ESPACIO EUCLÍDEO

ESPACIO NORMADO Y MÉTRICO

PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado

Profesor Numerario de Matemáticas

Alejo González Criado

Salamanca, Diciembre 2019

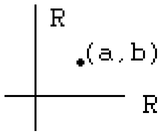
ÍNDICE

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

0.1.- **Espacio vectorial Euclídeo**

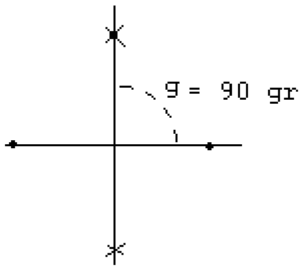
Sea el espacio vectorial (V_2, +, ., R) donde V_2 = R x R =

= {(a, b); a, b ∈ R}. Cada par (a, b) es un vector, y al mismo tiempo representa un punto en el llamado (geométrico) simbolizado por RxR.



Punto de R x R

El concepto "perpendicularidad" de segmentos y rectas lo tomamos de la Geometría de Euclides:

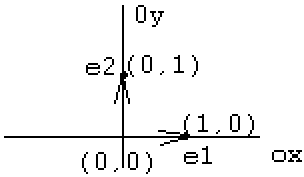


La familia de puntos {(a, 0); a∈ R} nos da una recta de puntos, que llamaremos eje de abscisas. Diremos eje ox

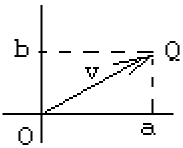
La familia de puntos {(0, b); b∈ R} nos da una recta de puntos, que llamaremos eje de ordenadas, y la representamos perpendicularmente al eje de abscisas. Diremos eje oy .

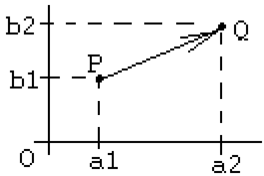
Sobre el eje ox elegimos el vector (0, 1), que simbolizamos por e1, y como unidad de medida tomamos la longitud de e1, es decir del cero al uno: /e1/ = 1 (módulo de e1)

Sobre el eje oy elegimos el vector (1, 0), que simbolizamos por e2, y como unidad de medida sobre este eje tomamos la longitud de e2, es decir del cero al uno: /e2/ = 1 (módulo de e2)



Después de fijar unidades de medida en cada eje podemos definir la "longitud" (módulo) de un vector cualquiera: v = a.e1 + b.e2





En el primer caso v = OQ = (a, b), y en el segundo

v = PQ = (a2-a1, b2-b1)

La longitud de estos vectores la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras: /v/ = $\sqrt{a^2 + b^2}$,   /v/ = $\sqrt{(a2 - a1)^2 + (b2 - b1)^2}$

y que llamaremos "módulo" de v.

Vectores fijos, vectores libres:

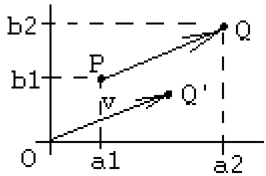
En la primer figura el origen del vector coincide con el origen del "sistema de referencia", mientras que en el segundo no. Decimos que son vectores "fijos" (en el plano).

En el caso de la segunda figura podemos trazar otro vector paralelo a PQ , y con igual módulo, y con origen en el punto O.

Decimos que son equivalentes, y de este modo queda definida una "relación de equivalencia" . Los vectores fijos sobre el plano quedan así redistribuidos en lo que llamamos "clases de equivalencia". Cada clase tiene un "representante" (un único elemento de la clase) que tiene su origen en O (origen del s.r.), y que llamamos "representante canónico".

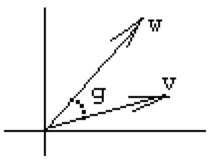
Def.: Llamamos "vector libre" a cada una de estas clases de equivalencia, y en particular a su representante canónico.

Salvo que se diga otra cosa o que el contexto lo indique, en adelante cuando hablamos de vectores nos referimos a "vector libre".



0.2.- Producto escalar de dos vectores:

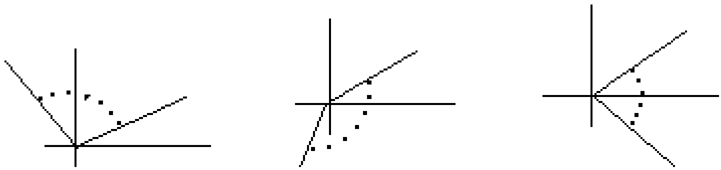
Dados dos vectores v, w , en su representación gráfica, con origen en el origen de coordenadas O, formarán un ángulo g, que será 0º si son colineales.



Def.: Llamamos "producto escalar" de los vectores v, w al valor obtenido así (lo representamos por *):

$$v * w = /v/./w/.\cos(g) \qquad (1)$$

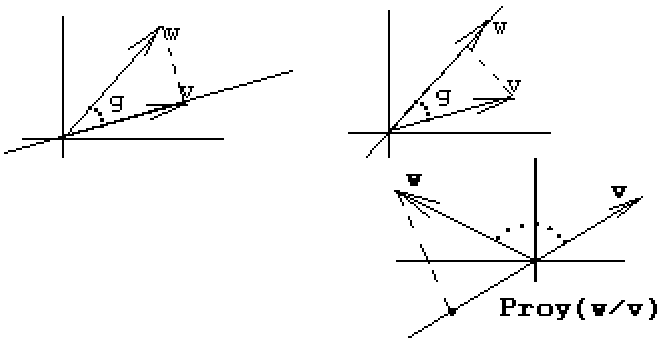
El ángulo g será medido siguiendo el arco más corto que nos lleva desde un vector al otro, en sentido horario o el contrario. Véanse figuras



Observa: Si 0º < g < 90º valor de cos(g) es positivo. Si 90º < g < 180º el valor de cos(g) es negativo y por tanto v * w es un valor negativo.

Significado gráfico de v * w:

Significa las "proyección" (ortogonal) de v sobre la recta que soporta a w, después de hacer /w/ = 1, ó la proyección de w sobre la recta que soporta a v, después de hacer /v/ = v. Véanse figuras.



Es decir: Proy(w/v) = $\frac{v*w}{|v|}$, Proy(v/w) = $\frac{v*w}{|w|}$

Estamos en condiciones de calcular "distancias" entre elementos del plano R x R.

Al anterior producto entre vectores de V_2 lo llamaremos "**Producto escalar ordinario"**, y diremos que sobre el Espacio Vectorial V_2 tenemos una "métrica".

Lo llamaremos **"Espacio Euclídeo",** ó Espacio vectorial Euclídeo.

Introducción a ESPACIO VECTORIAL NORMADO

0.3.- Introducción al concepto de Espacio Vectorial Normado

Sea un Espacio Vectorial V_n de dimensión n.

Para concretar y con el fin de hacerlo visible consideraremos los espacios vectoriales V_2 y V_3 , sobre el cuerpo de los reales, es decir:

$$(V_2, +, .; R) \qquad\qquad (V_3, +, . ; R)$$

Después se hace extensible a dimensión finita n.

Previamente definimos un producto escalar en el espacio vectorial.

Producto escalar:

Fijada una base B = {e1, e2}, definimos "un producto escalar" como sigue (tabla de doble entrada):

*	e1	e2
e1	e1*e1	e1*e2
e2	e2*e1	e2*e2

-- >

*	e1	e2
e1	k11	k12
e2	k21	k22

Imponiendo la condición de que cumpla la propiedad conmutativa

Si v = a11.e1 + a12.e2, w = a21.e1 + a22.e2, su producto escalar lo definimos imponiendo que se cumplan las conocidas propiedades de la suma y del producto por escalar, es decir, la distributiva y la homotética:

v * w = (a11.e1 + a12.e2) * (a21.e1 + a22.e2) =

= …… = a11.a21.k11 + a11.a22.k12 + a12.a21.k21 + a12.a22.k22 =

= Matricialmente =

$$(a11,\ a12).\begin{pmatrix} k11 & k12 \\ k21 & k22 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a21 \\ a22 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Del mismo modo lo haríamos en V_3, y en cualquier espacio vectorial real V_n .

Propiedades: El lector alumno/puede comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Conmutativa: v * w = w * v
b) Homotética: (k.v) * (h. w) = (k.h).(v * w)
c) Distributiva: v * (w1 + w2) = v * w1 + v * w2

Norma:

Si en V_n hemos definido un producto escalar * , a partir de aquí definimos el concepto de norma.

La Norma es una aplicación V_n --- > R que a cada vector v asocia el valor $|v| = \sqrt{v * v}$

Decimos que el espacio vectorial V_n está dotado de una norma, y que es un Espacio Normado.

