ESTUDIO DE LAS CÓNICAS

Cónicas de Apolonio

PROMOCIÓN
NO VENTA

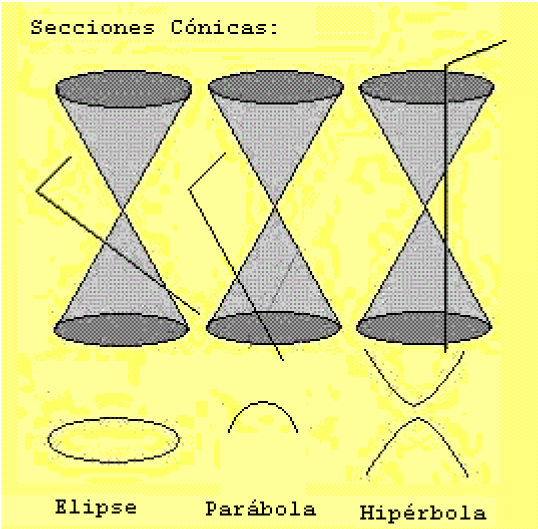
Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Alejo González Criado

Salamanca,   Diciembre 2019

ÍNDICE

Secciones Cónicas

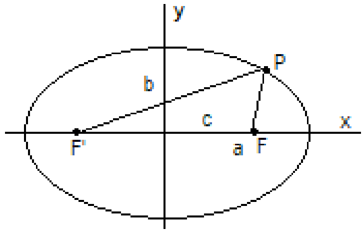


1.- LA ELIPSE

Definiciones: *Elementos de la Elipse*

Fijamos dos puntos F y F' del plano, que llamaremos focos, y fijamos un valor k mayor que d(F, F').

'Llamamos Elipse al lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de sus distancias a los puntos F y F' sea igual a k'. Esto es: d(P, F) + d(P, F') = k



Elementos de la Elipse:

-Los focos: Son los puntos fijos F y F’

-La recta focal: Recta que pasa por F y F’

-Su centro: C(xo, yo),punto medio del segmento FF’

-Sus ejes de simetría: La recta que contiene los focal (eje focal), y la perpendicular a ésta que pasa por el centro (eje secundario).

-Los puntos de corte de la elipse con sus ejes: A,A’ sobre el eje focal, B,B’ sobre el eje secundario.

Parámetros de la elipse:

-La medida de sus semiejes: a = d(A,C) sobre el eje focal, y b = = d(B,C) sobre el eje secundario.

-La distancia Semifocal: c = d(C, F) = d(C, F’)

-La excentricidad: e = c/a, (Siempre será $e < 1$, ya que $c < a$. (Cuando $c = a$ será $e = 1$, y la elipse se convierte en el segmento F’F).

Relación entre los parámetros: Se cumplen

$$a^2 = c^2 + b^2, \qquad 2.a = k$$

Ecuación de la Elipse:

En lo que sigue obtendremos: $A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0$

En lo que sigue suponemos que el eje focal es paralelo al eje ox, y por tanto, si F(xo, yo), F'(xo', yo') son los focos, se cumple yo' = yo.

La igualdad   d(P, F) + d(P, F') = k

significa:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2} = k \qquad (1)$$

Operamos para hacer desaparecer los radicales, como sigue.
Despejamos un radical

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = k - \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$$

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase 'notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = k^2 + (x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2 - 2.k.\sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$$

Desarrollando los cuadrados:

$(x^2 + xo^2 – 2.xxo) + (y^2 + yo^2 – 2.yyo) =$

$= k^2 + (x^2 + xo'^2 -2.xxo') + (y^2 + yo'^2 -2.yyo') – 2.k.\sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2}$

Simplificando y sacando factor común tengo

$(xo^2 - xo'^2 + yo^2 - yo'^2)$ - 2.(xo – xo').x - 2.(yo - yo').y   - k^2 =

$$= -2.k.\sqrt{(x - x_0{'})^2 + (y - y_0{'})^2}$$

Y teniendo en cuenta que yo' = yo

$$-2.(xo – xo').x + (xo^2 - xo'^2) - k^2 = -2.k.\sqrt{(x - x_0{'})^2 + (y - y_0{'})^2}$$

$$2.k.\sqrt{(x - x_0{'})^2 + (y - y_0{'})^2} = 2.(xo – xo').x - (xo^2 - xo'^2) + k^2$$

Hago:

$m = 2.(xo - xo')$
$l = xo'^2 - xo^2 + k^2$, y queda

$$2.k.\sqrt{(x - x_0{'})^2 + (y - y_0{'})^2} = m.x + l$$

Elevando al cuadrado

$$4.k^2.[\,(x - x_0{'})^2 + (y - y_0{'})^2\,] = m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x$$

$$4.k^2.[x^2 + y^2 -2.xo'x -2.yo'y +xo'^2 +yo'^2] = m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x$$

Pasándolo todo al miembro izquierda y agrupando

$$(4.k^2 – m^2).x^2 + 4.k^2.y^2 + (-8.k^2.xo' -2.m.l).x – 8.k^2.yo'.y +$$
$$+ [4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) – l^2] = 0$$

Haciendo

$A= 4.k^2 – m^2$
$B= 4.k^2$
$D= -8.k^2.xo' - 2.m.l$
$E= -8.k^2.yo'$
$F= 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) – l^2$

tenemos la ecuación:

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0 \qquad (2)$$

Casuística:

a) Supongamos que el eje focal coincide con ox, en cuyo caso es yo = 0, yo' = 0. Entonces

$m = 2.(xo - xo')$
$l = xo'^2 - xo^2 + k^2$, -- >

$m = 2.(xo - xo')$
$l = -xo^2 + xo'^2 + k^2$

$A= 4.k^2 – m^2$
$B= 4.k^2$
$D= -8.k^2.xo' - 2.m.l$
$E= -8.k^2.yo'$
$F= 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) – l^2$ -- >

$A = 4.k^2 – m^2$
$B = 4.k^2$
$D = -8.k^2.xo'-2.m.l$
$E = 0$
$F = 4.k^2.xo'^2 – l^2$

Y la ecuación queda de la forma

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + F = 0 \qquad (3)$$

b) Supongamos que la recta focal coincide con el eje ox, y que además el centro de la elipse coincide con (0,0).

Entonces yo = 0, yo' = 0, xo = c, xo' = - c, y queda

$m = 2.(xo - xo')$
$l = xo'^2 - xo^2 + k^2$, -- >

$$m = 2.(c - (-c)) = 4.c$$
$$l = (-c)^2 - c^2 + k^2 = k^2$$

$A = 4.k^2 - m^2$
$B = 4.k^2$
$D = -8.k^2.xo' - 2.m.l$
$E = -8.k^2.yo'$
$F = 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2) - l^2$ -- >

$$A = 4.k^2 - m^2$$
$$B = 4.k^2$$
$$D = 8.k^2.c - 2.m.l$$
$$E = 0$$
$$F = 4.k^2.c^2 - l^2 = k^2.(4.c^2 - k^2)$$

Y la ecuación queda de la forma

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + F = 0 \qquad (4)$$

ECUACIÓN Reducida, Ecuación canónica (normal)

Teniendo en cuenta que k = 2.a, veamos cómo son los valores de A, B y F en función de los parámetros a, b, c.

Tenemos (Teniendo en cuenta, como vimos, que $a^2 - c^2 = b^2$

$A = 4.4.a^2 - 16.c^2 = 16.(a^2 - c^2) = 16.b^2$
$B = 16.a^2$

Observa que $A > 0$, $B > 0$

$D = 32.a^2.c – 8.c.4.a^2 = 0$
$F = 16.a^2.c^2 –16.a^4 = 16.a^2.(c^2 –a^2) = -16.a^2.b^2$

Observa que $F < 0$, $- F > 0$, entonces $A.x^2 + B.y^2 + F = 0$ -- >

$$A.x^2 + B.y^2 = - F \qquad \text{(Ecuación reducida)} \qquad (5)$$

Divido los dos miembros por –F, y tengo

$$-\frac{F}{A} = a^2,\ -\frac{F}{B} = b^2,\ -\frac{F}{F} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

(Ecuación normal ó canónica de la Elipse)

Consecuencia:

Ecuación normal de la Elipse cuando los ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas y su centro es un punto cualquiera (xo, yo):

Teniendo en cuenta el resultado obtenido más arriba:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si hacemos una traslación de modo que el centro de la elipse sea el punto C(xo, yo), la nueva ecuación de la elipse es:

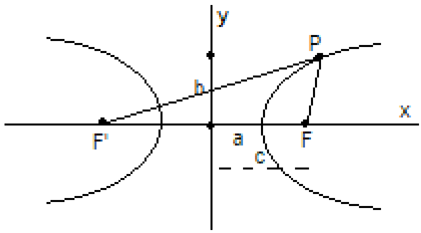
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (6')$$

2.- LA HIPÉRBOLA

Definiciones: Elementos de la Hipérbola
Fijamos dos puntos F y F' del plano que llamamos focos, y una constante k < d(F, F').

