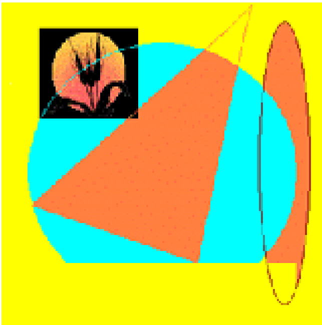
TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 14

GEOMETRÍA VECTORIAL
(Métodos Vectoriales)



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

Edición: Septiembre 2020

Editado en España

ISBN:

Depósito Legal:

Resumen de LA OBRA COMPLETA

Vol.1: Números: Naturales y Enteros, Racionales e Irracionales, Reales y Complejos. Sistemas de numeración. Clases de restos módulo m. Sucesiones. Progresiones y Series numéricas. Fracciones continuas. Notación exponencial. Proporcionalidad geométrica. El Número de Oro y el Rectángulo áureo, Pentágono regular. Colección de problemas resueltos.

Vol.2: Álgebra básica: Polinomios y Fracciones, Ecuaciones y su resolución. Expresiones radicales en x. Ecuaciones con radicales. Inecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas no lineales. Sistemas de Inecuaciones. Descomposición de p(x)/q(x) en suma de fracciones simples. Estudio de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Sumas simples de las raíces de p(x) y relación con sus coeficientes. Colección de problemas resueltos.

Vol.3: Parte I
Proporcionalidad numérica: Directa, Inversa. Cálculo mercantil. Temas afines: Mezclas y Aleaciones, Fuentes y Grifos, Móviles, Repartos proporcionales. Proporcionalidad geométrica. Teorema de Thales. Combinatoria ordinaria y con repetición. Potencias del binomio y del trinomio.

Parte II
Teoría de conjuntos, Particiones, Función característica, Conjuntos bien ordenados, Función de elección, Principios de inducción. Álgebra de proposiciones, Tablas de verdad, Implicación lógica. Operadores sobre un conjunto, Estructuras. Álgebra de Boole.

Colecciones de Problemas de gran interés: De Combinatoria, De Sucesiones, De Progresiones, De Cálculo mercantil, De Conjuntos.

Vol.4: Geometría descriptiva en el plano. Polígonos. Perímetros y Áreas. Estudio del Triángulo y de la Circunferencia. Semejanza. Geometría descriptiva en el Espacio. Poliedros. Superficies y Volúmenes de cuerpos geométricos. Partes de la esfera. Trigonometría en el plano y sus aplicaciones. Las Cónicas y su Ecuación general. El Número áureo y el Rectángulo áureo. El Pentágono regular. Problemas resueltos.

Vol.5: Geometría analítica en el plano y en el Espacio. Incidencia y Cálculo de distancias. Estudio de la Circunferencia, Potencia y Ejes radicales. Vectores fijos, Vectores libres. Los Espacios vectoriales V2, V3. Producto Escalar de dos vectores y Ortogonalidad. Producto Vectorial y Producto Mixto de vectores y sus aplicaciones. Espacio vectorial Vn: Dependencia lineal, Sistema generador, Sistema libre, Bases y cambio de base. Sistemas de referencia. Ampliación de Trigonometría. Suplementos sobre Geometría analítica: Cónicas y Cuádricas. Colección de Problemas de gran interés.

Vol.6: Funciones reales básicas elementales y trascendentes. Funciones reales en general. Funciones cuya expresión f(x) se obtiene empíricamente. Interpolación. Sucesiones, Conceptos básicos de Topología, límites y continuidad. El número e. Concepto de Derivada en un punto. Interpretación geométrica. Función derivada de f(x). Derivada de las funciones básicas y trascendentes. Diferencial de f(x). Concepto de Primitiva de f(x): Primitiva de las funciones básicas y trascendentes. Integral indefinida: Métodos básicos de integración.

Sucesiones de Números reales: El Número e, sucesión de Fibonacci. Series de Números reales. Progresiones, Capitalización y Amortización. Criterios de convergencia. Interpolación: Método parabólico progresivo , Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos.

Apéndice I: Sobre límites y continuidad, indeterminaciones y su resolución. Teoremas sobre continuidad. Apéndice II: El límite de sen(x)/x, x -> 0. El Número de oro. Apéndice III: Constantes y Valores notables, Propiedades en los Números combinatorios, Suma de potencias de números naturales, Fórmula Binomial y Multibinomial. Apéndice IV: Logaritmos en base ‘a’ cualquiera, Cambio de base, Ecuaciones y Sistemas con exponenciales y con logaritmos, Uso de la Tabla de logaritmos. Apéndice V: Profundización sobre las Series.

Vol.7: Funciones básicas elementales y trascendentes: Representación gráfica. Derivada y Diferencial en un punto y su interpretación geométrica. Reglas de derivación. Derivadas sucesivas. Diferencial de segundo orden. Funciones y = f(x,y) y Derivadas parciales. Funciones implícitas y Derivación implícita. Aplicación a la Representación gráfica y a los Problemas de optimización. Integral indefinida: Métodos de integración. Concepto de Integral Definida: Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow, Aplicación al Cálculo de áreas. Apéndice I: Dominio de las funciones recíprocas en trigonometría. Funciones hiperbólicas y sus recíprocas. Apéndice II: Sobre Derivabilidad. Apéndice III: Sobre el Teorema de Cauchy. Apéndice IV: Integración de expresiones irracionales. Apéndices V: Integrales Elípticas. Apéndice VI: Integrales Elípticas de Primera y de Segunda especie. Apéndice VII: Integrales Definidas impropias. Colecciones de problemas resueltos. Listados de Prototipos de expresiones integrables.

Vol.8: Aplicación del Cálculo diferencial: Teorema de Fermat, Teorema de Rolle, Teorema de los Incrementos finitos, Otros Teoremas. Conceptos y elementos básicos en el Análisis y Representación gráfica de y = f(x). Funciones de dos variables z = f(x,y) y las Superficies en el Espacio: Derivadas parciales, Segunda derivada. Desarrollo de Taylor. Función implícita, Derivación implícita. Extremos locales y Optimización. Las Cónicas y otras Curvas predefinidas: Lemniscata, Estrofoide, Cicloide, Cardioide, Hipocicloide, Cisoide de Diocles, Folium de Descartes, Envolvente, Espirales, Rasa de n pétalos. Superficies. Superficies predefinidas: La Esfera, Elipsoides, Hiperboloides, Paraboloides, … . Curvas sobre una superficie. Diferencial de arco, Curvatura, radio de curvatura. Diferencial direccional, Gradiente. Iniciación al estudio de las Cuádricas y su relación con el análisis de los extremos locales. Varias Colecciones de problemas resueltos. Apéndice I: Profundiza sobre funciones f(x,y,z) = k y curvas sobre una superficie. Apéndice II: Estudio de las Cuádricas y Extremos locales. Apéndice III: El Resto de Lagrange. Apéndice IV: Listado de derivadas inmediatas. Colección de problemas, Actividades sobre Desarrollo de Taylor.

Geometría Vectorial: Métodos Vectoriales

Vol.9: Integral Definida, Teorema del valor medio, Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow. Longitud de un arco de curva, Curva de Viviani. Cálculo de áreas planas. Integral Doble: Cálculo de superficies y volúmenes. Integral Triple: Cálculo de volúmenes. Cálculo de la Superficie y del Volumen de sólidos predefinidos: Zona y Casquete esféricos, Cono esférico, Elipsoide, Paraboloide, Bóveda de Viviani. Cuerpos de revolución: Superficie y Volumen. Revolución de: La Astroide, Cicloide, Cardioide. Integral Curvilínea: Fórmula de Riemann-Green. Integral de Superficie: Fórmula de Stockes, Fórmula de Ostrogradski-Gauss. Apéndice I: Profundización en Métodos de Integración. Apéndice II: Profundización sobre Integral doble y triple, coordenadas curvilíneas. Apéndice III: Complementos, Cambio de coordenadas, Coordenadas curvilíneas, … . Apéndice IV: Complementos, …, La Integral de Euler - Poisson. Colección de Problemas resueltos. Listado de Integrales interesantes.

Vol. 10: Álgebra Lineal: Matrices y Determinantes. Aplicación a los Sistemas lineales: Análisis y resolución, Métodos de Gauss y de Crámer. Espacios vectoriales: Dependencia lineal, Sistema generador y Sistema libre, Bases y dimensión. Aplicaciones Lineales, Endomorfismos, Cambio de base. Espacio Afín, Espacio métrico y Espacio Euclídeo asociados a un Espacio vectorial. Transformaciones geométricas en el Plano y en el Espacio, Cambio de Sistema de referencia, Ángulos de Euler, Determinación de los ángulos de Euler. Apéndice I: Profundización sobre transformaciones en el Plano y cambio de s.d.r.. Apéndice II: Profundización sobre transformaciones en el Espacio y cambio de s.d.r.. Colecciones de problemas resueltos.

Vol.11: Parte I:
Estadística descriptiva en una y en dos variables. Correlación y Rectas de regresión. Teoría y Cálculo de Probabilidades: Regla de Laplace, Probabilidad condicionada, Probabilidad total, Teorema de Bayes. Variable aleatoria y Distribuciones: Funciones de Probabilidad, de Densidad y de Distribución. Distribuciones discretas: Distribuciones Binomial e Hipergeométrica. Distribuciones continuas: Función de Densidad y de Distribución. Distribución Normal, Tipificación, Tabla de la Normal Tipificada y su aplicación.

Aproximación de la Binomial mediante una Distribución normal, Ajuste de una Serie de datos mediante una Distribución normal. Colecciones de problemas resueltos.

Parte II: Programación Lineal: Resolución de Problemas Optimización. Interpolación Polinómica: Método progresivo, Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos. Apéndice: Sobre Distribución Hipergeométrica y Distribución de Poisson.

Vol.12: Ampliación en el estudio de las Matrices, Teorema de Hamilton – Cayley. Polinomio característico, valores y vectores propios, Diagonalización de matrices. Formas bilineales, Formas cuadráticas. Profundización: Espacios afines, Transformaciones geométricas, Cambio de s.d.r.. Profundización: Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio: Cónicas y Cuádricas en cartesianas, sus elementos y clasificación. Geometría Analítica en coordenadas homogéneas: Estudio completo de Cónicas, Cuádricas, Polaridad. Invariantes, Tipo de cónica, Tipo de cuádrica y su ecuación reducida.

Estudio de curvas alabeadas: Tangente, Plano osculador, Normal principal, Binormal, Triángulo intrínseco. Estudio de Superficies: Superficie en general, Regladas y Desarrollables, de Rotación, de Traslación. Plano tangente, Recta normal. Proceso simple y práctico para un Cambio de Sistema de referencia. Cosenos directores de una recta. Orientación en el Plano y en el Espacio.

Complementos/Profundización: Rotación en el Espacio, Teorema de Euler, Ángulos de Euler y su cálculo. Colección de problemas resueltos de gran interés.

Vol.13: COMPLEMENTOS: Complemento 1: De Álgebra Superior. Complemento 2: De Suma de Series. Complemento 3: De Álgebra Lineal, De Cónicas, De Actividades y Añoranzas. Complemento 4: De Sistemas de Referencia: Los ángulos de Euler, Transformaciones en el plano y en el espacio. Complemento 5: La Sucesión de Fibonacci y la Naturaleza

Geometría Vectorial: Métodos Vectoriales

Vol 14: Álgebra de vectores: Producto escalar de vectores, Producto vectorial de vectores, Relación de Bibbs , Producto mixto de vectores, Volumen del Tetraedro, Identidad de Lagrange. Geometría vectorial: Métodos vectoriales. Resultados interesantes Geométrico – Vectoriales: Entre otro: Teorema de Menelao, Teorema del Cuadrilátero, Cuaterna armónica. Razón doble de segmentos, Abscisas proyectivas sobre la recta real ampliada, Correspondencia proyectiva entre dos rectas ampliadas, Proyectividad Involutiva, Teorema del Cuadrivértice de Desargues, Teorema de las Medianas. Geometría Vectorial: Métodos Vectoriales. Problemas resueltos de Olimpiadas Matemáticas: Todos los de la XXXII, algunos de las Olimpiadas XXIII, XXIV, XXV. Teoría de Grafos, Los Mapas y el problema de los cuatro colores, Teorema de Napoleón, El Problema de Napoleón, La Sucesión de Fibonacci y la Naturaleza, La Cuadratura del Círculo.

Cuadernillos:

Estudio de las Cónicas. Las Cónicas de Apolonio
Ecuaciones Diferenciales
Olimpiadas Matemáticas y Otros …

INDICE:
pág.

I.- Álgebra de vectores

Producto escalar de dos vectores

Sean dos vectores AB, AC, y g = ang(AB, AC) recorrido de AB a AC.

Simbolizamos por * el operador producto escalar.

Def.: Llamamos "producto escalar" de dos vectores al siguiente valor

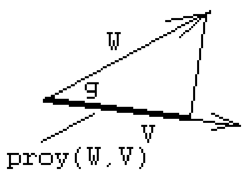
$$AB*AC = /AB/./AC/.\cos(g) \qquad (1)$$

De otro modo:
Si V_3 es el espacio vectorial tridimensional real, podemos definir una aplicación

$$V_3 \times V_3 \dashrightarrow R$$

$$(V, W) \dashrightarrow V*W$$, cuyo valor viene dado por (1)

Interpretación geométrica:



(2)

Tengo la proyección de W sobre V: proy(W,V) = /W/.cos(g) , o bien

$$\text{proy}(W,V) = /W/.\cos(g) = \frac{V*W}{|V|}$$

Propiedades:

a) V*W = W*V , evidentemente puesto que el valor de cos(g) no cambia al cambiar la orientación del ángulo g.
b) No es asociativo: (V*W)*T = k.T , mientras que V*(W*T) = V.h, que son vectores diferentes.

c) Sí es distributiva: V*(W + T) = V*W + V*T
Dem.: Utilizamos la base de vectores actual.
Sean W = a.e1+b.e2+c.e3, T = a'.e1+b'.e2+c'.e3
V*(W + T) = V*((a+a').e1+(b+b').e2+(c+c').e3) =
= (a+a').V*e1 + (b+b').V*e2 + (c+c').V*e3

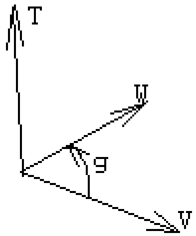
V*W + V*T = (a.V*e1 + b.V*e2 + c.V*e3) +
+(a'.V*e1 + b'.V*e2 + c'.V*e3) =
= (a+a').V*e1 + (b+b').V*e2 + (c+c').V*e3

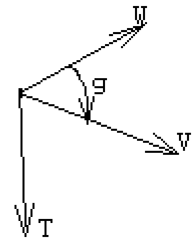
Producto Vectorial de dos vectores:

Sean dos vectores V, W, y el ángulo g que forman recorrido de V a W por el camino más corto. Designaremos por x el operador "producto vectorial"

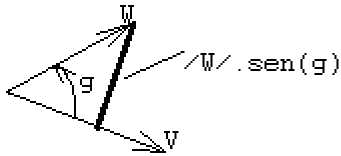
Def.: Llamamos "producto vectorial" al vector T que resulta de aplicar las siguientes condiciones:

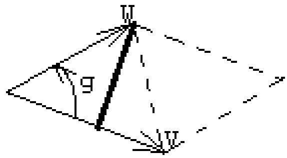
a) Su módulo toma el valor: /V/./W/.sen(g)
b) Su recta soporte es perpendicular (forma 90^{o}) con cada una de las rectas soportes de V y de W.
c) Su orientación es la que resulte de aplicar la llamada "Regla del sacacorchos": Avance del sacacorchos cuando lo giramos en el mismo sentido que indica el ángulo g.





Interpretación geométrica:





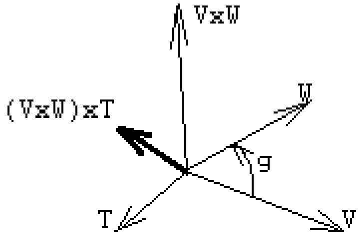
Las figuras muestran claramente que el área del paralelogramo es

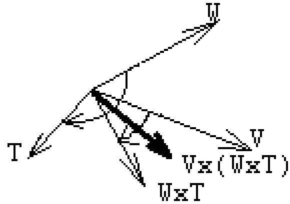
S = /V/.h = /V/./W/.sen(g) = /VxW/, ésto es: “El módulo del producto vectorial VxW nos da el área del paralelogramo determinado por V y W”.

Consecuencia: El área del triángulo formado por V y W toma el siguiente valor: área(V, W) = $\frac{1}{2} . |VxW|$

Propiedades:

a) WxV = - VxW, puesto que la orientación del ángulo g ha cambiado a su opuesta (El convenio es: “Siempre recorre desde el primer factor al segundo).
b) No es asociativo:
(VxW)xT es ortogonal al plano determinado por VxW y T





Vx(WxT) es ortogonal al plano determinado por V y WxT

Razonamiento: El vector T ‘ = (VxW)xT es ortogonal con VxW y con T. Que sea ortogonal con VxW significa que está contenido en el plano m determinado por el vector VxW, es decir (VxW)*PX = 0, donde P es un punto de m.

El vector T ‘ = Vx(WxT) es ortogonal con WxT y con V. Que sea ortogonal con WxT significa que está contenido en el plano m determinado por el vector WxT, es decir (WxT)*PX = 0, donde P es un punto de m.

c) Sí se cumple la distributiva Vx(W + T) = VxW + VxT

Demostrarlo mediante el cálculo.

Relación de Bibbs:

Puede ser demostrado que se cumple lo siguiente:

(VxW)xT = (V*T).W – (W*T).V , que podemos expresar de la forma

(VxW) x T = $\begin{vmatrix} V * T & V \\ W * T & W \end{vmatrix}$ (Relación de Gibbs)

Dem.: Eligiendo una base ortonormal e1, e2, e3 para la cual suponemos que: e1xe2 = e3, e2xe3 = e1, e3xe1 = e2.

Tomando las expresiones de V, W, T, después de arduos cálculos podemos concluir aquella afirmación.

NOTA: Con el fin de aliviar los cálculos podemos tomar: V = e1, W = a.e1 + b.e2, T = c.e1 + d.e2 + e.e3.

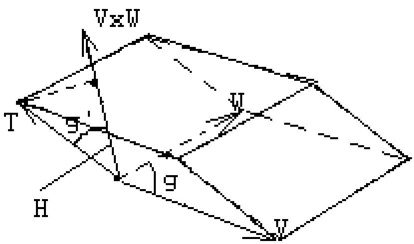
En efecto: VxW = e1x(a.e1 + b.e2) = a.O + b.e3 = b.e3

(VxW)xT = (b.e3)x(c.e1+d.e2+e.e3) =

Producto mixto (Vectorial-Escalar):

Se trata de realizar VxW y después (VxW)*T = /VxW/./T/. cos(g), donde g = áng(VxW, T).

Interpretación geométrica: Volumen del prisma definido por (V,W,T)



(figura aleatoria) (3)

H = proy(T, VxW) = Altura del paralelepípedo (o prisma no recto)

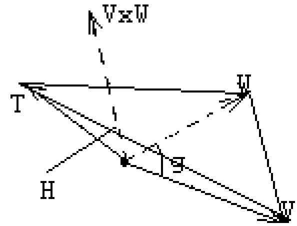
Entonces Vol = $|(VxW|.H = |(VxW|.\left|\left(\frac{T*(VxW)}{|VxW|}\right)\right| =$

$$= |(VxW|.\left|T * (\frac{VxW}{|VxW|})\right| = |(VxW|.|T|.\cos(g') = (VxW) * T.$$

Resumen: Vol = $|(VxW) * T|$ (4)

Volumen de Tetraedro (V,W,T):

Podemos comprobar que Vol = 6.Vol(V,W,T)



NOTA: El plano determinado por V, W divide el espacio en dos subespacios. Llamamos subespacio positivo a aquel hacia donde apunta VxW conforme al convenio descrito más arriba. Según esto, observa que (VxW)*T = T*(VxW) toma valor positivo si el vector T está orientado en la misma dirección que VxW, y negativo en otro caso.

Identidad de Lagrange:

Afirmamos que se cumple la igualdad:

(VxW)*(V'xW') = (V*V').(W*W') – (V*W').(W*V')

o bien: (VxW)*(V' x W') = $\begin{vmatrix} V * V' & V * W' \\ W * V' & W * W' \end{vmatrix}$ (5)

(Identidad de Lagrange)

Dem.: Llamo T = VxW. Tengo T*(V' x W') = (T x V')*W' =

$= ((VxW) \text{ x } V')*W' = \begin{vmatrix} V*V' & V \\ W*V' & W \end{vmatrix} * W' \; = \; \begin{vmatrix} V*V' & V*W' \\ W*V' & W*W' \end{vmatrix}$

o bien: (VxW)*(V' x W') = (V*V').(W*W') – (V*W').(W*V')

A modo de Resumen para su aplicabilidad:

a) Módulo (longitud) de un vector: V*V = /V/./V/.cos(0^o) = $/V/^2$
b) Área de un paralelogramo: /VxW / = /V/./W/.sen(g) = /V/.h

c) Volumen del prisma (o paralelepípedo): Verlo más arriba.

II.- Geometría Vectorial: Métodos vectoriales

Perpendicularidad de recta y plano:

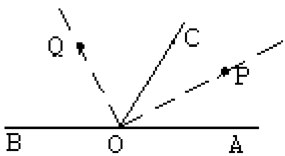
Proposició: "Si la recta determinada por AB es perpendicular a dos rectas AC, AD de un plano, entonces es perpendicular a cualquier recta que pase por A".

Dem.: Si X está en el citado plano: AX = c.AC + d.AD.

Por hipótesis AB*AC = 0, AB*AD = 0. Entonces

AB*AX = c.AB*AC + d.AB*AD = 0

Perpendicularidad de las dos bisectrices de los dos ángulos adyacentes:



Tomo los vectores OA, OB, OC, con OB = AO, como muestra la figura. Suponemos que los tres tienen igual longitud.

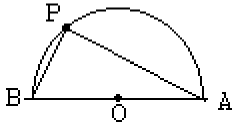
OB*OB = OA*OA = OC*OC , valor que represento por d.

OP = a.OA + a.OC , OQ = b.OB + b.OC

OP*OQ = a.b.(OA+ OC)*(OB + OC) = a.b.(OA*OB + OC*OC +

+ OC*(OA + OB) = a.b.(- d^2 + d^2 + OC*OA – OC*OA) = a.b.(0) = 0

Ángulo inscrito en una semicircunferencia:



OB = -OA, y los tres vectores OA, OB, OP tienen igual longitud, esto es: OA*OA = OP*OP.

OP = OA + AP -- > AP = OP – OA,

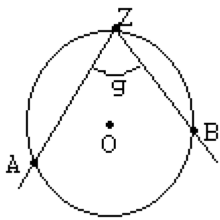
OP = OB + BP -- > BP = OP – OB

AP * BP = (OP – OA)*(OP – OB) = OP*OP + OA*OB – OP*(OA + OB) = OP*OP – OA*OA – OP*(O) = 0

Teniendo en cuenta que P es un punto cualquiera queda probado que en P el ángulo es siempre de 90^o.

Ángulo inscrito en una circunferencia:

En una circunferencia con centro O y radio R fijamos los puntos A, B y el punto Z que puede recorrer la circunferencia.



OZ = a.OA + b.OB . /cota(g)/ = $\frac{|ZA*ZB|}{|ZAxZB|} = \frac{|(ZO+OA)*(ZO+OB)|}{|(ZO+OA)x(ZO+OB)|}$ (*)

$(ZO + OA) * (ZO + OB) = R^2 + ZO * (OB + OA) + OA * OB =$

$= R^2 - OZ * (OB + OA) + OA * OB$

Por otro lado

$$(ZO + OA)x(ZO + OB) = ZOx(ZO + OB) + OAx(ZO + OB) =$$

= ZOxOB + OAxZO + OAxOB = - OZxOB – OAxOZ + OAxOB =

= - OZ x OB + OZ x OA + OA x OB = OA x OB – OZ x (OB – OA)

Entonces

$$(*) = \frac{|R^2 - OZ*(OB+OA)+OA*OB|}{|\text{OA x OB – OZ x (OB – OA)}|} = \frac{|R^2 - (a.OA+b.OB)*(OB+OA)+OA*OB|}{|\text{OA x OB – (a.OA+b.OB) x (OB – OA)}|} = (**)$$

$$R^2 - (a.OA + b.OB) * (OB + OA) + OA * OB =$$

= R^2 - [a.OA*OB + a.R^2 + b.R^2 + b.OB*OA] + OA*OB =

= (1 - a - b).R^2 - (a + b - 1).OA*OB = (1- a - b).(R^2 + OA*OB)

Por otro lado

$$\text{OA x OB – (a.OA + b.OB) x (OB – OA) =}$$

= OA x OB – [a.OAxOB - b.OBxOA] = (1 – a – b).(OA x OB)

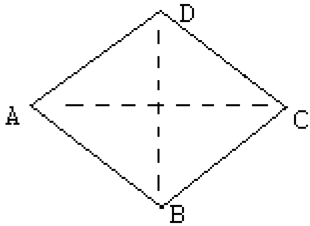
Entonces

$$(**) = \frac{|\text{(1– a–b).(R2 + OA*OB)}|}{|\text{(1 – a – b).(OA x OB)}|} = \frac{|R^2+OA*OB|}{|OA\ x\ OB|} = \frac{|OA*(OA+OB|}{|OA\ x\ OB|} \qquad (3)$$

Este resultado depende solamente del centro O y de los puntos fijados A, B.

Conclusión (Teorema): El ángulo g = (AZB) no depende del punto Z. (Toma el mismo valor cualquiera que sea su posición).

Perpendicularidad de las diagonales del rombo:



En el rombo: /AB/ = /DC/ = /BC/ = /AD/. Tenemos

AC*BD = (AB + BC)*(BA + AD) =

= AB*BA + AB*AD + BC*BA + BC*AD =

= **-** $/AB/^{2}$ + AB*AD + BC*BA + $/BC/^{2}$ = AB*AD + BC*BA =

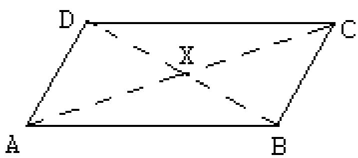
= AB*AD – AB*BC = AB*AD + AB*CB = AB*(AD + CB) =

= AB*O = 0

____

Diagonales de un paralelogramo: Su punto común

Sea el paralelogramo ABCD. Deseamos probar que las dos diagonales AC, BD se cortan en su punto medio (de cada diagonal).



AX = a.AC, BX = b.BD, y también AX = AB + BX = AB + b.BD

Entonces: a.AC = AB + b.BD . Expresamos la igualdad de modo que intervengan solo los vectores AB, AC. Tengo

BD = BA + AC + CD = BA + AC + BA = 2.BA + AC

por tanto: a.AC = AB + b.(2.BA + AC) -- > (a – b).AC = (1 – 2.b).AB

Puesto que AB y AC no son colineales, tienen que cumplirse

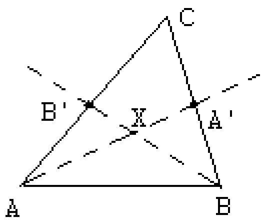
a – b = 0 , 1 – 2.b = 0, de donde: b = 1/2 , a = 1/2

Por tanto AX = 1/2 .AC, BX = 1/2. BD c.q.d.

Medianas de un Triángulo: Teorema del Baricentro

Sea el triángulo ABC. Marco el punto medio A' del lado BC opuesto al vértice A, y el punto medio B' del lado AC opuesto al vértice B. Por definición llamamos medianas a las rectas AA', BB' (y también CC').

Estudiamos el punto común a las dos medianas AA', BB'.



Tengo: AX = a.AA', BX = b.BB' , AX = AB + BX , y entonces

a.AA' = AB + b.BB'

La definición de mediana nos dice que AA' = AB + $\frac{1}{2}.BC =$

= AB + $\frac{1}{2}.(AC - AB) = \frac{1}{2}.(AB + AC)$, y del mismo modo BB' = BA + $\frac{1}{2}.AC = BA + \frac{1}{2}.(AB + BC) =$

$= BA + \frac{1}{2}.(-BA + BC) = \frac{1}{2}.(BA + BC) = \frac{1}{2}.(BA + BA + AC) =$
$BA + \frac{1}{2}.AC = -AB + \frac{1}{2}.AC = \frac{1}{2}.(-2.AB + AC)$

Entonces $\frac{a}{2}.(AB + AC) = AB + \frac{b}{2}.(-2.AB + AC)$, de donde

$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right).AB + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right).AC = O$, y puesto que AB y AC son l.i. ha de cumplirse:

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right) = 0, \qquad \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) = 0,$$ de donde

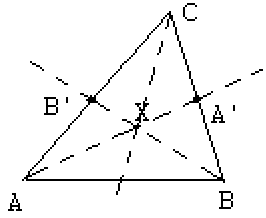
b = a --> $(3.b = 2)$ --> $b = \frac{2}{3}$, $a = \frac{2}{3}$

Significa que el punto X común a las dos medianas se encuentra a 2/3 del vértice correspondiente.

Es claro que si tomamos ahora las medianas AA' y CC', su punto Y común se encuentra a 2/3 del vértice A, y por tanto coincide con el punto X obtenido antes. **Conclusión:** "Las tres medianas tienen un punto común situado a 2/3 del vértice correspondiente".

Además: (AX + BX + CX) = 2/3.(AA' + BB' + CC') -- >

(AX + BX + CX) = 2/3.(AB + 1/2.BC + BA+1/2.AC + CB+1/2.BA) =



= 2/3.(1/2.BC + 1/2.AC + CB + 1/2.BA) = 1/3.(- BC + AC + BA) =

= 1/3.(CB + AC + BA) = 1/3. O = O (vector)

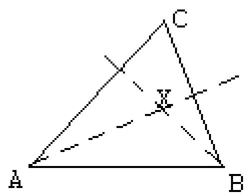
Conclusión: "El baricentro X es el punto determinado por

AX + BX + CX = O

Alturas en un triángulo: Teorema de las alturas

Sea el triángulo ABC. Tomo la base de vectores formada por AB y AC.

Suponemos que las alturas trazadas por A y por B se cortan en un punto X.



Tengo: AX = a.AB + b.AC,

BX = BA + AX = -AB + (a.AB + b.AC) = (a – 1).AB + b.AC

Aplicamos la condición de perpendicularidad, y tengo

0 = AX*BC = (a.AB + b.AC)*BC = (a.AB + b.AC)*(AC – AB) =

= a.AB*AC – a.AB*AB + b.AC*AC – b.AC*AB =

= a.AB*AC – a.AB*AB + b.AC*AC + b.AB*AC =

= (a + b).AB*AC - a.AB*AB + b.AC*AC , o bien

0 = AX*BC = a.(AB*AC – AB*AB) + b.(AC*AC - AC*AB)

Por otro lado

0 = BX*AC = ((a – 1).AB + b.AC)*AC = (a -1).AB*AC + b.AC*AC =

= a.AB*AC + b.AC*AC – AB*AC

Deseamos resolver el sistema $\begin{cases} AX * BC = 0 \\ BX * AC = 0 \end{cases}$, que después de los cálculos hemos transformado en el sistema

$$\begin{cases} \mathrm{a.}\left(\mathrm{AB} * \mathrm{AC} - \mathrm{AB} * \mathrm{AB}\right) + \mathrm{b.}\left(\mathrm{AC} * \mathrm{AC} - \mathrm{AC} * \mathrm{AB}\right) = 0 \\ \mathrm{a.AB} * \mathrm{AC} + \mathrm{b.AC} * \mathrm{AC} - \mathrm{AB} * \mathrm{AC} = 0 \end{cases}$$

El determinante de los coeficientes es

$\begin{vmatrix} \mathrm{AB} * \mathrm{AC} - \mathrm{AB} * \mathrm{AB} & \mathrm{AC} * \mathrm{AC} - \mathrm{AC} * \mathrm{AB} \\ \mathrm{AB} * \mathrm{AC} & \mathrm{AC} * \mathrm{AC} \end{vmatrix}$ = (Restando la segunda de la primera) = $\begin{vmatrix} -AB * AB & -AC * AB \\ AB * AC & AC * AC \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} AB * AB & AC * AB \\ AB * AC & AC * AC \end{vmatrix}$ =

= - $\begin{vmatrix} AB * AB & -AB * AC \\ -AC * AB & AC * AC \end{vmatrix}$ =

= - [(AB*AB).(AC*AC) – (AC*AB).(AB*AC)] =

= - $\begin{vmatrix} AB * AB & AB * AC \\ AC * AB & AC * AC \end{vmatrix}$ = (Por la relación de Lagrange) =

= - (AB x AC) * (AB x AC) $\neq 0$, porque AB y AC son no colineales, es decir, son linealmente independientes, y por tanto AB x AC $\neq O$.

El sistema, cuyas incógnitas son a, b, tiene solución única.

Resolviendo

Para la incógnita “a”:

D_a = $\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{AC} * \mathrm{AC} - \mathrm{AC} * \mathrm{AB} \\ \mathrm{AB} * \mathrm{AC} & \mathrm{AC} * \mathrm{AC} \end{vmatrix}$ = (* es conmutativo)

$$= - (AB*AC).(AC * AC - AB * AC)$$

$$D_b = \begin{vmatrix} AB * AC - AB * AB & 0 \\ AB * AC & AB * AC \end{vmatrix}$$

$$= (AB*AC).(AB*AC - AB*AB) = - (AB*AC).(AB*AB - AB*AC)$$

Por tanto

$$a = \frac{(AB*AC).(AC*AC - AB*AC)}{(AB \text{ x } AC) * (AB \text{ x } AC)},$$

$$b = \frac{(AB*AC).(AB*AB - AB*AC)}{(AB \text{ x } AC) * (AB \text{ x } AC)}$$

Entonces el punto común es

$$AX = \frac{(AB*AC).(AC*AC - AB*AC)}{(AB \text{ x } AC) * (AB \text{ x } AC)}.AB + \frac{(AB*AC).(AB*AB - AB*AC)}{(AB \text{ x } AC) * (AB \text{ x } AC)}.AC$$

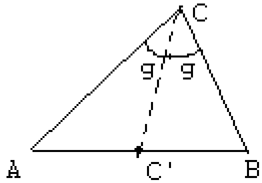
NOTA: Si tomamos las alturas desde A y desde C afirmamos que el resultado será el anterior cambiando B por C, y C por B, como sigue

$$AY = \frac{(AC*AB).(AB*AB - AC*AB)}{(AC \text{ x } AB) * (AC \text{ x } AB)}.AC + \frac{(AC*AB).(AC*AC - AC*AB)}{(AC \text{ x } AB) * (AC \text{ x } AB)}.AB$$

Teniendo en cuenta que el producto * es conmutativo, y que el denominador conserva el signo (después de dos cambios del mismo), el punto Y coincide con el punto X.

División de un lado del triángulo por la bisectriz del ángulo opuesto:

Sea el triángulo ABC y la bisectriz del ángulo en C, obteniendo el punto C’. Nos fijamos en los ángulos iguales ACC’, BCC’.



CB*CC’ = /CB/./CC’/.cos(g) -- > $\frac{CB*CC'}{|CB|} = |CC'|.cos(g) =$

$= |CC'|.cos(g) = \frac{CA*CC'}{|CA|}$. Por otro lado para CC’ tenemos

CC’ = CA +AC’ = CA + t.AB = CA + t.(AC + CB) =

= (1 – t).CA + t.CB .