Propiedades:

a) $|v| \geq 0$
b) $|k.v| = |k|.|v|$
c) $|v + w| \leq |v| + |w|$

Ortogonalidad:

Def.: Dos vectores v, w son ortogonales si se cumple: v * w = 0

Una base B = {v1, v2, …, v_n} es ortogonal si vi * vj = 0, siempre que $i \neq j$

Vector unitario:

Def.: Un vector v es unitario, o que está normalizado, si $|v| = 1$

Una base B = {v1, v2, …, v_n} es ortonormal si es ortogonal y además $|vi| = 1$, para i = 1, 2, …, n

0.4.- Introducción al Concepto de Espacio Métrico

En general lo definimos como sigue

Def.: Espacio métrico es una estructura M = (M, +; K) sobre un cuerpo K en la que además se pueden "medir distancia".

Esto significa que ha sido posible definir una aplicación

d: M x M ---- > K

(a, b) --- > d(a, b)

que cumple las siguientes condiciones:

a) d(a, b) > 0, d(a, b) = 0 precisamente si b = a
b) d(a, b) = d(b, a) , simetría
c) d(a, c) $\leq d(a, b) + d(b, c)$, propiedad triangular

La aplicación d es la "función distancia".

Ejemplos:

a) Si en M definimos d(a, b) =$\begin{cases} 1, & si\ b \neq a \\ 0, & si\ b = a \end{cases}$, ésta cumple las condiciones para ser una métrica (métrica discreta).

b) En M = R, cuerpo de los reales d(a, b) = val.abs(b - a), lo que designamos por /b – a/, es una métrica.

Caso de que M sea un Espacio vectorial normado:

Si la estructura (M, + ; K) es una estructura (V_n, +, . ; K) de espacio vectorial sobre un cuerpo K (por ejemplo el cuerpo R de los reales), y sobre él tenemos definida una norma $|v|$, entonces la "función distancia" podemos definirla así:

$$d: V_n \times V_n \text{ ------} > R$$
$$(v, w) \text{ ----} > d(v, w) = |w - v|$$

Evidentemente cumple

a) d(v, w) > 0, d(v, w) = 0 precisamente si w = v

b) d(w, v) = d(v, w) simetría

c) d(v, w) ≤ d(v, u) + d(u, w), propiedad triangular

Ejemplos:

En cualquier espacio vectorial donde tengamos un "producto escalar" tenemos también un "norma" : $|w| = \sqrt{w * w}$, y como hemos dicho antes, teniendo una norma tenemos también la "función distancia" :

$$d(v, w) = |w - v|$$

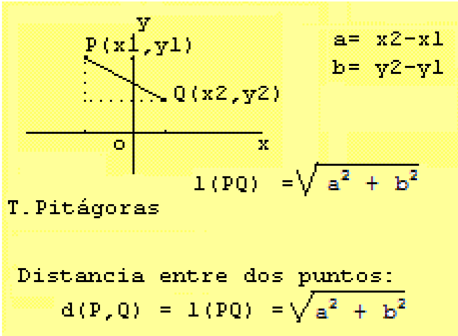
Ejemplo que puede resultar sorprendente:

Sea el Espacio vectorial (Q[x], +, . ; Q) de los polinomios de grado $\leq n$, n fijo y concreto. Continúo suponiendo que n = 3. La base más sencilla (la canónica) es $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Como espacio vectorial que es podemos definir sobre él un producto escalar, como se dijo en 0.2, y después una norma. Llegamos así a tener una estructura de Espacio métrico sobre (Q[x], +, . ; Q).

ESPACIO EUCLÍDEO

1.1.- Distancia entre dos puntos



Longitud de un segmento:

Si P(x1, y1), Q(x2, y2), aplicando Pitágoras, la longitud del segmento viene dada por:

l(PQ) = $\sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$

y la distancia entre P y Q:

d(P, Q) = l(PQ) = $\sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$

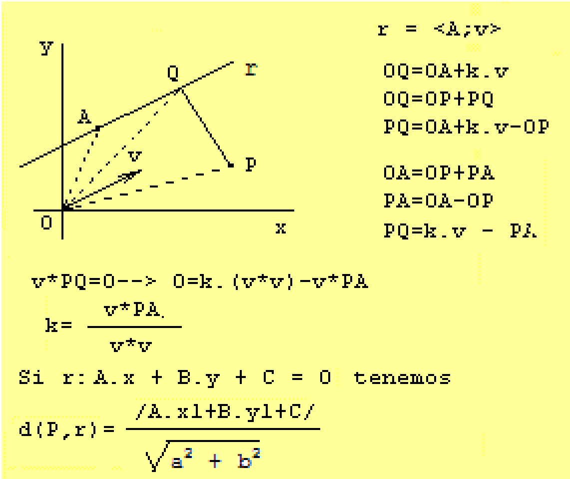
Es práctico hacer:

a = x2-x1, b = y2-y1, con lo cual

d(P, Q) = $\sqrt{a^2 + b^2}$, (PQ = (a, b))

1.2.- Distancia desde un punto a una recta

Pie de la perpendicular y Distancia desde un punto a una recta:



Sean r una recta determinada por un punto A(x0, y0) y un vector director v = (a, b), y un punto P(x1, y1) que no pertenece a r.

Toda recta s que pasa por P, y no es paralela a r, corta a ésta en un punto Q.

Consideramos la distancia desde P a Q: d(P, Q)

Por simple observación es fácil comprobar que la menor de estas distancias la obtenemos cuando la recta s sea perpendicular a r.

Definición:

Distancia entre P y la recta r es la menor de las distancias d(P, Q) cuando Q recorre la recta r.

El vector w = (-b, a) es ortogonal al vector v = (a, b) director de r, y por tanto es un vector director de cualquier recta s perpendicular r, y en particular la que pasa por P.

Si Q(x1, y1) es un punto cualquiera de r, el vector OQ se expresa así:

$$OQ = OA + AQ = (x0, y0) + t.(a, b),$$

Por otro lado

$OQ = OP + PQ$, de donde
$PQ = OQ – OP$

$$PQ = (x0,y0) + t.(a,b) – (x1,y1)$$
$$PQ = (x0\text{-}x1+ t.a,\ y0\text{-}y1+ t.b) \qquad (1)$$

Si imponemos que PQ es ortogonal con v = (a, b), tenemos:

$$0 = a.(x0\text{-}x1+t.a)+ b.(y0\text{-}y1+t.b),$$

de donde

$$a.(x0\text{-}x1) + b.(y0\text{-}y1)+ t.(a^2 + b^2) = 0,$$

de donde

$$a.(x1\text{-}x0) + b.(y1\text{-}y0) = t.(a^2 + b^2),$$

de donde podemos despejar el valor de t:

$$t = \frac{[a.(x1-x0) + b.(y1-y0)]}{a^2 + b^2} \quad \text{, esto es}$$

$$t = \frac{(a,b) * AP}{v * v} \qquad (2)$$

(* es el producto escalar de vectores)

Este valor de t determina el punto Q

$$OQ = (x0, y0) + t.(a, b),$$

que es el pie de la perpendicular a r pasando por P. Finalmente

$$d(P, r) = d(P, Q) \qquad (3)$$

Cálculo de t:

AP = (x1-x0, y1-y0)

(a,b)*AP = a.x1 + b.y1 –(a.x0+b.y0)

Entonces

$$t = \frac{(a.x1 + b.y1) - (a.x0 + b.y0)}{a^2 + b^2} \qquad (4)$$

Distancia d(P, r) tomando la Ecuación general de la recta r

Sea r: A.x + B.y + C = 0, y el punto P(x1, y1)

Se puede demostrar que

$$d(P, r) = \frac{| A.x1 + B.y1 + C |}{\sqrt{A^2+B^2}} ,$$

Distancia d(P, r) partiendo de la Ecuación general A.x + B.y + C = 0

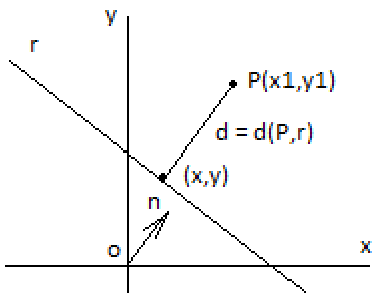
El vector w = (A,B) es ortogonal a r, y v = (-B, A) es director de r.

En efecto: y = 0 -- > x = -C/A -- > P1(-C/A, 0)

x = 0 -- > y = -C/B -- > P2(0, -C/B)

v = (C/A, -C/B), multiplico por (A.B)/C y obtengo

v = (B, -A), también vale v = (-B, A)



Normalizo el vector ortogonal w y, pasando a tomar

$n^{->}$ = (n1, n2), donde $n1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $n2 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Traslado la recta r aplicándole el vector $k.n^{->}$ haciendo que pase por P. Puesto que $n^{->}$ es unitario, el valor k coincide con la distacia d de P a la recta.