"Llamamos Hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos F y F' es igual a k':

Abs[d(P, F) - d(P, F')] = k



Elementos de la hipérbola:

-Los focos: F, F'

-Su centro: C(xo, yo), que es el punto medio del segmento F'F.

-Sus ejes de simetría: Eje focal, que es la recta que pasa por F y F', y Eje secundario que es la perpendicular al eje focal por el centro C.

-Los puntos de corte con su eje focal: A,A' (observa que no corta a su eje secundario, y por eso se le llama también 'eje imaginario').

Parámetros de la hipérbola:

-La medida de su Semieje focal: a = d(A, C)

-La distancia Semifocal: c = d(C, F) = d(C, F')

-La medida del Semieje imaginario: Es el valor b, tomado sobre el eje imaginario a partir de C, y tal que cumple: $a^2 = c^2 – b^2$

-La excentricidad: $e = \frac{c}{a}$. Observa que

e > 1, ya que c > a

Relaciones entre los parámetros:

-Se cumplen las relaciones:

$$a^2 = c^2 – b^2, \qquad k = 2.a \qquad (10)$$

Ecuación de la Hipérbola

En lo que sigue obtendremos $A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.y + F = 0$

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase ‘notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

En todo lo que sigue supongamos que el eje focal es paralelo al eje ox.

Sean los focos F(xo, yo), F’(xo’, yo’), yo’ = yo

Caso A: Eje real paralelo al eje ox

Para la rama correspondiente al foco F’ se cumple:

$$d(P, F) – d(P, F’) = k \qquad (11)$$

significa

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{(x-x_0{}')^2+(y-y_0{}')^2} = k \qquad (11)’$$

Operamos con el fin de hacer desaparecer los radicales.

Tenemos, despejando un radical: d(P,F) = k + d(P,F’)

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = k + \sqrt{(x-x_0')^2+(y-y_0')^2}$$

Elevando al cuadrado

$(x - xo)^2 + (y - yo)^2 = k^2 + (x - xo')^2 + (y - yo')^2 + 2k.d(P,F')$
Desarrollando los cuadrados:

$[x^2 + xo^2 – 2.xxo] + [y^2 + yo^2 – 2.yyo] =$
$= k^2 + [x^2 + xo'^2 -2.xxo'] + [y^2 + yo'^2 -2.yyo'] + 2k.d(P,F')$

Simplificando y sacando factor común tengo

$-2.(xo –xo').x -2.(yo – yo').y + (xo^2 - xo'^2 + yo^2 - yo'^2) - k^2 =$
$= 2.k.d(P,F')$

Y teniendo en cuenta que yo' = yo

$$2.(xo – xo').x - (xo^2 - xo'^2) + k^2 = -2.k.d(P,F')$$

Hago

$m = 2.(xo – xo')$ (Observa: $m > 0$)
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$

con lo cual queda $m.x + l = -2.k.d(P,F')$

Elevamos otra vez al cuadrado:

$m^2. x^2 + l^2 + 2.m.l.x = 4.k^2.[(x - xo')^2 + (y - yo')^2]$

Operando

$m^2.x^2 + l^2 + 2.m.l.x = 4.k^2.([x^2 + xo'^2 - 2.xo'x] + [y^2 + yo'^2 -2.yo'y])$

Trasponemos términos nos queda

$(m^2 – 4.k^2).x^2 – 4.k^2.y^2 + (2.m.l + 8.k^2.xo').x + 8.k^2.yo'.y +$

$$+ (l^2 -4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)) = 0$$

Hacemos

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

Quedando la ecuación

$$A.x^2 +B.y^2 + D.x + E.y + F = 0 \qquad (12)$$

Nota: Observamos el signo de A y de B.

Signo de A: Recuerda que $k = 2.a$, y observando la gráfica vemos que $abs(xo – xo') > 2.a$, por tanto

$A = 4.(xo- xo')^2 - 4.4.a^2 = 4.[(xo – xo')^2 – (2.a)^2] > 0$, es decir $A > 0$

Signo de B: Evidente $B = - 4.k^2 < 0$

Casuística:

a) Si el eje focal coincide con el eje ox, entonces

$yo = 0$, $yo' = 0$, y tenemos

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$ -- >

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

--- >

$A = m^2 - 4k^2$
$B = -4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 0$
$F = l^2 - 4k^2.xo'^2$