Hacemos intervenir esta expresión en lo anterior, abreviando

d = /CC’/.cos(g)

d . /CB/ = CB* ((1 – t).CA + t.CB) = (1- t).CB*CA + t.CB*CB

d . /CA/ = CA* ((1 – t).CA + t.CB) = (1- t).CA*CA + t.CA*CB

Despejamos el valor d

$$d = \frac{1}{|CB|} \cdot ((1-\mathrm{t}).\mathrm{CB} * \mathrm{CA} + \mathrm{t}.\mathrm{CB} * \mathrm{CB})$$

$$d = \frac{1}{|CA|} \cdot ((1-\mathrm{t}).\mathrm{CA} * \mathrm{CA} + \mathrm{t}.\mathrm{CA} * \mathrm{CB})$$

Igualando:

$$\frac{1}{|CB|} \cdot ((1-\mathrm{t}).\mathrm{CB} * \mathrm{CA} + \mathrm{t}.\mathrm{CB} * \mathrm{CB}) =$$

$$= \frac{1}{|CA|} \cdot ((1-\mathrm{t}).\mathrm{CA} * \mathrm{CA} + \mathrm{t}.\mathrm{CA} * \mathrm{CB})$$

Continuando

$$\frac{1}{|CB|} \cdot (1-t).CB * CA - \frac{1}{|CA|} \cdot ((1-\mathrm{t}).\mathrm{CA} * \mathrm{CA} =$$

$$= -\frac{1}{|CB|}\ .t.CB * CB + \frac{1}{|CA|}\ .t\ .CA * CB$$

Continuando

$$(1-\mathrm{t})\ .\ [\frac{1}{|CB|}\ .CB * CA - \frac{1}{|CA|}\ .(.\ \mathrm{CA} * \mathrm{CA}] =$$

$$= \mathrm{t}\ .\ [-\frac{1}{|CB|}\ .CB * CB + \frac{1}{|CA|}\ .CA * CB\ ]$$

Continuando

$$(1-\mathrm{t})\ .\ [|CA|\ .CB * CA - |CB|\ .CA * CA] =$$

$$= \mathrm{t}\ .\ [-|CA|\ .CB * CB + |CB|\ .CA * CB\ ]$$

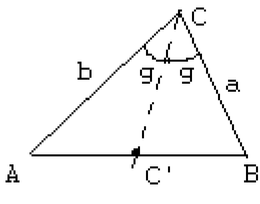
$$(1-\mathrm{t}).\begin{vmatrix} |CA| & CA * CA \\ |CB| & CB * CA \end{vmatrix} = \mathrm{t}\ .\begin{vmatrix} |CB| & CB * CB \\ |CA| & CA * CB \end{vmatrix}$$

$$\frac{1-t}{t} = \frac{\begin{vmatrix} |CB| & CB*CB \\ |CA| & CA*CB \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |CA| & CA*CA \\ |CB| & CB*CA \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} |CB| & |CB|^2 \\ |CA| & CA*CB \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |CA| & |CA|^2 \\ |CB| & CB*CA \end{vmatrix}} = \frac{|CB|.(CA*CB-|CA|.|CB|)}{|CA|.(CB*CA-|CB|.|CA|)} = \frac{|CB|}{|CA|}$$

(Hemos utilizado el hecho de que * es conmutativo)

Por otro lado, teniendo en cuenta lo expresado más arriba: AC’ = t.AB

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{t.AB}{BA+AC'} = \frac{t.AB}{BA+t.\ AB} = \frac{t.\ AB}{(t-1).AB} = -\frac{t}{1-t} = -\frac{|CA|}{|CB|} = -\frac{a}{b}$$

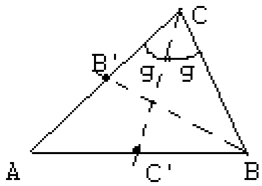


Incentro de un triángulos: Teorema del Incentro

Deseamos probar que las tres bisectrices se cortan en un punto común.

Vamos a utilizar el resultado del punto anterior, e incluso la misma notación.

Designamos por a, b, c la longitud de los lados (como es habitual).



Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto anterior tenemos:

$\frac{a}{b} = \frac{1-t}{t}$ --> $\frac{t}{b} = \frac{1-t}{a}$, y sumando término a término $\frac{t}{b} = \frac{1}{a+b}$
de donde t = $\frac{1}{a+b}$. Entonces: CC' = CA + $\frac{b}{a+b}\,.AB$ =
= CA + $\frac{b}{a+b}\,.(AC + CB) = \left(1 - \frac{b}{a+b}\right).CA + \frac{b}{a+b}.CB$ =
= $\frac{1}{a+b}$. (a.CA + b.CB) . Esto nos dice que CC' y a.CA + b.CB son colineales. Por tanto para un punto X de la bisectriz CC' será

CX = t . (a.CA + b.CB)

De la misma forma obtendremos que BY = u . (a.BA + c.BC)

Para que Y = X, es decir, que sean el punto común, ha de cumplirse la igualdad BX = CX. Igualando

u.(a.BA + c.BC) = BX = BC + CX = BC + t . (a.CA + b.CB) =

= (1 – t.b).BC + t.a.CA = (1 – t.b).BC + t.a.(CB + BA) =

= (1 – t.b – t.a).BC + t.a.BA , esto es:

u.(a.BA + c.BC) = (1 – t.b – t.a).BC + t.a.BA

y teniendo en cuenta que BA y BC no son colineales, ha de cumplirse

$$\begin{cases} u.a = t.a \\ u.c = 1 - t.b.t.a \end{cases},$$ de donde u = t, 1 = t . (a + b + c),

t = $\frac{1}{a+b+c}$, $u = \frac{1}{a+b+c}$.

El punto común viene dado por CX = $\frac{1}{a+b+c}.(a.CA + b.CB)$

BX = $\frac{1}{a+b+c}.(a.BA + c.BC)$

Tratando ahora las dos medianas CC', AA', por isomorfía obtendremos

AX = $\frac{1}{a+b+c}.(b.AB + c.AC)$

Si las sumamos tengo: AX + BX + CX =

$= \frac{1}{a+b+c}$. (b.AB – a.AB – a.AC + c.AC + c.BC – b.BC) =

$= \frac{1}{a+b+c}.[(b-a).AB + (c-a).AC + (c-b).BC]$

Otro detalle: a.AX + b.BX + c.CX = $\frac{1}{a+b+c}.(a.b.AB + a.c.AC) +$

$+ \frac{1}{a+b+c}.(b.a.BA + b.c.BC) + \frac{1}{a+b+c}.(c.a.CA + c.b.CB) =$

$= \frac{1}{a+b+c}.(a.b.AB + a.c.AC - b.a.AB + b.c.BC - c.a.AC - c.b.BC)$ = 0 .

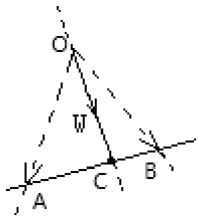
Teorema del Incentro

Las tres bisectrices tienen un punto común, y este punto X satisface la igualdad: a.AX + b.BX + c.CX = 0

III.- Resultados interesantes Geométrico - Vectoriales

Cortar un segmento por una recta trazada desde un punto

Cortar un segmento AB mediante una recta que pasa por el punto P (origen O)



Si W = a.OA + b.OB, entonces se cumple: a.CA + b.CB = O, vectorialmente.

Dem.:

OC = OA + AC. Sea t tal que AC = t.AB. Entonces

OC = OA + t.AB = OA + t.(OB – OA) = (1- t).OA + t.OB (1)

Por otro lado:

OC = OB + BC. Sea u tal que BC = u.BA. Entonces

OC = OB + u.BA = OB + u.(OA – OB) = u.OA + (1- u).OB (2)

Multiplico (1) por u y (2) por t, y las sumo

u.OC + t.OC = [u.(1- t).OA + u.t.OB] + [t.u.OA + t.(1- u).OB] =

= [u.(1- t) + t.u].OA + [u.t + t.(1- u)].OB = u.OA + t.OB

Teniendo en cuenta que OC = k.W, tenemos

u.OA + t.OB = u.k.W + t.k.W = k.(u + t).W =

= (k.(u + t).(a.OA + b.OB), y teniendo en cuenta la independencia lineal tiene que cumplirse

$$\begin{cases} u = a.k.(u+t) \\ t = b.k.(u+t) \end{cases}, \text{ de donde}$$

$$a = \frac{u}{k.(u+t)}, \quad b = \frac{t}{k.(u+t)}$$

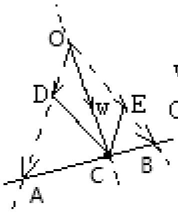
Entonces: a.CA + b.CB = -a.AC – b.BC = (*)

Recuerda que t es tal que AC = t.AB, y u es tal que BC = u.BA, por lo que

(*) = -a.t.AB + b.u.AB = $-\frac{t.u}{k.(u+k)}\,.AB + \frac{u.t}{k.(u+k)}.AB = O$ (vector)

c.q.d.

OTRA FORMA:



w = a.OA + b.OB

OC = k.w =(k.a).OA+(k.b).OB

Aplicamos la semejanza de los triángulos ACD y CBE

$\frac{k.b}{1-k.b} = \frac{1-k.a}{k.a}$ -- > k^2.a.b = (1- k.b).(1- k.a) = 1- k.a – k.b + k^2.a.b -- >

0 = 1 – k.a – k.b -- > $\begin{cases} k.b = 1-k.a \\ k.a = 1-k.b \end{cases}$ (1)

Tenemos: CA = OA – OC = OA – (k.a.OA + k.b.OB) =

= (1 – k.a).OA – k.b.OB

CB = OB – OC = OB – (k.a.OA + k.b.OB) =

= (1- k.b).OB – k.a.OA

Entonces

a.CA + b.CB = a.[(1 – k.a).OA – k.b.OB] + b.[(1- k.b).OB – k.a.OA

Teniendo en cuenta el resultado (1)

a.CA + b.CB = [a.(k.b).OA – a.(k.b).OB] + [b.(k.a).OB – b.(k.a).OA] =

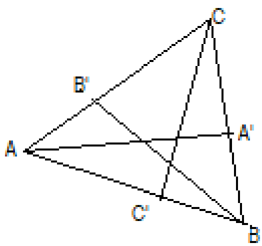
= [(k.a.b) – (k.a.b)].OA + [- (k.a.b) + (k.a.b)].OB = O

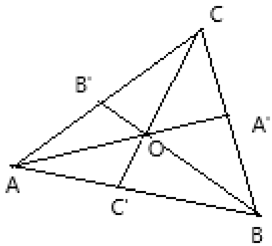
Teorema de Ceva:

En base a las siguientes figuras, pero para todo triángulo ABC, este teorema afirma lo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que las rectas AA', BB', CC', concurran en un punto, o sean paralelas entre sí, es que se cumpla la siguiente igualdad (entre la longitud de segmentos):

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$$





Dem.: Condición necesaria.

a) Supongamos que las tres rectas citadas son paralelas entre sí. Si fuesen AA' = k.BB' , CC' = h.BB', y siendo BB' = a.BA + b.BC, tengo

AA' = k.(a.BA + b.BC) = k.a.BA + k.b.(BA+ AC) = -(k.a +k.b).AB+k.b.AC

CC' = h.(a.BA + b.BC) = h.(a.(BC+CA) +h.b.BC) = (a.h+b.h).BC +h.a.CA =

= -h.(a+b).CB +h.a.CA

Según la anterior tengo

-(k.a +k.b).A'B +k.b.A'C = O -- > A'B/A'C = b/(a+b)

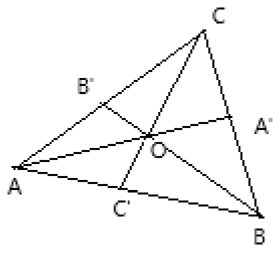
-(a.h+b.h).C'B +h.a.C'A = O -- > C'A/C'B = (a+b)/a

y de BB' = a.BA + b.BC tenemos, en virtud de …, a.B'A +b.B'C = O -- >

a.B'A + b.B'C = O -- > B'C/B'A = -a/b

Multiplicándolas: b/(a+b). -a/b. (a+b)/a = - 1

b) Si concurren en un punto, sea el punto O (ver figura):



Sea OA = b.OB + a.OC , y por tanto OB = 1/b.(OA-a.OC), OC = 1/a.(OA-b.OB). Aplicando la Pro1 tenemos

b.A'B + a.A'C = O -- > A'B/A'C = -a/b

1/b.B'A – a/b.B'C = O -- > B'C/B'A = b/(b.a)

1/a.C'A –b/a.C'B = O -- > C'A/C'B = (b.a)/a

Multiplicando: A'B/A'C . B'C/B'A . C'A/C'B = -a/b . 1/a . b = - 1

c) Caso en el que sólo dos de las rectas son paralelas.

Condición suficiente: Sea C'' el punto común de AA' y BB'. Por lo probado antes se cumple A'B/A'C . B'C/B'A . C''A/C''B = -1

Pero ahora por hipótesis también C' es un punto que cumple la igualdad A'B/A'C . B'C/B'A . C'A/C'B = -1

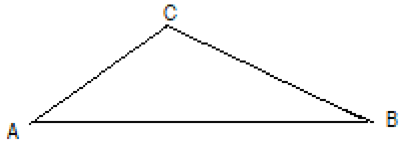
Entonces llegamos a que C''A/C''B = C'A/C'B, y por tanto C'' coincide con C'.

COROLARIOS: Casos como las medianas 'Baricentro', las bisectrices 'Incentro' y las alturas 'Ortocentro', nos sitúan en este problema.

Efectivamente, como sigue.

-Caso de las medianas: Los puntos A', B', C' son el punto medio del lado respectivo, y por tanto: A'B/A'C . B'C/B'A . C'A/C'B = -1 . -1 . -1 = -1

-Caso de las bisectrices (de los ángulos): Sea el triángulo ABC



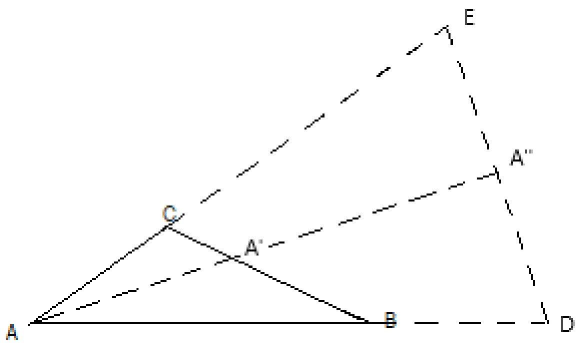
Construimos el triángulo ADE de modo que (vectorialmente)

AD = /AC/. AB, AE = /AB/. AC

es decir, es triángulo isósceles, y por tanto, si A'' es el punto medio de ED la recta AA'' es bisectriz del ángulo A. Sea A' el punto de corte con BC. Consideramos el vector V = AD + AE = /AC/.AB + /AB/.AC , que corta en A' al lado BC . En virtud de la proposición 1 se cumple

0 = /AC/.A'B + /AB/.A'C , de donde /AC/.A'B = - /AB/.A'C , y por tanto, /A'B /:/A'C/ = -/AB/ : /AC/ .

Del mismo modo se puede obtener: /B'C/:/B'A/ = -/BC/ : /BA/, /C'A/: /C'B/ = -/CA/ : /CB/



Haciendo el producto

/A'B/: /A'C/ . / B'C/: /B'A/ . /C'A/:/C'B/ = -/AB/ : /AC/ . -/BC/ : /BA/ . -/CA/ : /CB/ = (simplificando) = …. = -1

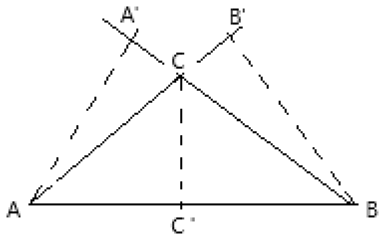
Por consiguiente las tres bisectrices se cortan en un mismo punto.

-Caso de las alturas:

C’A = CA.cos(A),   C’B = CB.cos(B)

A’C = AC.cos(180-C), A’B = AB.cos(B)

B’C = BC.cos(180-C), B’A = BA.cos(A)



Hacemos el producto de cociente:

C’A/C’B . A’B/A’C . B’C/B’A = (CA.cos(A) / CB.cos(B)) .

. (AB.cos(B) / AC.cos(180-C)) . (BC.cos(180-C) / BA.cos(A) =

= (simplificando) = CA/CB .AB/AC .BC/BA = AC/BC.AB/AC . –BC/AB = -1

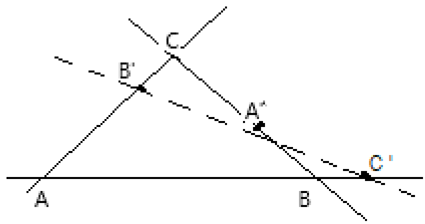
Por consiguiente las alturas se cortan en un mismo punto.

Teorema de Menelao

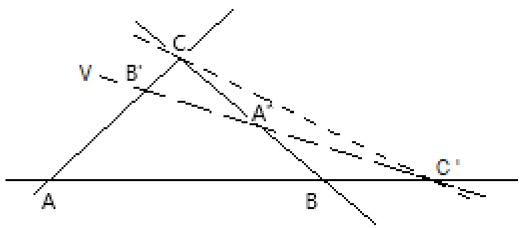
Tenemos el triángulo ABC , e incluimos las rectas que soportan cada lado. Sobre cada lado, o la recta que lo soporta, marcamos los puntos A', B', C', cada uno opuesto al vértice correspondiente. El teorema afirma lo siguiente:

Es condición necesaria y suficiente para que los puntos A', B', C' estén alineados (colineales) que se cumpla la igualdad

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$



Dem.: Condición necesaria



Supongamos que los puntos están alineados sobre una recta con dirección dada por el vector v.

Si v = b.C'B + a.C'C , entonces, por la Pro.1 se cumple: O = b.A'B + a.A'C, de donde A'B/A'C = -a/b .

Sea C’B = c.C’A, y entonces v = b.(c.C’A) + a.C’G = (b.c).C’A + a.C’C, y en virtud de la Pro1,

O =   a.B’C + (b.c).B’A , de donde B’C/B’A = -(b.c)/a

Por otro lado , de C’B = c.C’A   obtengo C’A/C’B = 1/c

Multiplicando: A’B/A’C . B’C/B’A . C’A/C’B = -a/b . -(b.c)/a . 1/c = 1

Condición suficiente: Sea el punto C’’ el punto donde la recta B’A’ corta al lado AB. Según lo probado antes se cumple

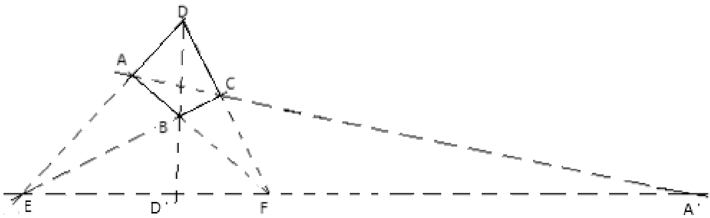
A’B/A’C . B’C/B’A . C’’A/C’’B = 1

Pero por hipótesis el punto C’ también lo cumple: A’B/A’C . B’C/B’A . C’A/C’B = 1,   y entonces ha de ser   C’’A/C’’B = C’A/C’B, y por tanto C’’ coincide con C’.

Teorema del Cuadrilátero. Cuaterna Armónica

Tomamos los cuatro puntos A, B, C, D, vértices de un cuadrivértices.. Lados del cuadrilátero son las rectas que unen dos puntos consecutivos. Prolongándolas obtenemos nuevos puntos, contando un total de seis vértices (posibles cortes de las cuatro rectas: $C_{4,2}$ = (4.3):2 = 6). Uniendo vértices no consecutivos (es decir, no están sobre el mismo lado) obtenemos tres diagonales (figura adjunta).

Por el Teorema de Ceva aplicado al triángulo EFD, teniendo en cuenta que EC, FA, DD’ tienen en común el punto B,



$$\frac{D'F}{D'E} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{CD}{CF} = -1$$

y aplicando el de Menelao al mismo triángulo EFD, teniendo en cuenta que A, C, A' están alineados,

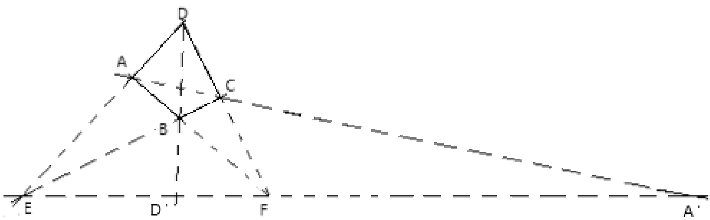
A'F/A'E . AE/AD . CD/CF = 1

Por división miembro a miembro obtengo

(D'F/D'E . AE/AD . CD/CF) : (A'F/A'E . AE/AD . CD/CF) = -1

y simplificando: D'F/D'E : A'F/A'E = -1

Diremos que: " Sobre una diagonal como EF, los vértices E, F quedan separados armónicamente por los puntos D' y A' que son el resultado del corte con las otras dos diagonales ".



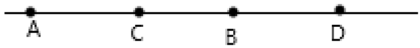
D'F/D'E : A'F/A'E = -1 < -- > (A'E . D'F) : (D'E . A'F) = -1 -- >

(EA'.FD') : (ED' .FA') = -1 -- > EA'/ED' : FA'/FD' = -1 -- >

ED'/EA' : FD'/FA' = -1

En general y cambiando la notación, si sobre una recta r tenemos los cuatro puntos A, B, C, D, y se cumple que

AC/AD : BC/BD = -1 , decimos que los puntos A, B quedan separados armónicamente por los puntos C, D.



Observa que AC/AD : BC/BD = AC/BC : AD/BD

Llamaremos 'razón doble' al cociente AC/BC : AD/BD de las dos razones AC/BC y AD/BD (también llamada bicociente), y la simbolizamos mediante (ABCD), siendo 'Cuaterna armónica' cuando cumple

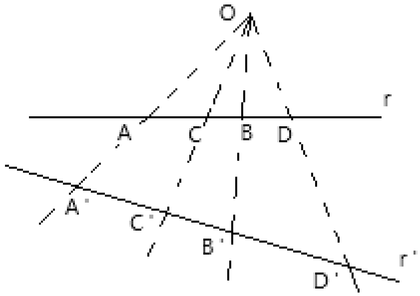
AC/BC : AD/BD = -1

(ABCD) representará también el valor AC/BC : AD/BD

Propiedad: 'El valor de la cuaterna (ABCD) es invariante frente a una proyección de sus puntos, desde un foco, sobre una recta'.

Observa la figura. Lo que decimos significa que

(A'B'C'D') = (ABCD)



Dem.: Expresamos OC = a1.OA + b1.OB, OD = a2.OA + b2.OB

Aplicando a ambas el punto … tenemos : O = a1.CA + b1.CB -- > CA/CB = -b1/a1 , O = a2.DA + b2.DB -- > DA/DB = -b2/a2

Por otro lado sean OA' = a3.OA, OB' = b3.OB , y ahora

OC = (a1/a3).OA' + (b1/b3).OB'

OD = (a2/a3).OA' + (b2/b3).OB'

y aplicando a éstas la propiedad … tenemos

C'A'/C'B' = -(b1/b3)/(a1/a3) = -(b1.a3)/(a1.b3)

D'A'/D'B' = -(b2/b3)/(a2/a3) = -(b2.a3)/(a2.b3)

Dividiendo: (ABCD) = -b1/a1 : -b2/a2 = (b1.a2)/(a1.b2)

(A'B'C'D') = -(b1.a3)/(a1.b3) : -(b2.a3)/(a2.b3) =

= (b1.a3.a2.b3)/(a1.b3.b2.a3) = (b1.a2)/(a1.b2)

y vemos que su valor coincide: (A'B'C'D') = (ABCD)

Otras propiedades de las cuaternas (o bicocientes, o ‘razón doble’)

a) Su valor no varía si realizamos dos permutaciones:

(ABCD)=(BADC)=(BDCA)=(DCBA)=(CDAB) ….

b) El producto de dos cuaternas, con los mismos puntos pero ordenados de modo que los dos primeros coinciden, toma el valor uno, esto es

(ABCD).(ABDC) = 1

En efecto: (AC/BC : AD/BD) . (AD/BD : AC/BC) =

= (AC/BC . AD/BD) : (AD/BD . AC/BC) = 1

c) La suma de dos cuaternas, con los mismos puntos pero ordenados de modo que los extremos de una y la otra coinciden, toma el valor uno, esto es

(ABCD) + (ACBD) = 1

En efecto: AC/BC : AD/BD + AB/CB : AD/CD =

= (AC.BD)/(BC.AD) + (AB.CD)/(AD.CB) =

= (AC.BD)/(BC.AD) -(AB.CD)/(AD.BC) = (AC.BD - AB.CD)/(AD.BC) =

= [(AB+BC).BD – (CB+BD).AB]/(AD.BC) = (BC.BD – CB.AB)/(AD.BC) =

= [BC.(BD +AB)]/(AD.BC) = (BD+AB)/AD = (AB+BD)/(AB+BD) = 1

Consecuencias:

a) Cuando permutamos los cuatro puntos obtenemos no más de los siguientes seis valores:

Si (ABCD) = k, entonces:

(ABCD) = k , (ABDC) = 1/k, (ACBD) = 1 – k,

(ACDB) = 1/(1-k), (ADCB) = k/(k-1), (ADBC)= (k-1)/k

b) Cuando k = -1, los valores posibles son

(ABCD) = -1, (ABDC) = 1/-1 = -1, (ACBD) = 2

(ACDB) = 1/2, (ADCB) = -1/(-2) = 1/2, (ADBC)= (-2)/(-1)= 2

Abscisas Proyectivas sobre la recta real ampliada

Es sabido que en la estructura de cuerpo de los números reales no es posible la división por cero. Pretendemos salvar esta prohibición de alguna manera. Ha sido aceptado representar el cociente $\frac{k}{0}$ mediante el símbolo ∞, y agregándolo al conjunto R de los reales obtenemos $\bar{R} = R \cup \{\infty\}$, que llamaremos 'recta ampliada'.

Hecho lo anterior debemos tener en cuenta la siguiente tabla donde se muestran los resultados de operaciones básicas en $\bar{R}$

Sí admisibles	**No admisibles**
$k + \infty = \infty$	$\infty \pm \infty$
$k \cdot \infty = \infty$	$0 \cdot \infty$
$k : 0 = \infty$	$0 : 0$
$k : \infty = 0$	$\infty : \infty$

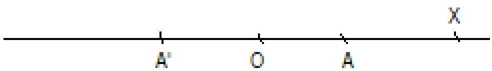
$(k \neq 0)$

En cada recta añadiremos un punto simbolizado por P_∞ y que imaginamos situado a distancia actualmente infinita (distancia inalcanzable).

Si sobre la recta hemos fijado una escala mediante: ‘Punto origen’ en O, ‘unidad de medida’ la distancia OA donde A es otro punto fijado. Si X es otro punto cualquiera (punto genérico), vectorialmente tenemos OX = x. OA, y al punto P_∞ le corresponde el valor x = ∞ .

A esta recta hemos de dotarle de ‘Orientación’, porque situados en el punto origen O podemos caminar hacia ‘derecha’ al que asignamos valor ‘positivo’ (a la distancia recorrida), ó caminar hacia la ‘izquierda’ al que asignamos valor ‘negativo’. Esto nos lleva también a distinguir entre $P_{+\infty}$ y $P_{-\infty}$.

$P_{-\infty}$



$P_{+\infty}$

Observa: OA’ = - OA

En cuanto a la razón OX/AX entre distancias recordamos que la representamos mediante la terna (OAX), y más general (ABX).

Tenemos $\frac{OX}{AX} = \frac{OA+AX}{AX} = \frac{OA}{AX} + 1$, que nos lleva a la siguiente tabla de valores (donde $A \neq O$). Observa que $\frac{OA}{AX} = 0$ cuando X sea P_∞ .

(OAX)	**Valor**	
(OAO) = OO/AO		0
(OAA) = OA/AA		+∞
(OA$P_{+\infty}$) = O$P_{+\infty}$/A$P_{+\infty}$ = OA/A	$P_{+\infty}$ + 1	1

Si consideramos las cuaternas (OABX), cuyo valor viene dado por

(OABX) = OB/AB : OX/AX = (OAB) : (OAX)

Obtenemos la siguiente tabla de valores (donde O, A, B son distintos entre sí)

(OABX)	Valor
(OABO) = (OAB):(OAO) = -(OAB):0	∞
(OABA) = (OAB):(OAA) = (OAB): ∞	0
(OABB) = (OAB):(OAB)	1
(OABP_∞) = (OAB):(OAP_∞) = (OAB): 1	(OAB)

La siguiente propiedad (Teorema) permite definir la 'abscisa proyectiva' del punto X mediante el valor (OABX).

Propiedad:

La ecuación x = (OABX) establece una correspondencia biunívoca entre la 'recta proyectiva completa' recorrida en el sentido O, A, B, y la 'recta real completada' de los números reales recorrida en el sentido ∞, 0, 1.

Dem.: (OABX) = (∞ 0 1 x) = $\frac{\infty\ 1}{0\ 1} : \frac{\infty\ x}{0\ x} = \frac{\infty\ 1\ .\ 0\ x}{0\ 1\ .\ \infty\ x} = \frac{-1\ \infty}{-x\ \infty} . \frac{0\ x}{0\ 1} =$

$$\frac{1\ \infty}{x\ \infty} . \frac{0\ x}{0\ 1} = \frac{1\ x + x\ \infty}{x\ \infty} . x = \left(1 + \frac{1\ x}{x\ \infty}\right). x = (1+0). x = x$$

c.q.d.

Observa que hemos fijado la terna (OAB) y después hemos hecho intervenir el punto X cuya abscisa proyectiva es x. Si k = (OAB) , teniendo en cuenta que hemos definido x = (OABX) y que (OABX) = (OAB)/(OAX) = k / (OAX) , y por tanto x = k / (OAX).

Tenemos $x = \frac{k}{OAX} = k.\frac{AX}{OX} = k.\frac{AO+OX}{OX} = k.\left(\frac{AO}{OX} + 1\right)$, entonces

x = k. $\frac{AO}{OX} + k$ -- > $-k.\frac{AO}{OX} = k - x$ -- > $k.\frac{OA}{OX} = k - x$ -- > OX = $\frac{k.OA}{k-x}$

Vector MX , sabiendo que la abscisa de X es x:

Tenemos OX = OM + MX , MX = OX – OM = $\frac{k.OA}{k-x}$ – OM =

= $\frac{k.OA-(k-x).OM}{k-x}$ = $\frac{k.(OM+MA)-(k-x).OM}{k-x} = \frac{k.MA+x.OM}{k-x}$, queda pues

MX = $\frac{x}{k-x}.OM - \frac{k}{k-x}.AM$, donde k = (OAB) , o bien

MX = $\frac{k.OA-(k-x).OM}{k-x}$ = $\frac{k.OA-(k-x).(OA+AM)}{k-x} = \frac{x.OA-(k-x).AM}{k-x}$

Correspondencia Proyectiva entre dos rectas completadas

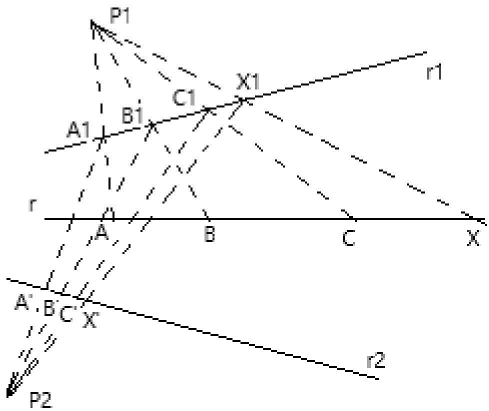
Realizamos un número finito de proyecciones y secciones sucesivas partiendo de la cuaterna (ABCX) y obteniendo la cuaterna (A’B’C’X’) como resultado final. Para mostrar este hecho la figura muestra el caso de dos proyecciones, y secciones correspondientes, con resultado la cuaterna (A’B’C’X’). (Observa la figura)

Demostramos en otro lugar que

(A’B’C’X’) = (A1 B1 C1 X1) = (ABCX)

y por tanto (A’B’C’X’) = (ABCX), cualquiera que sea el número finito de proyecciones intermedias realizadas.

Llamamos 'correspondencia proyectiva' a la correspondencia biunívoca entre dos rectas completadas r y r', incluyendo la que resulta de una sucesión finita de proyecciones y secciones.



De lo tratado en puntos anteriores podemos afirmar: 'Una correspondencia biunívoca entre dos rectas completadas es 'proyectiva' si, y solo si, dos cuaternas homólogas toman el mismo valor.

Fijándonos en la figura anterior: ' Dadas tres parejas de puntos (A,A'), (B, B'), (C, C'), que son el resultado de casar tres puntos de r con tres puntos de r', existe una proyectividad única en la que las anteriores son parejas homólogas.

Dicho lo anterior, la igualdad que garantiza que (X,X') sea una pareja homóloga es

$$(A'\ B'\ C'\ X') = (A\ B\ C\ X)$$

la cual se convierte en la 'ecuación puntual' de la proyectividad.

Proyectividad Involutiva:

Sea p el operador 'proyectividad' de la recta r sobre sí misma (es decir r' = r) y tal que: X' = p(X), X'' = p(X').

La proyectividad es 'involutiva' si p(X') = X , es decir

X --- > X' --- > X

Importa el siguiente resultado: 'Una proyectividad p es involutiva precisamente si existe un par (A, A') tal que A' = p(A) y A = p(A').

En efecto: Evidentemente, si p es involutiva se cumple para todo punto A

p(A) = A', p(A') = A

Recíproco: Sea el par (A, A') tal que p(A) = A', p(A') = A, y dado X sea su imagen X' = p(X). Tenemos en la recta real ampliada la cuaterna (A A' X X').

Operando (A A' X X') = AX/A'X : AX'/A'X' = (AX.A'X')/(A'X.AX ')

Por otro lado tenemos la cuaterna (A' A X' X) =

= A'X'/AX' : A'X/AX = (A'X'.AX)/(AX '.A'X), por lo tanto (A A' X X') = (A' A X' X) = (p(A)p(A')p(X)p(X')) =

= (A'A X 'p(X ')), es decir

(A'A X 'p(X ')) = (A' A X' X) , de donde p(X') = X

Conclusión: Si A -- > A' y A' -- > A, lo mismo ocurre para cualquier otro punto X.

Una proyectividad involutiva distribuye los puntos de la recta (completada con el punto P_∞) en pares (A, A') tales que

A -- > A', A' -- > A, y sin puntos comunes entre pares distintos.

Hemos visto que una proyectividad queda determinada por tres pares de puntos, y si además existe un par (A, A') tal que A' = p(A), A = p(A'), entonces es involutiva.

Tenemos lo siguiente:

Dos pares (A, A'), (B, B') de puntos de una recta r determinan una proyectividad involutiva.

Dem.: Definimos la proyectividad p mediante estas condiciones

A' = p(A), p(A') = A, B' = p(B)

Por lo probado antes, puesto que A' = p(A), p(A') = A, p es involutiva. La ecuación de esta proyectividad es

(A A' B X) = (A' A B' X')

y por lo demostrado antes es involutiva.

En efecto: Sea la cuaterna (AA'BB') de la que sabemos que, en la proyectividad p, A' = p(A), A = p(A'), B' = p(B).

Demostraremos que p(B') = B

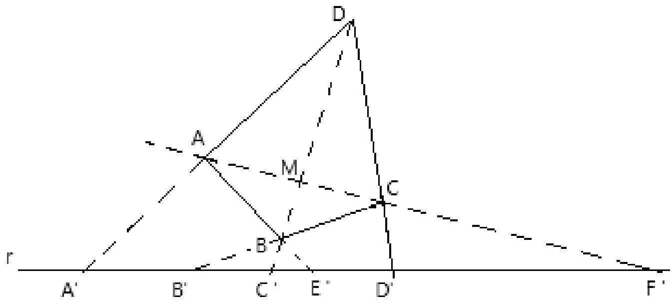
Hago (AA'BB') = (A'AB'X) , lo cual significa que

$\frac{AB}{A'B} : \frac{AB'}{A'B'}$, y $\frac{A'B'}{AB'} : \frac{A'X}{AX}$, -- > $\frac{AB.A'B'}{A'B.AB'} = \frac{A'B'.AX}{A'X.AB'}$ -- >

$\frac{AB}{A'B} = \frac{AX}{A'X}$ -- > X = B , p(B') = B

Teorema del Cuadrivértice de Desargues:

Sea el cuadrivértice completo determinado por los cuatro vértices A, B, C, D. Lo convertimos en completo prolongando sus lados. Después trazamos sus dos diagonales propias y obtenemos el punto M común.



Sea ahora una recta r que al cortar la prolongación de los lados nos da los puntos: A’, B’, E’, D’, y las diagonales nos da C’, F’.

Lados opuestos son aquellos que no tienen vértice común.

Observa que el cuadrivértice contiene seis lados ya que incluimos las que en el cuadrilátero son diagonales. Estas dos diagonales también nos lados opuestos.