Tengo $\begin{cases} x' - x = k.n1 \\ y' - y = k.n2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = x' - k.n1 \\ y = y' - k.n2 \end{cases}$

La nueva recta pasa por P(x1, y1), por lo tato

tomando (x1, y1) en lugar de tengo $\begin{cases} x = x1 - k.n1 \\ y = y1 - k.n2 \end{cases}$

y sustituyendo en la ecuación de r tengo

$$A.(x1-k.n1) + B.(y1-k.n2) + C = 0$$

$$(A.x1 + B.y1 + C) - k.(n1.A + n2.B) = 0$$

$$(A.x1 + B.y1 + C) - k.(A^2 + B^2)/\sqrt{A^2 + B^2} = 0$$

de donde $k = \frac{(A.x1+B.y1+C).\sqrt{A^2+B^2}}{A^2+B^2} = \frac{(A.x1+B.y1+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$

y por lo tanto

$$d(P, r) = \frac{(A.x1+B.y1+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

y hemos terminado

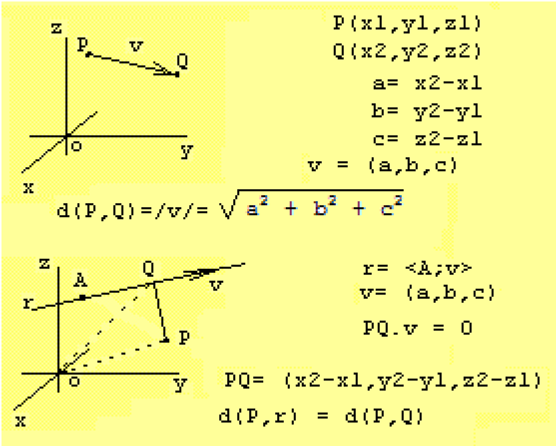
2.- Distancias en el ESPACIO

2.1.- Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos P(x1, y1, z1), Q(x2, y2, z2). La distancia que los separa coincide con el módulo del vector v = PQ.

Aplicando Pitágoras tenemos

$$d(P, Q) = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2}$$

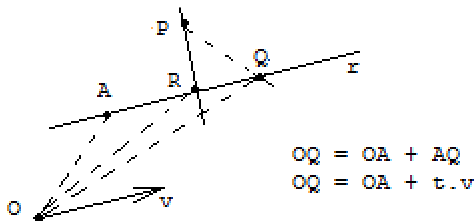


2.2.- Distancia desde un punto a una recta

Aunque su cálculo puede resultar más fácil después de el estudio 'distancia desde punto a plano', por motivos conceptuales lo expongo como sigue.

Definición:

"Distancia desde P hasta r es el menor de los valores d(P, Q), cuando Q recorre la recta r"



El menor de estos valores se da cuando Q es el punto de corte de la recta s perpendicular a r y que pasa por P.

Caso A: Tenemos la ecuación vectorial de r

Sean la recta $r = <A; v>$, donde A(x0, y0, z0),

v = (a, b, c), y el punto P(x1, y1, z1) que suponemos no está en la recta.

Un punto Q(x, y, z) cualquiera de r viene dado por

$OQ = OA + t.(a, b, c)$, para algún valor real t

En componentes (de vector)

$$(x, y, z) = (x0, y0, z0) + t.(a, b, c)$$

Tenemos

$OQ = OA + t.(a, b, c)$
$OQ = OP + PQ$, de donde: $PQ = OQ – OP$

o bien $PQ = (OA+ t.(a, b, c)) – OP$

de donde: $PQ = (OA-OP) + t.(a, b, c)$

y por tanto

$$PQ = (x0-x1, y0-y1, z0-z1) + t.(a, b, c) = = (x0-x1+a.t, y0-y1+b.t, z0-z1+ c.t) \qquad (21)$$

Por otro lado, imponemos que PQ y v son ortogonales, y por tanto:

$PQ * v = 0$, (* es el producto escalar)

Esta condición nos da

$$0 = a.(x0-x1+a.t) + b.(yo-y1+b.t) + c.(zo-z1+c.t) \qquad (22)$$

$$0 = a.(x0-x1) + b.(y0-y1) + c.(z0-z1) + (a^2 + b^2 + c^2).t \qquad (22')$$

Operando, agrupando y simplificando obtenemos una ecuación de la forma

$$A.t = B \tag{23}$$

de donde despejamos el valor de t.

Esto nos permite obtener el punto Q en la recta r, que es el corte de r y su perpendicular que pasa por P. Decimos que Q es ‘el pie de la perpendicular a r por P’.

Después `d(P, r) = d(P, Q)` `(24)`

NOTA:
Si el vector v estuviese normalizado, es decir, de módulo 1:
v = (n1, n2, n3), la igualdad (22’) quedaría así:

$$0 = n1.(x0-x1) + n2.(y0-y1) + n3.(z0-z1) + (n1^2 + n2^2 + n3^2).t$$

y teniendo en cuenta que $n1^2 + n2^2 + n3^2 = 1$, para obtener el valor de t queda

$$t = n1.(x0-x1) + n2.(y0-y1) + n3.(z0-z1)$$

Caso B: Tenemos las ecuaciones cartesianas de r

$$\begin{cases} a11.x + a12.y + a13.z - a14 = 0 \\ a21.x + a22.y + a23.z + a24 = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Debemos pasar al formato r = <A; v> paramétrico-vectorial. Para obtener este formato procedemos como sigue para obtenemos dos puntos A y B de r:

Damos valor a la incógnita libre, supongamos que puede serlo z. Si hacemos z = z1 obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a11.x + a12.y = a14 - a13.z1 \\ a21.x + a22.y = a24 - a23.z1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tenemos el punto A(x1,y1,z1).

Si hacemos z = z2 obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a11.x + a12.y = a14 - a13.z2 \\ a21.x + a22.y = a24 - a23.z2 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tenemos otro punto B(x2, y2, z2).

Tengo así un vector director de la recta es

v = AB = (x2-x1, y2-y1, z2-z1)

Tenemos ya la recta r en la forma r = <A; v>,
y continuamos como en el caso A).

2.3.- Distancia desde un punto a un plano

Por motivos conceptuales hago una exposición completa de este punto, pero advierto que la "fórmula práctica" para obtener la distancia desde un punto a un plano la veremos en el siguiente apartado 2.4.

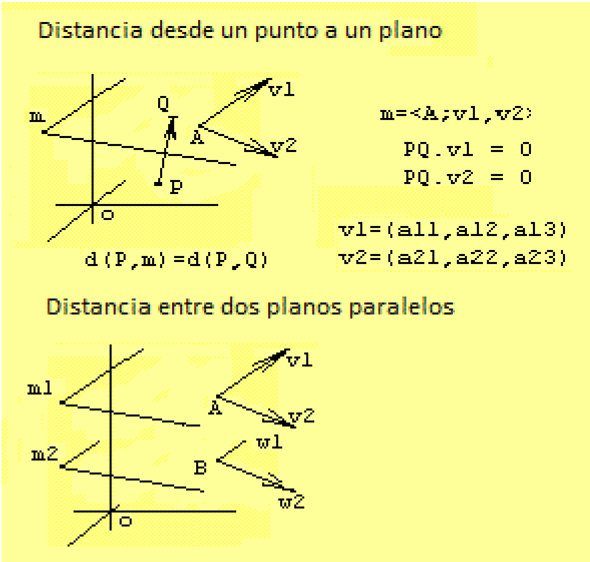
Caso A: Plano dado por su ecuación vectorial

Def.:

"Distancia desde un punto P hasta un plano m es la menor de las distancias d(P, Q) cuando Q recorre el plano m".

Sean P(x1, y1, z1) un punto y m = <A; w1, w2> un plano determinado por el punto A y dos vectores directores w1, w2. Las rectas que pasan por P y no son paralelas al plano lo cortan en algún punto Q.

Consideremos las distancias d(P, Q) cuando Q recorre el plano. Es fácil convencerse de que la menor de estas distancias la obtenemos cuando Q es el corte con m de la recta r perpendicular a m y pasando por P.



