

***INTRODUCCIÓN***  
***A LAS***  
***ECUACIONES DIFERENCIALES***

PROMOCIÓN  
NO VENTA

*Alejo González Criado*  
*Profesor Numerario de Matemáticas*

Alejo González Criado

Salamanca, Diciembre 2019

## ÍNDICE

pág

0.- INTRODUCCIÓN

5 0.1.- Definiciones

8 0.2.- Origen de la Ecuaciones Diferenciales

12 0.3.- Solución de una ecuación diferencial

### **Tema 1**

16 1.1.- Ecuación diferencial explícita

18 1.2.- Ecuaciones convertibles en variables separadas

19 1.3.- Ecuaciones reducibles a homogéneas

### **Tema 2**

20 2.1.- Ecuaciones lineales

22 2.2.- Ecuaciones reducibles a lineales

A) Ecuación de Bernoulli

B) Ecuación de Riccati

### **Tema 3**

25 3.1.- Ecuaciones Diferenciales Exactas  
Factor Integral

### **Tema 4**

31 4.1.- Ecuación Diferencial: Caso general  $f(x, y, y') = 0$

33 4.2.- Resolubles por separación de variables

35 4.3.- Ecuaciones en las que la variable  $y$  es despejable

38 A) Ecuación de Lagrange

39 B) Ecuación de Clairaut

Bibliografía



## INTRODUCCIÓN:

### 0.1.- Definiciones

Una ecuación diferencial es una “ecuación” (una igualdad) que contienen “derivada” (o derivadas) de alguna de las variables dependientes que intervienen.

Es una relación entre variables y alguna derivada de alguna variable no independiente.

Cuando estudiamos la derivación teníamos  $y' = f'(x)$ , donde  $x$  es independiente e  $y$  es dependiente de  $x$ . Y cuando introducimos el concepto de “diferencial” definíamos la función diferencial en un punto  $(x_0, y_0)$  así

$$dy = f'(x_0).dx$$

donde la variable independiente es  $dx$ , la variable dependiente es  $dy$ .

Generalizando para un punto  $(x, f(x))$  escribimos

$$dy = f'(x).dx, \quad \text{o bien: } dy = y'(x).dx \quad (1)$$

Cada una de estas expresiones, aun siendo muy simples, entran dentro de las llamadas *Ecuación diferencial*.

Sabemos que de (1) obtenemos sin más la llamada “primitiva” (Proceso de Integración)

$$y = \int f'(x).dx = F(x) + C \quad (2)$$

que es la solución general de la ecuación diferencial (1). Las soluciones particulares se obtienen dando valor a la constante arbitraria  $C$ . Cada valor  $C = k$  nos da la solución  $y = F(x) + k$

**Clasificación:** Se clasifican en

A.- Ordinarias cuando sólo una de las variables es independiente. En este caso es “Ecuación diferencial ordinaria”.

Eje.: *Ecuación diferencial ordinaria de primer orden* es aquella

$$f(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

donde  $y'$  no lleva potencia mayor que uno.

Si más de una de las variables es independiente decimos que es “Ecuación diferencial en derivadas parciales”.

B.- El “orden” de una ecuación diferencial es el orden (orden de derivación) de la derivada de mayor orden que interviene en la ecuación.

Eje.: *Ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$*  es aquella

$$f(x, y, y^{(n)}, \dots) = 0 \quad (3)$$

donde  $y^{(n)}$  es el mayor orden de derivación, interviniendo posiblemente las de orden inferior a éste.

C.- El “grado” de una ecuación diferencial, después de haberla expresado como polinomio respecto a las “derivadas” que intervienen, es el grado (dentro del polinomio) de la derivada de mayor orden.

Eje.: *Ecuación diferencial ordinaria de primer orden y grado dos* es aquella

$$f(x, y, y') = 0 \quad (3)$$

donde  $y'$  figura con exponente dos.

Ejemplos:

1.-  $y' = a.x + b$  Ordinaria, de primer orden, de primer grado

$a.x.y' + b.y = c$  ident

## Ecuaciones Diferenciales

2.-  $y'' + a.y' + by = c$  Ordinaria, de segundo orden, de primer grad.

3.-  $(y'')^2 + (y')^3 + c.y = d.x^2$  Ordinaria, segundo orden, segundo grado

4.-  $\frac{\partial z}{\partial x} = a.z + b.x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$  Derivadas parciales, primer orden, primer grado

5.-  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a.x^2 + b.y$  Derivadas parciales, segundo orden, primer grado

-----

Resolver una ecuación diferencial significa conseguir una relación

$y = F(x, C_1, \dots, C_k)$ , donde intervienen  $k$  constantes arbitrarias,

o bien  $F(x, y, C_1, \dots, C_k) = 0$ . Mediante derivación se conseguirá eliminar las constantes quedando la expresión (3).

La expresión  $y = F(x, C_1, \dots, C_k)$  es una solución general, llamada “primitiva”. Dando valor a las constantes obtenemos “soluciones particulares”, resultando una familia de curvas que la verifican.

De momento distinguimos dos tipos cuyo tratamiento será esencialmente distinto:

A) Es posible despejar  $y' = f(x, y)$ , (Caso: *explícita*)

B) No es posible despejar  $y'$  (Caso: *implícita*)

### Ejemplos:

Los siguientes ejemplos son casos que no precisan ninguna explicación

1.-  $\frac{dy}{dx} = x \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$

2.-  $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(y) = \ln(x) + C$

$$3.- \quad \frac{dy}{y} = - \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = C$$

-----

## 0.2.- Origen de las Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial puede originarse cuando tratamos

A.- Un problema geométrico: Por ejemplo, “familia de curvas cuya pendiente en los puntos con abscisa  $x = a$  toma el valor ...”

B.- Un problema físico:

C.- Resolución de “primitivas”: Llamamos primitiva a toda expresión que relaciona las variables  $y$  en la que intervienen además varias constantes arbitrarias. Ejemplo:  $y = A.x^2 + B.x + C$ . Decimos que son constantes “esenciales” cuando el número de ellas no puede ser reducido a un número menor.

(Estas constantes arbitrarias se designan siempre por letras mayúsculas)

Insistimos sobre este último caso C. Tomando el caso del ejemplo (muy simple)  $y = A.x^2 + B.x + C$ . Si derivamos dos veces respecto de  $x$  (única v.i.) tenemos:

$$\begin{aligned} y' &= 2.A.x + B \\ y'' &= 2.A \end{aligned}$$

Estado igualdades más la expresión inicial (llamada primitiva) proporcionan el sistema

$$\begin{cases} y' = 2.A.x + B \\ y'' = 2.A \\ y = A.x^2 + B.x + C \end{cases}$$

de donde obtendremos una relación entre  $x, y, y', y''$  libre de constantes. Así

$$A = \frac{1}{2} \cdot y'' \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y' = x \cdot y'' + B \\ y = \frac{x^2}{2} \cdot y'' + B.x + C \end{cases}, \quad B = y' - x \cdot y'' \quad \rightarrow$$

## Ecuaciones Diferenciales

$$y = \frac{x^2}{2} \cdot y'' + x \cdot (y' - x \cdot y''), \quad y = \frac{-x^2}{2} \cdot y'' + x \cdot y',$$

Podemos afirmar dos cosas: a) Que la constante C era redundante, A y B esenciales. b) Que dada una expresión “que llamamos primitiva”, como la del ejemplo, podemos obtener la “ecuación diferencial” que representa implícitamente por el proceso de derivar tantas veces como número de constantes esenciales, y del sistema formado por esas derivadas y agregando la expresión primitiva dada, conseguimos eliminar todas las constantes. Esta expresión (o relación final) entre la (o las) variable independiente y las derivadas (ya sin constantes arbitrarias) es nuestra ecuación diferencial.