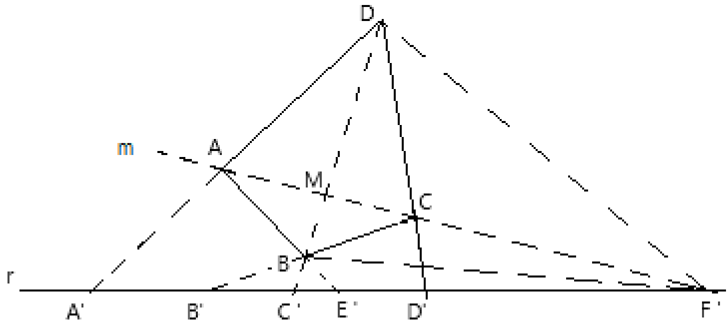
Teorema: *(de Desargues, 1593-1662)*

Los lados opuestos de un cuadrivértice cortan sobre una recta r pares de puntos de una proyectividad involutiva.

Dem.: La afirmación significa que los pares de puntos (A’, B’), (E’,D’), (C’, F’) son pares de una involución.

Consideramos la proyección de los puntos obtenidos en r, dese D sobre la recta AC. Se cumple

(A M C F’) = (A’ C’ D’ F’)



Consideramos ahora la proyección de los puntos de m, desde B sobre r. Se cumple

(A M C F’) = (E’ C’ B’ F’)

Por tanto (A’ C’ D’ F’) = (E’ C’ B’ F’) , y teniendo en cuenta que

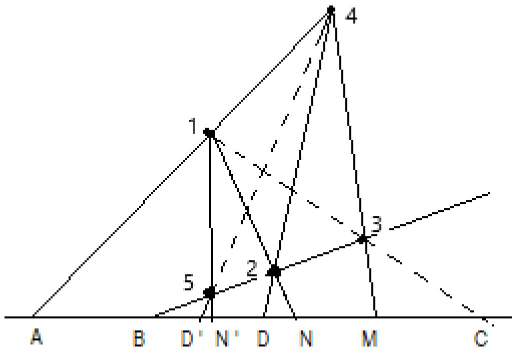
(E’ C’ B’ F’)) = (B’ F’ E’ C’), queda (A’ C’ D’ F’) = (B’ F’ E’ C’)

Observamos que p(C’) = F’ y p(F’) = C’ , y los pares (A’, B’), (C’, F’) , (D’, E’), son pares de una involución.

Corolario: Dos involuciones determinan otra involución.

En efecto, sean dos involuciones:

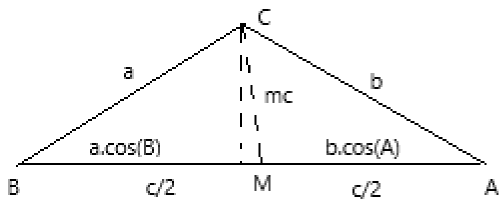
a) (A, B), (C, D), (M, N) , b) (A, B’), (C, D’), (M, N)



La primer terna de pares proporcionan el cuadrivértice 1,2,3,4, mientras la segunda terna de pares nos da el cuadrivértice 1,2,5,3. Tomamos ahora el cuadrivértice 1,5,2,4 , y se cumple

----

Teorema de las Medianas



Tenemos: $mc^2 = a^2 + (c/2)^2 – 2.a.c/2.\cos(B)$ -- >

$$mc^2 = a^2 + c^2/4 – a.c.\cos(B)$$

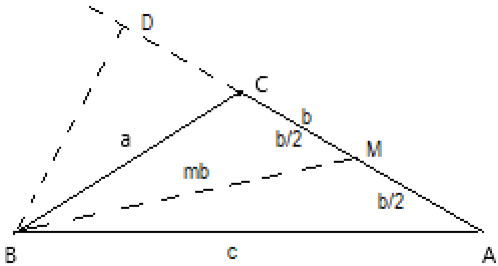
Por otro lado: $mc^2 = b^2 + c^2/4 – b.c.\cos(A)$, entonces

$2.mc^2 = a^2 + b^2 + c^2/2 – c.(a.\cos(B) + b.\cos(A)) = a^2 + b^2 + c^2/2 – c^2$, y por tanto

$$2.mc^2 = a^2 + b^2 – c^2/2 , \quad mc^2 = (a^2 + b^2)/2 – (c/2)^2$$

y finalmente: $mc = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

De forma análoga se obtiene la longitud de las otras dos medianas.



$mb^2 = c^2 + (b/2)^2 - 2.c.b/2.\cos(A)$

$mb^2 = a^2 + (b/2)^2 - 2.a.b/2.\cos(C)$

$2.mb^2 = a^2 + c^2 + b^2/2 - b.(a.\cos(C) + c.\cos(A)) =$

$= a^2 + c^2 + b^2/2 - b.(-a.\cos(180\text{-}C) – AD) =$

$= a^2 + c^2 + b^2/2 - b. (-CD + AD) = a^2 + c^2 + b^2/2 – b^2 =$

$= a^2 + c^2 - b^2/2$

Coordenadas Cartesianas en el Plano y en el Espacio

Lo que sigue es tratado dentro de un contexto vectorial.

Sea el sistema de referencia (s.r.) formado por: El punto fijo O más los vectores e1, e2, e3, aplicados en el punto O y que se suponen linealmente independientes,. Lo designaremos así:

R = {O; e1,e2,e3}.

La condición para que los vectores e_i sean linealmente independientes (l.i.) es cualquiera de las siguientes, equivqlentes entre sí:

a) x1.e1 + x2.e2 + x3.e3 = O sólo admite la solución (0,0,0)
b) Considerando el volumen del tetraedro : Vol(O,e1,e2,e3) $\neq$ 0
c) Considerando el producto mixto de vectores:

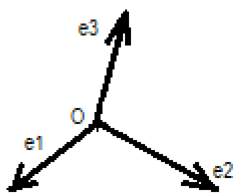
$$e3.(e1xe2) + e1.(e2xe3) + e.(e3xe1) \neq 0$$

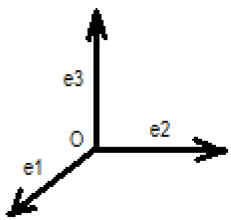
(Observa que giramos en sentido contrario a agujas del reloj)

d) Por el Determinante de Gram:

$$\begin{vmatrix} e1.e1 & e1.e2 & e1.e3 \\ e2.e1 & e2.e2 & e2.e3 \\ e3.e1 & e3.e2 & e3.e3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Base vectorial "directa", base vectorial "inversa":





El producto vectorial lo realizamos siempre (por convenio matemático) haciendo el pase en sentido contrario a las agujas del reloj. Teniendo en cuenta este detalle consideramos dos opciones al asignar resultados:

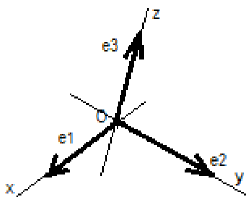
a) e1xe2 = e3, e2xe3 = e1, e3xe1 = e2
b) e1xe2 = -e3, e2xe3 = -e1, e3xe1 = -e2

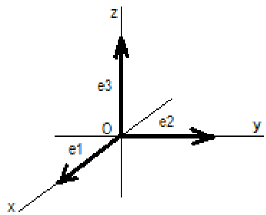
En el caso a) decimos que "directa", en el caso b) es "inversa"

Cuando los vectores de la base B = {e1,e2,e3} son “perpendiculares” (ang(e_i,e_j) = 90º) dos a dos, diremos que es base ”ortogonal”. Si además son unitarios (/e_i/ = 1), diremos que la base es “ortonormal”.

En este último caso al sistema de referencia R = {O;e1,e2,e3} lo llamamos “Sistema de Referencia Cartesiano”.

Ejes y planos de coordenadas:





Ejes: Son las rectas que pasan por O y sobre las cuales “yacen” los vectores de la base (soportan los vectores de la base). Diremos: Eje Ox, Oy, Oz

Planos: Determinados por las rectas que soportan los ejes coordenados: Plano OXY, plano OYZ, plano OZX

Coordenadas de un punto en el espacio:

Dado un punto X cualquiera existen valores (x,y,z) tales que el vector OX se puede expresar así:

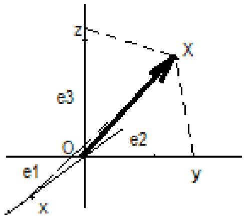
$$OX = x.e1 + y.e2 + z.e3$$

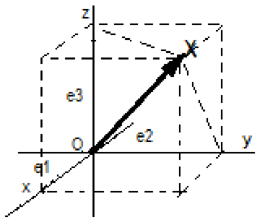
y decimos que la terna (x,y,z) son las coordenadas de X respecto del actual s.r.

Significado geométrico: Interesa destacar las dos interpretaciones siguientes.

a) Dado OX = x.e1 + y.e2 + z.e3,   el valor x es la proyección del punto X sobre el eje OX siguiendo el camino de la paralela al plano OYZ; y es la proyección sobre el eje OY siguiendo la paralela al plano OZX; z es la proyección sobre el eje OZ siguiendo la paralela al plano OXY.

Otra forma: Construyendo el prisma.





b) Para x: Considero el volumen del tetraedro (OX,e2,e3)
OX * (e2xe3) = (x.e1 + y.e2 + z.e3)*(e2xe3) =
= x.e1*(e2xe3) + y.e2*(e2xe3) + z.e3*(e2xe3) =
= x.(e1*e1) + y.(e2*e1) + z.(e3*e1) =
(Si la base es ortogonal)
= x.e1*(e2xe3) = x.(Volumen del tetraedro base (e1,e2,e3))

de donde, considerando los volúmenes: x = $\frac{Vol(OX,e2,e3)}{Vol(e1,e2,e3)}$

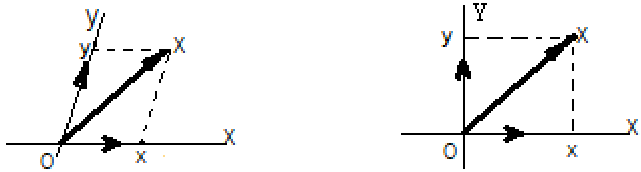
Del mismo modo: y = $\frac{Vol(OX,e3,e1)}{Vol(e1,e2,e3)}$,   z = $\frac{Vol(OX,e1,e2)}{Vol(e1,e2,e3)}$

En el plano:

El mismo razonamiento podemos hacer en el plano después de fijar un s.r.   R = {O; e1,e2}.

Un punto OX = x.e1 + y.e2 ,   cuyas coordenadas (x, y) pueden ser interpretadas de alguna de estas formas:

a) Proyección sobre el eje en dirección paralela al otro eje



b) OX = x.e1 + y.e2. Área(e1, OX) = /e1 x OX/

Aunque e1, e2 son coplanarios estamos operando en tres dimensiones, por lo cual podemos hacer el producto vevtorial.

e1 x OX = e1 x (x.e1 +y.e2) = x.(e1 x e1) + y.(e1 x e2) = y.(e1 x e2)

Por tanto y = $\frac{Área(e1,OX)}{Área(e1,e2)}$, con la única condición de que el

producto vectorial venga definido así: e1x e1 = 0, e1xe2 = e3, e2xe2 = 0

Del mismo modo x = $\frac{Área(e2,OX)}{Área(e1,e2)}$

Otra forma que convienen tener en cuenta:

Tengo OX = x.e1 + y.e2

Tomo w ortogonal a e2, sea w = a.e1 + b.e2. Entonces

0 = e2 * w = e2 * (a.e1 + b.e2) = a.(e2 * e1) + b.(e2 * e2) , de donde

a.(e2*e1) = - b.(e2*e2) -- > $\frac{a}{e2*e2} = \frac{-b}{e2*e1}$ = k

Entonces

OX * w = OX*(a.e1 + b.e2) = OX * [k.(e2*e2).e1 – k.(e2*e1).e2] = k.[(e2*e2).(OX * e1) – (e2*e1).(OX * e2)] =

(Teniendo en cuenta la relación de Lagrange)

$$= k. \begin{vmatrix} OX * e1 & e2 * e1 \\ OX * e2 & e2 * e2 \end{vmatrix} = k. (OX \text{ x } e2) * (e1 \text{ x } e2)$$

Por otro lado w * OX = w * (x.e1 + y.e2) = x.(w*e1) + y.(w*e2) =

= x.(w * e1) . Pero e1 * w = e1 * (a.e1 + b.e2) =

= k.(e1 * [(e2*e2).e1 – (e2*e1).e2]) =

$$= k.[(e2*e2).(e1*e1) – (e2*e1).(e1*e2)] = k. \begin{vmatrix} e2 * e2 & e2 * e1 \\ e2 * e1 & e1 * e1 \end{vmatrix} =$$

= k. [(e2 x e1) * (e2 x e1)] .

Por tanto w * OX = x.(w * e1) = x.k. [(e2 x e1) * (e2 x e1)], de donde

$$x = \frac{w*OX}{w*e1} = \frac{k.(OX \text{ x } e2) * (e1 \text{ x } e2)}{k.[(e2 \text{ x } e1) * (e2 \text{ x } e1)]} = \frac{|OXx\ e2|.|\ e1\ x\ e2|.\cos(g)}{|e2\ x\ e1|.|e2\ x\ e1|.\cos(g\prime)} =$$

$$= \frac{|OXx\ e2|..\cos(g)}{|e2\ x\ e1|..\cos(g\prime)} = \frac{|OXx\ e2|}{|e2\ x\ e1|} = \frac{Área(OX,e2)}{Área(e2,e1)}$$

NOTA: OX x e2 = (x.e1 + y.e2) x e2 = x.(e1 x e2) , por lo tanto los ángulos g, g' son iguales, y realmente su valor es 0º, y cos(0º) = 1.

De forma análoga $y = \frac{Área(OX,e1)}{Área(e2,e1)}$

Distancia entre dos putos del espacio:

Sea un s.r. cualquiera: R = {O;e1,e2,e3}. Sean los puntos A(a1,a2,a3), B(b1,b2,b3). d(A,B) = $\sqrt{AB * AB}$, o bien que /AB/ = $[d(A,B)]^2$, siendo siempre por definición /A/ = $\sqrt{AB * AB}$

Tenemos: AB = OB – OA = (b1-a1).e1 + (b2-a2).e2 + (b3-a3).e3

de modo que AB*AB = [(b1-a1).e1 + (b2-a2).e2 + (b3-a3).e3] *

*[(b1-a1).e1 + (b2-a2).e2 + (b3-a3).e3] = (cuadro siguiente = tabla de multiplicar) =

$$= \left| \begin{array}{cccc} & b1-a1 & b2-a2 & b3-a3 \\ b1-a1 & e1*e1 & e1*e2 & e1*e3 \\ b2-a2 & e2*e1 & e2*e2 & e2*e3 \\ b3-a3 & e3*e1 & e3*e2 & e3*e3 \end{array} \right|$$

Si la base fuese ortogonal queda

$$= \left| \begin{array}{cccc} & b1-a1 & b2-a2 & b3-a3 \\ b1-a1 & a & 0 & 0 \\ b2-a2 & 0 & 0 & 0 \\ b3-a3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

y si fuese ortonormal

$$= \left| \begin{array}{cccc} & b1-a1 & b2-a2 & b3-a3 \\ b1-a1 & 1 & 0 & 0 \\ b2-a2 & 0 & 1 & 0 \\ b3-a3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|, \text{ con lo cual}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(b1-a1)^2 + (b2-a2)^2 + (b3-a3)^2}$$

Área de un Triángulo en función de sus coordenadas:

Sea el triángulo ABC. Por cálculo vectorial sabemos que Área(ABC) = $\frac{1}{2}\,.\,|ABxAC|$, tomando como unidad el cuadrado unidad. Designo S = Área(ABC)

Tenemos: $S^2 = \frac{1}{4}\,.\,|ABxAC|^2$, Recuerda: $|v| = \sqrt{v * v} \rightarrow\ |v|^2 = v * v$

$$S^2 = \frac{1}{4}\,.\,(ABxAC) * (ABxAC) = \frac{1}{4}\,.\begin{vmatrix} AB * AB & AB * AC \\ AC * AB & AC * AC \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Si tenemos sus coordenadas: A(a1,a2,a3), B(b1,b2,b3), C(c1,c2,c3), respecto de un s.r. R = {O; e1,e2,e3} cualquiera, podemos operar como sigue.

AB x AC = [(b1-a1).e1+(b2-a2).e2+(b3-a3).e3] x [(c1-a1).e1+…] =

(Recuerda que $e_k x e_k = 0$, $e_k x e_h = - e_h x e_k$)

= [(b1-a1).(c2-a2) – (b2-a2).(c1-a1)].(e1xe2) +

+ [(b1-a1).(c3-a3) – (b3-a3).(c1-a1)].(e1xe3) +

+ [(b2-a2).(c3-a3) - (b3-a3).(c2-a2)].(e2xe3) =

= $\begin{vmatrix} e2xe3 & b1 - a1 & c1 - a1 \\ e3xe1 & b2 - a2 & c2 - a2 \\ e1xe2 & b3 - a3 & c3 - a3 \end{vmatrix}$, que desarrollando por primer

columna, y que e1xe3 = - e3xe1 , obtenemos aquella expresión.

Para lo que deseamos después nos interesa desarrollarlo.
AB x AC =

$$= \begin{vmatrix} b2 - a2 & c2 - a2 \\ b3 - a3 & c3 - a3 \end{vmatrix}.(e2xe3) - \begin{vmatrix} b1 - a1 & c1 - a1 \\ b3 - a3 & c3 - a3 \end{vmatrix}.(e3xe1) +$$

$$+\begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}.(e1xe2) =$$

$$\begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}.(e1xe2) + \begin{vmatrix} b2-a2 & c2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}.(e2xe3) +$$

$$+\begin{vmatrix} b3-a3 & c3-a3 \\ b1-a1 & c1-a1 \end{vmatrix}.(e3xe1) = \text{ (Simbólicamente)}$$

$$= \mathrm{D1}.(e1xe2) + D2.(e2xe3) + \mathrm{D3}.(e3xe1)$$

Hacemos el producto escalar (ABxAC)*(ABxAC), como sigue (Advertimos que la base {e1, e2, e3} no es necesariamente ortogonal ni ortonormal), en una tabla de doble entrada

(AB x AC)*(AB x AC) =

$*$	$D1$	$D2$	$D3$
D1	(e1xe2).(e1xe2)	(e1xe2).(e2xe3)	(e1xe2).(e3xe1)
D2	(e2xe3).(e1xe2)	(e2xe3).(e2xe3)	(e2xe3).(e3xe1)
D3	(e3xe1).(e1xe2)	(e3xe1).(e2xe3)	(e3xe1).(e3xe1)

Cuando la base {e1, e2, e3} sea ortogonal y el producto vectorial esté definido por: e1xe2 = e3, e2xe3 = e1, e3xe1 = e2, y además el producto escalar est definido por e1* e1 = a, e2*e2 = b, e3*e3 = c

(AB x AC)*(AB x AC) =

$*$	$D1$	$D2$	$D3$

D1	c	0	0
D2	0	a	0
D3	0	0	b

Cuando la base {e1, e2, e3} sea ortonormal y el producto vectorial esté definido por: e1xe2 = e3, e2xe3 = e1, e3xe1 = e2
el resultado es

(AB x AC)*(AB x AC) =

$*$	$D1$	$D2$	$D3$
D1	1	0	0
D2	0	1	0
D3	0	0	1

Para el área del triángulo ABC, en base ortogonal en la que a = e1*e1, b = e2*e2, c = e3*e3, nos queda:

$$S^2 = \frac{1}{4}.\left(c.\begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}^2 + a.\begin{vmatrix} b2-a2 & c2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}^2 + b.\begin{vmatrix} b3-a3 & c3-a3 \\ b1-a1 & c1-a1 \end{vmatrix}^2\right)$$

Si la base es ortonormal

$$S^2 = \frac{1}{4}.\left(\begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b2-a2 & c2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b3-a3 & c3-a3 \\ b1-a1 & c1-a1 \end{vmatrix}^2\right)$$

NOTA: Podemos demostrar como en el caso del volumen (ver más adelante) que

$\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}$, del mismo modo los otros dos determinantes, de modo que

$$S^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a3 & b3 & c3 \\ a1 & b1 & c1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 \right)$$

Volumen del Tetraedro en función de sus coordenadas:

Sea el tetraedro ABCD. Consideramos las aristas AB, AC, AD. Designamos por W el volumen del paralelepípedo y V el volumen del tetraedro. Recordamos que

$$V = \frac{1}{6} \cdot W$$

El volumen W es el resultado del producto mixto de los tres vectores AB, AC, AD.

$$W = (AB \times AC)*AD = \begin{vmatrix} e2xe3 & b1-a1 & c1-a1 \\ e3xe1 & b2-a2 & c2-a2 \\ e1xe2 & b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix} *$$

*[(d1-a1).e1 + (d2-a2).e2 + (d3-a3).e3] =

$= [\begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix} . (e1xe2) +$

$+ \begin{vmatrix} b2-a2 & c2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix} . (e2xe3) +$

$$+\begin{vmatrix} b3-a3 & c3-a3 \\ b1-a1 & c1-a1 \end{vmatrix}.(e3xe1)] *$$

* [(d1-a1).e1 + (d2-a2).e2 + (d3-a3).e3] =

(Recordamos que el resultado del producto vectorial (por definición) es otro vector ortogonal a cada uno de los factores, cualquiera que sea la base {e1,e2,e3})

$$= \begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 \end{vmatrix}.(d3-a3).(e1xe2)*e3+$$

$$+\begin{vmatrix} b2-a2 & c2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}.(d1-a1).(e2xe3)*e1+$$

$$+\begin{vmatrix} b3-a3 & c3-a3 \\ b1-a1 & c1-a1 \end{vmatrix}.(d2-a2).(e3xe1)*e2 =$$

(Tenemos en cuenta que $(e1xe2)*e3=(e2xe3)*e1=(e3xe1)*e2$ siendo éste el volumen del tetraedro base).

$$= \begin{vmatrix} d1-a1 & b1-a1 & c1-a1 \\ d2-a2 & b2-a2 & c2-a2 \\ d3-a3 & b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}.(e1xe2)*e3$$

Por otro lado

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a1 & b1-a1 & c1-a1 & d1-a1 \\ a2 & b2-a2 & c2-a2 & d2-a2 \\ a3 & b3-a3 & c3-a3 & d3-a3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(Resolviendo por la cuarta fila)

$$= \begin{vmatrix} b1-a1 & c1-a1 & d1-a1 \\ b2-a2 & c2-a2 & d2-a2 \\ b3-a3 & c3-a3 & d3-a3 \end{vmatrix} =$$ (Realizo dos permutaciones)

$$= \begin{vmatrix} d1-a1 & b1-a1 & c1-a1 \\ d2-a2 & b2-a2 & c2-a2 \\ d3-a3 & b3-a3 & c3-a3 \end{vmatrix}$$

Volviendo atrás W = $\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} .(e1xe2) * e3$, y por tanto el

volumen del tetraedro (ABCD) es

$$V = \frac{1}{6} . \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} .(e1xe2) * e3$$

En una base ortonormal tenemos:

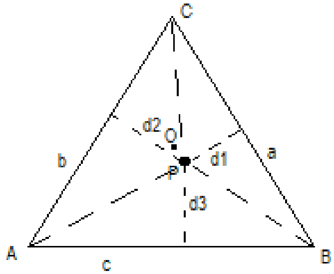
$$V = \frac{1}{6} . \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Regla de Bronce en el Triángulo Equilátero:

En un triángulo equilátero, fijado un punto P cualquiera, la suma de las distancias d_i , con su signo, a cada una de las restas que soportan sus lados, es igual a la altura h.

NOTA: La recta que soporta el lado l_i divide el plano en dos semiplanos. La distancia d_i se toma positiva si el punto P queda en el mismo semiplano que el centro O del triángulo, y se toma negativo en otro caso.

Dem.: A) El punto es interior. En este caso todos los valores d_i son positivos.



El área del triángulo podemos obtenerla así: Puesto que b = c = a

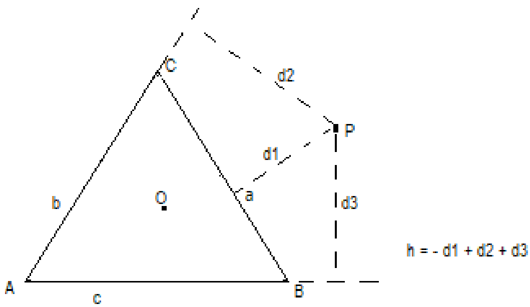
S = $\frac{1}{2}. a. (d_1 + d_2 + d_3)$, de donde h = $d_1 + d_2 + d_3$

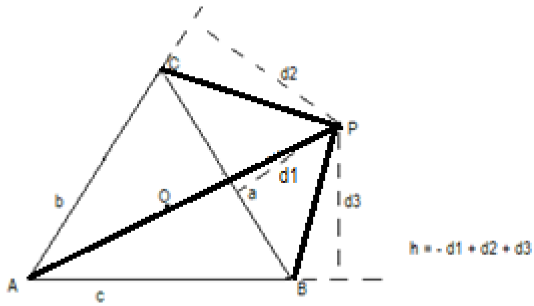
B) El punto P es exterior. La figura muestra un posible caso.

Observando las siguientes figuras tenemos

S = $\frac{1}{2}$. ($b. d2 + c. d3 - a. d1$) = $\frac{1}{2}$. $a. (d2 + d3 - d1)$, de donde

h = $d2 + d3 - d1$





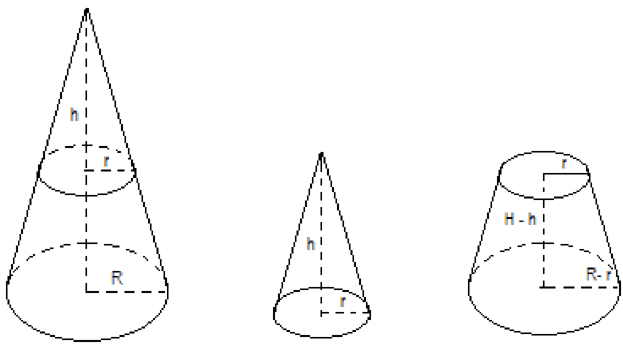
De forma análoga si P es exterior en otra posición.

NOTA: En una posición como la siguiente no sería posible,

Razón entre volúmenes de cuerpos regulares semejantes:

Caso del Cono

Sea el cono T de la figura y el cono T' extraído de T como cono menor.



Sea el valor de la razón entre los radios k = $\frac{R}{r}$. Por semejanza también $\frac{H}{h} = k$. Entonces el área de sus bases

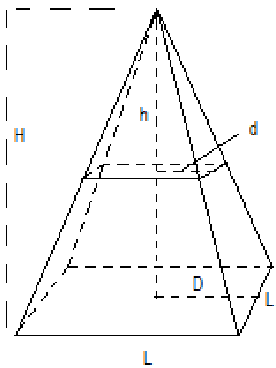
S = $\pi . R^2$,   S' = $\pi . r^2$,   y la razón entre áreas $\frac{S}{S'} = \ k^2$

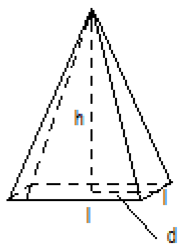
Sus volúmenes: V = $\frac{1}{3}.(\pi.R^2).H$, V ' = $\frac{1}{3}.(\pi.r^2).h$, y la razón entre volúmenes:

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2.H}{r^2.h} = k^2.\frac{H}{h} = k^3 \;, \qquad \frac{V}{V'} = k^3$$

A) Caso de una pirámide

Sea la razón k = $\frac{L}{l}$, y por semejanza: $\frac{D}{d} = k$, $\frac{H}{h} = k$





Para las áreas de sus bases: S = L^2 , S' = l^2 , $\frac{S}{S'} = \frac{k^2.l^2}{l^2} = k^2$, y por tanto $\frac{S}{S'} = k^2$

Para sus volúmenes: V = $\frac{1}{3}.S.H$, V ' = $\frac{1}{3}.S'.h$

$$\frac{V}{V'} = \frac{S.H}{S'.h} = k^2.k = k^3 \;, \qquad \frac{V}{V'} = k^3$$

B) Caso de Pirámide con base el pentágono regular

Evidentemente, y como en cualquier pirámide, si la razón entre sus lados es $\frac{L}{l} = k$, se cumple $\frac{S}{S'} = k^2$, y $\frac{V}{V'} = k^3$

Cuando el lado L = “la diagonal del pentágono”, mientras que l = “lado del pentágono”, sabemos que $\frac{L}{l} = \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y entonces

$$V = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^3 . V'$$

Cónica determinada por cuatro puntos:

La ecuación general de un cónica es

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Sus ejes son paralelos a los de coordenadas precisamente si C = 0. Estudiamos el caso siguiente con el fin de mostrar el proceso a seguir.

Propuesta:

Dada la igualdad $Ax^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

determina el valor de sus coeficientes sabiendo que la cónica ha de pasar por los puntos: A(-2, 1), B(-2, -1), C(2, -2), D(2, 2).

Después obtener su forma reducida.

(Observa que, en la expresión general de una cónica, ahora B = 1, C = 0)

Resol.: Representando (x_i , y_i) los cuatro puntos: i = 1, 2, 3, 4, tengo la forma general: $x_i^2.A + x_i.D + y_i.E + F = -y_i^2$

Sustituyendo el valor en cada punto obtengo el siguiente sistema

$$\begin{cases} 4.A - 2.D + E + F = -1 \\ 4.A - 2.D - E + F = -1 \\ 4.A + 2.D - 2.E + F = -4 \\ 4.A + 2.D + 2.E + F = -4 \end{cases} \text{-->} \begin{cases} 4.x - 2.y + z + t = -1 \\ 4.x - 2.y - z + t = -1 \\ 4.x + 2.y - 2.z + t = -4 \\ 4.x + 2.y + 2.z + t = -4 \end{cases}$$

Resuelvo este sistema:

A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, /A/ = 0, $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 32 , ran(A) = 3

Tiene una incógnita libre. Hago t = 1, y tomando las tres primeras ecuaciones tengo

$$\begin{cases} 4.x - 2.y + z = -2 \\ 4.x - 2.y - z = -2 \\ 4.x + 2.y - 2.z = -5 \end{cases}$$ A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, /A/ = 32

Aplico el método de …. , y calculando obtenemos

Ax = $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = -28, Ay = $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}$ = -24,

Az = $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ = 0 . Por tanto: A = -7/8, D = -3/4, E = 0, F = 1

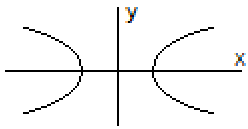
Queda la igualdad: -7/8.x^2 + y^2 -3/4.x + 1 = 0 < -- > 7x^2 -8y^2 +6x – 8 = 0

Forma reducida:

Agrupando (método de Gauss) obtengo:

7.(x^2 + 6/7.x) – 8.y^2 – 8 = 0 -- > 7.(x + 6/14)^2 – 7.36/14^2 -8y^2 -8 = 0

-- > 7.(x + 6/14)^2 -8y^2 -8 = 260/28



Es una hipérbola con centro en (-6/14 , 0)

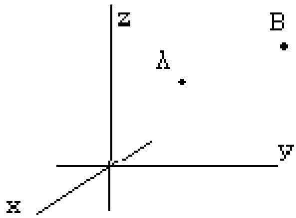
IV.- GEOMETRÍA VECTORIAL. Métodos Vectoriales

Los contenidos siguientes serán tratados vectorialmente. Exige tener conocimientos del cálculo vectorial y matricial: Producto escalar, Producto vectorial, Producto mixto, Cálculo de determinantes, …

Recta determinada por dos puntos:

Los resultados en el plano son fáciles de obtener a partir de los resultados en el espacio.

Tengo dos puntos A(a1,a2,a3), B(b1,b2,b3) en el s.r. R = {O; e1,e2,e3}, donde {e1,e2,e3} es base ortonormal.



Dos puntos A y B, un vector AB que determina la recta. Otro punto X, otro vector AX. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) El punto X está en la recta precisamente si AX = u.AB, para algún valor real u.
b) El punto X está en la recta precisamente si ABxAX = O (vector cero).

Si calculamos en cada caso tenemos lo siguiente:

(x - a1, y - a2, z – a3) = u.(b1 – a1, b2 – a2, b3 – a3) -- >

$$\frac{x-a1}{b1-a1} = \frac{y-a2}{b2-a2} = \frac{z-a3}{b3-a3} \qquad (1)$$

y también $$\begin{cases} x - a1 = (b1 - a1).u \\ y - a2 = (b2 - a2).u \\ z - a3 = (b3 - a3).u \end{cases} \qquad (2)$$

Por otro lado,

ABxAX = [(b1-a1).e1 + (b2-a2).e2 + (b3-a3).e3] x [(x-a1).e1 + (y-a2).e2 + (z-a3).e3] =

= [(b2-a2).(z-a3) – (b3-a3).((y-a2)].e1 +
-[(b1-a1).(z-a3) - (b3-a3).(x-a1)].e2 +
+[(b1-a1).(y-a2) – (b2-a2).(x-a1)].e3 =

(en forma de determinante

$$= \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ b1 - a1 & b2 - a2 & b3 - a3 \\ x - a1 & y - a2 & z - a3 \end{vmatrix}$$

NOTA: Otra forma sería la siguiente: OX = OA + u.AB -- >

(x, y, z) = (a1, a2, a3) + u.(b1-a1, b2-a2, b3-a3) , que nos lleva a los mismos resultados (1) y (2).

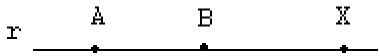
Ecuación paramétrica-vectorial de la recta:

Recta determinada por dos puntos A y B:

AX = t. AB, o mejor: OX = OA + t.AB

Coordenadas homogéneas de los puntos de una recta:

En la recta r fijamos A como punto origen y el vector AB como unidad de medida.



Para un punto X cualquiera tenemos AX = t.AB

Desde el origen O de coordenadas sería: OX = OA + t.AB

Cuando t recorre el conjunto R de los números reales el punto X recorre la recta r.

Introducimos otro parámetro u de modo que u.AX = t.AB, equivalente a AX = $\frac{t}{u}\,.AB$, que tiene significado real cuando u $\neq$ 0. Cuando u = 0 diremos que X corresponde al punto del infinito de r_∞ (Recta ampliada)

Ahora la correspondencia de r_∞ es biunívoca con R+ {∞}.

La correspondencia es (t, u) --- > X .

Otro para (t', u') tal que $\frac{t\prime}{u\prime} = \frac{t}{u}$ lleva asociado el mismo punto X.

Esto nos lleva a definir clases de equivalencia: Dado (t, u), este representa la clase de todos los (t', u') que cumplen lo anterior.

Casuística: (0, 0) conste de sólo este par, y por se 0/0 una indeterminación representa cualquier punto X. La clase (0, 1) corresponde al punto A; la clase (1, 1) corresponde al punto B; la clase (1, 0) corresponde al punto del infinito.

Def.: Diremos que (t, u) son las coordenadas homogéneas de X.

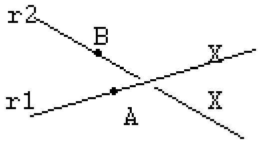
Intersección de dos rectas:

Sean dos rectas: r1 que pasa por A y vector normal W, r2 que pasa por B y admite vector director V. Sus ecuaciones:

$$W \times AX = 0, \qquad BX = t.V$$

Localizamos todo desde el punto A situado en r1, con lo cual

$$W \times AX = 0, \qquad AX = AB + t.V$$



Suponiendo que X es punto común tenemos

$$0 = W \times (AB + t.V) = W \times AB + t.\, W \times V$$

Casuística:

a $\quad W \times V = 0$ y $W \times AB = 0$ -- > coinciden

b $\quad W \times V = 0$ y $W \times AB \neq 0$ -- > son paralelas

c $\quad W \times V \neq 0$ y $W \times AB = 0$ -- > Se cortan en un punto

d $\quad W \times V \neq 0$ y $W \times AB \neq 0$ -- > No se cortan, se cruzan

Análisis: En el caso a, W y V son paralelos y por tanto lo son las rectas, además A y B dan AB paralelo con W y V, están sobre la misma recta

En el caso b, como hemos dicho las rectas son paralelas.

En el caso c, W y V no son paralelos, y W x AB = 0. De $0 = WxAB + t.WxV$ ha de ser t = 0, y entonces AX = AB, es decir X = B. Se cortan en el punto B.

En el caso d, 0 = /W x AB/ + t. /W x V / -- > t = $\frac{-|WxAB|}{|WxV|}$, que nos lleva a una solución, punto común.

Recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos rectas:

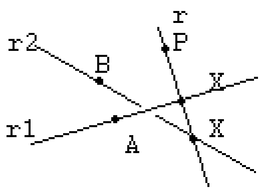
Solución gráfica:

Sean las rectas r1: OX = OA + t.V,   r2: OY = OB + u.W
y otra recta r, genérica, que pasa por P, punto fijo.