Tenemos

Punto P(x1, y1, z1)

Plano m = <A; w1, w2>, donde A(x0, y0, z0)

w1 = (a11, a12, a13), w2 = (a21, a22, a23)

Un punto Q cualquiera del plano viene dado por

$$OQ = OA + t.w1 + u.w2 \qquad (26)$$

Tenemos además: OQ = OP + PQ, de donde

PQ = OQ-OP, PQ = OA + t.w1 + u.w2 – OP

PQ = (OA-OP) + t.w1 + u.w2

Esta última expresada en coordenadas queda:

PQ = (x0-x1, y0-y1, z0-z1)+ t.(a11, a12, a13) +

+ u.(a21, a22, a23)

PQ = (x0-x1 + a11.t + a21.u, y0-y1 + a12.t + a22.u,

z0-z1 + a13.t + a23.u)

(27)

Si Q es el corte de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano, este vector PQ es ortogonal con w1 y w2:

PQ * w1 = 0, PQ * w2 = 0.

Por tanto tenemos

0 = a11.(x0-x1 + a11.t + a21.u) + a12.(y0-y1 + a12.t + a22.u) +

+ a13.(z0-z1 + a13.t + a23.u)

0 = a21.(x0-x1 + a11.t + a21.u) + a22.(y0-y1 + a12.t + a22.u) +

+ a23.(z0-z1 + a13.t + a23.u)

(28)

Después de operar, agrupar y simplificar queda un sistema de la forma

$$\begin{cases} A11.t + A12.u = B1 \\ A21.t + A22.u = B2 \end{cases} \qquad (29)$$

De aquí conseguimos despejar el valor de los parámetros t y u, y obtener el punto Q, pie de la perpendicular. Después:

d(P, m) = d(P, Q)

Caso B: El plano dado por su ecuación general

Sea el plano m: a11.x + a12.y + a13.z –a14 = 0

Podemos optar por pasar al formato m = <A; w1, w2> paramétrico-vectorial. Para conseguirlo hemos de obtener tres puntos A, B, C del plano. Damos valor a las dos incógnitas libres y obtengo el valor de la otra. Tengo así el punto A. Del mismo modo obtenemos los puntos B y C. Después tomamos los vectores

w1 = AB, w2 = AC, y tenemos la ecuación

vectorial del plano: m = <A; w1, w2> (30)

Operamos después como en el caso A.

Más cómodo resultará aplicar la conclusión final del siguiente punto.

2.4.- Distancia desde el origen O(0, 0, 0) a un plano

m: ax + by + cz + d = 0

Voy a obtener un vector w que lleve desde O hasta m en la dirección de la perpendicular.

Obtengo dos vectores w1, w2, directores de m.

Dando valores: y = 0, z = 0 -- > x0 = -d/a

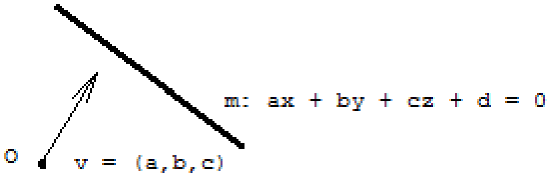
A(x0, 0, 0)

y = 1, z = 0 -- > x1 = -(b+d)/a -- >punto P1(x1, 1, 0)

y = 0, z = 1 -- > x2 = -(c+d)/a -- >punto P2(x2, 0, 1)

y tengo los vectores:

w1 = (x1-x0, 1, 0), w2 = (x2-x0, 0, 1)



Obtengo un vector v ortogonal con w1 y w1:

$$v = (x, y, z) \dashrightarrow \begin{cases} x.(x1 - x0) + y \ = 0 \\ x.(x2 - x0) + z = 0 \end{cases} \dashrightarrow$$

$$\text{doy valor } x = 1 \dashrightarrow \begin{cases} y \ = \ x0 - x1 \ = \ -\frac{d}{a} + \frac{b+d}{a} = \frac{b}{a} \\ z = x0 - x2 = \ -\frac{d}{a} + \frac{c+d}{a} \ = \frac{c}{a} \end{cases},$$

v = (1, b/a, c/a). Puedo tomar uno proporcional como es

v = (a, b, c).

Corolario: (Muy práctico)

Dado el plano m: Ax + By + Cz + D = 0, la dirección definida por el vector w = (A, B, C) es perpendicular a m.

Otra forma: El vector w es ortogonal con el sub-espacio <w1, w2> director del plano**.**

Para obtener la distancia d(O, m) basta construir un nuevo vector w que nos lleve desde O hasta el plano, punto Q, en esa dirección ortogonal a m.

Si 'normalizo' el vector v = (a, b, c), obteniendo

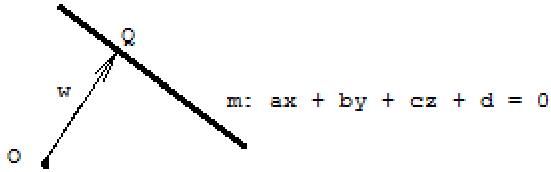
$$u = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot (a, b, c) = (n1, n2, n3)$$

el valor de t tal que OQ = t.u es justo la distancia deseada.

w = t.(n1, n2, n3) = (n1.t, n2.t, n3.t); las componentes deben cumplir la ecuación del plano:

a.(n1.t) + b.(n2.t) + c.(n3.t) + d = 0,

(a.n1 +b.n2 +c.n3).t = -d,   t = $\frac{-d}{a.n1+b.n2+c.n3}$

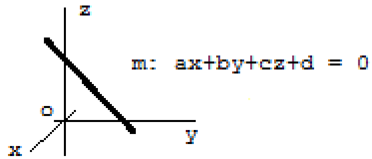


Teniendo en cuenta lo que representan n1, n2, n3, resulta

$$t = \frac{-d}{a.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+b.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+c.\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} =$$

$$= \frac{-d.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{-d.(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2).\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Conclusión 1: **d(O, m) =** $\boldsymbol{\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

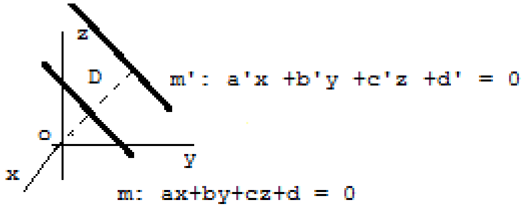


El valor d(O, m) de la fórmula puede resultar positivo o negativo. Evidentemente, si lo que interesa es la distancia tomaremos el valor absoluto.

Corolario 2: **Distancia entre dos planos paralelos**

m: ax + by + cz + d = 0,

m’: a’x + b’y + c’z + d’ = 0



Por ser paralelos: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \rightarrow \begin{cases} a' = k.a \\ b' = k.b \\ c' = k.c \end{cases}$ -- >

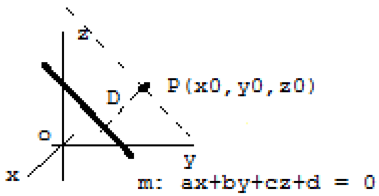
m': k.(ax + by + cz) + d' = 0

$$D = d(O, m') - d(O, m) = \frac{-d'}{k.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Corolario 3: Consecuencia del Corolario 2

Distancia desde el punto P(x0, y0, z0) al plano m

m: ax + by + cz + d = 0



Hago pasar por P un plano m' paralelo a m. Será de la forma

m': ax + by + cz + d' = 0, donde d' lo fijamos con la condición de pasar por P:

d' = -(ax0 + by0 + cz0), y por tanto
m': ax + by + cz - (ax0 + by0 + cz0) = 0,

Entonces

d(P, m) = D = d(O, m') –d(O, m) =

$$= \frac{\mathrm{ax0 + by0 + cz0}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{ax0+by0+cz0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

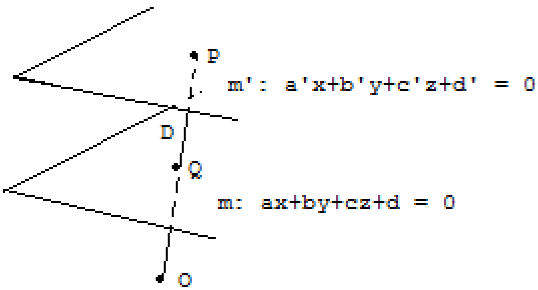
Conclusión:

$$\mathbf{d(P,\ m)} = \frac{ax0+by0+cz0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \mathbf{(*)}$$

Esta fórmula es ¡excepcionalmente práctica!

2.5.- Distancia entre dos planos

Sean dos planos m, m’



Def.:

Es la menor de las distancias d(P, Q) cuando P recorre el plano m y Q recorre el plano m’.

Evidentemente, si los planos se cortan dicha distancia es cero.

Por tanto los planos m y m’ han de ser paralelos.

Fijamos un punto P de m y calculamos la distancia desde P hasta m’ como hicimos en el punto anterior para desde un punto a un plano.