Abundando más en este apartado, cuando en el “Estudio de funciones del tipo  $y = f(x)$ ”, y hablamos de “derivadas” y “primitivas”, cuya relación es

$$y = f(x) + C, \quad y' = g(x),$$

hablamos de resolver la integral de  $g(x).dx = dy$ , o bien  $\frac{dy}{dx} = g(x)$ . La igualdad  $y' = g(x)$  es la “ecuación diferencial” asociada a la “primitiva”  $y = f(x) + C$ . Resolver la “integral” de  $\frac{dy}{dx} = g(x)$  significa obtener la primitiva  $y = f(x) + C$ , tal que “la derivada de  $f(x)$  es  $g(x)$ ”.

NOTA: Por lo explicado en relación con las del tipo C (caso de primitivas) y para diferenciarlas claramente de las de los tipos A y B, a las del tipo C las llamaremos “Ecuaciones diferenciales elementales”, además de aquella primer clasificación. Si la ecuación diferencial es de orden n, el número de constantes arbitrarias esenciales es n (salvo casos excepcionales).

### Ejemplos:

NOTA: Al obtener la ecuación diferencial es norma conseguir que el resultado sea de orden el menor posible.

#### 1.- Ecuación diferencial asociada a la primitiva

$$y = A.x^2 + B, \quad (B = A^2) \quad (1)$$

Tengo  $y' = 2.A.x$ , --  $\rightarrow A = \frac{y'}{2x}$  --  $\rightarrow y = \left(\frac{y'}{2x}\right).x^2 + \left(\frac{y'}{2x}\right)^2$

Otro modo:  $y'' = 2.A$  --  $\rightarrow y = \frac{y''}{2}.x^2 + \left(\frac{y''}{2}\right)^2$ , la cual queda siendo de orden dos. (Será preferible si queda siendo de orden uno)

2.- Obtener la ecuación diferencial asociada a la primitiva

$$y = A.x^2 + B.x + C$$

Sol.:  $y' = 2.A.x + B$ ,  $y'' = 2.A$ ,  $y''' = 0$

Esta última es la e.d. pedida. Representa la familia de rectas (completa) de todas las rectas del plano.

3.- Problema geométrico: La representación de la familia de círculos cuyo centro (P, 0) está en el eje ox, y su radio es r, es

$$y^2 + (x - P)^2 = r^2 \quad (1)$$

Su ecuación diferencial asociada la obtenemos como sigue:

$2.y.y' + 2.(x - P) = 0$ , --  $\rightarrow (x - P) = -y.y'$ , que llevándolo a (1) nos da

$$y^2 + y^2.y'^2 = r^2 \quad (2)$$

4.- Ecuación diferencial asociada a la primitiva

$$y = A.e^{3x} + B.e^{2x} + C.e^x \quad (1)$$

Derivando:  $y' = 3.A.e^{3x} + 2.B.e^{2x} + C.e^x$

$$y'' = 9.A.e^{3x} + 4.B.e^{2x} + C.e^x$$

$$y''' = 27.A.e^{3x} + 8.B.e^{2x} + C.e^x$$

Tenemos así el sistema

## Ecuaciones Diferenciales

$$\begin{cases} y' = 3.A.e^{3x} + 2.B.e^{2x} + C.e^x \\ y'' = 9.A.e^{3x} + 4.B.e^{2x} + C.e^x \\ y''' = 27.A.e^{3x} + 8.B.e^{2x} + C.e^x \end{cases} \quad (2)$$

del cual puedo despejar las constantes A, B, C como si de un sistema lineal se tratase.

Otra forma: Tratarlo en forma de “eliminante”

$$0 = \begin{vmatrix} y & e^{3x} & e^{2x} & e^x \\ y' & 3.e^{3x} & 2.e^{2x} & e^x \\ y'' & 9.e^{3x} & 4.e^{2x} & e^x \\ y''' & 27.e^{3x} & 8.e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = e^{6x} \cdot \begin{vmatrix} y & 3 & 2 & 1 \\ y' & 9 & 4 & 1 \\ y'' & 27 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{6x} \cdot (-2.y''' + 12.y'' - 22.y' + 12.y)$$

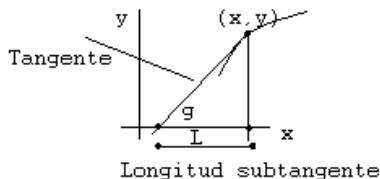
$$\text{Después de simplificar } y''' - 6.y'' + 11.y' - 6.y = 0 \quad (3)$$

5.- Obtener la ecuación diferencial que representa este hecho:

a) “En cada punto (x, y) la pendiente de la tangente a la curva es igual al cuadrado de la abscisa:

$$\text{Sol.: } y' = x^2$$

b) “En cada punto (x, y), la longitud de la subtangente es igual a la suma de las dos coordenadas”



$$\frac{y}{L} = \tan(g) = y' \rightarrow L = \frac{y}{y'}, \text{ Por tanto } \frac{y}{y'} = x + y, \text{ de donde}$$

$$y' = \frac{y}{(x+y)}$$

### 0.3.- Solución de las ecuaciones diferenciales

Resolver una ecuación diferencial ordinaria (elemental) de orden  $n$  consiste en obtener una primitiva  $y = F(x)$  en la que intervengan  $n$  constantes arbitrarias  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Esta primitiva  $F(x)$  será obtenida exigiendo las estas condiciones: Las derivadas de  $F(x)$  hasta orden  $n$ , más la primitiva, forman un sistema del cual debemos eliminar las  $n$  constantes arbitrarias, y el resultado debe coincidir con la expresión dada de la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$$1.- y''' = 0 \quad (\text{ó } \frac{d^3 y}{dx^3} = 0) \quad \text{Sol.: } y = A.x^2 + B.x + C$$

$$y'' = \int \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) . dx = A ,$$

$$y' = \int y'' . dx = \int \left( \int \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) . dx \right) . dx = \int A . dx = A.x + B$$

$$\begin{aligned} y &= \int y' . dx = \int \left( \int \left( \int \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) . dx \right) . dx \right) . dx = \\ &= \int (A . x + B) . dx = \frac{A}{2} . x^2 + Bx + C \end{aligned}$$

Finalmente  $y = A.x^2 + Bx + C$  , donde  $A, B, C$  son constantes arbitrarias. (Hemos sustituido  $A/2$  por  $A$ )

**Condiciones para la existencia de solución:** Teoremas de existencia

Si es del tipo  $y' = f(x, y)$ :

- a)  $f(x, y)$  ha de ser uniforme y continua en una región  $S$  del plano.
- b)  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  existe y es continua en todos los puntos de  $S$

En estas condiciones admite solución  $F(x, y, C) = 0$ , donde  $C$  es una constante arbitraria. Por cada punto de  $S$ , para un valor concreto de  $C$ , pasa una curva de la familia representada por  $F(x, y, C) = 0$ .

## Ecuaciones Diferenciales

**Solución particular:** La obtenemos cuando damos valores concretos a las k constantes arbitrarias, resultando una familia de curvas.

-----

Ejemplos:

1.- a) Comprueba que  $(y - C)^2 = C.x$  es primitiva de la ecuación diferencial  $4x.y'^2 + 2x.y' - y = 0$ .

b) Halla las curvas (integrales) que pasan por el punto (1, 2).