Y queda la ecuación

$Ax^2 + By^2 + Dx + F = 0$ (Ecuación reducida) (13)

b) Si el eje focal coincide con ox y además su centro coincide con (0, 0), entonces además

$xo = c$, $xo' = -c$ (c = semidistancia focal)

$m = 2.(xo – xo')$
$l = -(xo^2 – xo'^2) + k^2$

--- >

$m = 4.c$
$l = –(c^2 – (-c)^2) + k^2 = k^2$

y entonces

$A = m^2 - 4.k^2$
$B = - 4.k^2$
$D = 2.m.l + 8.k^2.xo'$
$E = 8.k^2.yo'$
$F = l^2 - 4.k^2.(xo'^2 + yo'^2)$

--- >

$A = 16.c^2 - 4k^2$ ($A > 0$)
$B = - 4.k^2$

$D = 8.c.k^2 - 8.k^2.c = 0$
$E = 0$
$F = l^2 - 4k^2.c^2 \;\text{-->}\; F = k^2.(k^2 - 4.c^2)$

Y queda la ecuación

$A.x^2 + B.y^2 + F = 0$ (Ecuación reducida) (14)

ECUACIÓN Canónica (normal)

Teniendo en cuenta que $k = 2.a$, y que
$c^2 - b^2 = a^2$, veamos el valor de los anteriores coeficientes en función de a y b.

$A = 16.c^2 - 4k^2 = 16.c^2 - 4.4.a^2 = 16.(c^2 - a^2) = 16.b^2$

$B = - 4.k^2 = - 4.4.a^2 = -16.a^2$

Teniendo en cuenta que $k^2 = 4.a^2$, y que $a^2 - c^2 = -b^2$, tengo

$F = k^4 - 4k^2.c^2 = k^2.(k^2 - 4.c^2) = 4.k^2.(a^2 - c^2) = -4.4.a^2.b^2 = -16.a^2.b^2$

Aquella (ecuación 14) queda así:

$$16.b^2.x^2 - 16.a^2.y^2 = 16.a^2.b^2$$

$$b^2.x^2 - a^2.y^2 = a^2.b^2 \qquad (14')$$

y dividiendo los dos miembros por $a^2.b^2$ queda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (15)$$

La llamamos 'Ecuación canónica' o 'normal' de la hipérbola.

NOTA: El alumno puede puede comprobar, siguiendo el mismo proceso de cálculo, que si el punto P está situado hacia la otra rama de la hipérbola el resultado es el mismo.

Ecuación normal de la Hipérbola cuando los ejes de simetría son paralelos a los ejes de coordenadas y su centro es un punto cualquiera (xo, yo):

Teniendo en cuenta el resultado obtenido más arriba: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

si hacemos una traslación de modo que el centro de la hipérbola sea el punto C(x0,y0), la nueva ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (16)$$

3.- LA PARÁBOLA
Definiciones: Elementos de la Parábola

Fijamos una recta r y en ella un punto F que llamaremos foco. (La recta r va a ser el eje de simetría de la parábola). Fijamos también una recta s perpendicular a r. Se cortarán en un punto A.

"Llamamos Parábola al lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que equidistan del punto F y de la recta s, es decir, que cumplen

$$d(P,F) = d(P,s)$$

o bien $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (30)$$

Elementos de la parábola:

-Eje de simetría: Es la recta r fijada

-Recta directriz: Llamamos así a la recta s fijada (perpendicular a r por A)

-Foco F: Es el punto fijado en la recta r

-Vértice V: Es el punto de corte de la parábola con su eje de simetría r.

Sea A el punto de corte del eje de simetría con la recta directriz s.

De la gráfica se deduce que el vértice V es el punto medio del segmento FA.

Parámetro de la parábola:

-Es el valor de la distancia d(F,s) desde el foco a la directriz, y lo representaremos por p.

Ecuación de la Parábola

NOTA: En lo que sigue, por motivos prácticos, admítase ‘notación un tanto burda cuando se trate de desarrollos laboriosos.

Sea la ecuación de la recta s: ax + by + c = 0, y el foco F(xo,yo).