La distancia entre los dos planos es:

d(m, m’) = d(P, m’)

NOTA:
No obstante recomiendo aplicar el resultado obtenido en el Corolario 2 del punto anterior.

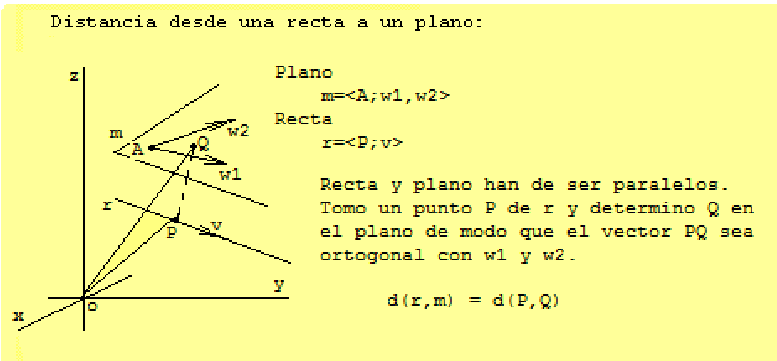
2.6.- Distancia desde una recta a un plano

Def.:

"Es la menor de las distancias d(P, Q) cuando P recorre la recta y Q recorre el plano".

Evidentemente, si la recta no es paralela al plano le cortará en un punto A, y la distancia es cero.

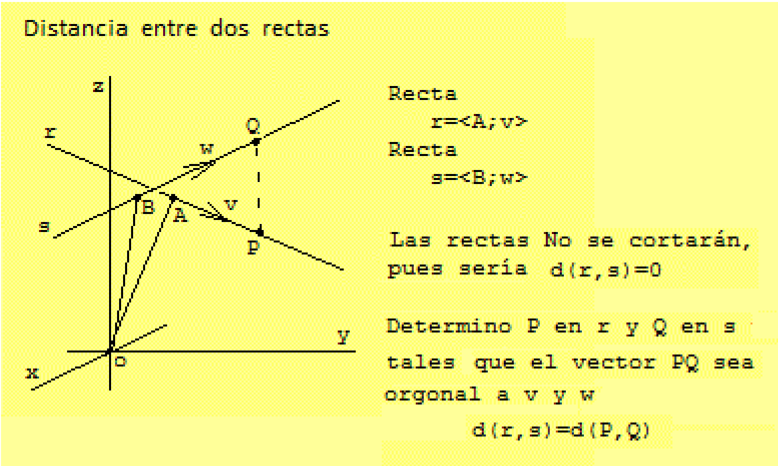
Suponemos r paralela al plano m. La distancia no depende de cuál punto P tomamos de r. Fijamos un punto P en la recta r, y procedemos como para "distancia desde un punto al plano m": d(r, m) = d(P, m)



2.7.- Distancia entre dos rectas

Def.-

"Distancia entre r y s es la menor de las distancias d(P, Q) cuando P recorre s y Q recorre r".



Caso A: Tenemos ecuaciones paramétrico-vectoriales

Sean las rectas

r: <A; v>, s: <B; w>,

donde

A(x1, y1, z1), v = (a11, a12, a13)
B(x2, y2, z2), w = (a21, a22, a23)

Sean P un punto de r y Q un punto de s. La solución la tenemos cuando la recta determinada por PQ es perpendicular a r y a s simultáneamente.

Entonces, el vector PQ ha de ser ortogonal a v y w

Tenemos

OP = OB + t.w, OQ = OA + u.v

Por otro lado

OQ = OP + PQ, de donde
PQ = OQ – OP = (OA- OB) + u.v – t.w

PQ = (x1-x2, y1-y2, z1-z2) + u.(a11, a12, a13) - t.(a21, a22, a23)

Es decir, las componentes de PQ son

$$\begin{cases} x = x1 - x2 + a11.u - a21.t \\ y = y1 - y2 + a12.u - a22.t \\ z = z1 - z2 + a13.u - a23.t \end{cases} \qquad (31)$$

De las condiciones de ortogonalidad

$$PQ.v = 0, \quad PQ.w = 0 \qquad 32)$$

obtenemos las siguientes dos igualdades

$$0 = a11.(x1\text{-}x2 + a11.u - a21.t) + a12.(y1\text{-} y2 + a12.u - a22.t) + \\ + a13.(z1\text{-}z2 + a13.u - a23.t)$$

$$0 = a21.(x1\text{-}x2 + a11.u - a21.t) + a22.(y1\text{-}y2 + a12.u - a22.t) + \\ + a23.(z1\text{-}z2 + a13.u - a23.t)$$

(33)

Continuando obtenemos

$$0 = a11.(x1\text{-}x2) + a12.(y1\text{-}y2) + a13.(z1\text{-}z2) + \\ + (a11^2 + a12^2 + a13^2).u - \\ -(a11.a21+a12.a22+a13.a23).t$$

$$0 = a21.(x1\text{-}x2) + a22.(y1\text{-}y2) + a23.(z1\text{-}z2) + \\ + (a21.a11+a22.a12+a23.a13).u - \\ -(a21^2 + a22^2 + a23^2).t$$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (los dos parámetros u, t)

$$\begin{cases} A11.t + A12.u = B1 \\ A21.t + A22.u = B2 \end{cases} \qquad (34)$$

Resuelto el sistema obtengo los puntos P y Q, y con ello la distancia:

$$d(r, s) = d(P, Q)$$

Corolario:

El proceso anterior es también válido para obtener la recta r' perpendicular a dos rectas dadas, r, s, apoyándose en ellas.

Hemos supuesto que las rectas r, s no se cortan.

Tres caso:

Pueden darse tres casos:

-Son coplanarias y se cortan: Distancia entre sí cero

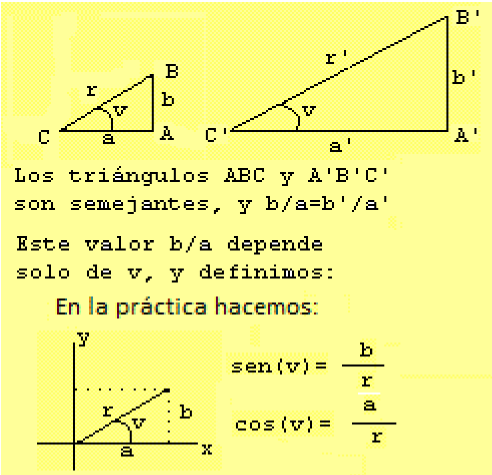
-Si son coplanarias (caso de ser paralelas), el sistema es indeterminado (infinitas soluciones: podemos tomar cualquier punto de una de las rectas, y calcular distancia desde punto a recta.

-Si No son coplanarias, el sistema anterior tendrá solución única y nos da los dos puntos P, Q.

Algo de TRIGONOMETRÍA

3.1.- Recordatorio de conceptos Trigonométrícos

Primeras definiciones:



Los dos triángulos son semejantes por tener los tres ángulos iguales, y por tanto b/r = b'/r', a/r = a'/r' . Por otro lado, si el triángulo es rectángulo es suficiente dar el ángulo v, puesto que el ángulo en B vale 90º-v. Esto nos dice que los valores b/r y a/r dependen solo del ángulo v. Por tanto permite definir las 'razones' a/r, b/r en función de v, dándoles nombre como sigue:

seno de v $= \frac{b}{r}$

coseno de v $= \frac{a}{r}$

A partir de éstas definimos también

tangente de v $= \frac{b}{a} = \frac{seno}{coseno}$

cotangente de v $= \frac{a}{b} = \frac{coseno}{seno}$

secante de v $= \frac{r}{a} = \frac{1}{coseno}$

cosecante de v $= \frac{r}{b} = \frac{1}{seno}$

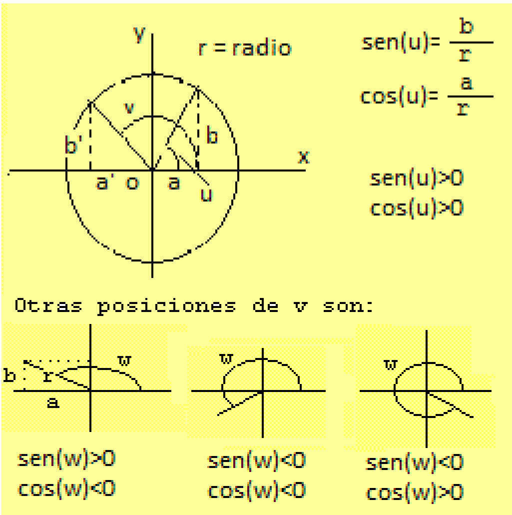
La notación convenida en matemáticas es la siguiente:

sen(v) = $\frac{b}{r}$, cos(v) = $\frac{a}{r}$

tan(v) $= \frac{sen(v)}{\cos(v)}$, cota(v)= $\frac{cos(v)}{\text{sen}(v)}$

sec(v) = $\frac{1}{\cos(v)}$ 1/cos(v), cose(v)= $\frac{1}{\text{sen}(v)}$

Observa la figura:



Sobre un sistema de ejes coordenados procedemos como sigue:

Tomo una circunferencia con centro en O y radio r. En la circunferencia marco un punto P, y trazo desde O una semirrecta que cortará a la circunferencia en el punto P. Por P trazo una paralela a ox, que cortará a oy determinando el segmento b. Por P trazo una paralela a oy, que cortará a ox determinando el segmento a.