Sol.: a) Derivando  $2.(y - C).y' = C$ , de donde  $y' = \frac{C}{2.(y-C)}$

Entonces  $4x. \left(\frac{C}{2.(y-C)}\right)^2 + 2x. \frac{C}{2.(y-C)} - y = \dots = \frac{y.(C.x - (y-C)^2)}{(y-C)^2} = 0$

ya que el dato inicial me dice que  $(y - C)^2 - C.x = 0$

b) Recordamos que “curva integral” es aquella que resulta a partir de la “primitiva” cuando damos valor concreto a las constantes. En este caso:

Primitiva:  $(y - C)^2 = C.x$ , y por el punto (1, 2), es decir  $x = 1, y = 2$ , que sustituyo en la primitiva

$$(2 - C)^2 = C \rightarrow 4 - 4.C + C^2 = C$$

$C^2 - 5.C + 4 = 0 \rightarrow C = 1, C = 4$ . Por tanto, volviendo a la

expresión de la primitiva tengo las curvas

$$(y - 1)^2 = x, \quad (y - 2)^2 = 2x$$

2.- a) Comprobar que  $y = A.e^x + B.e^{2x} + x$  es primitiva de la ecuación diferencial

$$y'' - 3.y' + 2y = 2x - 3$$

b) Obtener la curva integral que pase por (0, 0) y por (1, 0)

Sol.: Derivamos la primitiva:  $y' = A.e^x + 2.B.e^{2x} + 1$

Derivo otra vez:  $y'' = A.e^x + 4.B.e^{2x}$ .

Sustituyo en la expresión sugerida para la diferencial:

$$(A.e^x + 4.B.e^{2x}) - 3.(A.e^x + 2.B.e^{2x} + 1) + 2.(A.e^x + B.e^{2x} + x) = \dots$$

$$\dots = \dots = 2.x - 3$$

b) Punto (0, 0) -->  $x = 0, y = 0$  que llevo a la primitiva:  $0 = A + B$  -->  $B = -A$

Punto (1, 0) -->  $x = 1, y = 0$  -->  $0 = A.e + B.e^2 + 1$

$$B = -A \text{ --> } 0 = A.e - A.e^2 + 1 \text{ --> } A = \frac{1}{e.(e-1)} \text{ --> } B = \frac{-1}{e.(e-1)}$$

La curva es  $y = \frac{1}{e.(e-1)}.e^x - \frac{1}{e.(e-1)}.e^{2x} + x$ , o bien

$$y = \frac{e^x - e^{2x}}{e.(e-1)} + x$$

-----

3.- Obtener la ecuación diferencial asociada a la primitiva

$x.y = C.(x-1).(y-1)$ , donde la variable independiente es  $x$

Sol.: Derivamos:  $y + x.y' = C.[1.(y-1) + (x-1).y']$ , y operando

$$y + x.y' = C.(x.y' - y' + y - 1) \quad (1)$$

Pero, de la expresión de la primitiva obtengo  $C = \frac{x.y}{(x-1).(y-1)}$ , que llevo a (1) y tengo

$$y + x.y' = \frac{x.y}{(x-1).(y-1)} . (x.y' - y' + y - 1) \quad (2)$$

Operando  $(y + x.y').(x.y - x - y + 1) = x.y.(x.y' - y' + y - 1)$  -->

## Ecuaciones Diferenciales

$$\dots\dots\dots --> \quad x.(x-1).y' + y.(y-1) = 0 \quad (3)$$

Este caso merece un análisis más fino, como sigue.

En los puntos  $(x, 0)$ , donde  $y = 0$ , y que satisfacen (3), para obtener la curva integral que pasa por él:  $0 = C.(x-1).(-1)$ , de donde  $C = 0$ . La curva integral es  $x.y = 0$

En los puntos  $(x, 1)$ , donde  $y = 1$ , y que satisface (3), para obtener la curva integral que pasa por él:  $x = C.(x-1).0 = C.0$ ; vemos que el valor de  $C$  no es posible.

“La forma dada de la primitiva  $x.y = C.(x-1).(y-1)$  no incluye todas las soluciones particulares del ecuación diferencial”

Abundando en este ejemplo: La primitiva  $C.x.y = (x-1).(y-1)$  nos lleva a la misma ecuación diferencial (3). Pero ahora ocurre

En puntos  $(x, 1)$ ,  $C = 0$ , y en puntos  $(x, 0)$ , el valor de  $C$  no es posible.

4.- Sea la primitiva  $y = A.\text{sen}(x) + B.x$ . Comprobar que su diferencial asociada es

$$(1 - x.\cot(x)).y'' - x.y' + y = 0 \quad (*)$$

Sol.:

Derivando tengo  $y' = A.\cos(x) + B$ ,  $y'' = -A.\text{sen}(x)$

$$\text{Entonces } A = \frac{-y''}{\text{sen}(x)}, \quad B = y' + \cos(x). \frac{y''}{\text{sen}(x)} = \cot(x).y''$$

Sustituyendo en (\*):

$$\begin{aligned} & -(1 - x.\cot(x)).A.\text{sen}(x) - x.(A.\cos(x) + B) + A.\text{sen}(x) + B.x = \\ & = -A.\text{sen}(x) + x.\cot(x).A.\text{sen}(x) - x.A.\cos(x) - x.B + A.\text{sen}(x) + B.x = \\ & = A.x.\cos(x) - A.x.\cos(x) = 0 \end{aligned}$$

-----

Ejemplos: Cuestiones relacionadas con algún interés

1.-

a) La expresión  $\ln(x^2) + \ln(y^2/x^2) = A + x$ , puedo expresarla así:

$$\ln(x^2 \cdot y^2/x^2) = A + x \rightarrow \ln(y^2) = A + x, \text{ y de forma equivalente}$$

$$y^2 = e^{A+x} = e^A \cdot e^x = B \cdot e^x$$

b) La expresión  $\ln(1 + y) + \ln(1 + x) = A$ , puede expresarse así:

$$\ln((1+y) \cdot (1+x)) = A \rightarrow (1+y) \cdot (1+x) = e^A = B$$

-----

2.- En las siguientes hacemos notar si es solución general (es la primitiva asociada) o es una solución particular:

Solución ...

E.Diferen.

$y = a \cdot x^2$  (particular)

$x \cdot y' = a \cdot y$

$x^2 + y^2 = A$  (primitiva)

$yy' + x = 0$

$(1-x) \cdot y^2 = x^3$  (particular)

$2 \cdot x^3 \cdot y' = y \cdot (y^2 + 3x^2)$

$y = A \cdot e^x + B \cdot e^{-x}$  (primitiva)

$y'' - y = 0$

-----

**Tema 1      Ecuaciones explícitas     $y' = f(x, y)$**

**1.1.-    Ecuaciones explícitas**

$y' = f(x, y).$       Campo de direcciones

Implícitamente  $y = g(x, C)$ , y entonces  $y' = f(x, g(x))$

$y = g(x, C)$  representa una familia de curvas: Una para cada valor de C.

Para un valor  $x_0$  la pendiente en el punto  $P(x_0, y_0)$  tiene el mismo valor

## Ecuaciones Diferenciales

$$m_0 = f(x_0, y_0) \quad (4)$$

Ejemplos:

$$1.- \quad y = \frac{1}{2} \cdot x^2 \quad \rightarrow \quad y' = x \quad \rightarrow \quad m_0 = x_0$$

2.- Caso de Ecuaciones explícitas

$$\text{Estamos en el caso } y' = f(x, y) \quad (5)$$

Hacemos notar que  $\frac{dy}{dx}$  y  $y'$  representan lo mismo

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \rightarrow \quad dy = y' \cdot dx$$

Puede ocurrir que el miembro derecha de (5) sea posible escribirlo así

$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ . En este caso decimos que las variables  $x, y$  son separables

$$y' = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = d(x) \cdot dx$$

$$\text{y resolviendo } \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx \quad \rightarrow \quad F(y) = G(x) + C \quad (6)$$

Evidentemente No siempre son separables. En casos como

$$y' = \sin(xy), \quad y' = \frac{x^3 + xy^2}{x^2y - y^3}, \quad \text{es imposible obtener } g(x) \cdot h(y)$$

Ejemplo:

$$1.- \text{ Supongamos la igualdad } y' = \frac{y}{k}. \text{ Tengo } \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \cdot dx \text{ de donde}$$

$$k \cdot \ln(y) = x + C \rightarrow \ln(y) = \frac{x+C}{k}, \quad \text{o bien} \quad y = e^{\frac{x+C}{k}}$$

$$2.- \text{ Supongamos } y' = \frac{k}{y}. \text{ Tengo } y \cdot dy = k \cdot dx, \text{ de donde}$$

$$y^2 = 2 \cdot k \cdot x + C \rightarrow y = \pm \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{x}$$

3.- Supongamos  $y' = y \cdot \cot(k)$  . Tengo  $\frac{dy}{y} = \cot(k) \cdot dx$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \cot(k) \cdot \int dx \rightarrow \ln(y) = \cot(k) \cdot x + C$$

## 1.2.- Ecuaciones convertibles en variables separables

Es el caso de las llamadas *Ecuaciones homogéneas*

Son aquellas de la forma  $y' = f(x, y)$  donde los términos de  $f(x, y)$  son todos del mismo grado en  $x, y$ .

