo BAO es igual a B^ . Por tanto OA = OB, por lo cual el círculo pasa por A.



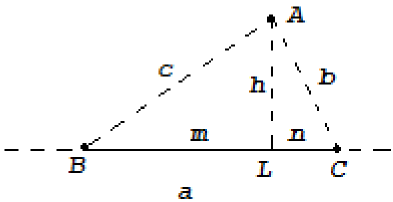
3.- Sean tres puntos A, B, C, tales que la recta perpendicular a la recta que soporta el segmento BC, desde el punto A, corta al segmento BC en un punto L. Si además se cumple:

$$BL.LC = LA^2$$

entonces, el círculo cuyo diámetro sea BC pasa también por el punto A. Además, el triángulo BAC será rectángulo con A^ = recto.



En la siguiente figura tomo la notación de los puntos 1, 2.



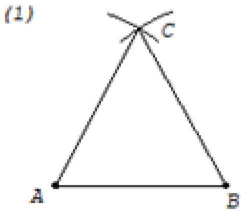
$m.n = h^2$ por hipótesis.
Evidentemente: $c^2 = m^2 + h^2$, $b^2 = n^2 + h^2$
Entonces: $b^2 + c^2 = (n^2 + m.n) + (m^2 + m.n) =$
$= n.(n + m) + m.(m + n) = n.a + m.a = a.(n + m) = a^2$
con lo cual el triángulo es rectángulo, y por tanto el referido semicírculo pasa por A.

APÉNDICE II: Construcciones geométricas con regla y compás

A) Triángulo equilátero:

Figura (1): Dato el segmento AB, lado del triángulo

Pincho en A y trazo arco con radio AB; pincho en B y trazo arco con el mismo radio BA; obtengo el punto C, que es el tercer vértice.



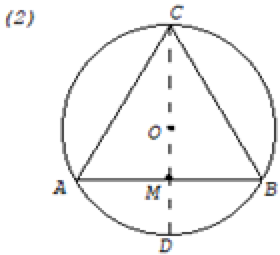


Figura (2): Dato un círculo de radio R.

Interesa tener en cuenta que el lado AB del triángulo está relacionado con el radio mediante

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, R, \quad \text{o bien} \quad R = \frac{2.\sqrt{3}}{3} \,.\, AB$$

Se ha demostrado que el punto M es el punto medio de OD. Por consiguiente:

Determino el punto medio M, y trazo por M la paralela al diámetro; esta recta corta al círculo en A, B. El vértice C es evidente.

B) El hexágono regular:

Figura (1): Dato el lado AB del hexágono

Construyo el triángulo equilátero ABO. Trazo por O la recta paralela al lado AB, y sobre esta recta tomo las distancias OC y OD. Prolongo los lados AO y BO, y sobre estas prolongaciones tomo las distancias OE y OF. Unimos los puntos obtenidos y tengo el hexágono.

(1)

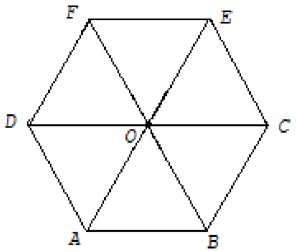
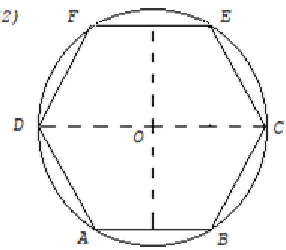


Figura (2): Dato el círculo de radio R = AB = lado del hexágono

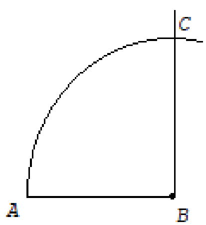
(2)



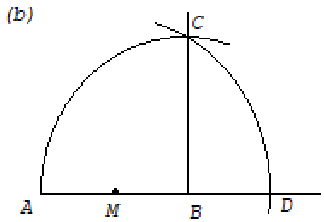
Trazo el círculo con radio R. Con el compás tomo la medida del radio, OD, y la traslado sobre la circunferencia, pinchando en D, para obtener los puntos A y F. Por A y por F trazamos paralelas al diámetro y cortarán en los puntos B y E. Tengo también el punto C. Unimos todos los puntos y resulta el hexágono inscrito.

C) **Pentágono regular:** Dato el segmento AB

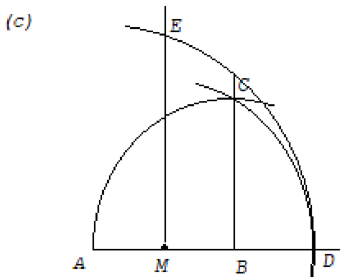
(a)



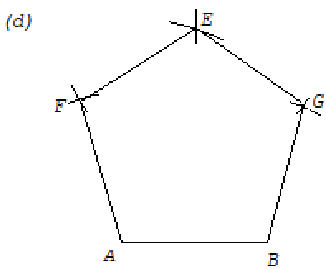
Trazo perpendicular por B. Con centro B trazo arco con radio AB, obtengo C.