El segmento OP tiene longitud igual al radio r de la circunferencia.

Definición:
Si llamamos g al ángulo que forman la semirrecta +ox y la semirrecta determinada por OP, definimos:

Cos(g) = $\frac{a}{r}$, Sen(g) = $\frac{b}{r}$

Las restantes del mismo modo que vimos antes.

Propiedades:

Teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras el alumno será capaz de comprobar (demostrar) las siguientes igualdades:

$sen^2(v) + cos^2(v) = 1$

$1 + tan^2(v) = sec^2(v)$

$1 + cota^2(v) = cose^2(v)$

IMPORTANTE:

La medida del ángulo g se obtiene trazando un arco desde cualquier punto del semieje +ox, girando en sentido contrario a las agujas del reloj, hasta encontrarse con la semi-recta que pasa por P. Por convenio, haciéndolo así el valor de g es positivo. Cuando giramos en el mismo sentido de las agujas del reloj el valor de g se considera negativo.

Para el signo de los segmentos a, b, tenemos en cuenta lo que ya debemos sabe:

- Por el eje ox: Partiendo de O hacia derecha es positivo, hacia la izquierda es negativo.
- Por el eje oy: Partiendo de O hacia arriba es positivo, hacia abajo es negativo.

Algunos valores más frecuentes son:

cos(0º) = 1,	sen(0º) = 0
cos(30º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$,	sen(30º = $\frac{1}{2}$
Cos(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,	sen(45º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cos(60º) = $\frac{1}{2}$,	sen(60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos(90º) = 0,	sen(90º) = 1
Cos(180º = -1,	sen(180º) = 0
Cos(270º) = 0,	sen(270º) = -1
Cos(360º) = 1,	sen(360º) = 0

PRODUCTOS con Vectores

4.1.- Producto Escalar de dos vectores en V_3 . Generalización

Definición de un producto escalar

Fijada una base B = {e1, e2, e3} en V_3, podemos definir, y definimos los siguientes valores:

$$e1*e1= k11,\ \ e1*e2 = k12,\ \ e1*e3 = k13,$$

$$e2*e1= k21,\ \ e2*e2 = k22,\ \ e2*e3 = k23,$$

$$e3*e1= k31,\ \ e3*e2 = k32,\ \ e3*e3 = k33, \qquad (1)$$

Además, al hacer extensible, a todo V_3, la definición del operador *, imponemos que se cumplan las propiedades básicas del cálculo, i en particular la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores.

Para dos vectores

$$v = a11.e1+ a12.e2 + a13.e3$$
$$w = a21.e1+ a22e2 + a23e3$$

cualesquiera obtenemos:

$$v * w = (a11.e1+ a12.e2 + a13.e3) * (a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) =$$
$$= a11.a21.k11 + (a11.a22 + a12.a21).k12 +$$
$$+ (a11.a23 + a13.a11).k13 + a12.a22.k22 +$$
$$+ (a12.a23 + a13.a22).k23 + a13.a23.k33 \qquad (2)$$

Queda así definida una operación en V_3 que llamaremos “Producto Escalar” de dos vectores.

v * w = (a11.e1+ a12.e2 + a13.e3) * (a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) =

= a11.(a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) * e1 +

+ a12. (a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) * e2 +

+ a13. (a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) * e3 =

= a11.(a21.k11 + a22.k21 + a23. k31) +

+ a12.(a21.k12 + a22.k22 + a23.k32) +

+ a13.(a21.k13 + a22.k23 + a23.k33)

Utilizando el producto de matrices (Véase en Vol. 10), la expresión (2) para el producto escalar v * w podemos expresarla como sigue:

$$v * w = (a11 \quad a12 \quad a13).\begin{pmatrix} k11 & k21 & k31 \\ k12 & k22 & k32 \\ k13 & k23 & k33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a21 \\ a22 \\ a23 \end{pmatrix}$$

Se cumplen las siguientes propiedades aunque su demostración resulta laboriosa:

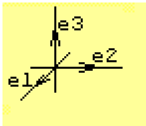
a) Conmutativa: v * w = w * v
b) Distributiva: v * (w1 + w2) = v * w1 + v * w2
c) v * (a.w) = (a.v) * w = a.(v * w), donde a es un valor real (es un escalar)

Observa que los valores asignados en (34) son arbitrarios, lo que significa que podemos definir un ‘producto escalar’ de muy diferentes formas. Veremos enseguida que existe un caso muy especial.

4.2.- Producto escalar ordinario. Sistema de referencia ortogonal.

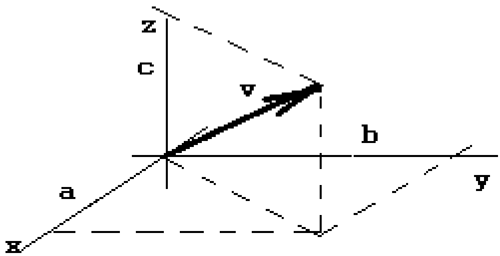
Sistema de referencia ortonormal

En el Sistema de referencia cartesiano tomamos la base de vectores B = {e1, e2, e3}, y sobre cada eje la unidad de medida es la longitud de e1, e2, e3, respectivamente. Además el ángulo que forman entre sí dos a dos es de 90º.



Para cualquier vector v = a.e1 + b.e2 + c.e3 su longitud viene dada aplicando el Teorema de Pitágoras, resultando

Módulo de v:



$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Longitud = módulo de v)

Def.: Definimos un producto escalar mediante la igualdad

v * w = /v/./w/.cos(v, w)

Evidentemente se cumple

$$e_i * e_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Para un vector cualquiera de V_3, v = (a, b, c), expresado en la referida base, significa que

$$v = a.e1 + b.e2 + c.e3$$

y lo mismo w = (a', b', c'), significa

$$w = a'.e1 + b'.e2 + c'.e3$$

Su producto escalar, siguiendo los mismos pasos que en el caso general, nos da como resultado

$$v * w = a.a' + b.b' + c.c'$$

En particular

$$v * v = a^2 + b^2 + c^2$$

y por tanto tengo para el módulo de v

$$/v/ = \sqrt{v * v} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

En lo que sigue, por 'producto escalar' nos referiremos a este producto escalar ordinario, salvo que se diga otra cosa.

Sistema de Referencia Ortogonal:

Sea una base B = {v1, v2, v3} de V_3

"Diremos que los vectores vi, vj son ortogonales entre sí si su producto escalar es cero:

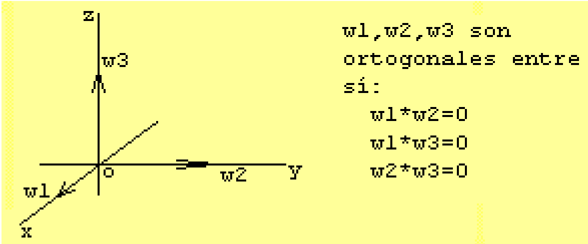
$$vi * vj = 0$$

"Diremos que B es una base 'Ortogonal' si se cumple

$$vi * vj = 0, \text{ siempre que } j \neq i.$$

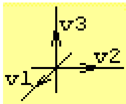
es decir, son ortogonales dos a dos distintos.

En este caso diremos que R= {O; v1, v2, v3} es un Sistema de ref. ortogonal.



Sistema de Referencia Ortonormal:

"Diremos que la base B es 'ortonormal' si se cumple



$$vi * vj = \begin{cases} 1, \text{ si } j = i \\ 0, \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

Diremos que R = {O; v1, v2, v3} es un Sistema de referencia ortonormal.

Respecto de un Sistema de Referencia Ortonormal, el producto escalar de dos vectores v = (a, b, c), w = (a', b', c') tiene como resultado

$$v * w = a.a' + b.b' + c.c'$$

y el módulo de v: $/v/ = \sqrt{v * v} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Salvo que se diga otra cosa, en todo lo que sigue suponemos que trabajamos en un sistema de referencia ortonormal.