El punto P y el vector V determinan un plano m1, y el punto P y W determinan otro plano m2. Si V x W ≠ 0 los planos no coinciden, y teniendo el punto común P, necesariamente se cortan según una recta.

Solución analítica-vectorial:

Sean las rectas r1: OX = OA + t.V,   r2: OY = OB + u.W
y otra recta r, genérica, que pasa por P, punto fijo.
Las anteriores podemos expresarlas así



PX = PA + t.V,   PY = PB + u.W

Supongamos que Q y R son puntos de r1, r2, en los que se apoya la recta r. Tenemos

0 = PQ x PR = (PA+t.V) x (PB+u.W) =

= (PA x PB) + u.(PAxW) + t.(VxPB) + (t.u).(V x W)

Haciendo producto escalar con W

0 = W * (PA x PB) + 0 + t. W * (VxPB) + 0 -- >

0 = W*(PAxPB) + t. W*(VxPB)

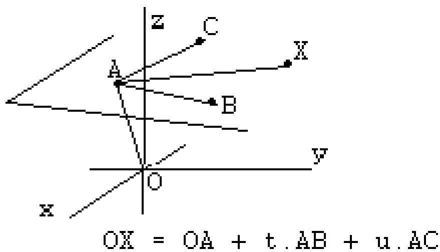
de donde puedo despejar el valor de t.

Casuística:

a. W*(VxPB) ≠ 0 -- > Obtengo valor de t, y PQ = PA + t.V
b. W*(VxPB) = 0 y W*(PAxPB) ≠ 0 -- > Q está en el infinito, y r es paralela a r1.
   W*(VxPB) = 0 y W*(PAxPB) = 0 -- > t es indeterminado y r coincide con r1.

Obtenido el punto Q, la ecuación de r es: PQ x PX = 0

Plano determinado por tres puntos:



Tengo tres puntos A(a1,a2,a3), B(b1,b2,b3), C(c1,c2,c3 en el s.r. R = {O; e1,e2,e3}, donde {e1,e2,e3} es base ortonormal.

Las siguientes dos condiciones son equivalentes:

a) Punto X está en el plano precisamente si

AX = t.AB + u.AC (3)

b) Un punto X está en el plano precisamente si

AX*(ABxAC) = 0, (valor real cero) (4)

En cada caso obtenemos los siguientes resultados.

(x-a1, y-a2, z-a3) = t.(b1 – a1, b2 – a2, b3 – a3) + u.(c1 – a1, c2 – a2, c3 – a3) -- >

$$\begin{cases} x - a1 = (b1 - a1).t + (c1 - a1).u \\ y - a2 = (b2 - a2).t + (c2 - a2).u \\ z - a3 = (b3 - a3).t + (c3 - a3).u \end{cases} \qquad (5)$$

donde t, u son parámetros.

NOTA: Otra forma sería la siguiente: OX = OA + t.AB + u.AC
de donde
(x, y, z) = (a1, a2, a3) + t.(b1-a1, b2-a2, b3-a3) +

+ u.(c1-a1,c2-a2,c3-a3), que nos lleva al resultado (5).

Por otro lado AX*(ABxAC) = 0, nos lleva al resultado

ABxAC = [(b1-a1).e1+(b2-a2).e2+(b3-a3).e3] x [(c1-a1).e1+(c2-a2).e2+(c3-a3).e3] =

= [(b2-a2).(c3-a3) – (b3-a3).((c2-a2)].e1 +
-[(b1-a1).(c3-a3) - (b3-a3).(c1-a1)].e2 +
+[(b1-a1).(c2-a2) – (b2-a2).(c1-a1)].e3 ,

y teniendo en cuenta que e_k*e_h = 1 si h = k, e_k*e_h = 0 si h ≠ k, queda

$$\begin{vmatrix} x - a1 & y - e2 & z - e3 \\ b1 - a1 & b2 - a2 & b3 - a3 \\ c1 - a1 & c2 - a2 & c3 - a3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Ecuación de primer grado con tres variables (El plano):

Sea A.x + B.y + C.z + D = 0 (*)

Necesariamente A $\neq 0$ ó $B \neq 0$ ó $C \neq 0$, ya que de otro modo tendríamos D = 0, lo cual exige que D = 0, y no tendríamos ecuación.

Por ejemplo sea A $\neq 0$. Entonces despejo x:

x = $-\frac{1}{A} . (B.y + C.z + D)$, donde y, z son variables libres.

Dando un valor y = b2, z = b3, y llamando b1 al valor obtenido

b1 = $-\frac{1}{A} . (B.b2 + C.b3 + D)$, y B = (b1, b2, b3)

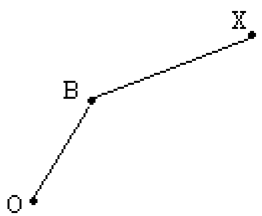
Si X = (x, y, z) es otra solución cualquiera, tenemos:

A.x + B.y + C.z + D = 0

A.b1 + B.b2 + C.b3 + D = 0

Restándolas: A.(x – b1) + B.(y – b2) + C.(z – b3) + D = 0

de donde (x – b1) = $-\frac{1}{A}$. (B.(y – b2) + C.(z – b3) + D



Si X = (x, y, z) es otra solución cualquiera

OX = OB + BX -- > OX – OB =

= (x – b1).e1 + (y – b2).e2 + (z – b3).e3 =

= $[-\frac{1}{A}$. (B.(y – b2) + C.(z – b3) + D].e1 + (y – b2).e2 + (z – b3).e3 =

= (y – b2). $[-\frac{B}{A} .e1 + e2] + (z - b3).[-\frac{C}{A}.e1 + e3] =$

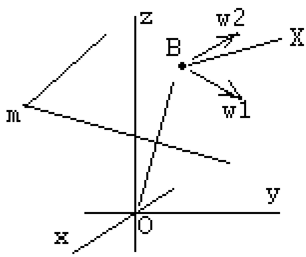
Haciendo w1 = $-\frac{B}{A} .e1 + e2$, w2 = $-\frac{C}{A} .e1 + e3$

= (y – b2). w1 + (z – b3).w2

Por lo que acabamos de obtener, cualquier punto X = (x, y, z), solución de la ecuación (*) es de la forma

OX = OB + (y – b2).w1 + (z – b3).w2, donde B = (b1, b2, b3) es una solución particular.

NOTA: El resultado anterior es lo que, desde otro punto de vista, llamamos “Variedad afín de dimensión dos”, donde el Subespacio vectorial subyacente viene generado por {w1, w2}.



Conclusión: Evidentemente, las soluciones de la ecuación (*) llenan un plano en el espacio.

Vector Ortogonal al plano: A.x + B.y + C.z + D =0

Sea en vector w = A.e1 + B.e2 + C.e3, y sean dos soluciones de la ecuación, es decir, dos puntos del plano B = (b1, b2, b3) , X = (x, y, z).

El vector v = (x – b1).e1 + (y- b2).e2 + (z – b3).e3 pertenece al subespacio director del plano. Si w fuese ortogonal con v podríamos deducir que w es ortogonal al plano, esto es, es ortogonal a cualquier vector del subespacio vectorial.

Tenemos w * v =

= (A.e1 + B.e2 + C.e3) * ((x – b1).e1 + (y- b2).e2 + (z – b3).e3) =

(si {e1, e2, e3} es ortonormal)

= A.(x – b1) + B.(y – b2) + C.(z – b3) =

= (A.x + B.y + C.z) – (A.b1 + B.b2 + C.b3) = (-D) – (-D) = 0 .

NOTA: Supongamos que {v1, v2, v3} es cualquiera. Por definición del producto vectorial v_i x v_j es perpendicular a los dos factores. Tomando el vector w = A.(v2 x v3 + B.(v3 x v1) + C.(v1 x v2) tenemos

(A.(v2 x v3 + B.(v3 x v1) + C.(v1 x v2)) *

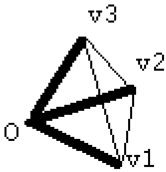
* ((x – b1).v1 + (y- b2).v2 + (z – b3).v3) =

= A.(x – b1).((v1xv3)*v1) + B.(y – b2).((v3xv1)*v2) +

+ C.(z – b3).((v1xv2)*v3) =

(llamando k al valor del volumen del tetraedro (v1, v2, v3), esto es k = (v1 x v2)*v3)

= k.(A.(x – b1) + B.(y – b2) + C.(z – b3)) = k.0 = 0



Esto significa que en cualquier sistema de referencia, y por tanto en cualquier base {e1, e2, e3}, el vector w = A.e1 + B.e2 + C.e3 es perpendicular (ortogonal) al plano.

Observa que (v1 x v2)*v3) = (v2 x v3)*v1) = (v3 x v1)*v2)

Otra forma para definir un plano:

Si W = (a, b, c) es un vector perpendicular al plano y B un punto en dicho plano, para cualquier punto X (x, y, z) del plano se cumple

W * BX = 0, de donde

0 = (a.e1 + b.e2 + c.e3) * ((x-b1).e1 + (y-b2).e2 + (z-b3).b3) =

= a.(x-b1).(e1*e1) + [a.(y-b2) + b.(x-b1)].(e1*e2) +

+ [a.(z-b3) + c.(x-b1)].(e1*e3) + b.(y-b2).(e2*e2) + c.(z-b3).(e3*e3) =

(tabla de doble entrada)

=

.	$x-b1$	$y-b2$	$z-b3$
a .	$e1*e1$	$e1*e2$	$e1*e3$
b .	$e2*e1$	$e2*e2$	$e2*e3$
c .	$e3*e1$	$e3*e2$	$e3*e3$

donde tendremos en cuenta que $e_k * e_h = e_h * e_k$

Los valores $e_k * e_h$ del interior de la tabla definen el producto escalar *.

En la definición del producto escalar ordinario:

$$e_k * e_h = 1 \text{ si } k = h, \quad e_k * e_h = 0 \text{ si } k \neq h$$

y entonces:

$$0 = (a.e1 + b.e2 + c.e3) * ((x\text{-}b1).e1 + (y\text{-}b2).e2 + (z\text{-}b3).b3) =$$
$$= a.(x\text{-}b1) + b.(y\text{-}b2) + c.(z\text{-}b3)$$

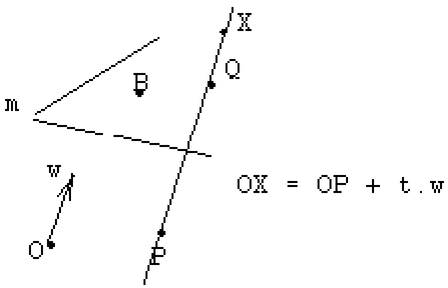
Distancia desde un punto a un plano:

A) Supongamos que el plano viene definido por W * BX = 0, donde

w = (a, b, c) y B(b1, b2, b3) son los dados en el punto anterior.

Los punto de la recta r perpendicular a m pasando por P quedan localizados así:

$$OX = OP + t.w$$



Si Q es el punto de corte con el plano: OQ = OP + t.w

En vector BQ es tal que BQ*w = 0.

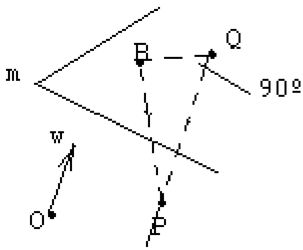
BQ = BO + OP + t.w , BQ = BP + t.w ,

0 = w * (BP + t.w) = w * BP + t.(w*w), de donde

w * PB = t.(w*w) , t = $\frac{w*PB}{w*w}$, por tanto PQ = t .w = $\frac{w*PB}{w*w}$. w

Evidentemente el segmento PQ es el camino más corto desde P hasta el plano m.

Conclusión: Si el vector w tiene la orientación de P a Q, y además /w/ = 1, entonces d(P, m) = t = w * PB

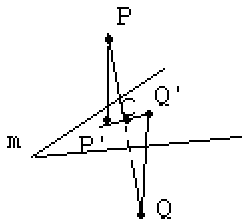


B) Si el plano viene dado por su ecuación general

m : A.x + B.y + C.z + D = 0 , los más practico es tomar el vector perpendicular al plano: w = A.e1 + B.e2 + C.e3, y aplicar el proceso anterior, después de obtener un punto B del plano. El punto B lo obtenemos dando un valor a las dos incógnitas que consideremos libres.

Plano cortando a un segmento:

Sean el plano m y el segmento PQ. El punto común es el punto C, y P' , Q' son los puntos de corte de las perpendiculares por P y por Q. Por semejanza se cumple $\frac{CP'}{CQ'} = \frac{PC}{QC} = \frac{PP'}{QQ'} = \frac{d(P,m)}{d(Q,m)}$



Intersección de recta y plano:

Sea la recta OX = OA + t.v, y el plano w * BX = 0 , o bien

0 = w * (OX – OB) . Si el punto X es común (punto de corte) tenemos

0 = w * (OA + t.v) – w * OB , w * (OB – OA) = w * t.v = t. (w*v), de donde

w * AB = t.(w*v), de donde t = $\frac{w*AB}{w*v}$. Así el punto común X queda localizado por

$$OX = OA + \frac{w*AB}{w*v}\,.v$$

Intersección de dos planos:

Sean dos planos m1: w1 * AX = 0, m2: w2 * BY = 0, donde A, B son puntos fijos de m1, m2, y w1, w2 son vectores ortogonales a m1, m2, respectivamente.

Poniendo OX = OA + AX, AX = OX – OA , y entonces 0 = w1 * AX =

= w1 * (OX – OA) -- > w1 * OX = w1 * OA , y del mismo modo w2 * OY = w2 * OB. (1)

A) Suponemos que {w1, w2} constituye una base, es decir w1, w2 son

linealmente independientes. Por lo tanto, en unión con el punto O determinan un plano.

Sea OZ = z1.w1 + z2.w2 sobre el citado plano, y suponemos que Z es común a los dos planos. Entonces, sustituyéndolo en las dos igualdades de (1), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} w1 * (z1.w1 + z2.w2) = w1 * OA \\ w2 * (z1.w1 + z2.w2) = w2 * OB \end{cases},$$ de

donde

$$\begin{cases} (w1 * w1).z1 + (w1 * w2).z2 = w1 * OA \\ (w2 * w1).z1 + (w2 * w2).z2 = w2 * OB \end{cases},$$ cuyas incógnitas

son z1, z2.

(2)

Evidentemente el sistema es compatible determinado:

$$\begin{vmatrix} w1 * w1 & w1 * w2 \\ w2 * w1 & w2 * w2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Sea Z esta solución, que es un punto común a los dos planos.

Para cualquier otra solución Z', en el caso de existir, se cumplirá

w1 * ZZ' = 0, y w2 * ZZ' = 0

lo cual significa que el vector ZZ' es ortogonal al plano determinado por (w1, w2), lo que a su vez significa que ZZ' es paralelo a w1 x w2. Puesto que Z' es otra solución cualquiera, llegamos a que el conjunto de puntos comunes viene determinado por

$OX = OY + t . (w1 \times w2)$, donde Y es una solución previamente obtenida resolviendo el sistema (2).

w2 = t.w1. Entonces, si X es un punto común

w1 * OX = w1 * OA , y t.(w1 * OX) = t.(w1 * OB) -- >

t.(w1*OA) = t . (w1*OB) = w2*OB, es decir

$$t.(w1*OA) = w2 * OB \qquad (3)$$

Esta última igualdad es condición necesaria para que tengan algún punto común. Si no se cumple los planos son paralelos.

En el caso de cumplirse la condición (3), si Z fuese una solución tendríamos

w1 * OZ = w1 * OA , y además w2 * OZ = (t.w1) * OZ = t.(w1 * OZ) = t .(w1 * OA) = (en virtud de (3)) = w2 * OB, y por tanto el punto Z también está en el plano m2. Los dos planos coinciden.

Intersección de tres planos:

Sean tres planos distintos:

$$\begin{cases} w1 * AX = 0, & \text{plano m1} \\ w2 * BY = 0, & \text{plano m2} \\ w3 * CZ = 0, & \text{plano m3} \end{cases}$$

donde A, B, C son un punto conocido del plano, mientras X, Y, Z son el punto genérico del plano correspondiente.

Teniendo en cuenta que : AX = OX – OA , para el primer plano tengo

w1 * OX = w1 * OA, y del mismo modo en los otros dos planos,

quedando
$$\begin{cases} w1 * OX = w1 * OA \\ w2 * OY = w2 * OB \\ w3 * OZ = w3 * OC \end{cases} \qquad (1)$$

A) Supongamos que {w1, w2, w3} constituyen base del espacio vectorial V_3 .

Un punto cualquiera, que podemos suponer sea común a los tres planos, es de la forma OT = t1.w1 + t2.w2 + t3.w3. Por ser común a los tres planos ha de cumplirse:

$$\begin{cases} w1 * (\mathrm{t1.w1} + \mathrm{t2.w2} + \mathrm{t3.w3}) = w1 * OA \\ w2 * (\mathrm{t1.w1} + \mathrm{t2.w2} + \mathrm{t3.w3}) = w2 * OB \\ w3 * (\mathrm{t1.w1} + \mathrm{t2.w2} + \mathrm{t3.w3}) = w3 * OC \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (w1 * \mathrm{w1}).\mathrm{t1} + (\mathrm{w1} * \mathrm{w2}).\mathrm{t2} + (\mathrm{w1} * \mathrm{w3}).\mathrm{t3} = w1 * OA \\ (w2 * \mathrm{w1}).\mathrm{t1} + (\mathrm{w2} * \mathrm{w2}).\mathrm{t2} + (\mathrm{w2} * \mathrm{w3}).\mathrm{t3} = w2 * OB \\ (w3 * \mathrm{w1}).\mathrm{t1} + (\mathrm{w3} * \mathrm{w2}).\mathrm{t2} + (\mathrm{w3} * \mathrm{w3}).\mathrm{t3} = w3 * OC \end{cases}$$
(3)

Por el hecho de ser los vectores w1, w2, w3, linealmente independiente, este sistema es compatible determinado. Los planos tienen un único punto común.

B) Supongamos que w1, w2 son l.d. , esto es w2 = a.w1 para algún valor
real a, mientras que w3 es l.i. con aquellos. Es evidente que los planos m1, m2 son paralelos entre sí, mientras m3 no lo es con ellos. Entonces m3 corta a m1 y m2 según rectas r1, r2, respectivamente. Si X es un punto de r1, común a los planos m1, m3, tenemos

$$\begin{cases} w1 * OX = w1 * OA \\ w3 * OX = w3 * OC \end{cases} \text{-->} \begin{cases} w1 * AX = 0 \\ w3 * CX = 0 \end{cases} \text{-->}$$

$$\begin{cases} (v11,\ v12,\ v13) * (x - a1,\ y - a2,\ z - a3) = 0 \\ (v31,\ v32,\ v33) * (x - c1,\ y - c2,\ z - c3) = 0 \end{cases}$$ --> Si estamos en base

ortonormal

$$\begin{cases} v11.(x - a1) + v12.(y - a2) + v13.(z - a3) = 0 \\ v31.(x - c1) + v32.(y - c2) + v33.(z - c3) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Este sistema es compatible y contiene una incógnita libre. Determina una recta en el espacio.

Del mismo modo si considero X punto de r2, esto es, común de m2 y m3. Obtengo el sistema

$$\begin{cases} v21.(x - b1) + v22.(y - b2) + v33.(z - 3) = 0 \\ v31.(x - c1) + v32.(y - c2) + v33.(z - c3) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

C) Si la dimensión del subespacio generado por {w1, w2, w3} es uno, lo cual significa que w2 = a.w1, w3 = b.w1, significa que los tres planos son paralelos entre sí. Siendo distintos no tienen punto común.

Distancia entre dos rectas:

Designamos por ^ el producto vectorial.

Sean dos rectas distintas r1: AX ^ AB = 0, r2: CY ^ CD = 0, donde A, B son puntos de r1, C, D son puntos de r2.

Es evidente que la menor distancia entre un punto X de r1 y un punto Y de r2 es la que se obtiene siguiendo el camino de la perpendicular común.

El vector w = AB ^ CD es ortogonal al mismo tiempo con AB director de r1, y con CD director de r2. Entonces w es director de una recta perpendicular con r1 y con r2. Deseamos obtener la perpendicular común que además corte a ambas rectas.

Tomo X punto genérico en r1, Y punto genérico en r2. Impongo que XY = t.w, y además XY * AB = 0, XY * CD = 0.

OX = OA + a.AB, OY = OC + c.CD

OY = OX -- > XY = (OC + c.CD) – (OA + a.AB) -- >

XY = AC + (c.CD - a.AB) -- > t . (AB ^ CD) = AC + (c.CD - a.AB)

donde t, a, c son incógnitas.

En una base ortonormal

$$AB \wedge CD = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ b1-a1 & b2-a2 & b3-a3 \\ d1-c1 & d2-c2 & d3-c3 \end{vmatrix}, \text{ supongamos}$$

AB ^ CD = m1.e1 + m2.e2 + m3.e3, entonces

$$\begin{cases} m1.t = (c1-a1) + c.(d1-c1) - a.(b1-a1) \\ m2.t = (c2-a2) + c.(d2-c2) - a.(b2-a2) \\ m3.t = (c3-a3) + c.(d3-c3) - a.(b3-a3) \end{cases} \qquad (6)$$

Sistema cuyas incógnitas son t, c, a.

----

t . ((b2- a2).(d3-c3)-(b3-a3).(d2-c2),

$$\begin{cases} t.(w * AB) = 0 \\ t.(w * CD) = 0 \end{cases} \text{-- >} \begin{cases} t.(AB * (AB\,\Delta\,CD)) = 0 \\ t.(CD * (AB\,\Delta\,CD)) = 0 \end{cases}$$

Haz de Planos:

Def.: Haz de planos es la familia de planos que pasan por una misma recta, llamada arista del haz.

Dados dos planos m1: w1*AX = 0, m2: w2*BY = 0, si no son paralelos se cortarán según una recta r (cuyos puntos son comunes a los dos planos). Si P es un punto de r se cumple: w1*PX = 0, w2*PY = 0.

Diremos que m1, m2 definen (determinan) el haz de planos cuya arista es r.

La expresión (t.w1 + u.w2)* PZ = 0, donde P es un punto de r (el de antes), define un plano. Veamos que pertenece al haz anterior, para lo cual hemos de probar que pasa por la recta r.

Si Q es otro punto de r tengo: (t.w1 + u.w2)*PQ = t.(w1*PQ) + u.(w2*PQ) = (Puesto que Q está en m1 y en m2) = t.0 + u.0 = 0.

Afirmamos que el haz de planos, con vértice r y generado por m1 y m2, queda determinado por la relación

(t.w1 + u.w2)* PX = 0

Nos queda probar lo siguiente (Recíproco de la anterior).

Sea w*PX = 0 un plano que pertenece a esta familia que es el haz, y por tanto es un plano m que pasa por la recta r. P es un punto de r y consideramos además otro punto Q de r, y por tanto cumple: w*PQ = 0 (ya que el plano contiene a r). Observamos que w es ortogonal con la recta r, y por tanto existen valores a, b tales que w = a.w1 + b.w2. Entonces

0 = (a.w1 + b.w2)*PQ = a.(w1*PQ) + b.(w2*PQ), de donde

que $\frac{a}{w2*PQ} = \frac{-b}{w1*PQ}$, o bien a = $\frac{-b.(w2*PQ)}{w1*PQ}$. Entonces

$$w = \frac{-b.(w2 * PQ)}{w1 * PQ}\ .w1 + b.w2, \quad \text{y por tanto}$$

$$0 = (\frac{-b.(w2 * PQ)}{w1 * PQ}\ .w1 + b.w2\ ) * PX \ \text{-->}$$

[-b.(w2*PQ).w1 + b.(w1*PQ).w2]*PX = 0

Esto prueba que el citado plano pertenece al haz generado por el referido haz.

Aplicación:

1.- Los puntos A(1,0,0), B(0,1,1) determinan una recta que es la arista del haz de planos generado por los planos m1: w1*AX = 0, m2: w2*AY = 0, donde w1 = e1 + e2, w2 = e2 + e3.

La ecuación del haz de planos es: a.(w1*AX) + b.(w2*AX) = 0.

Se pide el plano de este haz que pase por el punto Q(1,1,1).

Radiación de Planos:

Def.: Radiación de planos es la familia de planos que pasan por un mismo punto, común a los tres planos. Este punto lo llamamos vértice de la radiación.

Sea tres de estos planos y P el punto común (vértice):

m1: w1*PX = 0, m2: w2*PY = 0, m3: w3*PZ = 0

Analizamos la expresión (a.w1 + b.w2 + c.w3)* PT = 0.
Desarrollándola tenemos a.(w1*PT) + b.(w2*PT) + c.(w3*PT) =

a.0 + b.0 + c.0 = 0, ya que T cumple la condición para estar en m1, m2, m3. Esto nos dice que

$(a.w1 + b.w2 + c.w3)* PX = 0$ define una familia de planos que tienen en común el punto P, y por tanto es un subconjunto perteneciente a la radiación con vértice P.

Recíproco. Sea m un plano que contiene el punto P: $w*PX = 0$. Este vector w puede expresarse así (ya que {w1, w2, w3} constituyen base por ser l.i.)

$$w = t.w1 + u.w2 + z.w3.$$ Entonces

$0 = (t.w1 + u.w2 + z.w3)*PX = \ldots\ldots = \ldots\ldots = 0$, porque, al ser P el vértice de la radiación , el punto X también cumple la condición para estar en m1, m2, m3. Por tanto el plano $w*PX = 0$ pertenece a la radiación en cuestión.

Aplicación:

1.- Sea el punto A(1,1,1) que tomamos como vértice de la radiación de planos determinada por los planos m1: $w1*AX = 0$, m2: $w2*AY = 0$, m3: $w3*AZ = 0$, donde $w1 = e1 + e2$, $w2 = e2 + e3$. $w3 = e1 + e2 + e3$.

La radiación de planos viene determinada por:

$$a.(w1*AX) + b.(w2*AX) + c.(w3*AX) = 0$$

Se pide un plano de esta radiación que pase por el punto Q(1,1,1).

NOTA: Es evidente que un tratamiento análogo podemos hacer si los planos vienen dados en forma cartesiana, tanto en el caso del haz como en el caso de la radiación.

Haz de rectas. Radiación de rectas:

Dadas dos rectas r1: $AX = t.AB$, r2: $AY = u.AC$, que tienen el punto A en común.

Otra recta r que pasa por A puede ser de la forma: AX = t.AB + u.AC.

Los dos vectores V = AB, W = AC con el punto A determinan un plano m, de modo que cuando el par (t, u) recorre R^2 , la expresión

$$AX = t.AB + u.AC.$$

nos da una recta sobre m y que pasa por A. Tenemos un haz de rectas (coplanarias), formado por todas las rectas que estando sobre m pasan por el punto A.

Si tenemos otra recta r3: AX = v.AD, también pasando por A, entonces

$$AX = t.AB + u.AC + v.AD$$

representa una radiación de recta, la formada por todas las rectas del espacio que pasan por A.

La Esfera:

Def.: Fijados un punto C y un valor real R, llamamos esfera al l.g. de los puntos X que satisfacen la siguiente igualdad

$$CX*CX = R^2 \qquad (1)$$

"Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto C la distancia R.". Estamos hablando de la superficie esférica. El "macizo" de la esfera, esto es, la superficie más su interior responde a la desigualdad $CX*CX \leq R^2$, relacionado con el "Volumen de la esfera".

El punto C es el centro y R es su radio.

Localizando puntos desde el origen O tenemos

$(OX\text{-}OC)*(OX\text{-}OC) = R^2$ --> $OX*OX - 2.OC*OX + OC*OC - R^2 = 0$

y que desarrollando en cartesianas conduce a una expresión de la forma

$$A.x^2 + A.y^2 + A.z^2 + D = R^2, \quad \text{y si } P = O, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Intersección entre recta y esfera:

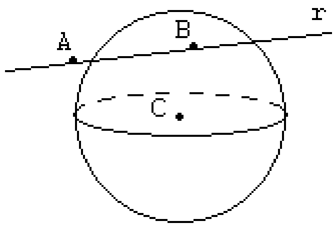
Sea la recta r determinada por los puntos A y B

$$OX = OA + t.AB$$

Tengo la esfera $OX*OX - 2.OC*OX + OC*OC - R^2 = 0$

Sustituyo aquella en ésta, y tengo

$$0 = (OA + t.AB)*(OA + t.AB) - 2.OC*(OA + t.AB) + OC*OC - R^2$$



$$0 = t^2.(AB*AB) + 2.t.(OA*AB) - 2.t.OC*AB + OA*OA - 2.OC*OA + \\ + OC*OC - R^2$$

o bien

$$t^2.(AB*AB) + 2.t.((OA- OC)*AB) + [OA*OA - 2.OC*OA + \\ + OC*OC - R^2] = 0 \qquad (2)$$

ecuación de segundo grado con incógnita t. Resuelta ésta tenemos los puntos (caso de valores reales):

$$\begin{cases} OX1 = OA + t1.AB \\ OX2 = OA + t2.AB \end{cases} \qquad (3)$$

Si t1, t2 son sus soluciones ,

puede ocurrir: $\begin{cases} t1,\ t2\ \ reales\ y\ distintos \rightarrow dos\ puntos \\ t1 = t2\ reales \rightarrow\ \ punto\ de\ tangencia \\ t1, t2\ \ complejos\ no\ reales \rightarrow no\ se\ cortan \end{cases}$

Potencia de un punto respecto de la esfera:

Visto lo expuesto en el punto anterior, tomamos ahora como punto A de la recta r, origen del vector AB, el pie de la perpendicular a r desde el centro C de la esfera. Entonces

t^2.(AB*AB) + 2.t.((OA- OC)*AB) + [OA*OA – 2.OC*OA +

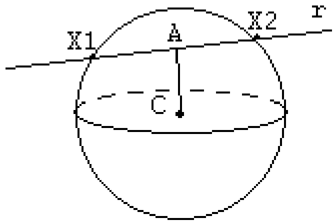
+ OC*OC – R^2] = 0   (4)

Teniendo en cuenta que OA – OC = CA, y que CA es ortogonal con AB, tengo

t^2.(AB*AB) + [OA*OA – 2.OC*OA + OC*OC – R^2] = 0   (5)

Si tomamos como unidad de medida AB, lo que significa que /AB/ = 1, nos queda

t^2 + [OA*OA – 2.OC*OA + OC*OC – R^2] = 0   (6)



Pero OA = OC + CA , por lo cual, el término constante de (6) queda así

$$(OC+CA)*(OC+CA) – 2.OC*(OC+CA) + OC*OC – R^2 =$$

$= OC*OC + CA*CA + 2.OC*CA – 2.OC*OC – 2.OC*CA + OC*OC – R^2 = CA*CA – R^2$, y por tanto la igualdad (6) queda de la forma

$$t^2 + [CA*CA – R^2] = 0 \qquad (7)$$

NOTA: Las ecuaciones anteriores son equivalentes, y la elección del punto A no merma la generalidad del resultado, si bien permite obtener fácilmente el valor final de la potencia de A.

Sabemos que el producto t1.t2 de las dos soluciones es igual al valor del término independiente $CA*CA – R^2$, esto es

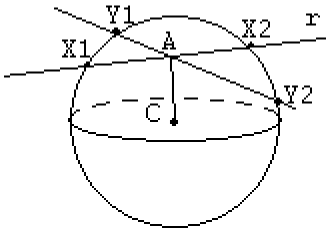
$$t1 . t2 = CA*CA – R^2$$

Ahora bien, si X1, X2 son los puntos de corte con la esfera, tengo

AX1 = t1.AB, AX2 = t2.AB, y siendo /AB/ = 1, será

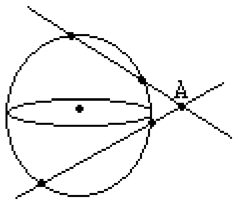
/AX1/ = t1, /AX2/ = t2 , de modo que

$$dist(AX1) . dist(AX2) = CA*CA – R^2$$, donde las distancias van dotadas de signo.



En la figura: AX1.AX2 = AY1.AY2 = CA*CA – R^2

Teorema de Steiner: "El producto de los segmentos AX1, AX2 , dotados con su signo, es constante cualquiera que sea la recta r que pasa por A, y su valor coincide con el valor que resulta cuando en la ecuación de la esfera CX*CX – R^2 = 0 sustituimos X por A".



También aquí AX1.AX2 = AY1.AY2 = CA*CA – R^2

Def.:
Diremos que el punto A tiene potencia CA*CA – R^2 respecto de la esfera CX*CX – R^2 = 0, con centro C y radio R.

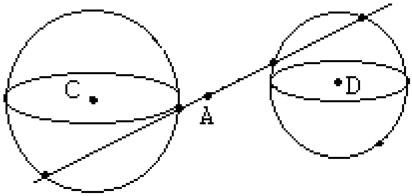
Lugar geométrico de los puntos equipotenciales respecto de dos esferas:

Se trata de determinar el l.g. de aquellos puntos Z tales que el valor de su potencia sea el mismo respecto de E1 y de E2.

Tengo dos esferas E1: CX*CX – R^2 = 0, centro en C
E2: DY*DY – R'^2 = 0, centro en D

El valor de la potencia de A respecto de cada una es

$$Pot(A;E1) = CA*CA - R^2$$
$$Pot(A;E2) = DA*DA - R'^2$$



En la figura mostramos A como equipotente respecto de las dos esferas:

$$CA*CA - R^2 = DA*DA - R'^2$$

Esto significa lo siguiente: Si x1, x2, y1, y2 son los puntos de corte con la esfera de la recta r que pasa por A, se cumple

$$Ax1.Ax2 = Ay1.Ay2$$

Si Z es otro punto cualquiera equipotente

$$CZ*CZ - R^2 = DZ*DZ - R'^2$$

Desarrollándolas

$$OZ*OZ - 2.OC*OZ + OC*OC - R^2 =$$

$$= OZ*OZ - 2.OD*OZ + OD*OD - R'^2$$

Trasponemos términos

$$(2.OD*OZ - OD*OD + R'^2) - 2.OC*OZ + OC*OC - R^2 = 0$$

$$2.OD*(OZ - OD) - 2.OC*(OZ - OC) + R'^2 - R^2 = 0 \qquad (8)$$

$$2.(OD - OC)*OZ - 2.(OD*OD + OC*OC) + R'^2 - R^2 = 0 \quad (8')$$

Si tomamos el origen O en el punto C nos queda (sustituye O por C)

$$2.CD^*CZ - 2.CD^*CD + R'^2 - R^2 = 0 \qquad (9)$$

Si A es una solución particular de esta última, tenemos

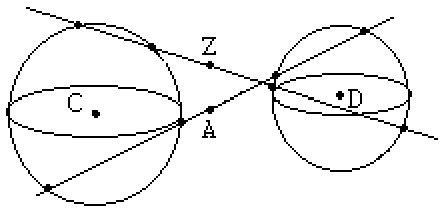
$$2.CD^*CA - 2.CD^*CD + R'^2 - R^2 = 0$$

y restándolas:

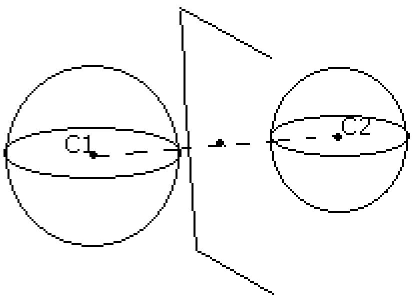
$$2.CD^*CZ - 2.CD^*CA = 0 \text{ -- > } CD^*CZ - CD^*CA = 0,$$

o bien: $CD^*(CZ - CA) = 0$, teniendo en cuenta que $CZ = CA + AZ$, tengo $CZ - CA = AZ$, y por tanto

$$CD^*AZ = 0 \qquad (10)$$



Conclusión: "El lugar geométrico de los puntos equipotentes respecto de dos esferas es el plano perpendicular al segmento que une sus centros, y que pasa por uno de los puntos equipolentes A".



Intersección de un plano con la esfera:

Sea la esfera E: CX*CX – R^2 = 0, y sea el plano m: w*AY = 0.

Dado el plano elegimos el punto A que sea el pie de la perpendicular a m desde el punto C centro de la esfera, de modo que w = CA.