Obtengo el punto medio M. Con centro M trazo arco con radio MC, obtengo D.



Trazo por M la perpendicular a AB. Con centro A trazo arco con radio AD, obtengo E.

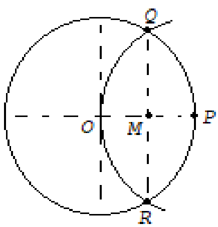


Con radio AB, trazo un arco con centro E de forma que corte al arco con centro A obteniendo F, y al arco con centro B obteniendo G.

Tengo completado el pentágono.

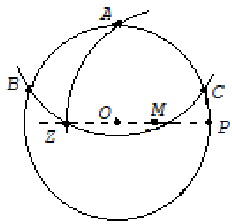
D) Pentágono regular: Inscrito en círculo con radio AB

(a)



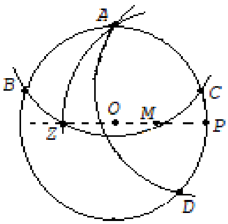
Con centro en P trazo arco con radio OP, obtengo Q, R y el punto medio M.

(b)

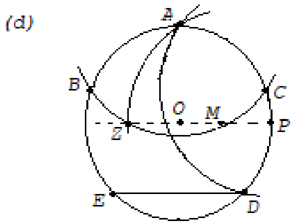


Con centro en M trazo arco con radio MA, obtengo Z. Con centro en A trazo arco con radio AZ, obtengo B, C.

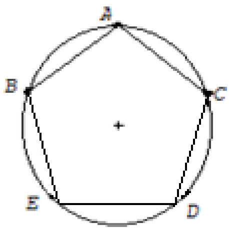
(c)



Con centro C trazo arco con radio CA, obtengo D.



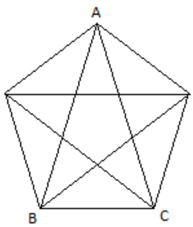
Por D trazo paralela al diámetro y obtengo E.



Los cinco puntos A, B, C, D, E son los vértices del pentágono.

El Pentágono regular: (T. de Ptolomeo, Claudio)

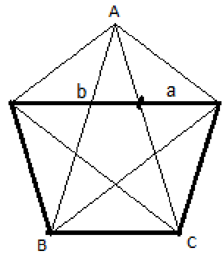
El Pentágono, y más concretamente el pentágono estrellado fue el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Veamos algunas de sus características más destacadas.



Demostraremos que: La razón entre la diagonal AB y el lado BC es el número de oro:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esta igualdad se deduce del Teorema de Ptolomeo (Claudio Ptolomeo. Libro XIII de Elementos de Euclides pág. 251. Verlo más abajo).



Suprimiendo un vértice del pentágono resulta un cuadrilátero (trapecio) como muestra la figura. Conforme al citado teorema se cumple $\frac{b+a}{b} = \frac{b}{a}$, y decimos que el segmento queda dividido en "media y extremos". Operando tenemos

$(b + a).a = b^2$, esto es $b^2 = a^2 + b.a$

De esta obtenemos: $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}$, y si hago x = b/a obtengo la ecuación

$x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son, como ya sabemos $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

La solución positiva me dice que: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

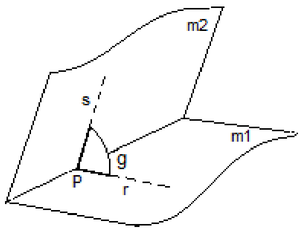
Pero AB = b + a , BC = b, por lo tanto $\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

APÉNDICE III:

Angulo diédrico

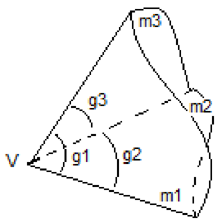
Tenemos dos planos m1, m2, que se cortan en una recta común. Por el punto P de la recta común trazo dos semirectas r, s, de tal modo que éstas determinen un plano m perpendicular a los dos planos tomados inicialmente.

“Angulo diédrico formado por los semiplanos m1, m2 es el ángulo formado por las rectas” (Siempre se toma el menor de los ángulos de forman).



Ángulo triédrico:

Es el espacio limitado por tres semiplanos. También llamado ángulo sólido.