Por ejemplo, es el caso dado antes como no separables  $y' = \frac{x^3 + xy^2}{x^2y - y^3}$ , ya que, al ser expresión homogénea, haciendo el cambio de variable

$$z = y/x, \text{ el miembro derecha se convierte en } \frac{x^3 + x \cdot z^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot z \cdot x - z^3 \cdot x^3} = \frac{1+z^2}{z-z^3} = g(z)$$

Por otro lado  $z = y/x \rightarrow y = z \cdot x \rightarrow y'_x = z'_x \cdot x + z \cdot 1 \rightarrow$

$$z' \cdot x + z = g(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = g(z) - z \rightarrow \frac{dz}{g(z)-z} = \frac{dx}{x} \rightarrow$$

$$F(z) = \ln(x) + C$$

Ejemplo:

$$1.- y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$z = y/x \rightarrow y' = \frac{x^2 + x^2 \cdot z^2}{2x \cdot x \cdot z} = \frac{1+z^2}{2 \cdot z} \rightarrow z'_x \cdot x + z \cdot 1 = \frac{1+z^2}{2 \cdot z} \rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1+z^2}{2 \cdot z} - z = \frac{1-z^2}{2 \cdot z},$$

$$\text{y por tanto } \frac{2z \cdot dz}{1-z^2} = \frac{dx}{x}, \text{ e integrando}$$

$$-\ln(1-z^2) = \ln(x) + C$$

y deshaciendo el cambio:

$$-\ln(1 - \frac{y^2}{x^2}) = \ln(C \cdot x) \rightarrow -\ln(x^2 - y^2) + \ln(x^2) = \ln(C \cdot x) \rightarrow$$

## Ecuaciones Diferenciales

$$-\ln(x^2 - y^2) = \ln\left(\frac{C}{x^2}\right) \rightarrow \ln(x^2 - y^2) = \ln(x/C) \rightarrow x^2 - y^2 = \frac{x}{C}$$

OTRA FORMA: Cambiando a polares:  $x = v \cdot \cos(u)$ ,  $y = v \cdot \sin(u)$

$$\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{v^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos(u) \cdot \sin(u)} = \frac{1}{\sin(2u)},$$

$$dy = \sin(u) \cdot dv + v \cdot \cos(u) \cdot du$$

$$dx = \cos(u) \cdot dv - v \cdot \sin(u) \cdot du, \quad \text{y por tanto}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(u) \cdot dv + v \cdot \cos(u) \cdot du}{\cos(u) \cdot dv - v \cdot \sin(u) \cdot du} = \left( \text{dividiendo por } \cos(u) \right) = \frac{\tan(u) \cdot dv + v \cdot du}{dv - v \cdot \tan(u) \cdot du}, \text{ y tengo}$$

$$\frac{\tan(u) \cdot dv + v \cdot du}{dv - v \cdot \tan(u) \cdot du} = \frac{1}{2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)}$$

$$2 \cdot v^2 \cdot (x + y \cdot y')^2 - (x^2 + y^2) \cdot (x \cdot y' - y)^2 = 0$$

En polares:  $\begin{cases} x = v \cdot \cos(u) \\ y = v \cdot \sin(u) \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\tan(u) \cdot dv + v \cdot du}{dv - v \cdot \tan(u) \cdot du}, \text{ que represento } g(u, v)$

$$\text{Entonces} \quad v^2 \cdot \sin^2(u) \cdot [v \cdot \cos(u) + v \cdot \sin(u) \cdot (g(u, v))]^2 - (v^2) \cdot [v \cdot \cos(u) \cdot (g(u, v)) - v \cdot \sin(u)]^2 = 0$$

(Pi Calleja: pág.156)

-----

### 1.3.- Ecuaciones reducibles a homogénea:

Son aquellas expresables de la forma  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1}{a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2}\right)$

Subcasos: Si las rectas coinciden el cociente es una constante, y

$$\text{entonces} \quad \frac{dy}{dx} = k$$

Si se cortan en un punto  $(x_0, y_0)$  (Esto ocurre cuando  $a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$ )

En este caso hacemos la traslación:  $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ , lo cual nos lleva a

$\frac{a_1.(X+x_0) + b_1.(Y+y_0) + c_1}{a_2.(X+x_0) + b_2.(Y+y_0) + c_2} = \frac{a_1.X + b_1.Y + (a_1.x_0 + b_1.y_0 + c_1)}{a_2.X + b_2.Y + (a_2.x_0 + b_2.y_0 + c_2)} = \frac{a_1.X + b_1.Y}{a_2.X + b_2.Y}$ , y por tanto queda

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1.X + b_1.Y}{a_2.X + b_2.Y}\right), \text{ que es homogénea.}$$

Si son paralelas, lo cual ocurre cuando  $\frac{a_1}{a_2} = k = \frac{b_1}{b_2}$ , entonces

$$a_1.x + b_1.y + c_1 = k a_2.x + k b_2.y + c_1 = k.(a_2.x + b_2.y) + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k.(a_2.x + b_2.y) + c_1}{a_2.x + b_2.y + c_2}\right) = g(a_2.x + b_2.y)$$

Hacemos el cambio de variable  $z = a_2.x + b_2.y$ . Derivando respecto de  $x$

$$z'_x = a_2 + b_2.y' \rightarrow y' = \frac{z'_x - a_2}{b_2}, \text{ con lo cual}$$

$$\frac{z'_x - a_2}{b_2} = g(z) \rightarrow \frac{dz}{dx} = b_2.g(z) + a_2$$

-----

## Tema 2

### 2.1.- Ecuaciones lineales:

Son las que toman la forma

$$y' + P(x).y = Q(x) \quad (7)$$

Se pueden presentar el caso donde  $Q(x)$  es cero, con lo cual

$$y' + P(x).y = 0 \text{ (Lineal incompleta)} \quad (8)$$

## Ecuaciones Diferenciales

Supongamos que  $y = g(x)$  es una solución de (8), esto es:  $y' = g'(x)$ . Entonces tengo

$$\begin{aligned} g'(x) + P(x).g(x) &= 0 \rightarrow \frac{dg(x)}{dx} = -P(x).g(x) \rightarrow \\ \frac{dg(x)}{g(x)} &= -P(x).dx, \text{ y por tanto} \\ \ln(g(x)) &= -\int P(x).dx, \quad g(x) = e^{-\int P(x).dx} \end{aligned}$$

### Método de Sustitución de Lagrange:

En la ecuación completa  $y' + P(x).y = Q(x)$  realizo el cambio  $y = u.v$ , donde  $u(x) = g(x)$ .