Si P(x,y) es un punto cualquiera que cumple la igualdad (30), de ésta obtenemos

$$\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = |ax+by+c|$$

Elevando al cuadrado

$(a^2 + b^2).[(x - xo)^2 + (y - yo)^2)] = (ax + by + c)^2$

$(a^2 + b^2).[(x^2 + xo^2 - 2.xox) + (y^2 + yo^2 -2.yoy)] =$
$= a^2.x^2 + b^2.y^2 + c^2 + 2ab.xy + 2ac.x + 2bc.y$

Trasponiendo, simplificando y agrupando, tenemos

$b^2.x^2 + a^2.y^2 - 2.a.b.xy + [-2.(a^2 + b^2).xo - 2.a.c].x +$
$+ [-2.(a^2 + b^2).yo -2.b.c].y + [(a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2] = 0$

Haciendo
$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2.a.b$
$D = -2.[(a^2 + b^2).xo + a.c]$
$E = -2.[(a^2 + b^2).yo + b.c]$ (*)
$F = (a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) - c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (31)$$

(Ecuación general de la parábola)

NOTA: La forma (31) es la misma que tomaría una cónica cualquiera, si bien cambiaría el valor de sus coeficientes dados en el bloque (*)

Casuística:

a) Si el eje de simetría (recta r) es paralela al eje ox, entonces la recta s es paralela al eje oy, y su ecuación es s: $x + c = 0$, es decir $a = 1$, $b = 0$, y entonces

$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2.a.b$
$D = -2.[(a^2 + b^2).xo + a.c]$
$E = -2.[(a^2 + b^2).yo + b.c]$
$F = (a^2 + b^2).(xo^2 + yo^2) – c^2$

--- >

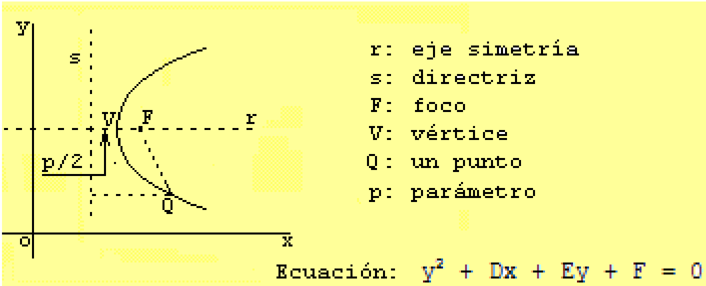
$A = 0$
$B = 1$
$C = 0$
$D = -2.[xo + c]$
$E = -2.yo$
$F = (xo^2 + yo^2) – c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (32)$$

b)Si el eje de simetría coincide con ox, entonces la recta s es paralela a oy, será:

s: x + c = 0, y además, el foco es de la forma F(xo, 0), es decir: a = 1, b = 0, yo = 0, y entonces



A = 0
B = 1
C = 0
D = -2.[xo + c]
E = -2.yo
F = $(xo^2 + yo^2) – c^2$

--- >

A = 0
B = 1
C = 0
D = -2.[xo +c]
E = 0
F = $xo^2 – c^2$

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx + F = 0 \qquad (32)’$$

c) Si el eje de simetría coincide con ox y el vértice V coincide con (0,0), entonces, si el foco es F(xo,0), en la recta s: x + c = 0 es c = xo, y entonces

A = 0
B = 1
C = 0
D = -2.[xo +c]
E = 0
F = $xo^2 - c^2$

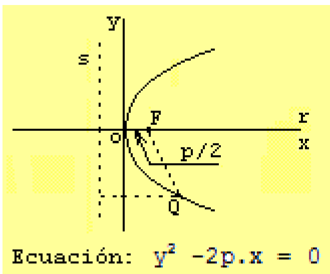
--- >
A = 0
B = 1
C = 0
D = - 4.x0
E = 0
F = 0

y la ecuación queda de la forma

$$y^2 + Dx = 0 \qquad (33)$$

Si en estas condiciones hacemos xo = $\frac{p}{2}$, y por tanto
D = - 4. $\frac{p}{2}$ = -2p, queda

$$y^2 - 2p.x = 0 \qquad (34)$$



Por otro lado, si el eje de simetría (recta r) es paralelo al eje oy, entonces llegamos a las siguientes tipos de ecuaciones:

a)' Si el eje de simetría (recta r) es paralela al eje oy, entonces la recta s es paralela al eje ox, y su ecuación es s: y + c = 0, es decir a = 0, b = 1, y entonces

$A = 1$
$B = 0$
$C = 0$
$D = -2.xo$
$E = -2.[yo + c]$
$F = (xo^2 + yo^2) - c^2$

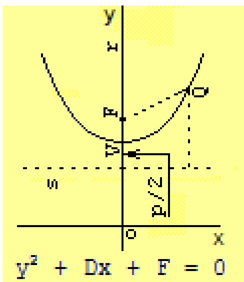
y la ecuación queda de la forma

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (35)$$

b)' Si el eje de simetría coincide con oy, entonces la recta s es paralela a ox, será:

s: y + c = 0, y además el foco es de la forma F(0,yo), es decir:
a = 0, b = 1, xo = 0, y entonces