Así tengo: CX*CX – R^2 = 0, CA*AY = 0, o bien: CY = CA + AY

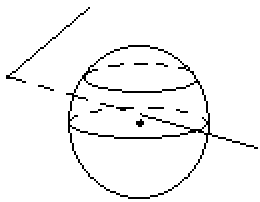
Si X es un punto común, tengo

R^2 = (CA+AX)* (CA+AX) = CA*CA + 2.CA*AX + AX*AX , y como CA*CX = 0, queda: R^2 = CA*CA + AX*AX, o bien

AX*AX = (R^2 – CA*CA),

y como X está confinado en el plano m, resulta que es una circunferencia sobre el plano m con centro en A y radio

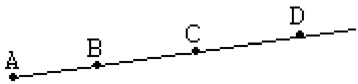
$r^2 = R^2$ – CA*CA



Cuaterna armónica de cuatro puntos alineados:

Def.: Si tenemos cuatro puntos alineados A, B, C, D, llamamos "Razón Doble" al siguiente valor representado por (ABCD)

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \qquad (11)$$

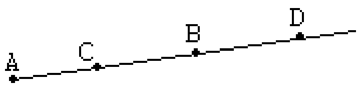


Por ser colineales: AC = c.AB, AD = d.AB, podemos expresarlo como sigue

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AC-AB} : \frac{AD}{AD-AB} = \frac{c.AB}{(c-1).AB} : \frac{d.AB}{(d-1).AB} =$$

$$= \frac{c}{(c-1)} : \frac{d}{(d-1)} \qquad (12)$$

Con frecuencia los representamos de la forma



Def.: Decimos que la cuaterna es armónica (que los puntos están distribuidos armónicamente) cuando (ABCD) = -1.

Entonces, si es armónica: $-1 = \frac{c}{(c-1)} : \frac{d}{(d-1)}$ < -- > $\frac{c}{(c-1)} : \frac{d}{(1-d)}$, de donde c – c.d = c.d –d -- > c + d = 2.cd.

"Dados dos puntos A, B, la condición para que C y D, alineados con ellos de la forma

AC = c.AB, AD = d.AB,

estén separados armónicamente de A, B es que se cumpla

$$2.c.d = c + d \qquad (13)$$

Par de puntos separados armónicamente por una esferas:

En el estudio de la intersección entre recta y esfera teníamos lo siguiente.

Dadas la esfera CX*CX – R^2 = 0, y la recta AX = t.AB, los valores t1, t2 que permiten obtener los puntos comunes: OX1 = OA + t1.AB, OX2 = OA + t2.AB, los obtenemos resolviendo la ecuación

$$CX*CX - R^2 = AX - t.AB$$

la cual, teniendo en cuenta que: CX = OX – OC, AX = OX – OA, queda así

$$t^2.(AB*AB) + 2.t.((OA- OC)*AB) + [OA*OA - 2.OC*OA +$$

$$+ OC*OC - R^2] = 0 \qquad (14)$$

Si hacemos que el centro C de la esfera coincida con O, tenemos

$$t^2.(AB*AB) + 2.t.(CA*AB) + (CA*CA - R^2) = 0 \qquad (15)$$

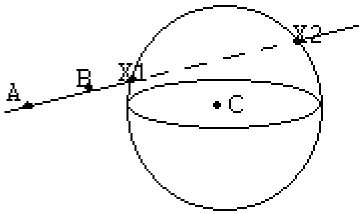
o bien: $t^2 + \frac{2.CA*AB}{|AB|^2}\,.t + \frac{CA*CA-R^2}{|AB|^2} = 0$

Sabemos que: $t1 + t2 = -\frac{2.CA*AB}{|AB|^2}$, $\quad t1.t2 = \frac{CA*CA-R^2}{|AB|^2}$

La condición (13) para que los puntos A, B, queden separados armónicamente de los puntos X1, X2 , (cortes con la esfera) exige que

$$2.(t1.t2) = t1 + t2, \quad \text{esto es: } 2.(CA * CA - R^2) = - 2.(CA * AB)$$

o bien $2.(R^2 - CA * CA) = 2.(CA * AB) \qquad (16)$



Recíprocamente, los puntos X1, X2 quedan separados armónicamente por los puntos A, B que determinan la recta.

Def.: Decimos que los puntos A y B quedan separados armónicamente por la esfera. (En realidad: Separados armónicamente por los puntos X1, X2 obtenidos al cortar la esfera con la recta dada por AB).

La condición (16), $(R^2 - CA * CA) = (CA * AB)$ podemos expresarla así

$$CA*CA - R^2 + CA*AB = 0 \text{, y también}$$

$$CA*(CA + AB) – R^2 = 0, \quad CA*CB – R^2 = 0$$

Conclusión: La esfera $CX*CX – R^2 = 0$ separa armónicamente los puntos A y B precisamente si se cumple

$$CA*CB – R^2 = 0 \qquad (17)$$

Observa que esta condición resulta de sustituir X por A en uno de los factores, y en el otro X por B.

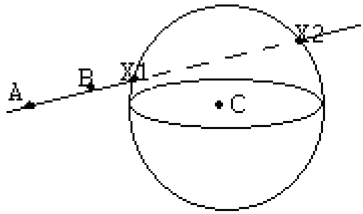
Caso particular: Si A pertenece a la esfera entonces $CA*CA = R^2$, lo cual significa que queda separado armónicamente consigo mismo.

Observar que: Suponiendo calculado los valores t1, t2, los puntos X1, X2 vienen localizados por: AX1 = t1.AB, AX2 = t2.AB

Figura polar asociada a un punto:

Recordamos el significado de la igualdad (17): $CA*CB - R^2 = 0$

Significa: "Los puntos A, B quedan separados armónicamente por la esfera, es decir por los puntos X1, X2 donde la recta determinada por AB corta la esfera"

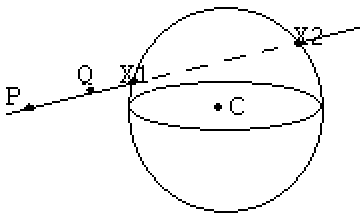


Sea P un punto fijo y la esfera $CX*CX - R^2 = 0$.

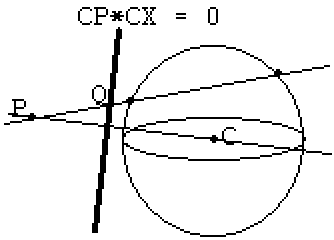
Def.: Figura polar de P respecto de la esfera es el l.g. de los puntos X separados de P armónicamente por la esfera.

Significa que $$CP * CX - R^2 = 0 \qquad (18)$$

Si Q es uno concreto de esos puntos que la satisfacen , tenemos



$CP * CQ - R^2 = 0$, y restándosela a la anterior nos queda
$CP*(CX - CQ) = 0$, o bien: $$CP*QX = 0 \qquad (19)$$



Esta última es la ecuación del plano perpendicular al segmento CP y que pasa por Q, siendo Q un punto (cualquiera) separado de P armónicamente por la esfera.

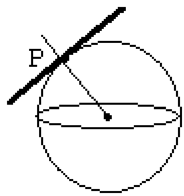
Def.: Llamamos "figura polar de P" al lugar geométrico de los puntos determinados por la relación (18). (Que resulta ser un plano)

Def.: Llamamos "plano polar de P" al plano definido por (19).

Caso particular: Si el punto P pertenece a la esfera: $CP*CP = R^2$, y el punto Q puede coincidir con P, y por tanto

$$CP*PX = 0, \qquad (20)$$

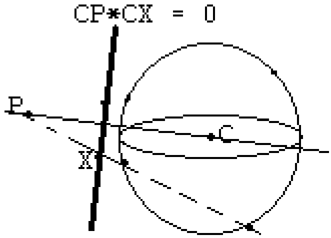
que es el plano tangente a la esfera en el punto P.



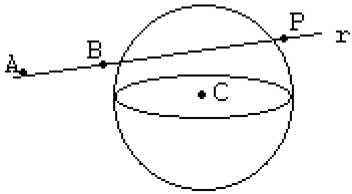
Evolución del plano polar cuando el punto P recorre una recta:

La igualdad $CP*CX - R^2 = 0$ define la figura polar asociada al punto P, que sabemos es un plano perpendicular a la recta determinada por P y C.

En esta igualdad el punto X está separado de P armónicamente por la esfera con centro C y radio R.



Sea la recta r : AX = t.AB, recta determinada por A y B, y hagamos que P sea un punto cualquiera de esta recta. Por supuesto los puntos A y B tienen asociado su plano polar: $CA * CX – R^2 = 0$, $CB * CX – R^2 = 0$.



Tenemos

$$CP = CA + t.AB = CA + t.(CB – CA) = (1 – t).CA + t.CB$$

que al dar valores a t recorre la recta r.

Lo llevo a la expresión (19)

$$R^2 = CP * CX = [(1 – t).CA + t.CB] * CX =$$
$$= (1- t).CA*CX + t.CB*CX$$

Pero $R^2 = (1 – t).R^2 + t.R^2$, por tanto

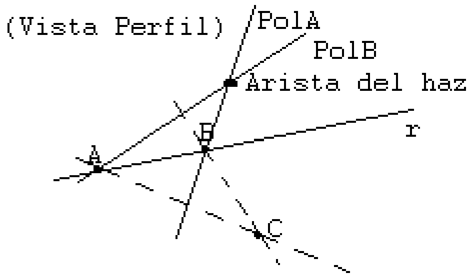
$(1-t).CA*CX + t.CB*CX = (1 – t).R^2 + t.R^2$, de donde

$$0 = (1 – t).[R^2 - CA*CX] + t.[R^2 – CB*CX] \qquad (21)$$

Esta igualdad (21) representa un haz de planos generado por los planos

$$m1: \quad R^2 - (CA*CX) = 0, \qquad m2: \quad R^2 - CB*CX = 0$$

que son el plano polar del punto A, y el plano polar del punto B, que determinaban la recta r.



En la figura A, B determinan la recta r. Suponemos que A, B son separados armónicamente por la esfera, de modo que el plano polar PolA de A pasa por B, y el plano polar PolB de B pasa por A. En la figura se ven de perfil, y la recta común es la arista del haz de planos por ellos generado, y cada uno de dichos planos es el polo de algún punto de la recta r . Correspondencia biunívoca entre puntos de r y planos del haz generado por PolA, PolB.

Un valor de t, t = a, determina un punto P de la recta CX = CA + a.AB,

y se corresponde con el siguiente planos del citado haz

$$(1 - a).[R^2 - CA*CX] + a.[R^2 - CB*CX] = 0$$

La arista del referido haz de planos es la intersección de los planos m1, m2

$$\begin{cases} R2 - (CA * CX) = 0 \\ R2 - CB * CX = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Podemos obtenerla más fácilmente restamos miembro a miembro

$$0 = CB * CX - CA * CX = (CB - CA) * CX = AB * CX,$$

esto es: AB * CX = 0, que determina los puntos de un plano ortogonal con la recta AB y que pasa por el centro C de la esfera. Entonces la arista viene dada por el siguiente sistema, intersección de dos planos

$$\begin{cases} \mathrm{R2} - (\mathrm{CA} * \mathrm{CX}) = 0 \\ AB * CX = 0 \end{cases} \qquad (22')$$

NOTA 1: Recordemos que tanto el plano polar de A como el de B son perpendiculares a las rectas respectivas AC y BC, y por tanto la recta común, arista del haz, también lo será.

NOTA 2: Si A y B son dos puntos separados entre sí armónicamente por la esfera, entonces el plano polar de A pasa por B y es ortogonal con AC, y el plano polar de B pasa por A y es ortogonal con BC.

Polar de una recta:

Hemos visto que los planos polares de los puntos de r: AX = t.AB constituyen el haz de planos generado por los polares de A, B, y que su arista s viene determinada por el sistema

$$\begin{cases} \mathrm{R2} - (\mathrm{CA} * \mathrm{CX}) = 0 \\ \mathrm{R2} - \mathrm{CB} * \mathrm{CX} = 0 \end{cases} \qquad (23)$$

Si Q es un punto de dicha arista s se cumplirá $\mathrm{R2} - (\mathrm{CA} * \mathrm{CQ}) = 0$, o bien $\mathrm{R2} - (\mathrm{CQ} * \mathrm{CA}) = 0$, lo cual significa que el punto A está en el plano polar de Q. Del mismo modo llego a que B está en el plano polar de Q. Puesto que Q es un punto cualquiera de la arista s, llegamos a que los puntos A, B están en el plano polar de cada punto Q de s. Esto nos lleva a garantizar que la recta r generada por A, B es la arista del haz de planos que está en correspondencia biunívoca con los puntos de s.

Conclusión/Def.: Lamamos "recta polar" de r a la recta s arista del haz producido por los puntos de r, y "recta polar" de s a la recta r arista del haz producido por los puntos de s.

Evolución del plano polar de P cuando P recorre un plano:

Supongamos que el punto P es cualquiera dentro de un plano determinado por los puntos D, E, F.

Tenemos CP = CD + t.DE + u.DF = CD + t.(CE – CD) + u.(CF – CD) = (1 - t - u).CD + t.CE + u.CF

Lo llevo a la expresión R^2=CP*CX

$$R^2 = [(1-t-u).CD + t.DE + u.DF] * CX =$$

$$= (1-t-u).CD * CX + t.DE * CX + u.DF * CX$$

Ahora $R^2 = (1-t-u).R^2 + t.R^2 + u.R^2$, y por tanto

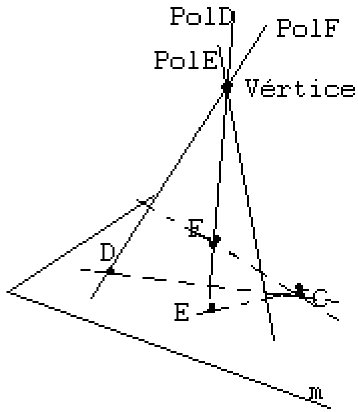
$$(1-t-u).R^2 + t.R^2 + u.R^2 =$$

$$= (1-t-u).CD * CX + t.DE * CX + u.DF * CX,$$

de donde: $0 = (1-t-u).[CD * CX - R^2] +$

$$+\, t.[DE * CX - R^2] + u.[DE * CX - R^2] \qquad (24)$$

que define la radiación de planos generada por el plano polar de D, de E y de F.



En esta figura vemos de perfil los planos polares respectivos. Hemos supuesto que D y F están separados armónicamente por lo cual D está en PolF y F está en PolD.

Esta radiación tiene un vértice determinado por el siguiente sistema

$$\begin{cases} CD * CX - R^2 = 0 \\ CE * CX - R^2 = 0 \\ CF * CX - R^2 = 0 \end{cases} \qquad (25)$$

Veamos cómo es el plano polar del vértice V de esta radiación.

Si Q es un punto del citado plano, puesto que está en cada uno de los generadores de la radiación, tengo

$CD * CQ - R^2 = 0$ -- > $CQ * CD - R^2 = 0$ -- > D está en PolQ

$CE * CQ - R^2 = 0$ -- > $CQ * CE - R^2 = 0$ -- > E está en PolQ

$CF * CQ - R^2 = 0$ -- > $CQ * CF - R^2 = 0$ -- > F está en PolQ

Estos tres puntos D, E, F generan un plano que, evidentemente coincide con el plano PolQ. Podemos por tanto concluir.

Conclusión/Def.: En "plano polar" del vértice V de la radiación producida por los puntos del plano generado por D, E, F, es precisamente este plano generado por D, E, F.

Intersección de dos esferas:

Sean dos esferas con centros C, D, y radios R, R' . Sus ecuaciones

$CX*CX = R^2$, $DY*DY = R'^2$

Teniendo en cuenta que $CX = OX – OC$, $DY = OY – OD$, las anteriores se convierten en

$OX*OX – 2.OC*OX + OC*OC = R^2$

$OY*OY – 2.OD*OY + OD*OD = R'^2$

Si X representa el punto común en general, y de la primera resto la segunda

$$2.OX*(OD – OC) + (OC*OC – OD*OD) + R^2 – R'^2 = 0$$

Entonces el l.g. de los puntos comunes viene dados por las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{OX} * \mathrm{OX} - 2.\mathrm{OC} * \mathrm{OX} + \mathrm{OC} * \mathrm{OC} - \mathrm{R}^2 = 0 \\ 2.OX * CD + OC * OC - OD * OD + R^2 - R'^2 = 0 \end{cases}$$

donde la primera es una de las esferas, y la segunda es la ecuación de un plano.

Para mejorar la presentación y tratamiento del sistema anterior hacemos lo siguiente: Llamo $a^2 = R^2 - OC*OC$, $b^2 = R'^2 - OD*OD$

Las dos esferas quedan así: $OX*OX – 2.OC*OX - a^2 = 0$

$$OX*OX – 2.OD*OX - b^2 = 0$$

De la primera resto la segunda: $-2.(OC–OD)*OX + b^2 – a^2 = 0$

y teniendo en cuenta que OD = OC + CD -- > OC – OD = - CD ,

el sistema equivalente al anterior es ahora

$$\begin{cases} OX * OX - 2.OC * OX - a^2 = 0 \\ \quad 2.CD * OX + b^2 - a^2 = 0 \end{cases} \qquad (21)$$

Veamos cómo queda el valor $b^2 – a^2$, como sigue

$(R'^2 - OD*OD) – (R^2 - OC*OC) = R'^2 – R^2 + (OC*OC – OD*OD)$

Pongo OD = OC + CD, con lo cual

OC*OC – (OC + CD)*(OC + CD) = OC*OC – (OC*OC + 2.OC*CD +

+ CD*CD) = - 2.OC*CD - CD*CD .

Si elegimos O coincidiendo con C, queda

$b^2 – a^2 = R'^2 – R^2 – CD*CD$, y el Sistema (21) queda así:

$$\begin{cases} \qquad OX * OX - R^2 = 0 \\ 2.CD * OX - CD * CD + R'^2 - R^2 = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Consultando el punto que trata el l.g. de los puntos equipotentes, la segunda de las ecuaciones es la del plano de los puntos equipotentes respecto de las dos esferas.

Conclusión: El lugar geométrico de los puntos comunes a dos esferas es la circunferencia que resulta de cortar una de las esferas con el plano de los puntos equipotentes respecto de ellas.

Cono tangente a un esfera:

Sea la esfera CX * CX - R^2 = 0. Vimos que dos puntos A, B quedan separados armónicamente por la esfera precisamente si se cumple

$$(AB*AB).t^2 + 2.(AB * CA).t + (CA * CA) - R^2 = 0 \qquad (1)$$

NOTA: Significa que A y B, junto a los puntos X1, X2 de corte de la recta determinada por A, B con la esfera, forman una cuaterna armónica.

(Consúltese …)

Ahora buscamos que la recta r determinada por A, B sea tangente a la esfera. Tomamos la recta r genérica sustituyendo B por X, con lo cual tenemos una familia de rectas que pasan por A.

Sustituyendo B por X en (1) tenemos

$$(AX *AX).t^2 + 2.(AX * CA).t + (CA * CA) - R^2 = 0 \qquad (2)$$

ecuación de segundo grado que analizamos.

Radicando igualado a cero:

$$4.(AX * CA)^2 - 4.(AX * AX).[(CA * CA) - R^2] = 0 \dashrightarrow$$

$$(AX * CA)^2 - (AX * AX).[(CA * CA) - R^2] = 0, \quad \text{o bien}$$

$$(AX * AX).[(CA * CA) - R^2] - (AX * CA)^2 = 0 \qquad (3)$$

Puede quedar en la ecuación equivalente

$$|AX|^2.(|CA|^2 - R^2) = (AX * CA)^2 \qquad (3)'$$

Tengo así para el l.g. de los puntos X de las rectas que pasan por A y son tangentes con la esfera

$$\begin{cases} |AX|^2.(|CA|^2 - R^2) = (AX * CA)^2 \\ AXxAX = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

La igualdad (3)' puede ser modificada como sigue:

dividiendo por /AX/^{2} -- > $(|CA|^2 - R^2) = |CA|^2.\cos^2(g)$

y dividiendo por /CA/^{2} -- > $1 - \frac{R^2}{|CA|^2} = \cos^2(g)$, g = áng(AX,AC)

(Observa que $(AX * CA)^2 = (AX * AC)^2$)

Queda finalmente

$$\begin{cases} 1 - \frac{R^2}{|CA|^2} = \cos^2(AX, AC) \\ AXxAX = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

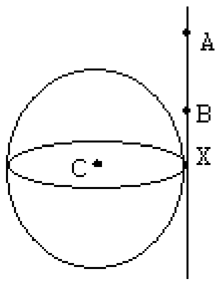
La primera define precisamente el cono con vértice en A y eje AC formado por las rectas tangentes a la esfera. El cono será real cuando A sea exterior a la esfera (AC > R), coincide con el plano tangente cuando A esté sobre la superficie de la esfera (AC = R), es imaginario si A es interior (AC < R).

Cilindro tangente a una esfera:

En la ecuación $(AB*AB).t^2 + 2.(AB * CA).t + (CA * CA) – R^2 = 0$

hacemos que AB = V sea constante y unitario. Entonces

$$t^2 + 2.(V * CA).t + (CA * CA) – R^2 = 0 \qquad (6)$$



Las soluciones t1, t2 llevadas a AX = t1.AB nos da los puntos de corte de la recta con la esfera.

Imponemos la condición de tangencia:

$$4.(V * CA)^2 - 4.\left((CA * CA) - R^2\right) = 0 \text{ --> }$$

$$(V * CA)^2 - CA * CA + R^2 = 0 \text{ --> } R^2 = CA * CA - (V * CA)^2 \quad (6)'$$

Esta igualdad podemos modificarla

$$CA * CA - (V * CA)^2 =$$

$= \begin{vmatrix} 1 & V * CA \\ V * CA & CA * CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V * V & V * CA \\ V * CA & CA * CA \end{vmatrix}$ = (Relación de Lagrange, y que V * CA = CA * V), y por tanto tengo

$$(V\ x\ CA) * (V\ x\ CA) = R^2 \qquad (7)$$

Es la ecuación del cilindro (de revolución) con eje pasando por C y dirección V, y radio R.

Línea de contacto del cono y el cilindro con la esfera:

Para el cono:

Tomando la igualdad (3), tenemos

$$\begin{cases} (AX * AX).\left[(CA * CA) - R2\right] - (AX * CA)^2 = 0 \\ CX * CX = R^2 \end{cases} \qquad (8)$$

De la segunda, teniendo en cuenta que CX = CA + AX , tenemos

$$R^2 = (CA + AX) * (CA + AX) = CA * CA + 2.CA * AX + AX * AX$$

de donde AX * AX = R^2 – (CA * CA) – 2.(CA * AX), y llevada a la primera de (8) tenemos

$$0 = \left[R^2 - (CA * CA) - 2.(CA * AX)\right].[CA * CA - R^2] - (AX * CA)^2 =$$

$$= \left[R^2 - (CA * CA) - 2.(CA * AX)\right].[R^2 - CA * CA] + (AX * CA)^2 =$$

$$= [R^2 - CA*CA]^2 - 2.(CA*AX).[R^2 - CA*CA] + (AX*CA)^2 =$$

= (puesto que $(AX*CA)^2 = (CA*AX)^2$)

$$= [(R^2 - CA*CA) - (CA*AX)]^2 \text{ , de donde}$$

$$(R^2 - CA*CA) - (CA*AX) = 0 \dashrightarrow R^2 - CA * (CA + AX) = 0$$

esto es R^2 - CA * CX = 0 . Por tanto la curva de contacto es el l.g. de los puntos que cumplen el sistema:

$$\begin{cases} CA * CX = R^2 \\ CX * CX = R^2 \end{cases} \qquad (9)$$

Para el cilindro:

La línea de contacto viene dada por el l.g. definido por el siguiente sistema

$$\begin{cases} R^2 = CA * CA - (V * CA)^2 \\ CX * CX = R^2 \end{cases} \qquad (10)$$

Si el punto X pertenece al cilindro, en la línea de contacto con la esfera, tenemos $R^2 = CX * CX - (V * CX)^2$, y sustituyendo en esta la segunda $CX * CX = CX * CX - (V * CX)^2$, y entonces

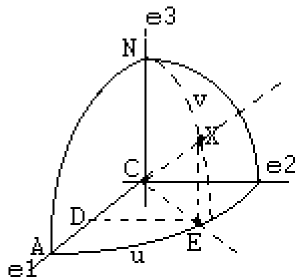
$(V * CX)^2 = 0$, quedando el sistema

$$\begin{cases} V * CX = 0 \\ CX * CX = R^2 \end{cases} \qquad (11)$$

Representa la intersección de la esfera con el plano V * CX = 0 que pasa por el centro y es perpendicular a la arista del cilindro (plano diametral).

Coordenadas Geográficas: Ecuación de la esfera

Observa la figura



El ángulo u es lo que llamamos “longitud” (admitido universalmente), y el ángulo v es el complemento de la “latitud” (v + v’ = 90º, donde v’ es lo que llamamos "latitud") . Al ángulo v aquí lo llamaremos "distancia polar".

Vectorialmente tenemos: CX = CD + DE + EX , donde CD = cos(u).CE, DE = sen(u).CE, EX = cos(v).R, y además CE = sen(v).R. Entonces

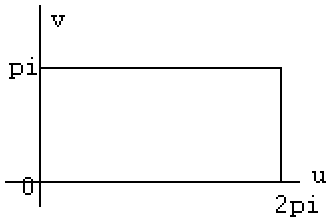
CX = cos(u).(sen(v).R).e1 + sen(u).(sen(v).R).e2 + cos(v).R.e3

CX = R.[cos(u).sen(v).e1 + sen(u).sen(v).e2 + cos(v).e3] (1)

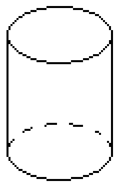
Vemos que CX = f1(u,v).e1 + f2(u,v).e2 + f3(u,v).e3, donde (u,v) $\in [0, 2.\pi]x[0, \pi]$.

El par de valores (u,v) recorre el rectángulo de la figura produciendo los valores f_i (u,v) de la expresión vectorial CX.

En coordenadas cartesianas sería: X(f1(u,v), f2(u,v), f3(u,v)).

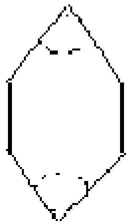


NOTA: De este rectángulo podemos obtener la esfera asociada como sigue: 1.- Hago coincidir cada punto (0, v) con $(2\pi, v)$, resultando un

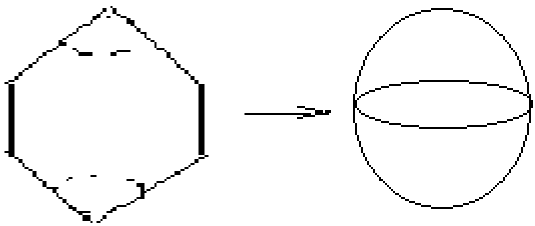


cilindro

2.- Hago coincidir (0, 0) con $(2\pi, 0)$, y $(0, \pi)$ con $(2\pi, \pi)$, resultando la figura

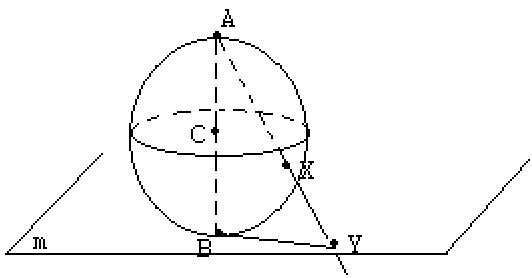


3.- Finalmente lo inflo para que tome forma de esfera.



Proyección estereográfica:

Tengo la esfera con centro C y radio R. Considero el plano m tangente a la esfera en el punto B (polo sur), y tomo el punto A (polo norte).



Desde el punto A trazo recta, no paralela a m, que cortará a la esfera en un punto X, y cortará al plano m en un punto Y. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre puntos de la esfera (salvo el punto A) y los puntos del plano m.

Tenemos las siguientes condiciones:

AX = t. AY, AB*BY = 0,

Por semejanza de los triángulos ABY, AXB se cumple: $\frac{|AB|}{|AY|} = \frac{|AX|}{|AB|}$, de donde /AB/./AB/ = /AX/./AY/, y también mediante el producto escalar

AB * AB = AX * AY, y por tanto también: AB*AB = t.(AY*AY)

de donde: t = $\frac{AB*AB}{AY*AY} = \frac{(2R)^2.(2R)^2}{AY*AY} = \frac{4.R^2}{AY*AY}$. Entonces nos quedan las condiciones conjuntas

$$\begin{cases} \text{AX} = \frac{4.R^2}{AY*AY}\,.AY \\ AB * BY = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Si ahora localizamos el punto X desde el centro C de la esfera, y el punto Y desde el punto B, tenemos AX = AP + PX, AY = AB + BY

(AB + BY)*(AB + BY) = AB*AB + 2.AB*BY + BY*BY =

= 4.R^2 + BY*BY, ya que AB*BY = 0.

Entonces

$$\text{AP} + \text{PX} = \frac{4.R^2}{4.R^2+BY*BY}\,.(AB+BY), \quad \text{de donde}$$

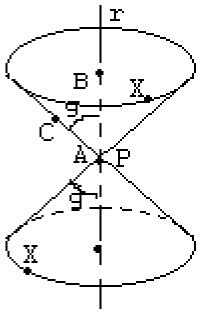
$$\text{PX} = \frac{4.R^2}{4.R^2+BY*BY}\,.(AB+BY)+PA \qquad (2)$$

Tenemos pues la correspondencia definida por (2)

BY --- > PX (vectorialmente)

Cono de Revolución: Ecuación puntual

Def.: Sean una recta r determinada por AB y un punto fijo P de r. El cono de revolución, con vértice P, eje la recta r y ángulo g, puede ser considerado como la subfamilia formada por aquellas rectas de la radiación con centro en P, que forman ángulo g con la recta r.



C

Suponemos que el vértice P coincide con A, origen del vector AB, y que AB es unitario, es decir /AB/ = 1. Suponemos también que C es una solución particular tal que AC es unitario; g = ang(AB, AC) .

Los puntos X de la superficie cónica serán aquellos que satisfacen

cos(AB, AX) = cos(AB, AC) ó cos(AB,AX) = cos($\pi - g$),

por tanto, y teniendo en cuenta que /AB/ = 1,

$AB * \frac{AX}{|AX|} = AB * AC$ ó $AB * \frac{AX}{|AX|} = -AB * AC$, de donde

$AB * \frac{AX}{|AX|} - AB * AC = 0$ ó $AB * \frac{AX}{|AX|} + AB * AC = 0,$

multiplicándolas y teniendo en cuenta que (a+b).(a-b) = $a^2 - b^2$

$$\frac{(AB*AX)^2}{AX*AX} - (AB * AC)^2 = 0 \qquad (1)$$

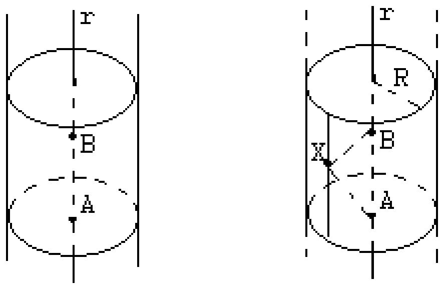
de donde $(AB*AX)^2 - (AB*AC)^2 . (AX*AX) = 0$, o bien

$$(AB*AC)^2 . (AX*AX) - (AB*AX)^2 = 0 \qquad (2)$$

Casos particulares: a) Cuando g = 0, el cono es degenerado reduciéndose a su eje. b) Cuando g = 90^o , el cono se convierte en el plano perpendicular a su eje y pasando por su vértice P.

Cilindro de Revolución: Ecuación puntual

Def.: Dada una recta r determinada por los puntos A, B, y una medida o valor real R, llamamos Cilindro de Revolución a la superficie formada por las rectas paralelas a r y que distan de ésta la distancia R.



Observa que la altura del triángulo AXB toma el valor R, cualquiera que sea el punto X en la superficie del cilindro. Por tanto

$$\text{Área}(AXB) = \frac{1}{2}.|AB|.R$$

Por otro lado sabemos que $\text{Área}(AXB) = \frac{|ABxAX|}{2}$, por lo tanto tenemos $\frac{|ABxAX|}{2} = \frac{1}{2}.|AB|.R$, de donde $|ABxAX|^2 = |AB|^2.R^2$, esto es

$$(AB \text{ x } AX)*(AB \text{ x } AX) = R^2 . (AB*AB) \qquad (3)$$

La identidad de Lagrange nos dice que

$$(VxW)*(V'xW') = \begin{vmatrix} V*V' & V*W' \\ W*V' & W*W' \end{vmatrix}$$

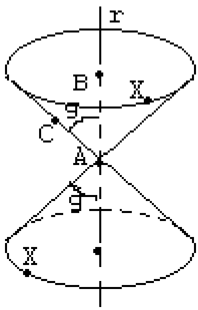
Entonces (3) queda de la forma

$$\begin{vmatrix} AB*AB & AB*AX \\ AX*AB & AX*AX \end{vmatrix} - R^2.(AB*AB) = 0 \qquad (4)$$

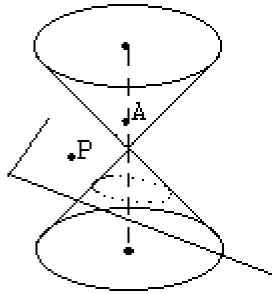
NOTA: Si hago intervenir el origen O (en un punto cualquiera del espacio) tenemos: AB = OB - OA, AX = OX – OA , y las anteriores igualdades serían válidas para cualquier punto origen del s.r., tanto en el cono como en el cilindro.

Las Cónicas de Apolonio:

Son el resultado de seccionar el cono mediante un plano



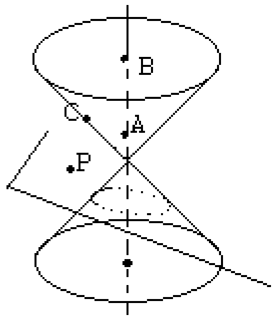
Sea el plano W*PX = 0, donde P es un punto del plano y W un vector ortogonal al plano.



Sea un cono definido por: $(AB*AC)^2 . (AX*AX) - (AB*AX)^2 = 0$, donde A es el vértice del cono, AB es vector que determina el eje, X es el punto genérico del cono.

Un punto X perteneciente a la sección ha de cumplir

$$\begin{cases} (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2 . (\mathrm{AX} * \mathrm{AX}) - (\mathrm{AB} * \mathrm{AX})^2 = 0 \\ W * PX = 0 \end{cases} \qquad (5)$$



Expreso AX = AP + PX, y lo sustituyo en la primera de las igualdades. Antes hago AX *AX = AP *AP + 2.AP *PX + PX * PX , AB*AX = AB *AP + AB*PX , entonces

$$(AB*AC)^2 . (AP*AP + 2.AP*PX + PX*PX) – (AB*AP + AB*PX)^2 = 0$$

(Ecuación puntual de la sección cónica) (6)

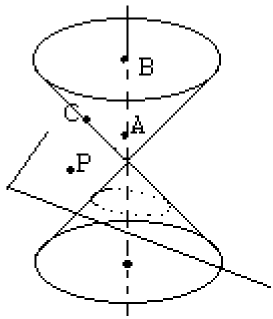
Si en el plano elegimos el punto P de modo que coincida con el pie de la perpendicular desde A, entonces AP*PX = 0 y la ecuación (6) queda

$$(AB*AC)^2 . (AP*AP + PX*PX) – (AB*AP + AB*PX)^2 = 0 \qquad (6')$$

Casuística:

a) Si el plano es paralelo al eje del cono el resultado consta de dos ramas abiertas iguales (Es la Hipérbola). Si no es paralelo al eje del cono pero corta las dos hojas del cono el resultado son dos ramas abiertas (Tipo Hipérbola).
b) Si el plano es paralelo a una generatriz del cono el resultado consta de una sola rama abierta (Es la Parábola).
c) Si el plano corta sólo una hoja del cono el resultado es una curva cerrada (Es la Elipse). Si además el plano es perpendicular al eje el resultado es una circunferencia.

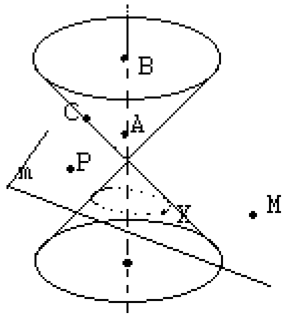
Centro de la sección cónica:



La sección cónica, según vimos, viene dada por el sistema

$$\begin{cases} (AB * AC)^2 . (AX * AX) - (AB * AX)^2 = 0 \\ W * PX = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

donde A es el vértice del cono, P es un punto del plano y W es un vector ortogonal a este plano (Plano definido por W * PX = 0). X es un punto cualquiera de la línea de contacto.