$$y' = u'.v + u.v' \rightarrow u.v' + v.u' + P(x).y = Q(x) \rightarrow$$

$u.v' + v.[u' + P(x).u] = Q(x)$ , donde el corchete es cero (porque  $u(x)$  es solución de la incompleta), quedando

$$\begin{aligned} u.\frac{dv}{dx} &= Q(x). \text{ De ésta obtengo } dv = u.Q(x).dx = \\ &= Q(x).e^{-\int P(x).dx}.dx, \text{ de donde} \\ v &= \int Q(x).e^{-\int P(x).dx}.dx + C \end{aligned}$$

Reemplazando  $u$  y  $v$  en  $y = u.v$  obtengo la solución general

$$y = e^{-\int P(x).dx} . [\int Q(x).e^{-\int P(x).dx}.dx + C]$$

Ejemplos:

1.- Sea  $y' + a.y = e^{ax}$

La incompleta es  $y' + a.y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -a.y \rightarrow \frac{dy}{y} = -a.dx \rightarrow$

$\ln(y) = -a.x + C$ , o bien  $y = e^{-ax+C}$

$v = \int e^{ax}.e^{-\int a.dx}.dx + C$ , y finalmente la solución general

$$y = e^{-ax+C} . [\int e^{ax}.e^{-\int a.dx}.dx + C]$$

2.- Sea  $y' + y \cdot g'(x) = g(x) \cdot g'(x)$

La ecuación incompleta nos lleva a  $y' + y \cdot g'(x) = 0 \rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{dg(x)}{dx} \rightarrow \frac{dy}{y} = -g'(x) \cdot dx \rightarrow$$

$$\ln(y) = -g(x) \rightarrow y = e^{-g(x)}. \text{ Entonces obtenemos}$$

$$v = \int g(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-g(x)} \cdot dx, \text{ y finalmente}$$

$$y = e^{-g(x)} \cdot \left[ \int g(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-g(x)} \cdot dx + C \right]$$

(Pi Calleja: pág. 158)

## 2.2.- Ecuaciones reducibles a lineales:

Tenemos dos casos muy conocidos ....

### **A) Ecuación de Bernoulli**

Son las de la forma  $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$  (1)

#### **Conversión a lineal:**

Divido por  $y^n$   $y' \cdot y^{-n} + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x)$  (2)

Hago el cambio  $z = y^{-n+1}$ ,  $z'_x = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$

y sustituyéndolo en (2) queda

$$\frac{z'}{1-n} + P(x) \cdot z = Q(x) \rightarrow z' + (1-n) \cdot P(x) \cdot z = (1-n) \cdot Q(x) \quad (3)$$

Observa que lo anterior no es válido cuando  $n = 1$ , pero en este caso (1) se reduce a

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y \rightarrow y' + R(x) \cdot y = 0, \text{ que es lineal incompleta.}$$

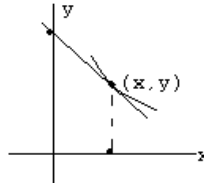
## Ecuaciones Diferenciales

Ejemplo:

1.- “Familia de curvas tales que la ordenada de la intersección de la tangente con el eje  $oy$  sea proporcional al cuadrado de la ordenada del punto de tangencia”

Tangente  $r: y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0)$

Intersección con la recta  $x = 0$  (eje  $oy$ ):



$$\begin{cases} y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y - y_0 = -y'(x_0).x_0, \text{ de}$$

donde la ordenada referida  $y = y_0 - y'(x_0).x_0$

Entonces la condición impuesta es:  $y_0 - y'(x_0).x_0 = k.y_0^2$ . En un punto cualquiera  $(x, y)$  se convierte en

$$y - y'(x).x = k.y^2$$

(Pi Calleja pág.159)

### **B) Ecuación de Riccati:**

Son aquellas de la forma

$$y' = P(x).y^2 + Q(x).y + R(x) \quad (4)$$

Para su resolución es necesario conseguir previamente una solución particular

$$y_1 = M_1(x)$$

Hacemos ahora el cambio de variable  $z = y - y_1$ , y tengo

$$y = z + y_1, y' = z' + y_1'$$

Llevándolo a (4) obtengo

$$(z' + y1') = P(x).(z+y1)^2 + Q(x).(z+y1) + R(x)$$

$$z' + [P(x).y1^2 + Q(x).y1 + R(x)] =$$

$$= P(x).(z^2+y1^2+2.z.y1) + Q(x).(z+y1) + R(x)$$

$$z' = P(x).(z^2 + 2.z.M1(x)) + Q(x).z$$

$$z' = P(x).z^2 + [2.M1(x) + Q(x)].z, \text{ que es del tipo Bernoulli con } n = 2.$$

Ejemplo:

1.- Se la ecuación  $y' = x^{-2} - x^{-1}.y - y^2$  (Tipo Riccati)

Una solución particular es  $y = -x^{-1}$  (compruébalo)

Cambio:  $z = y + x^{-1}$ ,  $y = z - x^{-1}$ ,  $y' = z' + x^{-2}$ , con lo cual

$$z' + x^{-2} = x^{-2} - x^{-1}.(z - x^{-1}) - (z - x^{-1})^2 \rightarrow$$

$$z' = -x^{-1}.z + x^{-2} - (z^2 + x^{-2} - 2.z.x^{-1})$$

$$z' = -z^2 + 2.z.x^{-1}, \text{ que es del tipo Bernoulli}$$

2.- Sea la ecuación  $y' = x^2.y^2 + 2x^{-1}.y + 6x^{-4}$  (tipo Riccati)

Su estudio completo no procede todavía.

Mediante el cambio  $y = \frac{-u'}{u.x^2} \rightarrow y' = \frac{-u.x^2.u'' + u'.(u'.x^2 + u.2x)}{u^2.x^4} =$

$$= \frac{-u.x^2.u'' + x^2.u'^2 + 2x.u.u'}{u^2.x^4}. \quad \text{Operando}$$

$$\frac{-u.x^2.u'' + x^2.u'^2 + 2x.u.u'}{u^2.x^4} = x^2.\frac{u'^2}{u^2.x^4} + 2x^{-1}.\frac{-u'}{u.x^2} + 6x^{-4} \rightarrow$$

## Ecuaciones Diferenciales

$$\frac{-u.x^2.u'' + x^2.u'^2 + 2x.u.u'}{u^2.x^4} = \frac{u'^2}{u^2.x^2} - \frac{2.u'}{u.x^3} + 6x^{-4} \rightarrow$$

$$-u.x^2.u'' + x^2.u'^2 + 2x.u.u' = x^2.u'^2 - 2x.u.u' + 6.u^2 \rightarrow$$

$$-x^2.u.u'' = -4x.u.u' + 6u^2 \rightarrow x^2.u'' = 4x.u' - 6u$$

que es de orden dos y dejamos sin resolver.

-----

### Tema 3

#### 3.1.- Ecuaciones Diferenciales Exactas:

Def.: De una ecuación de la forma

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy = 0 \quad (1)$$

decimos que es exacta si existe una expresión  $U(x,y)$  tal que

$$dU(x, y) = P(x, y).dx + Q(x, y).dy \quad (2)$$

Se demuestra que, bajo las condiciones de uniformidad, continuidad y diferenciabilidad, la condición necesaria y suficiente es que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) \quad (3)$$

Cuando así ocurra la ecuación (1) se convierte en

$$dU(x,y) = 0, \text{ y una solución es: } U(x,y) = C \quad (4)$$

Es decir, sobre un entorno  $V(a, b)$  en  $R^2$

$$U(x, y) = \int_a^x P(x, y).dx + \int_b^y Q(x, y).dy \quad (5)$$

(figura)

Ejemplo: Sea la ecuación

$$y' = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

Tengo:  $(x^2 + y^2 + 1).dy - (x^2 - 2xy).dx = 0 \rightarrow P(x, y) = -(x^2 - 2xy),$

$$Q(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)$$

$$P_y = 2x, Q_x = 2x$$

En un entorno de (0;0) tengo:  $U(x, y) =$

$$\begin{aligned} - \int_0^x (x^2 - 2xy). dx + \int_0^y (x^2 + y^2 + 1). dy &= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 \cdot y\right)\Big|_0^x + \\ (x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} + y)\Big|_0^y &= -\left(\frac{x^3}{3} - y \cdot x^2\right) + \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} + y\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (y^3 - x^3) + 2x^2 \cdot y + y + C \end{aligned}$$

### Factor Integral:

Observa que toda ecuación diferencial de primer orden

$y' = f(x, y)$  puede ser expresada de la forma(1), basta hacer

$P(x, y) = f(x, y), Q(x, y) = -1$ , pues entonces

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \rightarrow dy = f(x, y). dx \rightarrow f(x, y). dx - dy = 0$$

Además, observa que en la expresión (1) podemos multiplicar los dos miembros por una constante o por  $g(x, y)$  que no sean idénticamente nulas.