$A = 1$
$B = 0$
$C = 0$
$D = 0$
$E = -2.[yo + c]$
$F = yo^2 - c^2$



y la ecuación queda de la forma $$x^2 + Ey + F = 0 \qquad (36)$$

c)’ Si el eje de simetría coincide con oy y el vértice V coincide con (0,0), entonces, si el foco es F(0, yo), en la recta s: y + c = 0 es c = yo, y entonces (Siendo a = 0, b = 1, xo = 0)

A = 1
B = 0
C = 0
D = 0
E = -4.yo
F = 0

y la ecuación queda de la forma

$$x^2 + E.y = 0 \qquad (37)$$

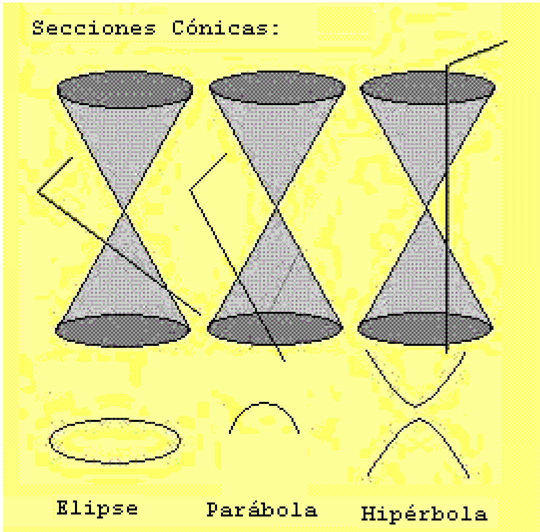
Si en estas condiciones hacemos yo = $\frac{p}{2}$, con lo cual
E = -4. $\frac{p}{2}$ = -2p, queda

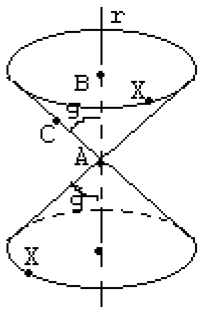
$$x^2 - 2p.y = 0 \qquad (38)$$

4.- Las Cónicas de Apolonio. Método vectorial

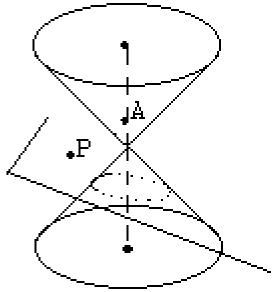
Son el resultado de seccionar el cono mediante un plano

Secciones Cónicas





Sea el plano W*PX = 0, donde P es un punto del plano y W un vector ortogonal al plano.



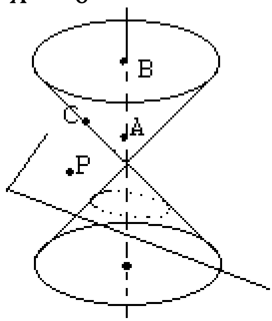
Sea un cono definido por:

$$(AB*AC)^2 . (AX*AX) - (AB*AX)^2 = 0,$$

donde A es el vértice del cono, AB es vector que determina el eje, X es el punto genérico del cono.

Un punto X perteneciente a la sección ha de cumplir

$$\begin{cases} (AB * AC)^2 . (AX * AX) - (AB * AX)^2 = 0 \\ W * PX = 0 \end{cases} \qquad (5)$$



Ecuación puntual de la sección cónica

Expreso AX = AP + PX, y lo sustituyo en la primera de las igualdades. Antes hago

AX *AX = AP *AP + 2.AP *PX + PX * PX , AB*AX =
= AB *AP + AB*PX , entonces

$(AB*AC)^2 . (AP*AP + 2.AP*PX + PX*PX) – (AB*AP + +AB*PX)^2 = 0$ (6)

Si en el plano elegimos el punto P de modo que coincida con el pie de la perpendicular desde A, entonces AP*PX = 0 y la ecuación (6) queda

$(AB*AC)^2 . (AP*AP + PX*PX) – (AB*AP + AB*PX)^2 = 0$ (6')

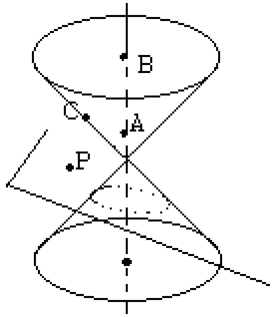
Casuística:

a) Si el plano es paralelo al eje del cono el resultado consta de dos ramas abiertas iguales (Es la Hipérbola). Si no es paralelo al eje del cono pero corta las dos hojas del cono el resultado son dos ramas abiertas (Tipo Hipérbola).

b) Si el plano es paralelo a una generatriz del cono el resultado consta de una sola rama abierta (Es la Parábola).

c) Si el plano corta sólo una hoja del cono el resultado es una curva cerrada (Es la Elipse). Si además el plano es perpendicular al eje el resultado es una circunferencia.