4.3.- Producto vectorial de dos vectores. Propiedades

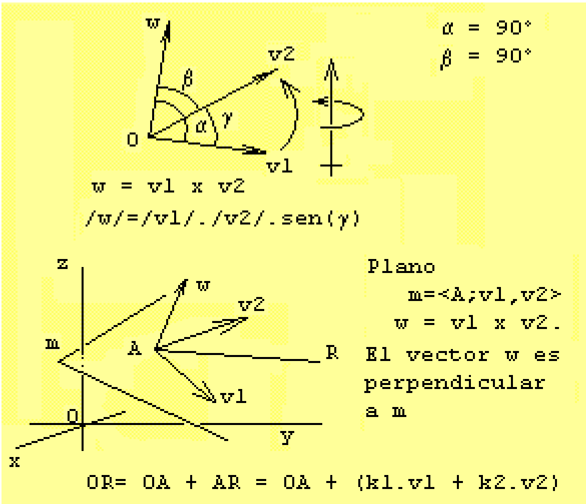
Sean dos vectores V = (a, b, c), W = (a', b', c'). Sus módulos son:

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad |W| = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}$$

Definición

Para dos vectores cualesquiera V y W, definimos su ‘producto vectorial’ como el único vector U que cumple estas dos condiciones:

a) Es ortogonal a V y a W
b) Su módulo es /U/ = |V|.|W|.sen(V^W), donde



V^W es el ángulo que forman entre sí (recorrido desde V a W en el sentido que a continuación explicamos).

Lo designamos mediante V x W.

Orientación del vector U = V x W: Regla del sacacorchos:

Por definición:

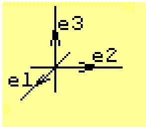
El vector U = V x W ‘apunta’ en el mismo sentido que el avance del sacacorchos cuando lo giramos desde V hasta W en el sentido de las agujas del reloj y por el camino más corto.

Es muy importante el hecho de que, por definición, el vector V x W tiene como dirección la perpendicular al plano determinado por V y W.

Observa el gráfico y compáralo con el avance’ o ‘retroceso’ del sacacorchos cuando descorchamos una botella.

El alumno puede comprobar lo que ocurre para los vectores de la base B= {e1, e2, e3} ortonormal del sistema de ref.:

Mostramos el resultado:



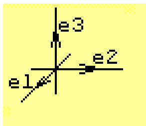
e1 x e2 = e3
e2 x e3 = e1
e3 x e1 = e2

Producto vectorial en coordenadas:

Supongamos una base ortonormal B = {e1, e2, e3}. Para sus vectores obtenemos:

ei x ei = 0, i=1,2,3 (vector cero)

y para los restantes pares



e1 x e2 = e3,   e2 x e3 = e1,   e3 x e1 = e2

e2 x e1 = -e3,   e1 x e3 = -e2,   e3 x e2 = -e1

(*)

Para dos vectores V = (x1, x2, x3),   W = (y1, y2, y3) cualesquiera, y aceptando que se cumple (porque así es) la propiedad distributiva, obtenemos:

VxW =(x1e1+ x2e2 + x3e3) x (y1e1+ y2e2 + y3e3) =

= (x1.y2).e1xe2 + (x1.y3).e1xe3 + (x2.y1).e2xe1 + (x2.y3).e2xe3 + (x3.y1).e3xe1 + (x3.y2).e3xe2 =

(Teniendo en cuenta los resultados vistos en (*))

= (x1.y2 - x2.y1).e3 + (x3.y1 - x1.y3).e2 + (x2.y3 - x3.y2).e1

Queda

V x W = (x2.y3 - x3.y2).e1 - (x1.y3 - x3.y1).e2 + (x1.y2 - x2.y1).e3

NOTA: Para alumnos avanzados (Consultar Determinantes en Vol.10)

Puede comprobar que el resultado anterior se puede obtener mediante el siguiente determinante:

$$V \text{ x } W = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{vmatrix}$$

Propiedad del producto vectorial:

Cumple las siguientes propiedades, que el alumno comprobará si lo prefiere, o aceptará sin demostración:

a) W x V = - V x W, (no es conmutativo)

b) V x (W1 + W2) = V x W1 + V x W2 (sí es distributivo)

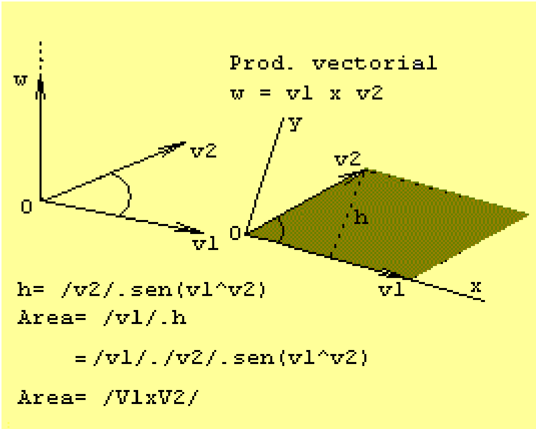
c) V x (a.W) = (a.V) x W = a.(V x W) (sí cumple la homotética)

4.4.- Interpretación geométrica del producto vectorial. Cálculo de áreas

El vector resultante W es siempre perpendicular (ortogonal) al plano definido por los vectores v1, v2, y en particular es ortogonal con v1 y con v2, simultáneamente.

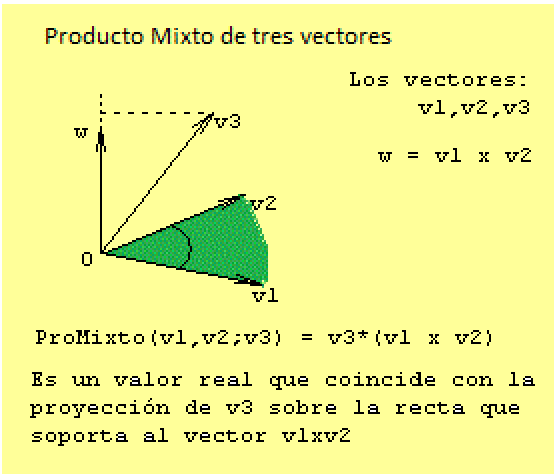
El módulo de W coincide con el área del paralelogramo definido por los vectores v1, v2.

Observa cómo hemos utilizado la trigonometría para obtener la altura del citado paralelogramo.



4.5.- Producto Mixto de tres vectores

Def.:
Sean tres vectores V, W, U



"Producto mixto de tres vectores V, W, U es el valor que resulta de hacer el producto escalar de V por el producto vectorial de W y U, en este orden".

Lo representamos mediante V * (W x U), y su valor es:

$$V * (W \times U) = /V/./W \times U/.\cos(V\wedge(W \times U))$$

4.6.- Interpretación geométrica del producto mixto. Cálculo de Volúmenes

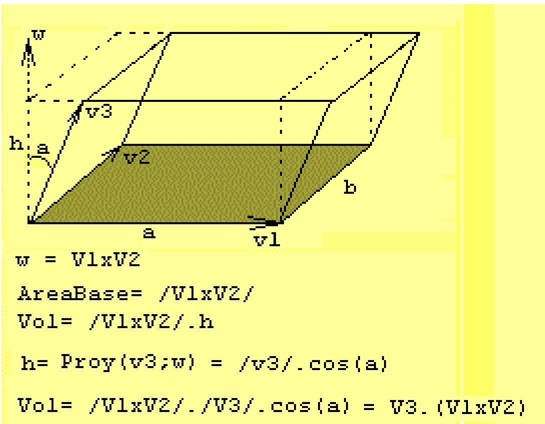
A) Volumen del paralelepípedo

Observa las figuras

En la figura se justifica que el volumen del prisma determinado por los tres vectores coincide con el valor del producto mixto de estos tres vectores.

Existe volumen no nulo si, y solo si, los tres vectores son linealmente independientes.

En efecto, si w fuese combinación lineal de v1, v2 estaría sobre la base y el ángulo a sería de 90º, con lo cual cos(a) = 0, y el producto mixto sería también cero.



B) Volumen de las Pirámides

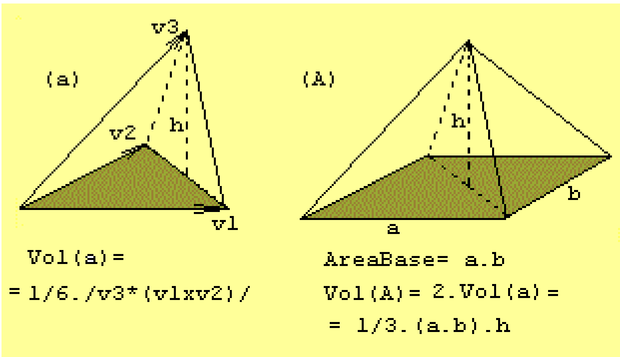
Llamamos 'Pirámide' a aquellos cuerpos del espacio formados por:

"Una base que es un polígono de n lados, y, cerrando el espacio, n caras que son triángulos confluyendo todos en un punto común (vértice)".