En general, la expresión (1) no es diferencial exacta pero se puede demostrar que existe un factor  $g(x, y)$  que la convierte en exacta, si bien la obtención de  $g(x, y)$  puede resultar simple en algunos casos o muy difícil en otros. Lo llamamos *Multiplicador de Euler*.

## Ecuaciones Diferenciales

Antes de tratar el caso general, mostramos dos ejemplos en los que  $g(x,y)$  resulta fácilmente.

Ejemplos:

1.- Sea  $A.y.dx + B.x.dy = 0$ .

Si  $A \neq B$  esta no es exacta. Pero si multiplico por  $g(x, y) = x^{m-1}.y^{n-1}$  obtengo

$$A.x^{m-1}.y^n.dx + B.x^m.y^{n-1}.dy = 0 \rightarrow P(x, y) = A.x^{m-1}.y^n, Q(x, y) = B.x^m.y^{n-1},$$

Derivando:  $P_y = A.n.x^{m-1}.y^{n-1}, Q_x = m.B.x^{m-1}.y^{n-1}$

Si elegimos  $n, m$  de forma que  $A.n = m.B$ , por ejemplo  $n = B, m = A$ , entonces

$$A.x^{m-1}.y^n.dx + B.x^m.y^{n-1}.dy = 0 \text{ es exacta y obtenemos}$$

$$U(x, y) = A.\frac{x^m}{m}.y^n + B.x^m.\frac{y^n}{n} + C = M.x^m.y^n + C, \text{ donde hemos hecho}$$

$$A/m + B/n = 1 + 1 = 2$$

2.- Sea  $P(x, y).dx + Q(x, y).dy = 0$  donde  $P(x, y) =$

$$= A(x).B(y), Q(x, y) = C(x).D(y)$$

Multiplico por el inverso de  $g(x, y) = B(y).C(x)$  con lo cual tengo

$$[A(x).B(y)].\frac{1}{B(y).C(x)}.dx + [C(x).D(y)].\frac{1}{B(y).C(x)}.dy = 0 \rightarrow$$

$$\frac{A(x)}{C(x)}.dx + \frac{D(y)}{B(y)}.dy = 0; \text{ teniendo en cuenta que}$$

$[\frac{A(x)}{C(x)}]_y' = 0$ , y  $[\frac{D(y)}{B(y)}]_x' = 0$  concluimos que es exacta.

Cálculo de  $U(x,y)$ : Integramos como hemos hecho en otro lugar, pero hemos de tener presente que la igualdad

$$[A(x).B(y)].\frac{1}{B(y).C(x)} . dx + [C(x).D(y)].\frac{1}{B(y).C(x)} . dy = 0 \text{ viene de}$$

$$\frac{1}{B(y).C(x)} . ([A(x).B(y)] . dx + [C(x).D(y)] . dy) = 0 ,$$

y por tanto en la familia de soluciones entra también  $\frac{1}{B(y).C(x)} = 0$

3.- Sea el caso  $y.dx - x.dy = 0$ .

No es diferencial exacta.

Tomo  $g(x, y) = \frac{1}{x^2}$  . Multiplicando tengo:

$$\frac{y}{x^2} . dx - \frac{1}{x} . dy = 0$$

$P_y = \frac{1}{x^2}$  ,  $Q_x = \frac{1}{x^2}$  , y por tanto esta es exacta.

También son factores integrantes para la presente ecuación diferencial

$$g(x, y) = \frac{1}{y^2} , g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} , g(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

Caso general: Sea  $g(x, y)$  un factor de forma que la expresión

$$g(x, y).[P(x, y).dx + Q(x, y).dy] = 0$$

sea diferencial exacta. (Abreviaremos  $g(x, y)$  por  $g$ )

Debe cumplirse

$$[g.P(x, y)]_y = [g.Q(x, y)]_x \quad (6)$$

**Casuística:**

- a) Supongamos que el factor integrante  $g(x, y)$  depende sólo de  $x$ , es decir  $g = g(x)$

De (6) obtenemos

$$g(x).P_y = g_x.Q(x, y) + g.Q_x, \text{ de donde}$$

$$g_x = \frac{[g.P_x - g.Q_x]}{Q(x, y)} \Rightarrow \frac{g(x)'}{g(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q(x, y)} \quad (7)$$

En (7), el resultado de  $\frac{P_y - Q_x}{Q(x, y)}$  debe ser función de  $x$  solamente.

- b) Lo mismo puede ocurrir siendo  $g = g(y)$ , función de  $y$ . En este caso llegaremos a

$$\frac{g(y)'}{g(y)} = \frac{P_y - Q_x}{Q(x, y)}, \text{ que ha de ser sólo función de } y.$$

Resumen: Para que el factor integrante  $g(x, y)$  sea solamente función de  $x$  ó de  $y$ , es necesario que el cociente

$$\frac{P_y - Q_x}{Q(x, y)} \text{ sea solo función de } x \text{ ó de } y$$

Ejemplo:

1.- Sea

$$\text{sen}(x) - x.\cos(x) - 3x^2.(y-x)^2 + 3x^2.(y-x)^2.y' = 0$$

De otra forma

$$[\text{sen}(x) - x.\cos(x) - 3x^2.(y-x)^2].dx + [3x^2.(y-x)^2].dy = 0$$

Tengo:

$$P(x, y) = \text{sen}(x) - x.\cos(x) - 3x^2.(y-x)^2$$

$$Q(x, y) = 3x^2.(y-x)^2$$

$$P_y = -3x^2.2.(y-x) = -6x^2.(y-x),$$

$$Q_x = 6x.(y-x)^2 - 3x^2.2.(y-x) = (y-x).[-6x^2 - 6x^2 + 6xy] =$$

$$= (y-x).[-12x^2+6xy]$$

$$P_y - Q_x = (y-x).[6x^2 - 6xy]$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q(x,y)} = \frac{(y-x).[6x^2 - 6xy]}{3x^2.(y-x)^2} = \frac{6x.(x-y)}{3x^2.(y-x)} = \frac{-2}{x}$$

$$\text{Esto nos dice que } \frac{g(x)'}{g(x)} = -\frac{2}{x} \quad \rightarrow$$

$$\ln(g(x)) = -2.\ln(x) + C$$

$$\ln(g(x)) = -2.\ln(k.x) \rightarrow g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Observación:

Tomamos de nuevo el caso general  $y' = f(x, y)$ , o bien  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , de donde  $f(x, y).dx - dy = 0$

$$P(x, y) = f(x, y), \quad Q(x, y) = -1$$

$$\text{Entonces } \frac{P_y - Q_x}{Q(x,y)} = \frac{f(x,y)_y - 0}{-1} = -f(x, y)_y$$

Por tanto, para que  $y' = f(x, y)$  admita factor integrante de la forma  $g = g(x)$  es necesario que  $f(x, y)$  sea lineal (de grado 1) en la variable  $y$ . (No podemos decir lo mismo si pretendemos que el factor integrante sea de la forma  $g = g(y)$ ).