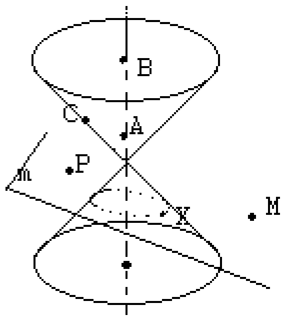
Centro de la sección cónica:



La sección cónica, según vimos, viene dada por el sistema

$$\begin{cases} (AB * AC)^2 \,.\, (AX * AX) - (AB * AX)^2 = 0 \\ W * PX = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

donde A es el vértice del cono, P es un punto del plano y W es un vector ortogonal a este plano (Plano definido por W * PX = 0). X es un punto cualquiera de la línea de contacto.



Sea M otro punto cualquiera del plano secante. Ponemos AX = AM + MX, y la primera del sistema (7) se convierte en

$$0 = (AB * AC)^2 \,.\, (AM + MX) * (AM + MX) -$$
$$- (AB * (AM + MX))^2$$

$$0 = (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2.\,[AM * AM + 2.\,AM * MX + MX * MX] -$$
$$-(\mathrm{AB} * \mathrm{AM} + \mathrm{AB} * \mathrm{MX})^2$$

y simultáneamente: 0 = W * PX = W *(PM + MX) = W * MX

$$0 = (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2.\,[AM * AM + 2.\,AM * MX + MX * MX] -$$

$$-[(\mathrm{AB} * \mathrm{AM})^2 + (\mathrm{AB} * \mathrm{MX})^2 + 2.\,(AB * AM).\,(AB * MX)]$$

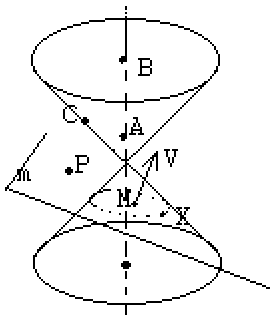
y simultáneamente: W * MX = 0

Reordenándola

$$0 = [(AB * AC)^2.\,(MX * MX) - (AB * MX)^2] +$$
$$+ [(AB * AC)^2.\,AM - (AB * AM).\,AB] * MX +$$
$$+ [(AB * AC)^2.\,(AM * AM) - (AB * AM)^2] \quad (8)$$

y simultáneamente: W * MX = 0.

Supongamos que es posible elegir M de tal forma que el vector



$V = (AB * AC)^2.\,AM - (AB * AM).\,AB$ sea ortogonal con el plano secante m, con lo cual V * MX = 0, ya que M y X están sobre el plano.

Entonces, reduciendo la (8), tenemos el siguiente sistema de condiciones:

$$\begin{cases} (AB * AC)^2.(MX * MX) - (AB * MX)^2 + \\ \qquad +(AB * AC)^2.(AM * AM) - (AB * AM)^2 = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{MX} = 0 \\ [(AB * AC)^2.AM - (AB * AM).AB] * MX = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que el vector W es ortogonal al plano m, y por tanto es paralelo al vector V antes descrito, con lo cual V x W = 0, y que P y M son puntos del plano, y por tanto W * PM = 0, la condición W * MX = 0 puede ser sustituida por W * PM = 0.

Además, PM = PA + AM , con lo cual W * (PA + AM) = 0, o bien -W * AP + W * AM = 0, por lo cual W * AM = W * AP. Después de todo esto el sistema (9) queda de la forma

$$\begin{cases} (AB * AC)^2.(MX * MX) - (AB * MX)^2 + \\ \qquad +(AB * AC)^2.(AM * AM) - (AB * AM)^2 = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{AM} = \mathrm{W} * \mathrm{AP} \\ [(AB * AC)^2.AM - (AB * AM).AB]\ x\ W = 0 \end{cases} \quad (10)$$

La primera nos da el l.g. de la línea de contacto formada por los puntos X, suponiendo conocido el punto M que cumpla las condiciones impuestas por la segunda y la tercera. Observa que el resto de datos que intervienen son conocidos previamente.