De Geometría básica sabemos que

Volumen = $\frac{1}{3}$ .AreaBase x Altura
Super. lateral = Suma área caras
Super. total = Suma área caras + área base

Ejemplos en la figura

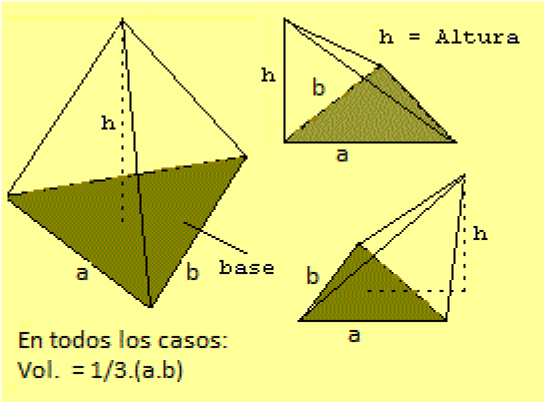


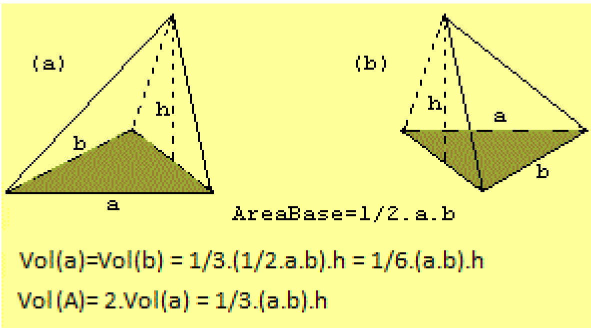
A) Pirámide de base triangular:

Si seccionamos convenientemente el paralelepípedo obteniendo pirámides de base triangular, podemos observar que resultan 6 de estas pirámides, todas con el mismo volumen. Por tanto para cada una tenemos

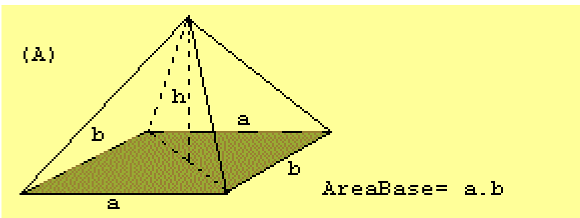
$$\text{Vol.} = \frac{1}{6} . /v3 * (v1 \times v2)/$$

Observa la figura





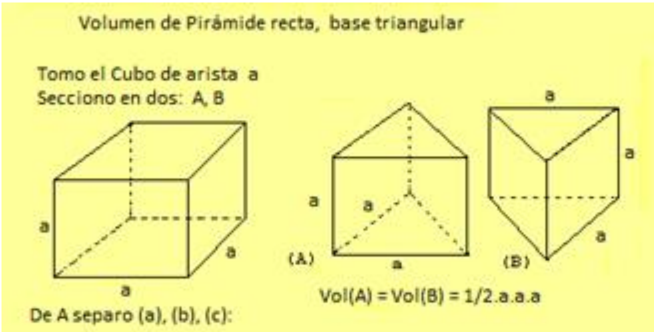
B) Pirámide de base rectangular: Observa las figuras



El mismo razonamiento anterior, y ahora coincide con la suma de dos pirámides de base triangular. Por tanto su volumen es

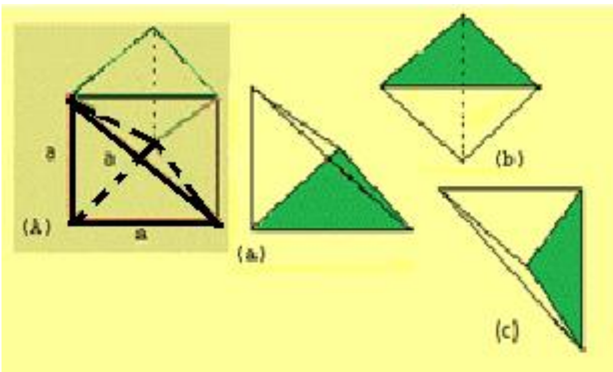
$$\text{Vol.} = \frac{1}{3}\,.\ /v3 * (v1 \times v2)/$$

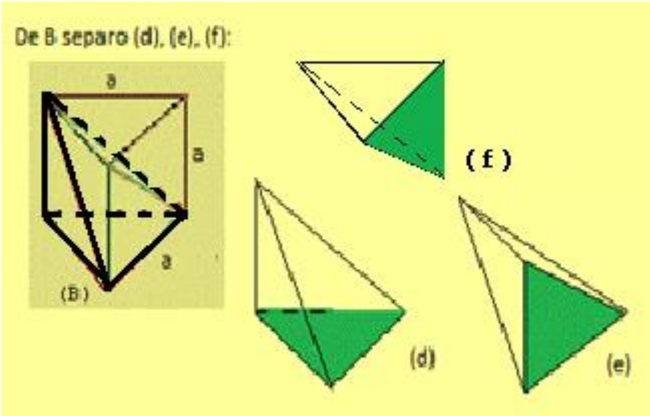
Observa con detenimiento el siguiente proceso de particiones para llegar a obtener cuerpos piramidales:



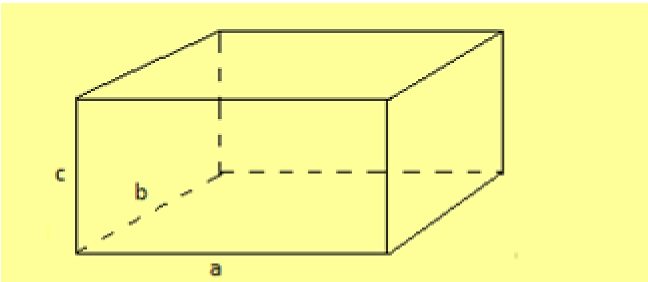
De la parte (A) separamos tres pirámides (a), (b), (c)

De la parte (B) separamos tres pirámides (a), (b), (c)

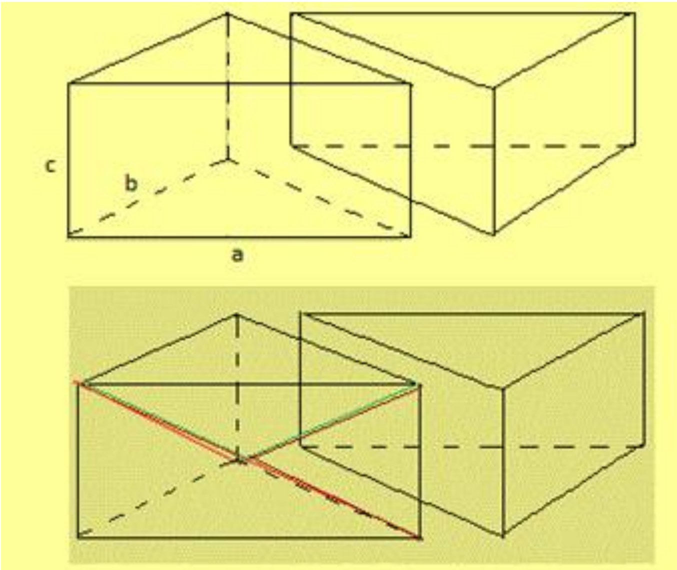




Del mismo modo procederíamos si tomamos un prisma recto con aristas a, b, c.



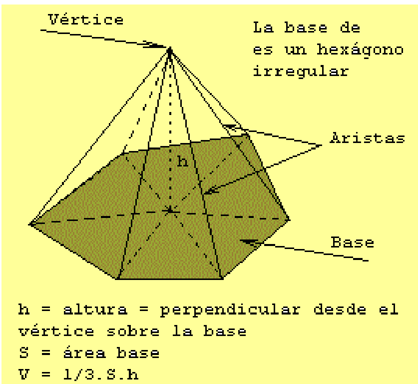
De cada una de estas dos partes obtenemos tres pirámides



Para cada pirámide su volumen es

$$\text{Vol(Pirámide)} = \frac{1}{3}.\text{AreaBase.Altura}$$

C) Pirámide cuya base es un polígono cualquiera regular o no



En la figura mostramos el caso de base hexágono no regular.