-----

## Tema 4

*Ecuaciones diferenciales de primer orden No resolubles en  $y'$*

### 4.1.- Caso general $f(x, y, y') = 0$

En los temas anteriores hemos estudiado cómo proceder cuando  $y'$  puede ser despejada, es decir, caso de las explícitas.

Estamos en el caso de que esto no sea posible.

El estudio será siempre local lo que significa que es válido en un entorno de un punto  $(x_0, y_0)$ .

El primer paso consistirá en resolver la igualdad

$$f(x, y, y') = 0 \text{ respecto de } y' \quad (1)$$

Obtendremos expresiones

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \dots \quad (2)$$

Cada una de las ecuaciones (2) puede ser resuelta, sean las soluciones

$$F_1(x, y, C_1) = 0, \quad F_2(x, y, C_2) = 0, \dots \quad (3)$$

Cada una de estas es solución general (un haz de curvas) donde asignando un valor a la constante  $C_i$  determinamos una solución particular.

Estas soluciones son válidas en un entorno de  $(x_0, y_0)$ .

La solución general de (1) es el resultado

$$F(x, y, C) = F_1(x, y, C_1). F_2(x, y, C_2). \dots \quad (4)$$

el cual, lógicamente, sólo es útil si en (2) tenemos un número finito.

Ejemplos:

1.- Sea la ecuación diferencial

$$y'^2 + x.y^2 - (x+y).y.y' = 0$$

Ecuación en  $y'$  :

$$y'^2 - (x+y).y.y' + x.y^3 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -(x+y).y, \quad c = x.y^3$$

$$D = b^2 - 4ac = (x+y)^2.y^2 - 4x.y^3 =$$

$$= y^2.[(x+y)^2 - 4xy] \rightarrow \sqrt{D} = y.\sqrt{(x+y)^2 - 4xy} =$$

$$= y.\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} = y.\sqrt{(x-y)^2} = y.(x-y)$$

$$-b + \sqrt{D} = (x+y).y + y.(x-y) = 2xy$$

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2.1} = xy \rightarrow y' = xy$$

$$-b - \sqrt{D} = (x+y).y - y.(x-y) = 2y^2 \rightarrow \frac{-b - \sqrt{D}}{2.1} = y^2 \rightarrow y' = y^2$$

Continuando:

$$\frac{dy}{y} = x \rightarrow \ln(y) = \frac{1}{2}.x^2 + C1 \rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} + C1}$$

$$\frac{1}{y^2}.dy = dx \rightarrow \frac{-1}{y} = x + C2 \rightarrow y = \frac{1}{C2-x}$$

La solución general de la dada es

$$(y - e^{\frac{x^2}{2} + C1}).(y - \frac{1}{C2-x}) = 0$$

2.- Sea la ecuación

$$y'^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\text{Resolviendo: } y'^2 = y^2 + 1 \rightarrow y' = \pm\sqrt{y^2 + 1}$$

Tengo:  $dy = \sqrt{y^2 + 1} \cdot dx \rightarrow \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \cdot dy = dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \cdot dy = (y = \tan(t), dy = \sec^2(t) \cdot dt) \rightarrow$

$\int \sec(t) \cdot dt = \ln(\sec(t) + \tan(t)) \rightarrow \ln(\sqrt{1 + y^2} + y)$

Por tanto la solución general (parcial) es

$\ln(\sqrt{1 + y^2} + y) = x + C \rightarrow \sqrt{1 + y^2} + y = e^{x+C}$

De forma análoga

$dy = -\sqrt{y^2 + 1} \cdot dx \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{y^2+1}} \cdot dy = dx$

$-\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \cdot dy = (y = \tan(t), dy = \sec^2(t) \cdot dt) \rightarrow$

$-\int \sec(t) \cdot dt = -\ln(\sec(t) + \tan(t)) \rightarrow -\ln(\sqrt{1 + y^2} + y)$

Por tanto la solución general (parcial) es

$-\ln(\sqrt{1 + y^2} + y) = x + C \rightarrow \sqrt{1 + y^2} + y = -e^{x+C}$

La solución general de la dada es

$$\left[ \sqrt{1 + y^2} + y - e^{x+C} \right] \cdot \left[ \sqrt{1 + y^2} + y + e^{x+C} \right] = 0$$

-----

#### 4.2.- Resolubles por separación de variables

Dada  $f(x, y, y') = 0$  donde  $y'$  no es despejable, los casos más favorables pueden presentarse como sigue.

- a) Si en  $f(x, y, y') = 0$  está ausente la variable  $y$  ó la  $x$ , es decir, que es de la forma

$$f(x, y') = 0, \quad \text{ó} \quad f(y, y') = 0 \quad (1)$$

y que sea resoluble respecto de  $x$ , ó respecto de  $y$ .

Llamando  $u = y'$ , y habiendo despejado  $x$  en función de  $y'$ , tendríamos, en paramétricas

$$\begin{cases} x = g(u) \\ y = \int u \cdot dx = \int u \cdot g'(u) \cdot du \end{cases} \quad (2)$$

En el segundo supuesto de (1) sería (teniendo en cuenta que

$$u = y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = u \cdot dx, \quad dx = \frac{dy}{u}$$

$$\begin{cases} y = h(u) \\ x = \int \frac{1}{u} \cdot dy = \int \frac{h'(u)}{u} \cdot du \end{cases} \quad (3)$$

Tanto en (2) como en (3) eliminando  $u$  obtenemos la relación entre  $x$ ,  $y$ , donde intervendrá una constante  $C$ , que es la ecuación general de la dada.

Ejemplos:

1.- Sea  $x - y'^3 - 1 = 0$

Despejo  $x$  (haciendo  $u = y'$ )

$$\begin{cases} x = u^3 + 1 \\ y = \int 3u^3 \cdot du = \frac{3}{4} \cdot u^4 + C; \quad u^3 = x-1 \rightarrow u^4 = (\sqrt[3]{x-1})^4 \end{cases}$$

por lo que  $y = \frac{3}{4} \cdot (\sqrt[3]{x-1})^4 + C$

## Ecuaciones Diferenciales

2.- Sea  $y' - x\sqrt{1+y'^2} = 0$

Tengo  $y' = x\sqrt{1+y'^2} \rightarrow y'^2 = x^2(1+y'^2) \rightarrow$

$$x^2 = (1-x^2) \cdot y'^2 \rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

Integrando: Hago  $t = 1-x^2$ ,  $dt = -2x \cdot dx \rightarrow$

$$x \cdot dx = -dt/2, \quad -\frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}, \text{ y por tanto}$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Otro modo: Despejando x tenemos

$$\begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ y = \int u \cdot dx \end{cases}$$

$$dx = \frac{\sqrt{1+u^2} \cdot 1 - u \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \cdot 2u}{1+u^2} \cdot du = \frac{(1+u^2) - u^2}{(1+u^2) \cdot \sqrt{1+u^2}} \cdot du = \frac{1}{(1+u^2) \cdot \sqrt{1+u^2}} \cdot du$$

Entonces  $y = \int \frac{u}{(1+u^2) \cdot \sqrt{1+u^2}} \cdot du$ , haciendo  $t = 1+u^2$ ,

$$dt = 2u \cdot du, \quad \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{t}},$$

por tanto:  $y = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ ; de aquí  $\sqrt{1+u^2} = -\frac{1}{y} \rightarrow$

$$1+u^2 = 1/y^2 \rightarrow u^2 = 1/y^2 - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

Por otro lado:  $x^2(1+u^2) = u^2 \rightarrow x^2 = (1-x^2) \cdot u^2$ , y por tanto

$$x^2 = (1-x^2) \cdot \frac{1-y^2}{y^2} \rightarrow x^2 \cdot y^2 = 1-y^2 - x^2 + x^2 \cdot y^2 \rightarrow$$

$$0 = 1-y^2 - x^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{1-x^2} + C$$

-----

- b) Caso en el que  $f(x, y, y') = 0$  es homogénea en  $x, y$  ( $x$  e  $y$  son del mismo grado).