Sea M otro punto cualquiera del plano secante. Ponemos AX = AM + MX, y la primera del sistema (7) se convierte en

$$0 = (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2 \,.\, (\mathrm{AM} + \mathrm{MX}) * (\mathrm{AM} + \mathrm{MX}) - (\mathrm{AB} * (\mathrm{AM} + \mathrm{MX}))^2$$

$$0 = (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2 . [AM * AM + 2. AM * MX + MX * MX] - \\ -(\mathrm{AB} * \mathrm{AM} + \mathrm{AB} * \mathrm{MX})^2$$

y simultáneamente: 0 = W * PX = W *(PM + MX) = W * MX

$$0 = (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2 . [AM * AM + 2. AM * MX + MX * MX] - \\ -[(\mathrm{AB} * \mathrm{AM})^2 + (\mathrm{AB} * \mathrm{MX})^2 + 2.(AB * AM).(AB * MX)]$$

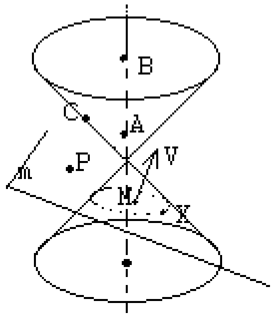
y simultáneamente: W * MX = 0

Reordenándola

$$0 = [(AB * AC)^2 . (MX * MX) - (AB * MX)^2] + \\ + [(AB * AC)^2 . AM - (AB * AM). AB] * MX + \\ + [(AB * AC)^2 . (AM * AM) - (AB * AM)^2] \qquad (8)$$

y simultáneamente: W * MX = 0.

Supongamos que es posible elegir M de tal forma que el vector



V = $(AB * AC)^2 . AM - (AB * AM) . AB$ sea ortogonal con el plano secante m, con lo cual V * MX = 0, ya que M y X están sobre el plano.

Entonces, reduciendo la (8), tenemos el siguiente sistema de condiciones:

$$\left\{\begin{array}{c} (AB * AC)^2 . (MX * MX) - (AB * MX)^2 + \\ +(AB * AC)^2 . (AM * AM) - (AB * AM)^2 = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{MX} = 0 \\ [(AB * AC)^2 . AM - (AB * AM) . AB] * MX = 0 \end{array}\right. \qquad (9)$$

Teniendo en cuenta que el vector W es ortogonal al plano m, y por tanto es paralelo al vector V antes descrito, con lo cual V x W = 0, y que P y M son puntos del plano, y por tanto W * PM = 0, la condición W * MX = 0 puede ser sustituida por W * PM = 0. Además, PM = PA + AM , con lo cual W * (PA + AM) = 0, o bien -W * AP + W * AM = 0, por lo cual W * AM = W * AP.

Después de todo esto el sistema (9) queda de la forma

$$\left\{\begin{array}{c} (AB * AC)^2 . (MX * MX) - (AB * MX)^2 + \\ +(AB * AC)^2 . (AM * AM) - (AB * AM)^2 = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{AM} = \mathrm{W} * \mathrm{AP} \\ [(AB * AC)^2 . AM - (AB * AM) . AB] \; x \; W = 0 \end{array}\right. \qquad (10)$$

La primera nos da el l.g. de la línea de contacto formada por los puntos X, suponiendo conocido el punto M que cumpla las condiciones impuestas por la segunda y la tercera. Observa que el resto de datos que intervienen son conocidos previamente.

La tercera condición puede resultar más inteligible de esta forma

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) = (AB * AM).(AB\ x\ W) \qquad (11)$$

Continuamos:

Salvo en el caso degenerado cuando el caso se convierte en un plano, en un cono real se cumple $0 < AB * AC < 1$.

En los dos miembros de (11) multiplicamos escalarmente por AB con lo cual

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) * AB = (AB * AM).(AB\ x\ W) * AB$$

y teniendo en cuenta que (AB x W) * AB = 0, queda

$$(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) * AB = 0$$

$$\begin{cases}(AM\ x\ W) * AB = 0 \\ \mathrm{W} * \mathrm{AM} = \mathrm{W} * \mathrm{AP}\end{cases} < -- > \begin{cases}AM * (W\ x\ AB) = 0 \\ \mathrm{W} * (\mathrm{AM} - \mathrm{AP}) = 0\end{cases} \qquad (12)$$

La segunda podemos modificarla:

PM = PA + AM -- > PM = -AP + AM,

y por tanto W * PM = 0 , lo cual garantiza que el punto M, centro de la sección cónica está en el plano m.

Casuística:

a.- Si W x AB = 0, el vector W es proporcional con AB y el plano m es perpendicular al eje AB del cono. La sección es un círculo.

Entonces, de la relación (11) resulta $(AB * AC)^2.(AM\ x\ W) = 0$, y por tanto AM x W = 0, lo cual indica que AM = t.W , y entonces

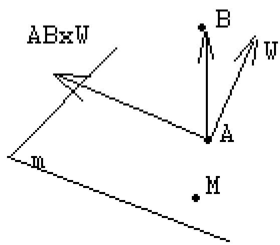
AM * W = t.(W * W) = t, (pues W es unitario)

El centro queda localizado así: AM = (AM * W).W

b.- Sea W x AB $\neq 0$ $(vector)$. De la primera del sistema (12)

$AM * (W\ x\ AB = 0$ -- > AM es ortogonal con W x AB, y por tanto AM yace sobre el plano generado por AB y W, es decir:

AM = t.AB + u.W



Lo llevamos a relación (11): Teniendo (t.AB + u.W) x W = t.(AB x W)

y AB * (t.AB + u.W) = t + u.(AB * W), con lo cual nos queda

$t.(AB * AC)^2.(AB\ x\ W) = (\mathrm{t} + \mathrm{u.(AB} * \mathrm{W}).(AB\ x\ W)$, de donde

$t.(AB * AC)^2 = \mathrm{t} + \mathrm{u.(AB} * \mathrm{W})$ -- >

$(1 – (AB * AC)^2).t + (AB * W).u = 0$

y en la segunda de (12): $\mathrm{W} * (\mathrm{t.AB} + \mathrm{u.W}) = \mathrm{W} * \mathrm{AP}$,

t.(W * AB) + u = W * AP Tengo así el sistema

$$\begin{cases} \left(1 - (\mathrm{AB} * \mathrm{AC})^2\right).\mathrm{t} + (\mathrm{AB} * \mathrm{W}).\mathrm{u} = 0 \\ \mathrm{t}.(\mathrm{W} * \mathrm{AB}) + \mathrm{u} = \mathrm{W} * \mathrm{AP} \end{cases} \tag{13}$$

Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 - (AB * AC)^2 & (AB * W) \\ (W * AB) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= [1 - (AB * AC)^2] - (AB * W)^2$$

Para t: $D_t = \begin{vmatrix} 0 & (AB * W) \\ W * AP & 1 \end{vmatrix} = -(AB * W).(W * AP)$

Para u: $D_u = \begin{vmatrix} 1 - (AB * AC)^2 & 0 \\ (W * AB) & W * AP \end{vmatrix} =$

$$= [1 - (AB * AC)^2].(W * AP)$$

Por tanto $t = \frac{(AB * W).(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}$, $u = \frac{[1-(AB * AC)^2].(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2}$

Finalmente: $AM = t.AB + u.W =$

$$= \frac{(AB * W).(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2} .AB + \frac{[1-(AB * AC)^2].(W * AP)}{[(AB*AC)^2-1]+(AB*W)^2} .W \tag{14}$$

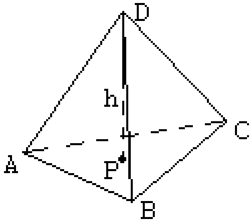
Def.: Centro de la sección cónica es el punto M, del plano secante, tal que toda recta del plano que pasa por M corta a la cónica en puntos P, Q a igual distancia de M. (M es el punto medio del segmento PQ).

NOTA: Para que tenga centro la cónica ha de ser curva cerrada. La Hipérbola cierra mediante dos puntos de la recta de puntos en el infinito. La parábola es abierta, no tiene centro.

Actividades:

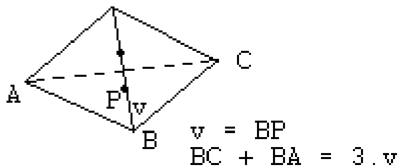
1.- Dado un tetraedro regular demostrar que su altura es perpendicular al plano al cual pertenece su pie.

Sol.- Elegimos la base de vectores {BC, BA, BD}, y llamo e1 = BC, e2 = BA, e3= BD. El punto P es el baricentro del triángulo base.



Demostraremos que PD*e1 = 0, y PD*e2 = 0, pues entonces PD será ortogonal al plano base.

Tengo BD = BP + PD, o bien e3 = v + PD, donde v = 1/3.(e1 + e2)



PD = e3 – v = e3 – 1/3.(e1 + e2)

e1*PD = e1*(e3 – 1/3.e1 -1/3.e2) = e1*e3 – 1/3.(e1*e1) – 1/3.(e1*e2) =

= /e1/./e3/.cos(60^o) – 1/3./e1/^{2} - 1/3./e1/./e2/.cos(60^o) =

= r^2.(1 -1/3).cos(60^o) – 1/3.r^2 = r^2.[(1 – 1/3).cos(60^o) – 1/3] =

(Sabiendo que cos(60^o) = $\frac{1}{2}$)

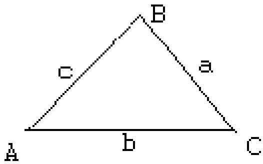
= r^2.[(1 – 1/3)/2 – 1/3] = 0 , ya que $\frac{2}{3}.\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$

Del mismo modo podemos probar que e2*PD = 0

Trigonometría Vectorial, en el Plano y en el Espacio

Teorema del Coseno:

Consideramos el triángulo ABC.



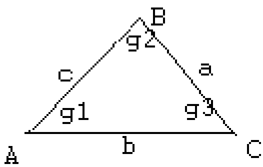
a^2 = BC*BC = (BA + AC)*(BA + AC) = (BA*BA + BA*AC) +

+ (AC*BA + AC*AC) = c^2 + 2.(BA*AC) + b^2 = b^2 + c^2 - 2.(AB*AC) =

= b^2 + c^2 - 2./AB/./AC/.cos(AB,AC) = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos(AB,AC)

Teorema de los Senos:

Sea el triángulo ABC. Hacemos el producto vectorial de AC con AB



AC x AB = AC x (AC + CB) = AC x AC + AC x CB = 0 – CA x CB =

= CA x CB

Por otro lado: AC x AB = (AB + BC) x AB = 0 + BC x AB =

= - BC x BA = BA x BC .   Por tanto

AC x AB = BA x BC = CA x CB . Aplicando la definición de product vectorial

b.c.sen(AC,AB) = c.a.sen(BA, BC) = b.a.sen(CA, CB) =

= 2.Área(ABC).   Dividiendo por a.b.c nos queda

$$\frac{sen(g1)}{a} = \frac{sen(g2)}{b} = \frac{sen(g3)}{c} = \frac{2.Área(ABC)}{a.b.c} \qquad (1)$$

Coseno y Seno de la diferencia de dos ángulos:

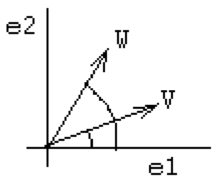
Consideramos la base ortonormal {e1, e2, e3}, y definido el operador "producto vectorial" mediante: e1 x e2 = e3, e2 x e3 = e1, e3 x e1 = e2

Sean dos vectores V, W sobre el plano definido por (e1, e2). Tenemos:

V = cos(e1,V).e1 + sen(e2,V).e2

W = cos(e1,W).e1 + sen(e2,W).e2

Hacemos el producto escalar V*W, y tenemos en cuenta que la base es ortonormal. Tengo



V*W = cos(e1,V).cos(e1,W) + sen(e2,V).sen(e2,W) ,

por lo tanto:

/V/./W/.cos(V,W) = cos(e1,V).cos(e1,W) + sen(e2,V).sen(e2,W)

Si tomamos V y W unitarios

cos(V,W) = cos(e1,V).cos(e1,W) + sen(e2,V).sen(e2,W)

pero: cos(V,W) = cos((e1,W) – (e1,V))

Conclusión: Llamando los ángulos A = (e1,W), B = (e1,V)

cos(A – B) = cos(A).cos(B) + sen(e2,V).sen(e2,W)

Para el seno tengo lo siguiente, haciendo el producto vectorial:

V x W =

= [cos(e1,V).e1 + sen(e2,V).e2] x [cos(e1,W).e1 + sen(e2,W).e2] =

= cos(e1,V).sen(e2,W) . e3 – sen(e2,V).cos(e1,W) . e3 =

= [cos(e1,V).sen(e2,W) – sen(e2,V).cos(e1,W)] . e3

Pero V x W = [/V/./W/. sen((e1,W) – (e1,V))] . e3 =

= sen((e1,W) – (e1,V)) . e3

ya que V y W son unitarios.

Conclusión: Llamando los ángulos A = (e1,W), B = (e1,V)

sen((e1,W) – (e1,V)) . e3 =

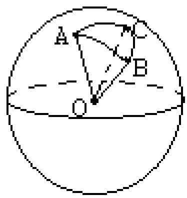
= [cos(e1,V).sen(e2,W) – sen(e2,V).cos(e1,W)] . e3 y por tanto

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}(A).\cos(B) - \operatorname{sen}(B).\cos(A) \qquad (2)$$

Trigonometría Esférica:

Sea una esfera de radio R, centro en O, y sobre su superficie dos puntos A, B, situados sobre la misma semiesfera. Los puntos O, A, B determinan un plano que divide la esfera en dos hemisferios. Otro punto C, no situado en el meridiano que pasa por A y B, estará en uno de los hemisferios. Estos tres puntos A, B y C determinan un **"triángulo esférico"** sobre el hemisferio al que pertenece el punto C (Viene determinado por los planos OAB, OAC, OBC). Lo designaremos por (O; ABC).

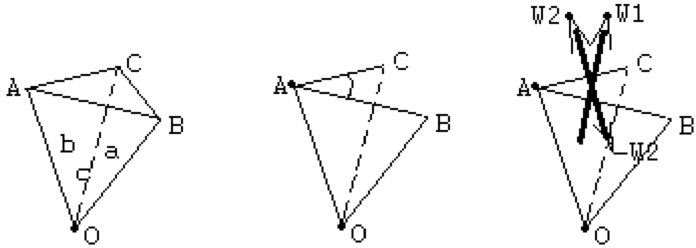
Sus lados son los arcos de meridiano: AB, AC, BC, siempre menores que una semicircunferencia (por estar situados A y B sobre la misma semiesfera).



Ángulos del triángulo (O; ABC) son los "ángulos diedros" que forman los planos que lo determinan. La medida de estos ángulos será siempre menor que 180^o (menor que un ángulo llano). Por A designamos el ángulo (diedro) que forman los planos con arista común OA, y de forma análoga los ángulos que designaremos por B y por C.

Consideramos los vectores OA, OB, OC, con módulo igual a R, y que podemos tomar como unidad de medida.

Llamamos: a = áng(OB,OC), b = áng(OA,OC), c = áng(OA,OB), y por otro lado A, B, C designarán los ángulos diedros con arista OA, OB, OC, respectivamente.



W1 = OA x OB, W2 = OA x OC , -W2 = OC x OA,

áng(W1,W2) = A

Tenemos ahora los siguientes resultados.

Primera fórmula de Bessel:

(OA x OB) * (OA x OC) = (Por la identidad de Lagrange) =

$$= \begin{vmatrix} OA * OA & OA * OC \\ OB * OA & OB * OC \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(b) \\ \cos(c) & \cos(a) \end{vmatrix} = \cos(a) - \cos(b).\cos(c)$$

Por otro lado, y suponiendo que R = 1 (R unidad de medida), y teniendo en cuenta que

OA x OB = sen(c), OC x OA = sen(b), W1* (-W2) = - cos(A)

tenemos

(OA x OB) * (OA x OC) = - (OA x OB) * (OC x OA) =

= - [sen(c) . sen(b)] . (-cos(A)) = sen(b).sen(c).cos(A)

Por tanto cos(a) – cos(b).cos(c) = sen(b).sen(c).cos(A) , o bien cos(b).cos(c) – cos(a) = - sen(b).sen(c).cos(A)

Conclusión: cos(b).cos(c) – cos(a) = - sen(b).sen(c).cos(A)

cos(a).cos(c) – cos(b) = - sen(a).sen(c).cos(B)

cos(a).cos(b) – cos(c) = - sen(a).sen(b).cos(C)

Segunda fórmula de Bessel:

(OA x OB) x (OA x OC) = (Por la relación de Gibbs) =

$$= \begin{vmatrix} OA * (OAxOC) & OA \\ OB * (OAxOC) & OB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & OA \\ Vol(OB, OA, OC) & OB \end{vmatrix} =$$

$= - Vol(OB, OA, OC)\,.\,OA\ \ (\,vector),$

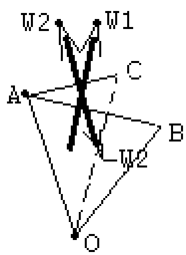
donde $Vol(OB, OA, OC)$ es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores OA, OB, OC . (Recuerda que $Vol(OB, OA, OC) =$ 6.Vol. del Tetraedro(OA,OB,OC))

Resumen

(OA x OB) x (OA x OC) = $- Vol(OB, OA, OC)\,.\,OA\ \ (\,vector)$ (1)

Veremos que (OA x OB) x (OA x OC) = sen(c).sen(b).sen(A). OA

Observando la figura llamaremos



W1 = OA x OB es ortogonal al plano OAB, y por tanto ortogonal a las direcciones OA y AB.

W2 = OA x OC es ortogonal al plano OAC, y por tanto ortogonal a las direcciones OA y AC.

Por tanto el vector W1 x W2 es paralelo a la dirección OA.

Además áng(W1,W2) = áng. diedro con arista OA, que designamos A,

y /OA/ = /OB/ = /OC/ = 1, /W1/ = sen(c), /W2/ = sen(b) , y por tanto

W1 x W2 = [sen(c) .sen(b). sen(A)] . OA

Igualando con la expresión (1) tenemos

sen(b). sen(c). sen(A) = $-Vol(OB, OC, OA)$ (2)

Del mismo modo obtendremos

sen(a). sen(c). sen(B) = $-Vol(OA, OB, OC)$

sen(a). sen(b). sen(C) = $-Vol(OC, OB, OA)$

y como el volumen toma el mismo valor en los tres casos, concluimos que

sen(b). sen(c). sen(A) =

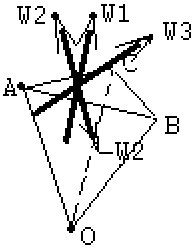
= sen(a). sen(c). sen(B) = sen(a). sen(b). sen(C)

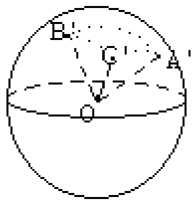
Dividiendo por sen(a).sen(b).sen(c) obtenemos

$$\frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{Sen(B)}{sen(b)} = \frac{sen(C)}{sen(c)} \qquad (3)$$

Interpretación del valor de la razón $\frac{sen(\boldsymbol{C})}{sen(\boldsymbol{C})}$:

Modificamos el significado de los vectores W1, W2, W3 definidos anteriormente de modo que, prolongándolos localicen los puntos A’, B’, C’ sobre la esfera. Así, siguen teniendo la misma dirección y orientación pero su módulo pasa a ser la unidad (= R).





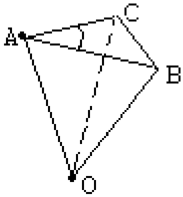
W1 = OA x OB es ortogonal al plano OAB, y por tanto ortogonal a las direcciones OA , OB

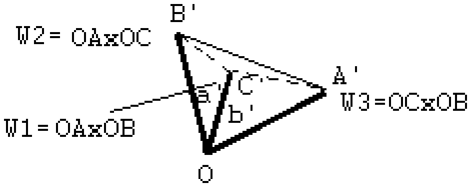
W2 = OA x OC es ortogonal al plano OAC, y por tanto ortogonal a las direcciones OA , OC.

El ángulo formado por W1 y W2 coincide con el ángulo diedro A, y además el vector W1 x W2 es paralelo a la dirección OA.

W3 = OC x OB ortogonal al plano OCB, y por tanto ortogonal a las direcciones OC , OB.

Por tanto el vector W1 x W3 es paralelo a la dirección OB, y el vector W2 x W3 es paralelo a la dirección OC. Además, áng(W1,W3) = B, áng(W2,W3) = C.





En las figuras observamos, y por lo dicho antes, que:

a’ = áng(W1,W2) = áng. diedro con arista OA, que designamos A

Del mismo modo podemos comprobar que

b’ = áng(W1,W3) = áng. diedro con arista OB, que designamos B

c’ = áng(W2,W3) = áng. diedro con arista OC, que designamos C

Teniendo en cuenta el resultado de la igualdad (2), que nos muestra

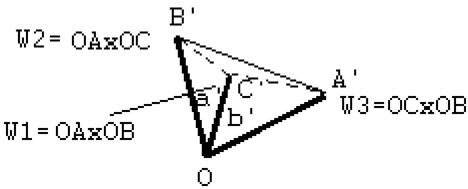
sen(b). sen(c). sen(A) = $-Vol(OB, OC, OA)$

ahora, para el paralelepípedo determinado por OA’, OB’, OC’

tenemos

- $Vol(OB', OC', OA') =$ sen(b’).sen(c’).sen(A’)

Veamos cómo es el ángulo diedro A’: Observa la figura



T1 = W1 x W3 es ortogonal al plano OA’C’ y también a OB

W2 x W3 es ortogonal al plano OA’B’ y también a OC

El ángulo diedro A’, formado por los dos planos citados, viene dado por el ángulo que forman sendos vectores ortogonales, es decir por W1 x W3 y W2 x W3. Pero este coincide con el ángulo formado por OB y OC, esto es el ángulo a.

Por tanto: - $Vol(OB', OC', OA')$ = sen(B).sen(C).sen(a)

Teníamos sen(b). sen(c). sen(A) = $-Vol(OB, OC, OA)$

Haciendo el cociente:

$$\frac{Vol(OB',OC',OA')}{Vol(OB,OC,OA)} = \frac{sen(a).sen(B).\ sen(C)}{sen(b).sen(c).\ sen(A)}$$

Modificamos el miembro derecha como sigue

$\frac{sen(A)}{sen(a)} = \frac{Sen(B)}{sen(b)}$ -- > sen(b).sen(A) = sen(a).sen(B) -- >

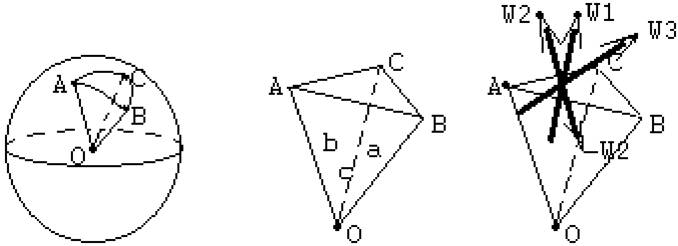
1 = $\frac{sen(a).sen(B)}{sen(b).sen(A)}$, lo cual permite $\frac{sen(C)}{sen(c)} = \frac{sen(a).sen(B)}{sen(b).sen(A)} . \frac{sen(C)}{sen(c)}$ =

= $\frac{sen(a).sen(B).\ sen(C)}{sen(b).sen(c).\ sen(A)}$, por lo cual

$$\frac{sen(C)}{sen(c)} = \frac{Vol(OB',OC',OA')}{Vol(OB,OC,OA)} \qquad (4)$$

Tercer Fórmula de Bessel:

Son válidas las figuras del apartado anterior.



Construimos el vector OD = OB x $\frac{OAxOB}{sen(c)}$.

Observa que $\frac{OAxOB}{sen(c)} = \frac{1}{sen(c)}.(OAxOB)$ es vector unitario.

Veamos cómo es realmente este nuevo vector OD.

Teniendo en cuenta la relación de Gibbs

$$OB \text{ x } \frac{OAxOB}{sen(c)} = \frac{1}{sen(c)}.OBx(OAxOB) = -\frac{1}{sen(c)}.(OAxOB)xOB =$$

$$= -\frac{1}{sen(c)}.\begin{vmatrix} OA*OB & OA \\ OB*OB & OB \end{vmatrix} = -\frac{1}{sen(c)}.\begin{vmatrix} sen(c) & OA \\ 1 & OB \end{vmatrix} =$$

$= -\frac{1}{sen(c)}.[cos(c).OB - OA]$, por tanto

$$OD = -\frac{1}{sen(c)}.[cos(c).OB - OA]$$

Hacemos ahora

(OA x OC) * (OD x OB) = (Aplicando la relación de Lagrange) =

$$= \begin{vmatrix} OA*OD & OA*OB \\ OC*OD & OC*OB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} OA*OD & \cos(c) \\ OC*OD & \cos(a) \end{vmatrix} = (*)$$

Cálculo de OA * OD = $-\frac{1}{sen(c)}\ .OA * [\ cos(c).OB - OA] =$

$$= -\frac{1}{sen(c)}\ .[\cos(c)\,.cos(c) - 1] = -\frac{1}{sen(c)}\ .[\cos^2(c) - 1] =$$

$$= -\frac{1}{sen(c)}\ .(-sen^2(c)) = sen(c)$$

$$(*) = \begin{vmatrix} sen(c) & \cos(c) \\ OC * OD & \cos(a) \end{vmatrix} = sen(c).\cos(a) - \cos(c)\,.OC * OD$$

Cálculo de OC * OD:

$$OC * OD = OC * [OB \text{ x } \frac{OAxOB}{sen(c)}] = \frac{1}{sen(c)}\ .OC * [OBx(OAxOB)] =$$

= (Por la relación de Lagrange) =

$$= \frac{1}{sen(c)}\ .(OCxOB) * (OAxOB) = \frac{1}{sen(c)}\ .OM * OT, \quad \text{donde}$$

/OM/ = sen(a), /OT/ = sen(c) . Veamos cómo es el ángulo formado por OM, OT. Razonamos así: OM es ortogonal a OC y OB y por tanto es ortogonal al plano OBC; OT es ortogonal a OA y OB y por tanto es ortogonal al plano OAB; esto nos dice que áng(OM,OT) = Ángulo diedro formado por estos planos citados, el ángulo B. Por tanto

$$OC * OD = \frac{1}{sen(c)}\ .OM * OT = \frac{1}{sen(c)}\ .sen(a).sen(c).\cos(B) =$$
$$= sen(a).\cos(B)$$

Por tanto: (OA x OC) * (OD x OB) =

$$= sen(c).\cos(a) - \cos(c)\,.sen(a).\cos(B) \qquad (5)$$

Calculamos (OA x OC)*(OD x OB) por otro camino.

En primer lugar OD x OB = - OB x OD =

$$= -OBx\,(-\frac{1}{sen(c)}\ .[cos(c).OB - OA]) =$$

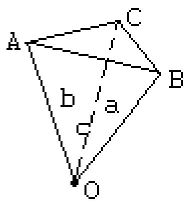
$= \frac{\cos(c)}{sen(c)} .(OBxOB) - \frac{1}{sen(c)}.OBxOA = \frac{1}{sen(c)}.OAxOB = \frac{1}{sen(c)}.OT$

donde OT = $OAxOB$, /OT/ = sen(c)

En segundo lugar sea OM = OA x OC, /OM/ = sen(b)

Por tanto (OA x OC)*(OD x OB) = $\frac{1}{sen(c)}.(OM * OT)$

Necesitamos el ángulo que forman OM y OT. Razonamos así: OM es ortogonal con OA y OC y por tanto es ortogonal al plano OAC. OT es ortogonal con OB y OA y por tanto es ortogonal al plano OAB.



Entonces el ángulo formado por OM y OT coincide con el ángulo formado por los dos planos OAC y OAB, es decir, coincide con el ángulo diédrico A.

Por tanto, finalmente: (OA x OC)*(OD x OB) = $\frac{1}{sen(c)} .(OM * OT)$ =

$= \frac{1}{sen(c)} .sen(b).sen(c).\cos(A) = sen(b).cos(A)$, esto es

$$(OA \times OC) * (OD \times OB) = sen(b).cos(A) \qquad (6)$$

Teníamos (véase (5))

(OA x OC) * (OD x OB) = $sen(c).\cos(a) - \cos(c).sen(a).\cos(B)$

Por tanto, finalmente:

$$sen(b).\cos(A) = sen(c).\cos(a) - \cos(c).sen(a).\cos(B) \qquad (7)$$

De la misma forma, por simetría de su constitución, se cumplirá

$$sen(c).\cos(A) = sen(b).\cos(a) - \cos(b)\,.sen(a).\cos(C)$$

$$sen(a).\cos(B) = sen(c).\cos(b) - \cos(c)\,.sen(b).\cos(A)$$
$$sen(c).\cos(B) = sen(a).\cos(b) - \cos(a)\,.sen(b).\cos(C)$$

$$sen(a).\cos(C) = sen(b).\cos(c) - \cos(b)\,.sen(c).\cos(A)$$
$$sen(b).\cos(C) = sen(a).\cos(c) - \cos(a)\,.sen(c).\cos(B)$$

NOTA: Veamos otra forma para el cálculo de OC * OD

OC * OD = $OC * [-\frac{1}{sen(c)}\,.[cos(c).OB - OA] =$

$$= -\frac{1}{sen(c)}\,.OC * [cos(c).OB - OA] =$$

$$= \frac{-\cos(c)}{sen(b)}.(OC * OB) + \frac{1}{sen(b)}\,.(OC * OA) = \frac{-\cos(c).\cos(a)}{\text{sen(b)}} + \frac{\cos(b)}{sen(b)} =$$

$$= \frac{\cos(b) - \cos(a).\cos(c)}{sen(b)}$$

Antes obtuvimos OC * OD = $\frac{1}{sen(c)}\,.sen(a).sen(c).\cos(B) =$

$= sen(a).\cos(B)$

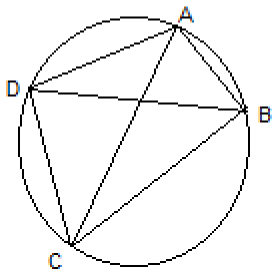
Por tanto $sen(a).\cos(B) = \frac{\cos(b) - \cos(a).\cos(c)}{sen(b)}$, o bien

$$sen(a).sen(b).\cos(B) = \cos(b) - \cos(a)\,.\cos(c)$$

V Algunos Teoremas

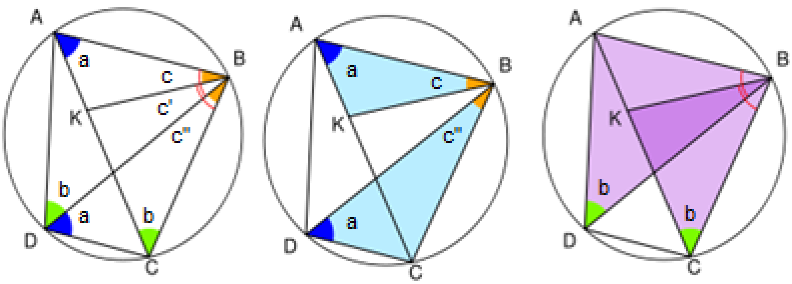
Teorema de Ptolomeo

Sea un cuadrilátero inscrito en un círculo. Se cumple: “Producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de cada lados por su opuesto”.



AC . BD = AD . BC + AB . DC

Demostración geométrica:



1. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico.
2. Note que en el segmento BC, ángulo inscritos ∠BAC = ∠BDC, y en AB, ∠ADB = ∠ACB.
3. Ahora, por ángulos comunes △ABK es semejante a △DBC, y △ABD ~ △KBC
4. Por lo tanto AK/AB = CD/BD, y CK/BC = DA/BD,

1. Por lo tanto AK·BD = AB·CD, y CK·BD = BC·DA;
2. Lo que implica AK·BD + CK·BD = AB·CD +BC·DA
3. Es decir, (AK+CK)·BD = AB·CD + BC·DA;
4. Pero AK+CK = AC, por lo tanto AC·BD = AB·CD + BC·DA; como se quería demostrar.

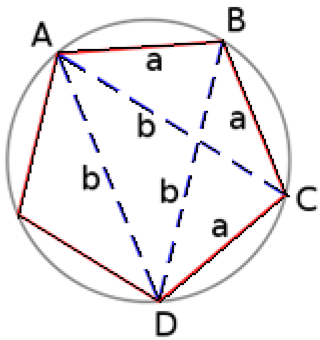
Note que la demostración es válida sólo para cuadriláteros concíclicos simples. Si el cuadrilátero es complejo entonces K se encontrará fuera del segmento AC, y por lo tanto AK – CK = ± AC, tal como se esperaba.

Existe una generalización de este teorema llamado el teorema de Casey, que involucra a cuatro circunferencias no secantes y tangentes interiores a una quinta.

El teorema de Ptolomeo se puede demostrar con métodos de inversión geométrica con respecto a cualquier vértice de un cuadrilátero.

NOTA: En la siguiente figura los colores son: a = rojo, b = azul

Ejemplo: Sea el pentágono inscrito en un círculo



La razón dorada se obtiene de la aplicación del teorema de Ptolomeo.

Considérese un pentágono regular y la circunferencia circunscrita al mismo. En el cuadrilátero ABCD las diagonales son iguales al lado AD. El teorema de Ptolomeo arroja en este caso,

$$b^2 = a.b + a^2$$

Dividiendo entre a^2 obtenemos $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}$

Denotando con k la razón b/a se obtiene $k^2 = 1 + k$, ecuación que coinicide con la definición de la "razón dorada".

Se obtiene $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

SOBRE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO

Estamos ya hartos de leer/escuchar que la cuadratura del círculo es algo imposible, que no se puede «cuadrar» un círculo, que es una construcción que no se puede realizar. Lo tenemos tan oído que hasta como frase ha pasado a formar parte de nuestro lenguaje habitual (la propia RAE recoge dentro de «cuadratura» que *la cuadratura del círculo* se usa *para indicar la imposibilidad de algo*).

Y así es. Como ya sabemos, Lindemann demostró que π es un número trascendente, hecho que implica que la cuadratura del círculo es una construcción imposible…¿Seguro? Sí, siempre que añadamos la coletilla *con regla y compás*, que en realidad significa *utilizando solamente una regla y un compás con las normas para construcciones marcadas en la antigua Grecia* (aquí tenéis esas condiciones y también algunas construcciones sencillas con regla y compás). Es decir, la cuadratura del círculo es imposible si como únicas herramientas tenemos una regla y un compás y solamente podemos utilizar las normas que se establecieron en la antigua Grecia. Bien, ¿y qué ocurre si no imponemos esa restricción? ¿Qué pasa con esta construcción si abrimos un poco el campo, si no somos tan restrictivos? Pues…

…que la cuadratura del círculo sí es posible. Y no me refiero a aproximaciones más o menos buenas, sino a la construcción exacta. Es decir:

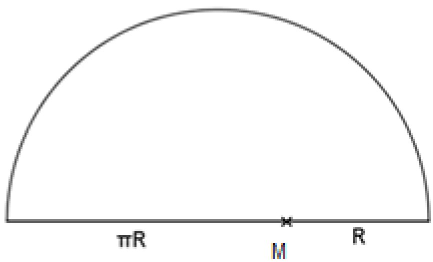
Si eliminamos la restricción de utilizar solamente regla y compás y las normas establecidas en la antigua Grecia, se puede realizar la cuadratura del círculo. Esto es, partiendo de un círculo de área A se puede construir un cuadrado de área A.

Vamos a ver cómo hacerlo.

Partimos de una círculo de radio R cuya área es S = πR^2. Sobre la superficie de un rodillo de radio R marcamos un punto P, y rodando sobre una superficie plana deja marcado un segmento L de longitud $L = 2.\pi.R$.

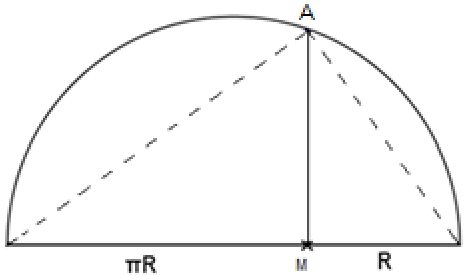
Marcamos el punto medio del segmento L, lo que podemos hacer con un compás, y obtengo el segmento L' de longitud L' = $\pi.R$.