La suma de los tres ángulos diédricos es siempre menor que cuatro rectos (< 360º)

Demost.: Probaremos que g1 + g2 + g3 < 4 rectos

Ángulo sólido:
"Es el espacio limitado por tres o más semiplanos que tienen un punto común, que llamamos vértice, y además cada dos planos se cortan según una recta que pasa por el vértice"

La suma de los n ángulos diédricos que intervienen en un ángulo sólido es siempre menor que cuatro rectos (< 360º)

Es una generalización de lo demostrado en el caso de un triedro.

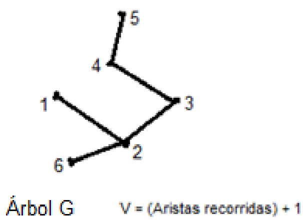
El Teorema de Euler para los polígonos

INTRODUCCIÓN:

Grafo:
En un plano o en el espacio, llamamos "Grafo" a todo conjunto V de puntos, que serán los vértices del grafo, más un conjunto L de segmentos cuyos extremos sean dos puntos de V, que serán las aristas del grafo. Lo podemos representar mediante G = (V, L), o simplemente G.

En otros contestos se habla de "nodos" en lugar de vértices.

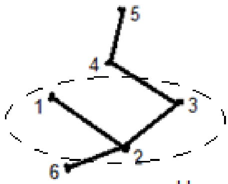
Ejemplo:



Cadena en un grafo:

Dentro de un grafo llamamos cadena a todo subconjunto de vértices más las aristas que permiten comunicar un primer vértice con un último vértice.

Ejemplo:



Una cadena

En un grafo, dados dos vértices puede o no ser posible comunicarlos (unirlos) recorriendo una arista o más aristas y pasando por otros vértices. Esto es una cadena.

En un grafo puede ocurrir que dos vértices puedan ser unidos por más de una cadena. Decimos que es un lazo.

Árbol:
Llamamos “Árbol” a un grafo en el cual dos vértices cualesquiera están comunicados por una sola cadena. No contiene lazos.

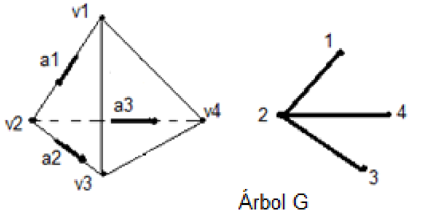
Sea un poliedro P. Partiendo de uno de sus vértices, y siguiendo el camino marcado por algunas de las aristas del poliedro, podemos recorrer algunos de los restantes vértices, obteniendo así una cadena formada por vértices y aristas.

Árbol asociado a un poliedro:
Si en el proceso anterior recorremos todos los vértices, obtenemos un árbol asociado a ese polígono. Este árbol no es único.

Si comenzamos el camino en otro vértice obtenemos otro árbol. Partiendo del mismo vértice podemos recorrer caminos diferentes, y resultarán árboles diferentes.

Observa:
Partiendo de uno de los vértices, nos movemos por las aristas hasta completar todos los vértices, sin repetir ninguno, y sin pasar dos veces por el mismo vértice.

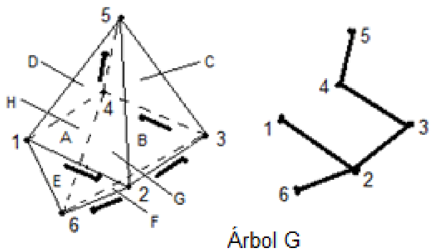
Ejemplos:
1.-



V = (Arista recorridas) +1

2.-

Octaedro No regular



V = (Aristas recorridas) + 1

Observa que se cumple siempre:

No. vértices = No. Aristas + 1

Teorema de Euler

Enunciado:

Sea P un poliedro convexo, esto es: Cada par de vértices pueden ser unidos mediante un segmento contenido por completo en la superficie o en el interior del polígono.

Afirmamos que se cumple la igualdad: V + C = A + 2

Demost.:
Tomando origen en un vértice V1 construyo el árbol G que resulta de unir todos los restantes vértices recorriendo justamente las aristas necesarias. En este grafo se cumple V = [Aristas recorridas] + 1 .

Después construyo otro árbol G', que llamaremos "dual" del anterior, del siguiente modo. Para cada cara del poliedro P marco un punto que será vértice del futuro árbol. Sea n1, n2, …, nk la sucesión de estos puntos (Los tendré marcados sobre papel). Los puntos n_i , n_j serán unidos formando un segmento si, y sólo entonces, las caras asociadas tienen una arista común que no figura en el árbol G construido antes. Por las condición de convexidad impuesta al poliedro P este árbol, dual del primero, es conexo y en él figuran todas las aristas no recorridas en la construcción de G, por lo cual tengo: V' = [Aristas no recorridas] + 1, y como estos vértices V' representan las caras, tengo: C = [Aristas no recorridas] +1.