En este caso se puede expresar de la forma

$$g\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0, \quad g(v, y') = 0 \text{ con } v = y/x$$

b1) Si fuese de primer grado en  $y'$  podríamos despejarla

$$y' = h(v), \text{ donde } v = y/x$$

b2) Si  $g(v, y') = 0$  es resoluble en  $y'$  procedemos como en ... punto ...)

b3) Si  $g(y/x, y') = 0$  es resoluble respecto de  $v = y/x$ , procedemos como sigue.

$$y/x = h(u) \rightarrow y = x \cdot h(u), \text{ donde } u = y'$$

Derivando (respecto de  $x$ )

$$u = h(u) + x \cdot h'(u) \cdot u', \text{ o bien:}$$

$$u = h(u) + x \cdot h'(u) \cdot \frac{du}{dx} \rightarrow u - h(u) = \frac{x}{dx} \cdot h'(u) \cdot du \rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{h'(u)}{u - h(u)} \cdot du \rightarrow \ln(x) = \int \frac{h'(u)}{u - h(u)} \cdot du$$

Teniendo en cuenta que  $u = y/x$  obtendremos una relación entre  $x, y$ , que es la solución.

Ejemplos: Sea la ecuación  $x \cdot \sqrt{1 + y'^2} - y' = 0$

Podemos despejar:  $x^2 \cdot (1 + y'^2) = y'^2 \rightarrow x^2 = y'^2 \cdot (1 - x^2) \rightarrow$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ de donde por integración } y = -\sqrt{1 - x^2} + C$$

(Pi Calleja: pág. 167)

## Ecuaciones Diferenciales

2.- Sea  $x = y'^3 + 1$

Introducimos el parámetro  $p = y'$ , con lo cual  $x = p^3 + 1$

$$\begin{aligned}\text{Ahora } y &= \int p \cdot dx, \text{ y siendo } dx = 3 \cdot p^2 \cdot dp, \text{ tengo } y = \int p \cdot 3 \cdot p^2 \cdot dp = \\ &= 3 \cdot \int p^3 \cdot dp = \frac{3}{4} \cdot p^4 + C.\end{aligned}$$

$$\text{Ahora eliminamos } p: 4 \cdot y - 4 \cdot C = 3 \cdot p^4 \rightarrow p^4 = \frac{4}{3} \cdot (y - C) \rightarrow$$

$$\text{Por otro lado } p^3 = x - 1 \rightarrow p^4 = (x - 1)^{\frac{4}{3}}, \text{ y entonces}$$

$$(x - 1)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \cdot (y - C) \rightarrow (x - 1)^4 = \left[ \frac{4 \cdot (y - C)}{3} \right]^3$$

$$\text{La primitiva buscada es } (x - 1)^4 = \left[ \frac{4 \cdot (y - C)}{3} \right]^3$$

(Pi Calleja: pág. 167)

-----

### 4.3.- Ecuaciones en las que y es despejable

Es el caso cuando podemos expresarla de la forma

$$y = f(x, y') \quad (1)$$

$$\text{Llamo } u = y', \text{ con lo cual } y = f(x, u) \quad (1)'$$

$$\text{Su diferencial } dy = f_x(x, u) \cdot dx + f_u(x, u) \cdot du =$$

$$= f_x(x, u) \cdot dx + f_u(x, u) \cdot u_x \cdot dx = [f_x(x, u) + f_u(x, u) \cdot u_x] \cdot dx, \text{ o bien}$$

$$u = f_x(x, u) + f_u(x, u) \cdot u_x \quad \text{Podemos despejar } u_x$$

$$u_x = \frac{u - f_x(x, u)}{f_u(x, u)}, \text{ o bien } du = \frac{u - f_x(x, u)}{f_u(x, u)} \cdot dx \quad (2)$$

Resuelta ésta (con variable independiente x) tengo  $u = g(x, C)$ .  
Sustituyendo esta expresión de u en (1)' he obtenido la solución general

$$y = F(x, C)$$

la dificultad reside en la resolución de la integración de (2). En los siguientes casos mostramos cómo proceder en algunos casos.

**A) Ecuación de Lagrange:** Caso cuando (1) es lineal en x

$$y = x.A(y') + B(y') \quad (3)$$

Hago  $u = y' \rightarrow y = x.A(u) + B(u)$

Derivando respecto de x

$$y' = [A(u) + x.A'_u(u).u'] + B'_u(u).u'$$

$$u = A(u) + [x.A'_u(u) + B'_u(u)].u'$$

que es lineal en x.

Tengo:  $u - A(u) = [x.A'_u(u) + B'_u(u)].u'$

Divido por  $u - A(u)$

$$1 = \left[ \frac{A'_u(u)}{u - A(u)} \cdot x + \frac{B'_u(u)}{u - A(u)} \right] \cdot \frac{du}{dx} \rightarrow$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{A'_u(u)}{u - A(u)} \cdot x + \frac{B'_u(u)}{u - A(u)} \quad (4)$$

Ejemplo:

1.- Sea la ecuación  $y = x.y'^2 + y'^3$

Es del tipo Lagrange, y haciendo  $u = y'$ , tengo  $y = x.u^2 + u^3$

$$A(u) = u^2 \rightarrow A'_u(u) = 2u, \quad B(u) = u^3 \rightarrow B'_u(u) = 3u^2$$

Sustituyendo en (4)

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{1-u} \cdot x + \frac{3u}{1-u} \rightarrow (1-u) \cdot \frac{dx}{du} = 2x + 3u \rightarrow$$

$$(u-1) \cdot \frac{dx}{du} + 2x + 3u = 0 \quad (*)$$

(que en este momento no sabemos resolverla. Ver resultado en pág. 170)

### **B) Ecuación de Clairaut**

*Su origen:* La ecuación de una recta cualquiera del plano es de la forma

$$y = a \cdot x + b \quad (5)$$

donde queda excluida la recta eje oy. Esta es una familia doblemente-infinita.

Si los coeficientes a y b estuviesen ligados por una relación  $b = b(a)$  aquellas quedan reducidas a una familia simplemente-infinita, quedando

$$y = a \cdot x + b(a) \quad (6)$$

La ecuación diferencial de (6) se obtiene como sigue:  $y' = a$

$$\text{con lo cual} \quad y = x \cdot y' + b(y') \quad (7)$$

llamada *Ecuación de Clairaut*.

Es del tipo de Lagrange donde  $A(y') = y'$ .

Aplicando el método de derivación (respecto de x), después de hacer  $u = y'$ , tenemos

$$u = [u + x \cdot u'] + b'(u) \cdot u'$$

$$u = u + [x + b'(u)] \cdot u' \rightarrow 0 = [x + b'(u)] \cdot u'$$

Dos posibilidades:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad du = 0 \quad \rightarrow \quad y' = C$$

$$x + b'(u) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{db(u)}{dx} = -x \quad \rightarrow \quad db(u) = -x \cdot dx \quad \rightarrow$$

$$b(u) = -\frac{x^2}{2}$$

-----

## BIBLIOGRAFÍA

Ecuaciones Diferenciales  
Teoría y Problemas resueltos  
Aut.: Frank Aires, JR.  
Edit.: McGraw-Hill , 1952

Curso Teórico – Práctico de  
Ecuaciones Diferenciales  
Aplicado a la Física y Técnica  
Aut.: Pedro Puig Adam  
Edit.: Biblioteca Matemática, S.L., 1970

Análisis Matemático Volumen III, Tercera Edición 1965  
Aut.: J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo  
Edit.: Kapeluz (Buenos Aires)