Unimos este segmento L' con otro de longitud R, obteniendo un único segmento de longitud $\pi.R + R = (1+\pi).R$, que será el diámetro de un nuevo círculo.



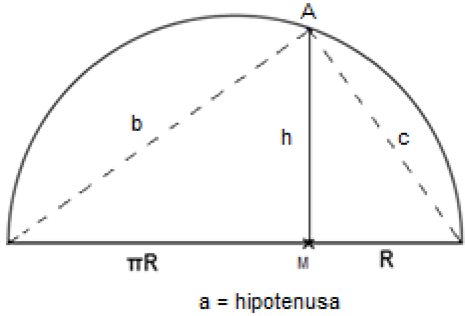
NOTA: Observa que la longitud del segmento πR no es racional, pero lo hemos obtenido marcando el punto medio de aquel y trasladándolo con el compás.

Por el punto M trazamos un segmento perpendicular al diámetro y lo prolongamos hasta que corte a la semicircunferencia.



Sabemos que el triángulo formado por las líneas de puntos y el diámetro es rectángulo, con ángulo recto en A.

Pretendemos ahora obtener el valor de h, o su relación con $\pi R \;\; y \;\; R$.



Un resultado importante cuando en geometría estudiamos el triángulo rectángulo es precisamente el teorema de la altura, que afirma la relación: $h^2 = \pi R \, . \, R = \pi R^2$.

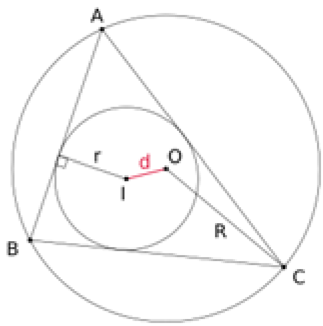
Para llegar a esta relación hemos aplicado el Teorema de Pitágoras teniendo en cuenta los tres triángulos rectángulos bien visibles.

El valor numérico de h, su longitud, es $R . \sqrt{\pi}$, que es un valor irracional. Pero hemos de fijarnos en su representación segmentaria y su traslado con el compás.

La relación $h^2 = \pi R^2$ demuestra que un cuadrado de lado h tiene área igual a la del círculo de partida. Si con la regla y compás construimos el referido cuadrado hemos probado que sí es posible la llamada "cuadratura del círculo con regla y compás".

Teorema geométrico de Euler

(En la figura los colores son: d = rojo, resto negro)



En geometría, el teorema de Euler establece que la distancia *d* entre el circuncentro y el incentro de un triángulo, cumple la relación siguiente:

$$d^2 = R.(R - 2r)$$

o de forma equivalente $\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$

donde *R* y *r* denotan los radios respectivos.

Del teorema se deduce la Desigualdad de Euler:

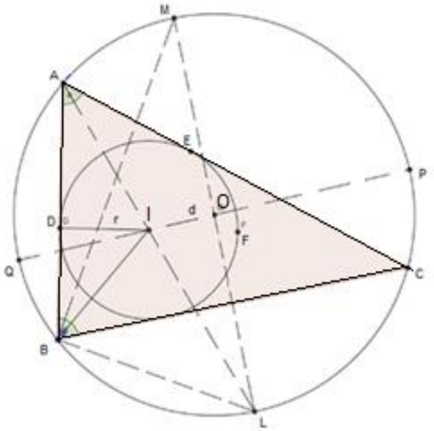
$$R \geq 2r$$

que se convierte en una igualdad solo en el caso del triángulo equilátero.

$$d^2 = R.(R - 2.r) \text{ -- > } d = \sqrt{R.(R-2r)}$$

Demostración del Teorema ….

Siendo *O* el circuncentro de triángulo *ABC*, e I su incentro, la extensión de *AI* cruza la circunferencia circunscrita en *L*. Entonces, *L* es el punto medio del arco *BC*. Se unen *LO* y se extiende hasta cruzar la circunferencia circunscrita en *M*. Se construye ahora una perpendicular a AB, desde I, siendo D su pie, así que $ID = r$. No es difícil de probar que el triángulo ADI es similar al triángulo MBL, así que $ID / BL = AI / ML$; y por lo tanto $ID \times ML = AI \times BL$. En consecuencia, $2Rr = AI \times BL$. Únase BI.



Debido a que

$$\angle BIL = \angle A / 2 + \angle ABC / 2,$$
$$\angle IBL = \angle ABC / 2 + \angle CBL = \angle ABC / 2 + \angle A / 2,$$

se tiene que $\angle BIL = \angle IBL$, y así $BL = IL$, y $AI \times IL = 2.R.r$.

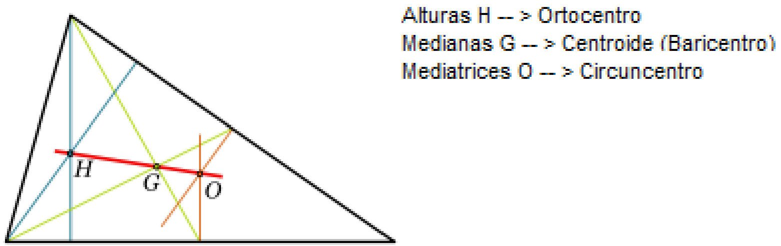
Extendiendo OI de modo que cruce la circunferencia circunscrita en P y Q; entonces $PI \times QI = AI \times IL = 2.R.r$, así que $(R + d).(R - d) = 2.R.r$, entonces $d^2 = R.(R - 2r)$.

NOTA: El teorema recibe su nombre en memoria de Leonhard Euler, quien lo publicó en 1767, aunque el mismo resultado ya había sido dado a conocer por William Chapple en 1746

La línea de Euler ó Recta de Euler

Euler demostró que en cualquier triángulo el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados. ...

En los triángulos equiláteros, estos cuatro puntos coinciden, pero en cualquier otro triángulo no lo hacen, y la recta de Euler está determinado por dos cualesquiera de ellos.



(Colores: Alturas = azul; Medianas = verdes; Mediatrices = marrón; Linea de Euler = rojo)

La recta de Euler de un triángulo es una recta en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo; incluye el punto de Exeter y al centro de la circunferencia de los nueve puntos notables de un triángulo escaleno. Se denomina así en honor al matemático suizo, Leonhard Euler, quien demostró la colinealidad de los mencionados puntos notables de un triángulo, en 1765.

Euler demostró que en cualquier triángulo el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados. Esta propiedad amplía su dominio de verdad para el centro de la circunferencia de los nueve puntos notables; que Euler no había demostrado para ese tiempo. En los triángulos equiláteros, estos cuatro puntos coinciden, pero en cualquier otro triángulo no lo hacen, y la recta de Euler está determinado por dos cualesquiera de ellos. El centro de la circunferencia de los nueve puntos notables se encuentra a mitad de camino a lo largo de la línea de Euler entre el ortocentro y el circuncentro, y la distancia desde el centroide del circuncentro es un medio que desde el baricentro hasta el ortocentro.

Otros puntos destacados que se encuentran en la recta de Euler son el punto de Longchamps, el punto Schiffler, el punto de Exeter y el punto far-out. Sin embargo, el incentro se encuentra en la recta de Euler solo para triángulos isósceles.

Ecuación de la recta de Euler

Sean A, B, C denotan los ángulos del vértice del triángulo de referencia, y sea x: y: z (será: (x, y, z)) un punto variable en coordenadas trilineales, a continuación, la ecuación de la recta de Euler es:

a) sen(2A).sen(B – C).x + sen(2B).sen(C – A).y +

+ sen(2C).sen(A – B).z = 0

Otra manera para representar la línea de Euler es en términos de un parámetro t. Comenzando con el circuncentro y el ortocentro:

b) sec(A):sec(B):sec(C) = cos(B).cos(C) : cos(C).cos(A) :

:cos(A).cos(B)

Debe ser: (sec(A), sec(B), sec(C)) =

= (cos(B).cos(C), cos(C).cos(A), cos(A).cos(B))

Cada punto en la línea de Euler, excepto el ortocentro, se describe como

c) cos(A) + t.cos(B).cos(C) : cos(B) + t.cos(C).cos(A) : cos(C) +

+ t.cos(A).cos(B)

para algunos *t*.

Debe ser: (x, y, z) =

= (cos(A) + t.cos(B).cos(C), cos(B) + t.cos(C).cos(A),
cos(C) + t.cos(A).cos(B))

Centroide (Baricentro = Centro de gravedad):

cos(A) + cos(B).cos(C) : cos(B) + cos(C.cos(A) : cos(C) + cos(A).cos(B)

Debe ser: (x, y, z) =
(cos(A) + cos(B).cos(C), cos(B) + cos(C.cos(A), cos(C) + cos(A).cos(B))

Centro de la circunferencia de los nueve puntos:
cos(A) + 2.cos(B).cos(C) : cos(B) + 2.cos(C).cos(A) : cos(C) + 2.cos(A).cos(B)

Debe ser: (x, y, z) = (cos(A) +2 cos(B).cos(C), cos(B) + 2cos(C.cos(A), cos(C) + 2cos(A).cos(B))

Punto de Longschamps:
cos(A) – cos(B).cos(C) : cos(B) – cos(C).cos(A) : cos(C) – cos(A).cos(B)

Debe ser: (x, y, z) =
(cos(A) - cos(B).cos(C), cos(B) - cos(C.cos(A), cos(C) - cos(A).cos(B))

Punto de Euler infinito:

cos(A) – 2.cos(B).cos(C) : cos(B) – 2.cos(C).cos(A) : cos(C) – 2.cos(A).cos(B)

Debe ser: (x, y, z) =
(cos(A) -2 cos(B).cos(C), cos(B) -2 cos(C.cos(A), cos(C) -2 cos(A).cos(B))

Demostración:

En un triángulo *ABC*, se determinan *D* como el punto medio del lado *BC* y *E* como el punto medio del lado *CA*.

Entonces *AD* y *BE* son *medianas* que se intersecan en el *baricentro G*.

Trazando las *perpendiculares* por *D* y *E* se localiza el circuncentro *O*.

A continuación se prolonga la recta *OG* (en dirección a *G*) hasta un punto *P*, de modo que *PG* tenga el doble de longitud de *GO* (figura 1).

Al ser *G* baricentro, divide a las medianas en razón 2:1; es decir: *AG = 2GD*. De este modo

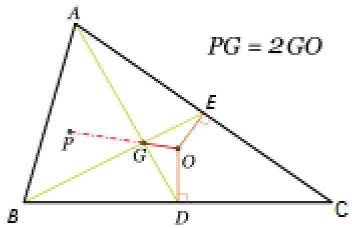
$$\frac{AG}{GD} = 2 = \frac{PG}{GO}$$

Por otro lado, los ángulos *AGP* y *DGO* son opuestos por el vértice y por tanto iguales. Estas dos observaciones permiten concluir que los triángulos *AGP* y *DGO* son *semejantes*.

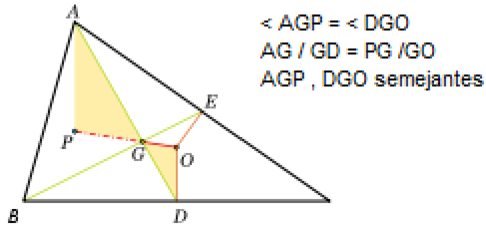
Pero de la semejanza se concluye que los ángulos *PAG* y *ODG* son iguales, y de este modo *AP* es paralela a *OD*.

Finalmente, dado que *OD* es perpendicular a *BC*, entonces *AP* también lo será; es decir, *AP* es la altura del triángulo.

(Colores: AD = verde, BE = verde, Resto rojo)

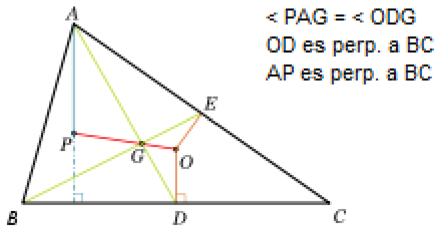


1. Se construye *PG* de modo que tenga el doble de longitud de *GO*.



1. Los triángulos *AGP* y *DGO* son semejantes.

   (Colores: Los ya dichos, y AP = azul)



3. Las rectas *DO* y *AP* son paralelas. Por tanto *AP* es la altura del triángulo.

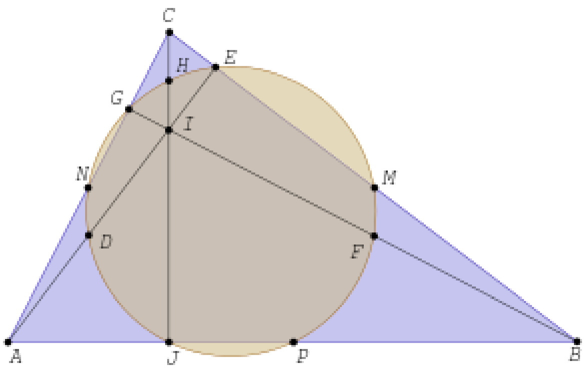
Un argumento similar prueba que los triángulos *BPG* y *EOG* son semejantes y por tanto *BP* también es la altura. Esto demuestra que *P* es el punto de intersección de las alturas y por tanto *P* = *H*; es decir, *P* es el ortocentro.

Circunferencia de los nueve puntos (o de Feuerbach)

En geometría, se conoce como circunferencia de los nueve puntos aquella que se puede construir con puntos vinculados a cualquier triángulo propuesto. Su nombre deriva del hecho que la circunferencia pasa por nueve puntos notables, seis de ellos sobre el mismo triángulo (salvo que el triángulo sea obtusángulo). Estos puntos son:

- los puntos medios de los tres lados del triángulo,
- los pies de las alturas del triángulo,
- los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo.

Generalmente, se adjudica al alemán Karl Wilhelm Feuerbach el descubrimiento de la circunferencia de los nueve puntos; sin embargo, lo que él descubrió fue la circunferencia de los seis puntos, reconociendo que sobre ella se encontraban los puntos medios de los lados de un triángulo y los pies de las alturas (en la figura, los puntos: M N P y E G J).

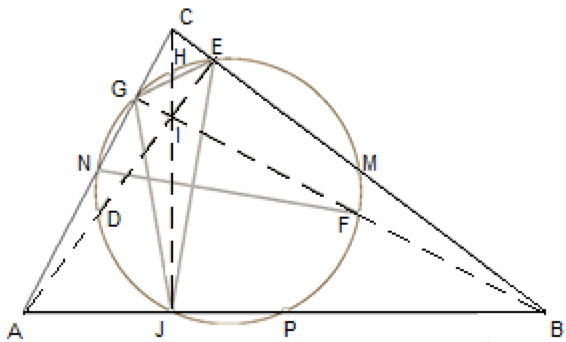


Anteriormente, Charles Brianchon y Jean -Victor Poncelet habían demostrado el mismo teorema. Poco tiempo después de Feuerbach, el matemático Olry Terquem también demostró la existencia del círculo y reconoció además que los puntos medios de los segmentos determinados por los vértices del triángulo y el ortocentro, también estaban contenidos en la circunferencia (en la figura, los puntos: D, F, H).

Teorema:

Dado un triángulo, hay una circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos que bisecan los segmentos que unen sus vértices con el ortocentro.

Demostración:



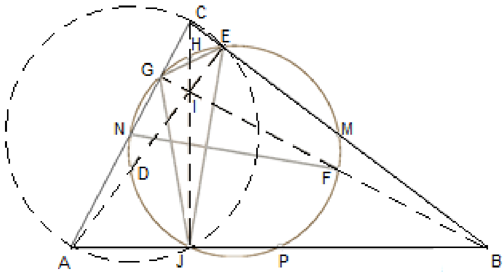
Sean los segmentos AE, BG y CJ las alturas del triángulo ABC e I su ortocentro (véase la figura).

Las alturas del triángulo ABC son las bisectrices de los ángulos internos del triángulo EGJ.

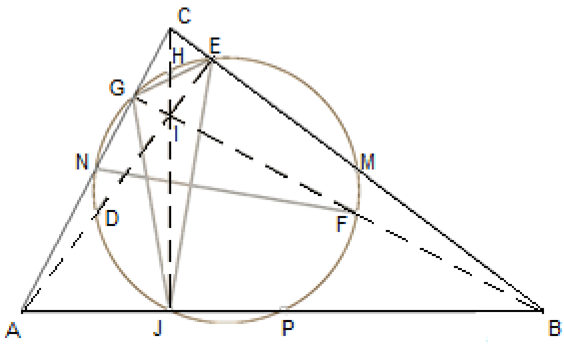
Las bisectrices (Mi nota: GI, GC, que son ortogonales entre sí) del ángulo EGJ cortan a la mediatriz (Mi nota: NF) del lado opuesto, EJ, en los puntos F y N que se hallan sobre la circunferencia circunscrita al triángulo EGJ.

Observemos que los triángulos ACJ y ACE son triángulos rectángulos teniendo ambos al lado AC como hipotenusa y diámetro de la circunferencia en la que se inscriben los cuatro puntos A, C, E y J.

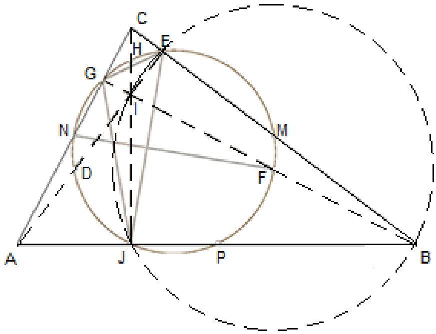
El centro N de esta circunferencia se halla sobre la intersección del diámetro AC con la mediatriz del segmento EJ.



Por otro lado



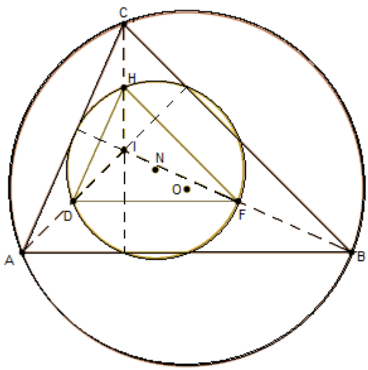
igualmente los triángulos EIB y JIB son triángulos rectángulos compartiendo el segmento IB como hipotenusa y diámetro de la circunferencia en la que se inscriben los puntos E, I, J y B. El centro F de la circunferencia que los contiene se halla sobre la intersección de la hipotenusa IB con la mediatriz del segmento EJ.



De igual modo, se demuestra que los puntos M y P son los puntos medios de los lados BC y AB respectivamente. De forma análoga, se demuestra que los puntos D y H son puntos medios de los segmentos AI y CI respectivamente.

Otras Propiedades:

A) Circunferencia circunscrita al triángulo y la de Feuerbach



Por la observación de que los puntos D, F y H satisfacen

IA = 2.ID , IB = 2.IF, IC = 2.IH

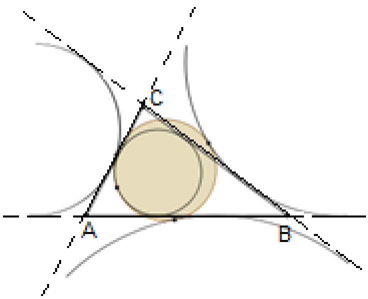
se deduce que:

- la circunferencia de Feuerbach de un triángulo es homotética a la circunferencia circunscrita,
- el centro de homotecia es el ortocentro del triángulo,
- la razón de la homotecia es 2.

El triángulo formado por los puntos D, F y H es semejante al triángulo ABC. También se observa que el centro de la circunferencia de Feuerbach N, es punto medio del segmento IO, donde O es el circuncentro del triángulo ABC.

Finalmente, el centro de la circunferencia de Feuerbach se halla sobre la recta de Euler del triángulo.

B) Circunferencias tangentes a la circunferencia de Feuerbach

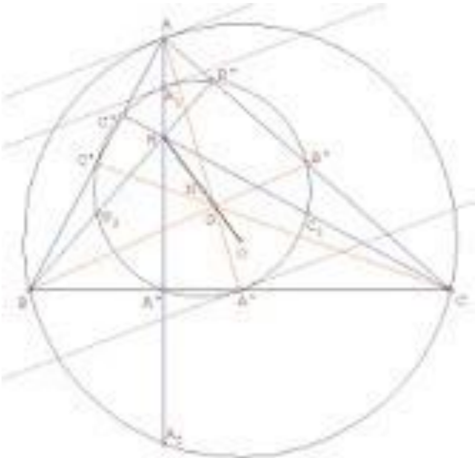


En 1822, Karl Feuerbach descubrió una de las propiedades más profundas sobre la circunferencia que lleva su nombre: La circunferencia de los nueve puntos es tangente exterior a los círculos exinscritos al triángulo. La circunferencia inscrita al triángulo es tangente interior a la circunferencia de Feuerbach.

La demostración de este hecho puede hacerse, observando que los puntos de tangencia de dos de las circunferencias exinscritas a uno de los lados del triángulo equidistan del punto medio de dicho lado.

Usando la inversión respecto de este punto medio se le puede dar el toque final a la demostración.

C) A qué viene esta figura?, No lo sé! Puede interesar su estudio



Onomástica

Poncelet la llamó *circunferencia de los nueve puntos*, denominación generalmente usada en los países de habla inglesa. Algunos geómetras franceses la llaman *círculo de Euler* (o *circunferencia de Euler*) y los geómetras teutones la denominan *circunferencia de Feuerbach*, y en México, *circunferencia de los nueve puntos*.

Charles Wexler lo presenta como un teorema notable de geometría moderna e indica sus propiedades. Pero en la obra de Shively, en la primera edición en castellano, en Latinoamérica, ya se conocía con el nombre de la "circunferencia de los nueve puntos"

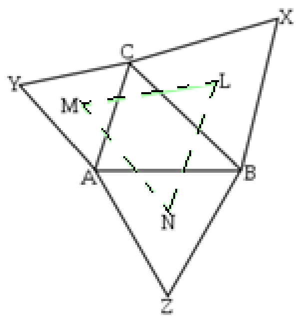
Teorema del triángulo de Napoleón

Tenemos un triángulo cualquiera ABC. Sobre cada lado construimos un triángulo equilátero. Unimos los baricentros (centros de gravedad) de estos tres triángulos y obtenemos un nuevo triángulo MNL. Afirmamos que este triángulo MNL es equilátero.

Dem.:

Dicho esto, si hacemos el giro de 30º con centro en C los puntos L cae sobre CX, mientras que M cae sobre CA. Si a continuación aplicamos la homotecia multiplicando por $\sqrt{3}$, entonces L coincide con X, y M con A. Tenemos así el lado de un triángulo de lado AX.

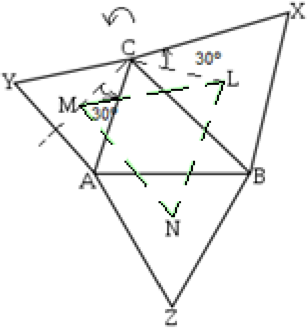
Tenemos la situación de la figura (1)



(1)

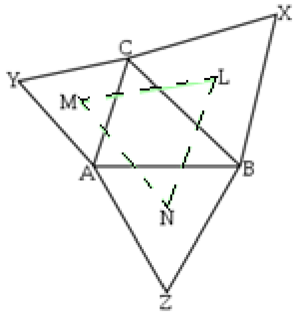
Observa la figura (2):

Aplico al triángulo *MCL* una rotación (contra agujas del reloj) de 30° centrada en *C*, y a continuación aplico una una homotecia de razón $\sqrt{3}$. Al final los puntos *M* y *L* coinciden con *A* y X por lo que el segmento *AX* es igual a $\sqrt{3}$ por segmento *ML:* $|AX| = \sqrt{3} \, .|M|$.



(2)

Por otro lado, observa que mediante un giro de 60º , aplicado a YCB y con centro en C, hacemos coincidir los triángulos *YCB* y *ACX*, y por tanto los segmentos *AX* y *YB* son iguales.

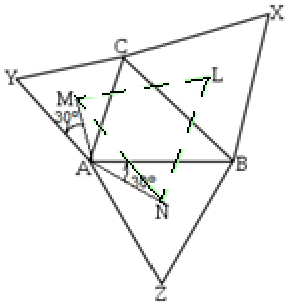


(1)

Observa la figura (3):

Aplico el mismo razonamiento al triángulo MAN, tomando como centro de rotación el punto A. Obtengo que $|BY| = \sqrt{3}\,.\,|MN|$

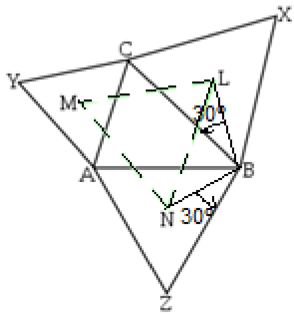
Por otro lado, mediante un giro de 60º , aplicado a YAB y con centro en A, hacemos coincidir los triángulos *YAB* y *CAZ*, y por tanto los segmentos CZ y *YB* son iguales.



(3)

Observa la figura (4)

Haciendo lo mismo con el triángulo NBL, con centro en B, obtenemos que |CZ| = $\sqrt{3}$. |NL|



(4)

Por tanto tenemos las siguientes relaciones:

|CZ| = |BY| = |AX|, y por tanto

$\sqrt{3}$. |NL| = $\sqrt{3}$. |MN| = $\sqrt{3}$.|*ML*| , *de donde*

|NL| = |MN| = |*ML*|, *y por tanto es el triángulo MNL es equilátero.*

El Problema de Napoleón (División del círculo en cuatro partes)

El problema de Napoleón es un famoso problema de construcción con sólo compás en geometría euclídea.

Fue su amigo, el matemático Lorenzo Mascheroni, quien introdujo la limitación de usar solo el compás y lo expuso en 1802 en su libro "*La geométrie du compas*".

Enunciado:

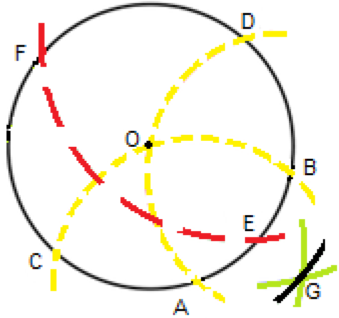
Dado un círculo con radio R y su centro O, se trata de dividir el círculo en cuatro arcos iguales empleando solo un compás, o lo que es lo mismo, hallar los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia dada.

Proceso: Pincho en A y trazo arco con radio R, obtengo los puntos B, C. A continuación pincho en B y trazo arco con radio R, obtengo el nuevo punto D. Con centro en C trazo arco con radio CB, y con centro en D trazo arco con radio DA. Obtengo el punto G.

(Si pudiéramos utilizar la regla uniendo los puntos OG nos daría el punto medio E del arco AB, y el arco DE sería el primero de los cuatro arcos deseados).

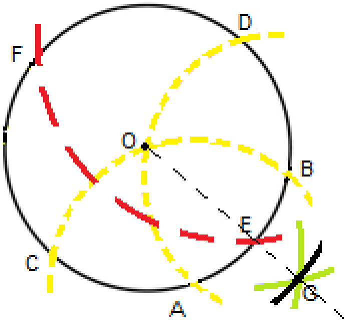
Para evitar el uso de la regla este punto E lo obtenemos trazando un arco con centro en D y radio OG. Este arco nos da los puntos E y F.

NOTA: En las figuras los colores son: (d) = naranja, (e) = amarillo, en las dos figuras los mismos colores.



Debemos confirmar que el arco con centro en D y radio OG pasa por el mismo punto E, punto medio del arco AB.

Hecho el trazado con regla parece que así es



Conclusión:

Prescindiendo de la regla podemos conseguirlo utilizando solo el compás.

NOTA: Todavía cabe preguntarse. ¿Este hallazgo habrá sido coincidencia?. Sería interesante demostrar que el punto E, obtenido mediante el arco de referencia coincide con el punto medio del arco AB.

VI Otros de especial interés

De Programación Lineal

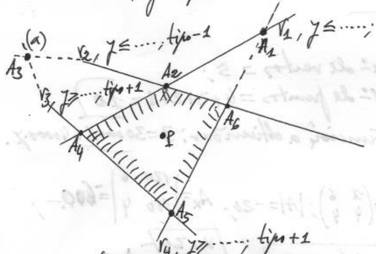
De Cónicas

Actividades y Añoranzas, secundaria

Actividades y Añoranzas, Bachiller y Ciclos de F.P.

Programación Lineal

Criterio para determinar si un punto (y un punto intersección de dos rectas) es, o no, un vértice de la región factible: (primero lo mostramos mediante ejemplos concretos, y después obtenemos el criterio como una consecuencia).



$n =$ nº de rectas $= 4$.
Al cortarse dos a dos obtenemos
$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$
$3+2+1=6$

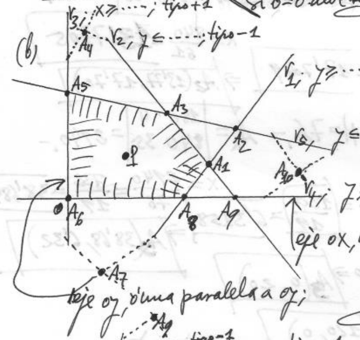
Para un punto P interior en el recinto factible se cumple: $dist(P,r_i)\cdot tipo(i) > 0$

Esto se cumple también para los vértices, es decir:
$dist(A_j,r_i)\cdot tipo(i) \ge 0$, $j=1,\dots,6$ (A_j vértice), $i=1,\dots,4$;

En cambio si A_j no es vértice del recinto factible, como ocurre con A_1 y A_3, se cumple:
$dist(A_j,r_i)\cdot tipo(i) < 0$, para algún valor de i.

NOTA: Coef. de y siempre > 0

NOTA: Al calcular la distancia la ecuación debe ser $ax+b\cdot y+c=0$, con $b \ge 0$. Si $b=0$ debe ser $a>0$.



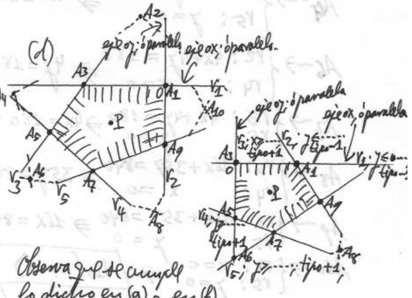
$n=5$; nº puntos de corte: $4+3+2+1=10$

El punto P cumple, como en caso anterior: $dist(P,r_i)\cdot tipo(i) > 0$, $\forall i$

Los vértices del recinto factible cumplen:
$dist(A_j,r_i)\cdot tipo(i) \ge 0$, $\forall i$, fijado j.

Para los A_j que no son vértices del recinto factible existe alguna recta r_i tal que $dist(A_j,r_i)\cdot tipo(i) < 0$.

$n=5$; nº puntos de corte: $4+3+2+1=10$;
Observa que se cumple lo mismo que en los casos anteriores.



Observa que se cumple lo dicho en (a) y en (b).

-1-bis

En consecuencia, el criterio que se deduce (hasta que demuestre su falsedad) es (y que aplicaremos): $dist(A_j, r_i) \cdot tipo(r_i) \geq 0$ ($\forall i$, fijado j) $\Rightarrow A_j$ es un vértice.

o equivalentemente "si existe una recta r_i tal que $dist(A_j, r_i) \cdot tipo(i) < 0$, entonces el vértice A_j es exterior al recinto factible, y no es vértice".

Ejemplo

$$\begin{cases} x + 6y \leq 120 \leftarrow r1 \\ 4x + 4y \leq 180 \leftarrow r2 \\ 16x + 35y \leq 840 \leftarrow r3 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \leftarrow r4; r5. \end{cases}$$

nº de rectas = 5;

Nº de puntos = 4+3+2+1 = $\boxed{10}$

Función a optimizar: $Z = 30000x + 40000y$.

Corte de rectas dos a dos:

$A1 \rightarrow \begin{cases} r1: x+6y = 120 \\ r2: 4x+4y = 180; \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; $|A| = -20$. $A_x = \begin{vmatrix} 120 & 6 \\ 180 & 4 \end{vmatrix} = -600$; $\boxed{x = 30}$;

$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 4 & 180 \end{vmatrix} = -300$; $y = \frac{30}{2} = \boxed{15} \Rightarrow \boxed{A_1(30, 15)}$.

$A2 \rightarrow \begin{cases} r1: x+6y = 120 \\ r3: 16x+35y = 840; \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 16 & 35 \end{pmatrix}$; $|A| = -61$. $A_x = \begin{vmatrix} 120 & 6 \\ 840 & 35 \end{vmatrix} = -840$; $\boxed{x = \frac{840}{61} = 13'7705}$

$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 16 & 840 \end{vmatrix} = -1080$; $y = \frac{1080}{61} = \boxed{17'7049} \Rightarrow \boxed{A_2(13'77, 17'70)}$

$A5 \rightarrow \begin{cases} r2: 4x+4y = 180 \\ r3: 16x+35y = 840; \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 35 \end{pmatrix}$; $|A| = 76$. $A_x = \begin{vmatrix} 180 & 4 \\ 840 & 35 \end{vmatrix} = 2940$. $x = \frac{2940}{76} = \frac{735}{19} = \boxed{38'6842}$

$A_y = \begin{vmatrix} 4 & 180 \\ 16 & 840 \end{vmatrix} = 480$. $y = \frac{480}{76} = \boxed{\frac{120}{19}} = \boxed{6'3158} \Rightarrow \boxed{A_5(38'68, 6'32)}$

$A3 \rightarrow \begin{cases} r1: x+6y = 120 \\ r4: x = 0 \end{cases} \Rightarrow 6y = 120 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow \boxed{A_3(0, 20)}$

$A4 \rightarrow \begin{cases} r1: x+6y = 120 \\ r5: y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 120 \Rightarrow \boxed{A_4(120, 0)}$

Bien

$A6 \rightarrow \begin{cases} r2: 4x+4y = 180 \\ r4: x = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y = 180 \Rightarrow y = 45 \Rightarrow \boxed{A_6(0, 45)}$

$A7 \rightarrow \begin{cases} r2: 4x+4y = 180 \\ r5: y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x = 180 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow \boxed{A_7(45, 0)}$

$A8 \rightarrow \begin{cases} r3: 16x+35y = 840 \\ r4: x = 0 \end{cases} \Rightarrow 35y = 840 \Rightarrow y = \frac{168}{7} = 24 \Rightarrow \boxed{A_8(0, 24)}$

$A9 \rightarrow \begin{cases} r3: 16x+35y = 840 \\ r5: y = 0 \end{cases} \Rightarrow 16x = 840 \Rightarrow x = 52'500 \Rightarrow \boxed{A_9(52'5, 0)}$;

$A10 \rightarrow \begin{cases} r4: x = 0 \\ r5: y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_{10}(0, 0)}$

Contin →.

Vértices del Recinto factible: Tipos de las rectas: $r_1 \to$ tipo $= -1$, $r_3 \to$ tipo $= -1$, $r_2 \to$ tipo $= -1$, $r_4 \to$ tipo $= +1$; $r_5 \to$ tipo $= +1$.

Defino $D(A_j, r_i) = \text{dist}(A_j, r_i) \cdot \text{tipo}(r_i)$;

$A_1(30,15) \to \text{dist}(A_1,r_1) = 0$; $\text{dist}(A_1,r_2) = 0$; $\text{dist}(A_1,r_3) = \dfrac{(16\cdot 30+35\cdot 15-840)}{\sqrt{16^2+35^2}} =$

$= \dfrac{165}{\sqrt{\,''\,}} > 0 \Rightarrow \text{dist}(A_1,r_3)\cdot \text{Tipo}(r_3) < 0 \Rightarrow$ A_1 no es vértice.

$A_2(13'77^{05}, 17'70^{49}) \to D(A_2,r_1) = 0$; $D(A_2,r_2) = 0$; $D(A_2,r_3) = \dfrac{(16\cdot 13'77^{05}+35\cdot 17'70^{49}-840)\cdot(-1)}{\sqrt{16^2+35^2}}$

$= \dfrac{(0'0005)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} \geq 0$; $D(A_2,r_4) = \dfrac{(13'77)}{\sqrt{1}}\cdot(+1) > 0$;

$D(A_2,r_5) = \dfrac{(17'70)\cdot(1)}{\sqrt{1}} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{A_2 \text{ sí es vértice.}}$

$A_3(0,20) \to D(A_3,r_1) = 0$; $D(A_3,r_2) = \dfrac{(4\cdot 20-180)\cdot(-1)}{\sqrt{16+16}} \geq 0$;

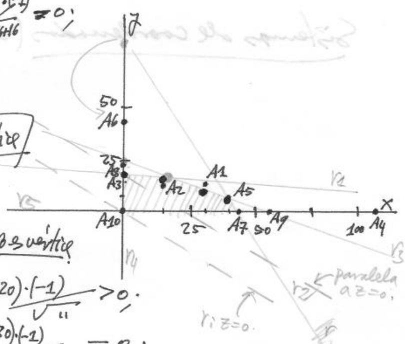
$D(A_3,r_3) = \dfrac{(16\cdot 0+35\cdot 20-840)\cdot(-1)}{\sqrt{16^2+35^2}} > 0$;

$D(A_3,r_4) = 0$;

$D(A_3,r_5) = \dfrac{(20)\cdot(+1)}{\sqrt{1}} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{A_3 \text{ sí es vértice}}$

$A_4(120,0) \to D(A_4,r_1) = 0$;

$D(A_4,r_2) = \dfrac{(4\cdot 120-180)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} < 0 \Rightarrow$ No es vértice



$A_5(38'68^{42}, 6'31^{58}) \to D(A_5,r_1) = \dfrac{(38'68+6\cdot 6'32-120)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$.