Evidentemente, Aristas = [Aristas recorridas] + [Aristas no recorridas].

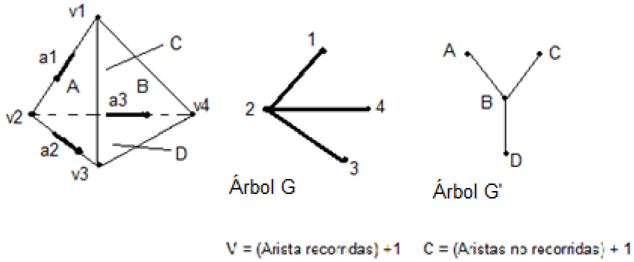
Resumiendo:
Árbol G: V = [Aristas recorridas] + 1
Árbol G': C = [Aristas no recorridas] + 1

y sumándolas miembro a miembro: $V + C = A + 2$

c.q.d.

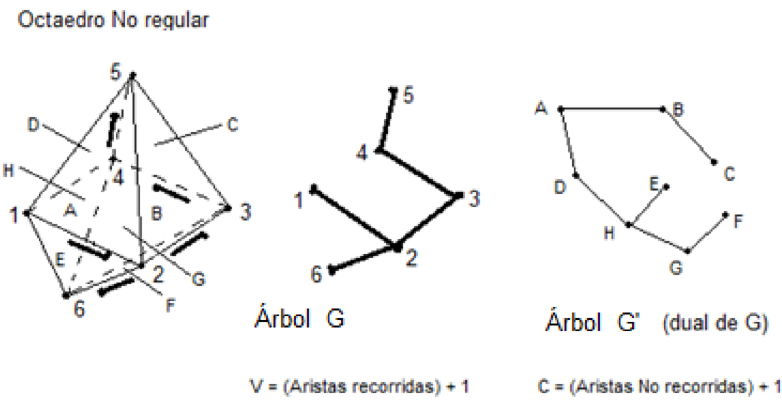
Ejemplos:

1.- El Tetraedro



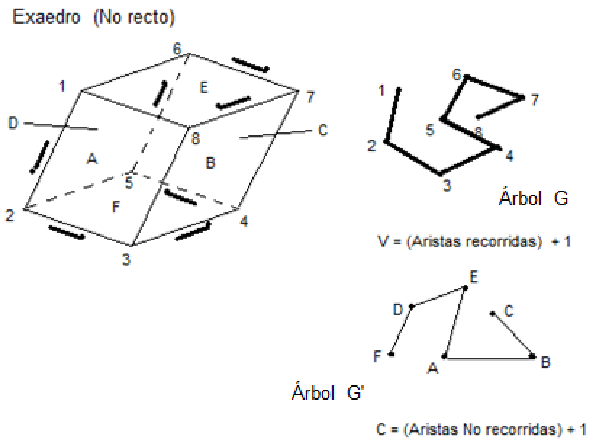
Sumando miembro a miembro tengo: $V + C = A + 2$

2.- El Octaedro



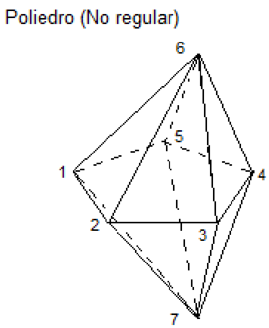
Sumando miembro a miembro: $V + C = A + 2$

3.- Exaedro



Por tanto: V + C = A + 2

4.- Aplíquelo el alumno para el siguiente poliedro



NOMBRES:
Extraidos de los libros “Elementos de Euclides”

Hipócrates de Quíos	Proclo	Tolomeo
Platón	Enópides	Leon
Teudio	Menecmo	Autólico
Aristóteles	Arquímedes	Euclides
Zenón de Sidón	Posidonio	Apuleyo
Galeno (médico)	Herón	Diofanto
Teón (editor principal de los Elementos)		Pappo
Sexto Empírico		

Calificativos:

Axiomatiforme — Aserto ≡Teorema)
Prótasis ≡ Enunciado
Ékthesis ≡ Exposición
Kataskené ≡ Preparación
Apódeixis ≡ Demostración
Symperasma ≡ Conclusión
Diorismós ≡ Problema
Prótasis ≡ Teorema

Metasilogísticos
Excépticos
Epicúreos

Teorema -- > hóper édei dixai ≡ que es lo que queríamos demostrar (c.q.d.)
Problema -- > hóper édei presai ≡ que era lo que había que demostrar (q.q.a.)