La tercera condición puede resultar más inteligible de esta forma

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) = (AB * AM).(AB\ x\ W) \quad (11)$$

Continuamos:

Salvo en el caso degenerado cuando el caso se convierte en un plano, en un cono real se cumple 0 < AB * AC < 1.

En los dos miembros de (11) multiplicamos escalarmente por AB con lo cual

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) * AB = (AB * AM).(AB\ x\ W) * AB$$

y teniendo en cuenta que (AB x W) * AB = 0, queda

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) * AB = 0, \quad \text{y}$$

$$\begin{cases}(AM\ x\ W) * AB = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{AM} = \mathrm{W} * \mathrm{AP}\end{cases} < -- > \begin{cases}AM * (W\ x\ AB) = 0 \\ \mathrm{W} * (\mathrm{AM} - \mathrm{AP}) = 0\end{cases} \qquad (12)$$

La segunda podemos modificarla:

PM = PA + AM -- > PM = -AP + AM,

y por tanto W * PM = 0 , lo cual garantiza que el punto M, centro de la sección cónica está en el plano m.

Casuística:

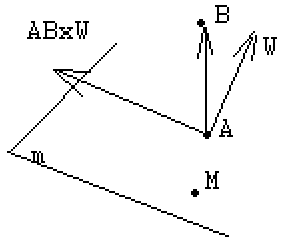
a.- Si W x AB = 0, el vector W es proporcional con AB y el plano m es perpendicular al eje AB del cono. La sección es un círculo. Entonces, de la relación (11) resulta $(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) = 0$, y por tanto AM x W = 0, lo cual indica que AM = t.W , y entonces

AM * W = t.(W * W) = t, (pues W es unitario)

El centro queda localizado así: AM = (AM * W).W b.- Sea W x AB $\neq 0$ $(vector)$. De la primera del sistema (12)

$AM * (W\ x\ AB = 0$ -- > AM es ortogonal con W x AB, y por tanto AM yace sobre el plano generado por AB y W, es decir:

AM = t.AB + u.W



Lo llevamos a relación (11): Teniendo

(t.AB + u.W) x W = t.(AB x W)

y AB * (t.AB + u.W) = t + u.(AB * W), con lo cual nos queda

$t.(AB * AC)^2.(AB\ x\ W) = (\mathrm{t} + \mathrm{u}.(\mathrm{AB} * \mathrm{W}).(AB\ x\ W)$, de donde

$t.(AB * AC)^2 = \mathrm{t} + \mathrm{u}.(\mathrm{AB} * \mathrm{W})$ -- >

$(1 - (AB * AC)^2).t + (AB * W).u = 0$

y en la segunda de (12): $\mathrm{W} * (\mathrm{t.AB} + \mathrm{u.W}) = \mathrm{W} * \mathrm{AP}$,

t.(W * AB) + u = W * AP

Tengo así el sistema

$$\begin{cases} \left(1 - (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2\right).\mathrm{t} + (\mathrm{AB} * \mathrm{W}).\mathrm{u} = 0 \\ \mathrm{t}.(\mathrm{W} * \mathrm{AB}) + \mathrm{u} = \mathrm{W} * \mathrm{AP} \end{cases} \qquad (13)$$

Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 - (AB * AC)^2 & (AB * W) \\ (W * AB) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [1 - (AB * AC)^2] - (AB * W)^2$$

Para t: $D_t = \begin{vmatrix} 0 & (AB * W) \\ W * AP & 1 \end{vmatrix} =$ - (AB * W).(W * AP)

Para u: $D_u = \begin{vmatrix} 1 - (AB * AC)^2 & 0 \\ (W * AB) & W * AP \end{vmatrix} =$

$= [1 - (AB * AC)^2].(W * AP)$

Por tanto $t = \frac{(AB * W).(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}$, $u = \frac{[1-(AB * AC)^2].(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}$

Finalmente: AM = t.AB + u.W =

$$= \frac{(AB * W).(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}\,.AB + \frac{[1-(AB * AC)^2].(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}\,.W \quad (14)$$

Def.: Centro de la sección cónica es el punto M, del plano secante, tal que toda recta del plano que pasa por M corta a la cónica en puntos P, Q a igual distancia de M. (M es el punto medio del segmento PQ).

NOTA: Para que tenga centro la cónica ha de ser curva cerrada. La Hipérbola cierra mediante dos puntos de la recta de puntos en el infinito. La parábola es abierta, no tiene centro.