$D(A_5,r_2) = \dfrac{(4\cdot 38'68+4\cdot 6'32-180)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} = 0$;

$D(A_5,r_3) = \dfrac{(16\cdot 38'68^{42}+35\cdot 6'31^{58}-840)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} = 0$; $D(A_5,r_4) = \dfrac{(38'68)\cdot(+1)}{\sqrt{1}} > 0$.

$D(A_5,r_5) = \dfrac{(6'32)\cdot(+1)}{\sqrt{1}} > 0 \Rightarrow$ $\boxed{A_5 \text{ sí es vértice}}$

$A_6(0,45) \to D(A_6,r_1) = \dfrac{(6\cdot 45-120)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} < 0 \Rightarrow$ A_6 no es vértice.

$A_7(45,0) \to D(A_7,r_1) = \dfrac{(45-120)(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$; $D(A_7,r_2) = 0$; $D(A_7,r_3) = \dfrac{(16\cdot 45-840)(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$.

$D(A_7,r_4) = \dfrac{(45)\cdot(+1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$; $D(A_7,r_5) = 0$; $\Rightarrow$ $\boxed{A_7 \text{ sí es vértice}}$.

$A_8(0,24) \to D(A_8,r_1) = \dfrac{(6\cdot 24-120)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} < 0 \Rightarrow$ A_8 no es vértice.

$A_9(52'5,0) \to D(A_9,r_1) = \dfrac{(52'5)(-1)}{\sqrt{\,''\,}} < 0 \Rightarrow$ A_9 no es vértice.

$A_{10}(0,0) \to D(A_{10},r_1) = \dfrac{(-120)\cdot(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$; $D(A_{10},r_2) = \dfrac{(-180)(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$; $D(A_{10},r_3) = \dfrac{(-840)(-1)}{\sqrt{\,''\,}} > 0$.

$D(A_{10},r_4) = 0$; $D(A_{10},r_5) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{A_{10} \text{ sí es vértice}}$.

Resumen: Son vértices los puntos A_2, A_3, A_5, A_7 y A_{10}.

Continúa →

-2 bis

Punto óptimo: Valor, en cada punto, de la función $Z = 30000x + 40000y$.

En $A_2(13'77, 17'70) \rightarrow Z = 30000 \cdot 13'77 + 40000 \cdot 17'70 = \cancel{21.894.900} \; 1.121.100.-$

$A_3(0,20) \longrightarrow Z = 40000 \cdot 20 = 800.000.-$

$A_5(38'68, 6'32) \rightarrow Z = 30000 \cdot 38'68 + 40000 \cdot 6'32 = 1.413.200.-$

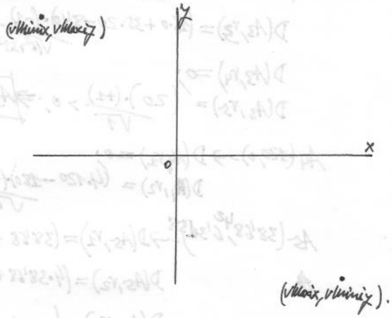
$A_7(45,0) \longrightarrow Z = 30000 \cdot 45 = 1.350.000.-$

$A_{10}(0,0) \longrightarrow Z = 0;$

punto óptimo/máximo valor: A_2, $\rightarrow \boxed{x = 13'77;\ y = 17'70}$

" /mínimo valor: A_{10};

Sistemas de coordenadas (en pantalla ordenador).

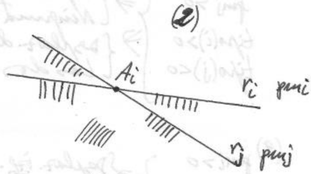


-3-

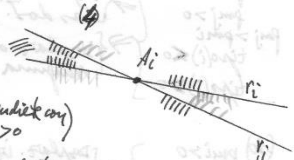
Trama interior al recinto factible.

pmi, pmj son sus pendientes.

(2) pmi<0
pmj<0
abs(pmj)>abs(pmi)
tipo(i)<0
tipo(j)<0
⇒ {Desplazamiento izq. r_i es la adecuada.
⇒ {Desplazam. der. r_j es la adecuada.

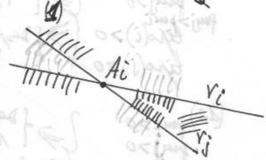


(4) pmi<0
pmj<0
abs(pmj)>abs(pmi)
tipo(i)>0
tipo(j)<0
⇒ {Desplazamiento izq. r_i y r_j son adecuadas (menor pendiente con tipo()>0)
⇒ {Desplazamiento derech. Ninguna de las dos (menor pendiente con tipo()>0)

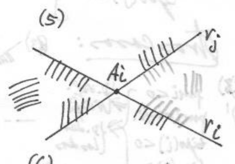


(3) pmi<0
pmj<0
abs(pmj)>abs(pmi)
tipo(i)>0
tipo(j)>0
⇒ {Desplazamiento izq. r_j es la adecuada.
⇒ {Desplazamiento der. r_i es la adecuada.

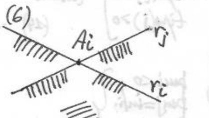
(1) pmi<0
pmj<0
abs(pmj)>abs(pmi)
tipo(i)<0
tipo(j)>0
⇒ {Desplazamiento izq. Ninguna (menor pendiente con tipo()<0)
⇒ {Desplazam. der. Las dos. (menor pendiente con tipo()<0)



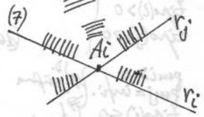
(5) pmi<0
pmj>0
tipo(i)<0
tipo(j)>0
⇒ {Desplaz. izq. Las dos
⇒ {Desplaz. der. Ninguna.



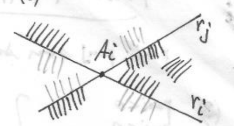
(6) pmi<0
pmj>0
tipo(i)<0
tipo(j)<0
⇒ {Desplaz. izq. r_j
⇒ {Desplaz. der. r_i



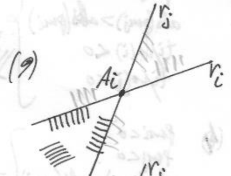
(7) pmi<0
pmj>0
tipo(i)>0
tipo(j)>0
⇒ {Desplaz. izq. r_i
⇒ {Desplaz. der. r_j



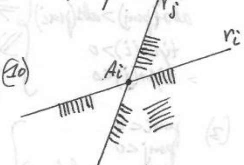
(8) $pmi < 0$
$pmj > 0$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) < 0$
⇒ { Desplaz. izq. / Ninguna.
⇒ { Desplaz. der. / Las dos.



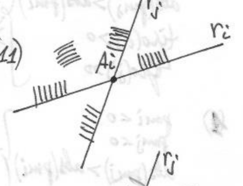
(9) $pmi > 0$
$pmj > 0$
$pmj > pmi$
$tipo(i) < 0$
$tipo(j) > 0$.
⇒ { Desplaz. izq. / Las dos.
⇒ { Desplaz. der. / Ninguna.



(10) $pmi > 0$
$pmj > 0$
$pmj > pmi$
$tipo(i) < 0$
$tipo(j) < 0$
⇒ { Desplaz. izq. / r_j
⇒ { Desplaz. der. / r_i

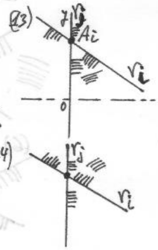


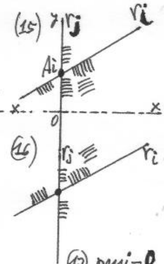
(11) $pmi > 0$
$pmj > 0$
$pmj > pmi$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) > 0$
⇒ { Desplaz. izq. / r_i
⇒ { Desplaz. der. / r_j

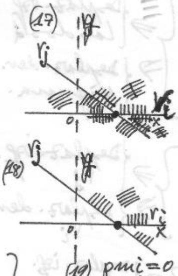


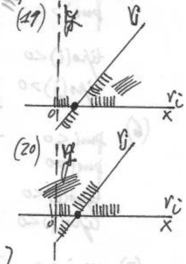
(12) $pmi > 0$
$pmj > 0$
$pmj > pmi$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) < 0$
⇒ { Desplaz. izq. / Ninguna.
⇒ { Desplaz. der. / Las dos.

Otros casos:









(13) (1)' $pmi < 0$
$pmj = infi.$
$tipo(i) < 0$
$tipo(j) > 0$
⇒ { D. izq. / Ning.
⇒ { D. der. / Las dos

(3)' (14) $pmi < 0$
$pmj = infi.$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) > 0$

(15) (12)' $pmi > 0$
$pmj = infi.$
$tipo(i) < 0$
$tipo(j) > 0$
⇒ { D. / Ninguna
⇒ { Las dos.

(16) $pmi > 0$
$pmj = infi.$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) > 0$
⇒ { D. / Ning.
⇒ { Las dos

(17) $pmi = 0$
$pmj < 0$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) < 0$

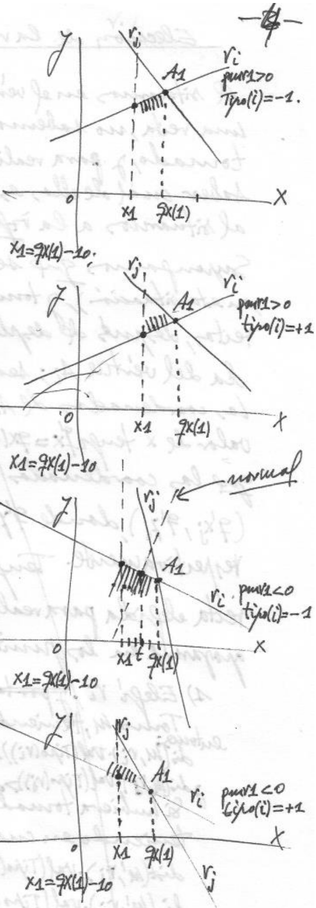
(18) $pmi = 0$
$pmj < 0$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) > 0$

(19) $pmi = 0$
$pmj > 0$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) < 0$

(20) $pmi = 0$
$pmj > 0$
$tipo(i) > 0$
$tipo(j) > 0$.

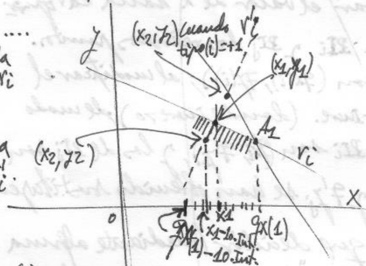
<u>TRAMAS</u>

<u>Casuística</u>: Observando los gráficos se puede afirmar lo siguiente: Una vez determinada la recta (r_i ó r_j) que debemos tomar, para decidir en qué sentido debemos trazar (ó) es suficiente tener en cuenta el signo del tipo(i).



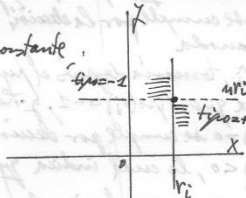
x_1 = (gx(1) − 10) + ····
y_1 = obtenido de la ecuación de r_i

$x_2 = x_1 - 10 \cdot$ Inten.
y_2 = obtenido de la ecuación de r'_i.

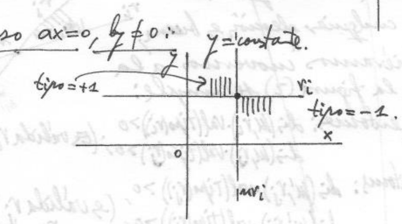


Cuando tipo(i)=+1,
se tomará $x_2 = x_1 + 10 \cdot$ Inten,
con esta variación es suficiente
para obtener el (x_2, y_2) deseado.

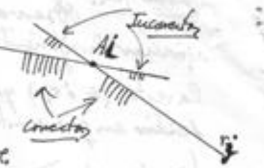
<u>caso $b_y = 0$, $a_x \neq 0$</u> : x = constante.



<u>Caso $a_x = 0$, $b_y \neq 0$</u>: y = constante.



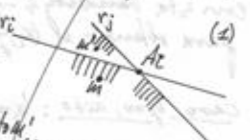
Elección de la recta adecuada en un vértice



Al situarnos en el vértice A_i, tomamos una recta, no sabemos cuál de ellas hemos tomado, y para realizar la trama debemos saber cuál de ellas es la correcta. Por ejemplo al situarnos a la izquierda de A_i veamos qué ocurre.

Supongamos que se ha tomado r_i (que es la correcta, en esta situación), y tomo un punto en cada una de las rectas, después de desplazar el valor de x hacia la izquierda del vértice A_i; sean PIi y PIj los referidos puntos. Las coordenadas de A_i son $(px(i), py(i))$; al modificar el valor de x tengo $p'x = px(i) - incre.$ (donde $incre > 0$), de modo que las coordenadas de PIi son $(p'x_i, p'y_i)$, y las de PIj son $(p'x_j, p'y_j)$, donde $p'y_i$ y $p'y_j$ se han obtenido sustituyendo en la recta r_i ó r_j, respectivamente. Tengo que decidir (mediante alguna comprobación) si la recta elegida para realizar la "trama" es la correcta o no, y para ello tengo que apoyarme en los puntos PIi y PIj. Considero los casos posibles:

1) Elegí r_i, ~~y por tanto el punto~~.

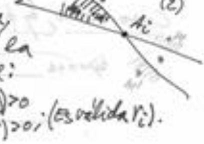


Tomo m, teniendo en cuenta que $Tipo(r_i) = -1$, y entonces $di(m, r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) > 0$, se cumple por la elección tomada y $di(m, r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) > 0$.

Si hubiera tomado r_j, tomaría después el punto m' teniendo en cuenta que $Tipo(r_j) = -1$, y tendríamos:

$dist(m', r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) > 0$ se cumple por elección tomada.

$di(m', r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) < 0$, lo cual indica que r_j no es la adecuada.



En el gráfico (2) se observa que cualquier elección es buena, hasta el punto que no debiéramos "movernos" a la derecha de A_i. Es decir, en la figura (2) se cumple:

Tomando r_i, después m, y entonces: $di(m, r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) > 0$
$di(m, r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) > 0$; (es válida r_i).

Tomando r_j, después m', y entonces: $di(m', r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) > 0$,
$di(m', r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) > 0$, (es válida r_j).

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

$y = m \cdot x + (y_0 - m x_0)$

Figura (3):

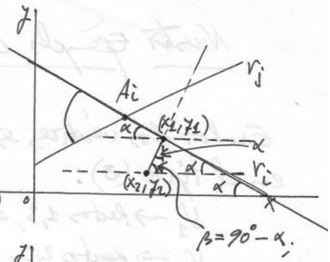
Tomo r_i, y tengo: $di(m, r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) > 0$
$di(m, r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) < 0$; ($r_i$ no es válida).

Tomo r_j, y tengo: $di(m', r_j) \cdot val(Tipo(r_j)) > 0$;
$di(m', r_i) \cdot val(Tipo(r_i)) > 0$ (r_j es válida).

Puesto que sólo una de ellas es la válida, debo desplazarme a la derecha de Ai, tomar la dcha.

-5-

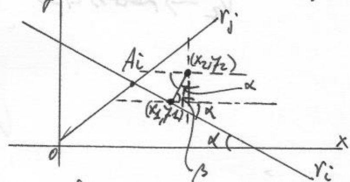
Angulo de la Normal



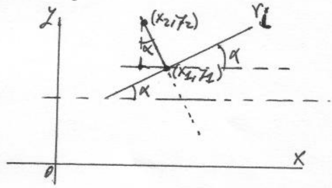
$$\begin{cases} x_2 = x_1 - l \cdot \mathrm{Sen}(\alpha) \\ y_2 = y_1 - l \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$

o bien, en ambos casos:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \; l \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{Val}(\mathrm{Tipo}(i)) \cdot \mathrm{Sig}(\mathrm{pend}\, r_i) \\ y_2 = y_1 \; \text{---} \end{cases}$$



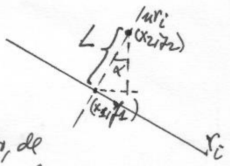
$$\begin{cases} x_2 = x_1 \; l \cdot \mathrm{Sen}(\alpha) \cdot \mathrm{Val}(\mathrm{Tipo}(i)) \cdot \mathrm{Sig}(\mathrm{pend}\, r_i) \\ y_2 = y_1 \; l \cdot \cos(\alpha) \end{cases}$$



Longitud del Trazo: (cálculo de l)

Deseo que L = constante en todos los casos.

$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; $\Delta x = L \cdot \mathrm{sen}(\alpha)$; $\Delta y = L \cdot \cos(\alpha)$;



Se observa que basta dar a L un valor fijo, de modo que los valores que varían son Δx e Δy, pero la distancia entre (x_1,y_1) y (x_2,y_2) será siempre L.

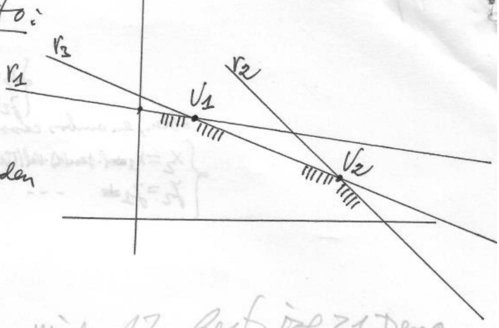
-5bis-

Nuestro Ejemplo concreto:

En los dos vértices estamos en el tipo (2):

$V_1 \to$ Rectas 1,3, en este orden

$V_2 \to$ Rectas 2,3, "



V1 → Vindi 17 Recta izq 21 Dero

V2 → Vindi 17 Recta izq 21 Dero

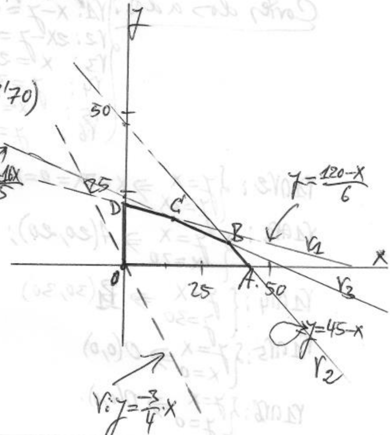
Ejemplo: $\begin{cases} \frac{x}{2}+3y \le 60 \\ \frac{4}{3}x+\frac{4}{3}y \le 60 \\ \frac{8}{7}x+\frac{5}{2}y \le 60 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x+6y \le 120 \rightsquigarrow r_1 \\ 4x+4y \le 180 \rightsquigarrow r_2 \\ 16x+35y \le 840 \rightsquigarrow r_3 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \rightarrow r_4;\ r_5; \end{cases}$

$Z = 30000 \cdot x + 40000 \cdot y$.

Número puntos de corte: $4+3+2+1=10$.-

Vértices del recinto factible:

$A(45,0)$; $B(38'68, 6'32)$; $C(13'77, 17'70)$
$D(0,20)$, $O(0,0)$



Optimización:

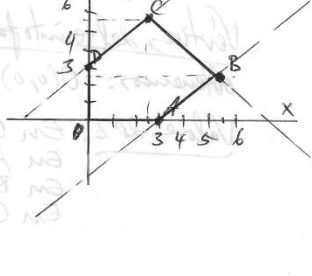
$30.000x+40000 \cdot y=0$
$3x+4y=0 \Rightarrow y=\frac{-3}{4} \cdot x$
$x=50 \Rightarrow y=-37'5$

Si "movemos" trasladando la vector, manteniéndola paralela así misma, parece que el valor máximo de Z lo tomase en el punto A. Pero ésto puede engañar, y lo más seguro lo tenemos calculando el valor en los vértices C, B y A:

En $A \rightsquigarrow Z = 30000 \cdot 45 = 1350000$.-
En $B \rightsquigarrow Z = 30000 \cdot 38'68 + 40000 \cdot 6'32 =$
En $C \rightsquigarrow Z = 30000 \cdot 13'77 + 40000 \cdot 17'70 =$

Ejemplo: $\begin{cases} x-y \ge -3 \\ x+y \le 8 \\ x-y \le 3 \\ x \ge 0; \\ y \ge 0; \end{cases}$

$Z = 6x+4y$.



Vértices de la región factible: $A(3,0)$, $B(\frac{11}{2}, \frac{5}{2})$, $C(\frac{5}{2}, \frac{11}{2})$; $D(0,3)$, $O(0,0)$

El máximo valor lo obtiene en B.

-6bis-

<u>Ejemplos</u>: $r1: x-y \le 0 \to$ tipo $+1 \leftarrow -x+y \ge 0$

$r2: 2x+y \ge 0 \to$ tipo $-1 \leftarrow y-2x \le 0$

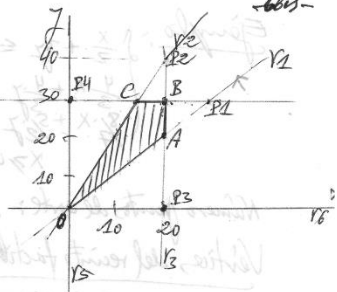
<u>Restricciones</u>

$r3: x \le 20 \to$ tipo -1

$r4: y \le 30 \to$ tipo -1

$r5; r6: x \ge 0;\ y \ge 0 \to$ tipo $+1$; tipo $+1$

<u>F. optimizar</u>: $z = 25000x + 20000y$



<u>Cortes dos a dos</u>:
$$\begin{cases} r1: x-y=0 \\ r2: 2x-y=0 \\ r3: x=20; \\ r4: y=30; \\ r5: x=0 \\ r6: y=0 \end{cases}$$

$r1 \cap r2: \begin{cases} y=x \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x=2x=0=x \Rightarrow O(0,0)$,

$r1 \cap r3: \begin{cases} y=x \\ x=20 \end{cases} \Rightarrow A(20,20)$;

$r1 \cap r4: \begin{cases} y=x \\ y=30 \end{cases} \Rightarrow P1(30,30)$

$r1 \cap r5: \begin{cases} y=x \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)$

$r1 \cap r6: \begin{cases} y=x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)$.

$r2 \cap r3: \begin{cases} y=2x \\ x=20 \end{cases} \Rightarrow P2(20,40)$.

$r2 \cap r4: \begin{cases} y=2x \\ y=30 \end{cases} \Rightarrow 2x=30 \Rightarrow x=15 \Rightarrow C(15,30)$.

$r2 \cap r5: \begin{cases} y=2x \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)$.

$r2 \cap r6: \begin{cases} y=2x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)$.

$r3 \cap r4: \begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases} \Rightarrow B(20,30)$

$r3 \cap r5: \begin{cases} x=20 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow$ No se cortan;

$r3 \cap r6: \begin{cases} x=20 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P3(20,0)$,

$r4 \cap r5: \begin{cases} y=30 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow P4(0,30)$

$r4 \cap r6: \begin{cases} y=30 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$ No se cortan.

$r5 \cap r6: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O(0,0)$

En todo caso, número total de puntos (incluidos los casos de "No se cortan"):

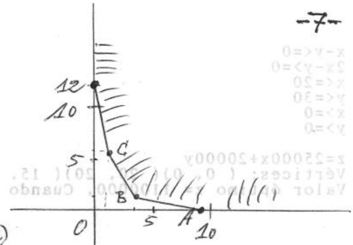
$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1$; Aquí: $5+4+3+2+1 = \boxed{15}$.

<u>Vértices del recinto factible</u>: Aplicando el criterio indicado en otro lugar obtenemos: $O(0,0)$; $A(20,20)$, $B(20,30)$, $C(15,30)$;

<u>Valores de z</u>: En $O \to z=0$;
En $A \to z = 900.000$.-
En $B \to z = 1.100.000$.- $\Rightarrow$ Beneficio máximo cuando $x=20$, $y=30$.
En $C \to z = 975.000$.-

-7-

Ejemplo: $\begin{cases} 2x+y \geq 8 \\ 6x+y \geq 12 \\ x+3y \geq 9 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$



$z = 600x + 400y$

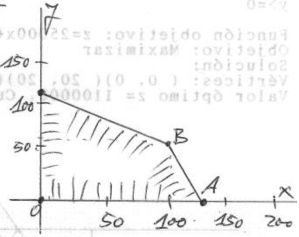
Sol:

Vértices: $A(7,0)$, $B(3,2)$, $C(1,6)$, $D(0,12)$

Coste mínimo cuando $x=3$ kg. de A, $y=2$ kg. de B

Ejemplo:

$\left.\begin{array}{l} 2x+4y \leq 440 \\ 0'5 \cdot x + 0'25y \leq 65 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$; $z = 12x + 8y$;



Sol: Vértices: $O(0,0)$, $A(130,0)$, $B(100,60)$
$C(0,110)$

Valor máximo en $B(100,60)$.

De Cónicas

ECUACION GENERAL de 2º GRADO

$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$; puedo hacer $A=1$ (si $A\neq 0$), y tengo $x^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$; Considero además (además de $A\neq 0$, o podría suponer $B\neq 0$) que: caso 1) $C=0$; caso 2) $C\neq 0$.

Caso 1): $x^2+By^2+Dx+Ey+F=0$. Si damos 4 puntos del plano: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ y $D(x_4,y_4)$, y los sustituyo tengo:

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2\cdot B+x_1\cdot D+y_1\cdot E+F=0 \\ x_2^2+y_2^2\cdot B+x_2\cdot D+y_2\cdot E+F=0 \\ x_3^2+y_3^2\cdot B+x_3\cdot D+y_3\cdot E+F=0 \\ x_4^2+y_4^2\cdot B+x_4\cdot D+y_4\cdot E+F=0 \end{cases}$$

Si hago: $a(i,1)=y_i^2$; $a(i,2)=x_i$; $a(i,3)=y_i$; $a(i,4)=1$, y $b(i)=-x_i^2$, donde $i=1,2,3,4$, puedo escribir, si además hago: $x\equiv B$; $y\equiv D$; $z\equiv E$; $t\equiv F$,

$$\begin{cases} a(i,1)\cdot x+a(i,2)\cdot y+a(i,3)\cdot z+t=b(i) \\ i=1,2,3,4; \end{cases} \text{ o bien: } \begin{cases} y_i^2\cdot x+x_i\cdot y+y_i\cdot z+t=-x_i^2 \\ i=1,2,3,4; \end{cases}$$

Ejemplos: Sean los puntos $A(-2,2)$, $B(-2,-2)$, $C(2,-2)$, $D(2,2)$: tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 4x-2y+2z+t=-4 \\ 4x-2y-2z+t=-4 \\ 4x+2y-2z+t=-4 \\ 4x+2y+2z+t=-4 \end{cases}; \quad A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A|=0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}=16\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=16\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=16\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=16.4=64 \Rightarrow Rg(A)=3.$$

Evidentemente, la ampliada $\bar{A}$ cumple $|\bar{A}|=0$, y por tanto $Rg(\bar{A})=3$.

El Sistema es compat. indeterm.

Hago $t=1$, con lo cual tengo:

$$\begin{cases} 4x-2y+2z=-5 \\ 4x-2y-2z=-5 \\ 4x+2y-2z=-5 \\ 4x+2y+2z=-5 \end{cases}; \quad A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \boxed{|A|=64}.$$

Por Crámer:

$$A_x=\begin{vmatrix} -5 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix}=5.2.2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}=20\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=\boxed{-80}.$$

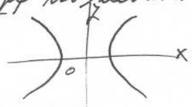
$$A_y=\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix}=4.5.2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$ Del mismo modo $A_z=0$.

Por tanto: $B=x=\frac{-80}{64}=\frac{-20}{16}=-\frac{5}{4}$; $D=y=0$; $E=z=0$; $F=1$, y la cónica es

-2-

$x^2 - \frac{5}{4}y^2 + 1 = 0$; $4x^2 - 5y^2 + 4 = 0$; $-4x^2 + 5y^2 = 4$; $\boxed{-x^2 + \frac{y^2}{4/5} = 1}$.

Si hago $t=-1$: $\begin{cases} 4x - 2y + 2z = -3 \\ 4x - 2y - 2z = -3 \\ 4x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$; e intuyo que nos llevará a la



ecuación: $x^2 - \frac{3}{4}y^2 - 1 = 0$; $\boxed{x^2 - \frac{y^2}{4/3} = 1}$.

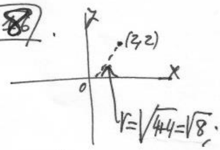
Si hago $x=1$: $\begin{cases} -2y + 2z + t = -8 \\ -2y - 2z + t = -8 \\ 2y - 2z + t = -8 \\ 2y + 2z + t = -8 \end{cases}$; ~~se observa que~~ $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & +2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{16}$ $\quad A_y = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & 1 \\ -8 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_z = 0$; $A_t = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & -2 & -8 \\ 2 & -2 & -8 \end{vmatrix} =$

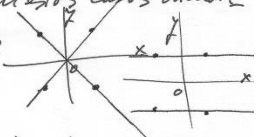
$= 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 32 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -32 \cdot 4 = \boxed{-128}$

Por tanto: $B=1$; $D=0$; $E=0$; $F = \frac{-128}{16} = \frac{-8}{1} = \boxed{-8}$.

La cónica es: $x^2 + y^2 - 8 = 0$; $\boxed{x^2 + y^2 = 8}$;



Si $y=1$: $\begin{cases} 4x + 2z + t = -2 \\ 4x - 2z + t = -2 \\ 4x - 2z + t = -6 \\ 4x + 2z + t = -6 \end{cases}$; $|A| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$; se observa que esto ocurre siempre que demos valor a "y" o a "z". En estos casos obtendremos la cónica como producto de dos rectas:



Intuimos que, aunque se obtengan resultados diferentes, algo análogo ocurre si hacemos $B=1$ en lugar de $A=1$. (~~para~~ que se trate de una cónica/ecuación de 2º grado, tiene que ser, necesariamente, $A \neq 0$ ó $B \neq 0$).

Caso 2): $C \neq 0$. Suponemos $A \neq 0$, y $A = 1$;

$x^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Si damos 5 puntos en el plano, y sustituyo sus coordenadas, obtengo (con la misma notación de antes):

$$\begin{cases} a(i,1)B + a(i,2)\cdot C + a(i,3)\cdot D + a(i,4)E + a(i,5)\cdot F = b(i) \\ \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

donde: $a(i,1) = y_i^2$, $a(i,2) = x_i y_i$, $a(i,3) = x_i$, $a(i,4) = y_i$, $a(i,5) = 1$; $b(i) = -x_i^2$;

o bien: $$\begin{cases} a(i,1)\cdot x + a(i,2)\cdot y + a(i,3)\cdot z + a(i,4)\cdot t + u = +b(i), \\ \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, \end{cases}$$

donde: $B = x$; $C = y$, $D = z$, $E = t$, $F = u$;

Ejemplo: Sean los puntos $A(-2,2)$, $B(-2,-2)$, $C(2,-2)$, $D(2,2)$, $E(3,1)$.

Tengo el sistema:
$$\begin{cases} 4x - 4y - 2z + 2t + u = -4; \\ 4x + 4y - 2z - 2t + u = -4 \\ 4x - 4y + 2z - 2t + u = -4 \\ 4x + 4y + 2z + 2t + u = -4 \\ x + 3y + 3z + t + u = -9 \end{cases} ; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -16 & -14 & -2 & -3 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -3 \\ 0 & -16 & -10 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -10 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 16\cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 96 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & +2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -96 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 96 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 96 \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 96 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 96 \cdot 8 = \boxed{768}.$$

El Sistema es compat. y Determinado.

$$A_x = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ -9 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 160 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 160 \cdot (-2) = \boxed{+1280} \Rightarrow x = \frac{1280}{768} = \frac{320}{192} = \frac{80}{48} = \frac{20}{12} = \boxed{\frac{5}{3}}.$$

$$A_y=\begin{vmatrix}4&-4&-2&2&1\\4&-4&-2&-2&1\\4&-4&2&-2&1\\4&-4&2&2&1\\1&-9&3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-8&0&4&1\\0&0&0&0&1\\0&0&4&0&1\\0&0&4&4&1\\-3&-5&5&3&1\end{vmatrix}\Rightarrow 3\cdot\begin{vmatrix}-8&0&4&1\\0&0&0&1\\0&4&0&1\\0&4&4&1\end{vmatrix}=24\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\4&0&1\\4&4&1\end{vmatrix}=$$

$$=24\cdot16\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=24\cdot16=\boxed{384}\Rightarrow y=\frac{384}{768}=\frac{96}{192}=\frac{24}{48}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$A_z=\begin{vmatrix}4&-4&-4&2&1\\4&4&-4&-2&1\\4&-4&-4&-2&1\\4&4&-4&2&1\\1&3&-9&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-4&-4&2&1\\0&+8&0&-4&0\\0&0&0&-4&0\\0&8&0&0&0\\-3&7&-5&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&8&0&-4\\0&0&0&-4\\0&8&0&0\\-3&7&-5&-1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}8&0&-4\\0&0&-4\\8&0&0\end{vmatrix}=0,$$

Por tanto: $z=0$;

$$A_t=\begin{vmatrix}4&-4&-2&-4&1\\4&4&-2&-4&1\\4&-4&2&-4&1\\4&4&2&-4&1\\1&3&3&-9&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-4&-2&-4&1\\0&8&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&8&4&0&0\\-3&7&5&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&8&0&0\\0&0&4&0\\0&8&4&0\\-3&7&5&-5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}8&0&0\\0&4&0\\8&4&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow t=0.$$

$$A_u=\begin{vmatrix}4&-4&-2&2&-4\\4&4&-2&-2&-4\\4&-4&2&-2&-4\\4&4&2&2&-4\\1&3&3&1&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3&1&-9\\0&-16&-14&-2&32\\0&-8&-14&-6&32\\0&-16&-10&-6&32\\0&-8&-10&-6&32\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&14&-2&32\\1&14&-6&32\\2&10&-6&32\\1&10&-6&32\end{vmatrix}=8\cdot2\cdot2\cdot32\begin{vmatrix}2&7&1&1\\1&7&3&1\\2&5&3&1\\1&5&3&1\end{vmatrix}=$$

$$=-32\cdot32\cdot\begin{vmatrix}2&7&1&1\\-1&0&2&0\\0&-2&2&0\\-1&-2&2&0\end{vmatrix}=+32\cdot32\cdot\begin{vmatrix}-1&0&2\\0&-2&2\\-1&-2&2\end{vmatrix}=32\cdot32\cdot\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&2&0\end{vmatrix}=-32\cdot32\cdot(-4)=$$

$$=\boxed{-4096};\quad u=\frac{-4096}{768}=\frac{-1024}{192}=\frac{-256}{48}=\frac{-64}{12}=\boxed{\frac{-16}{3}}.$$

Por tanto tengo: $B=5/3$, $C=1/2$, $D=0$, $E=0$, $F=-\frac{16}{3}$, y por tanto:

$$x^2+\frac{5}{3}y^2+\frac{1}{2}xy-\frac{16}{3}=0;\quad \boxed{6x^2+10y^2+3xy-32=0}$$

NOTA: Evidentemente, para nuestro propósito tiene especial interés el caso $C=0$. Nos centraremos en este caso.

NOTA: También podemos suponer $C=1$ (en el caso de $C\neq0$), y dejar A como incógnita de forma que puede resultar un tipo $Cxy+Dx+Ey+F=0$.

-5-

Volvemos al caso C=0, tomando los puntos A(-2,2), B(-2,-1), C(2,-2) D(2,1); Ecuación de la forma $x^2+By^2+Dx+Ey+F=0$; (A=1, [illegible]).

Sistema $\begin{cases} 4x-2y+2z+t=-4 \\ x-2y-z+t=-4 \\ 4x+2y-2z+t=-4 \\ x+2y+z+t=-4 \end{cases}$; $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot2\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=12\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=12\cdot6=\boxed{72};$$ Sist. Comp. Determ.

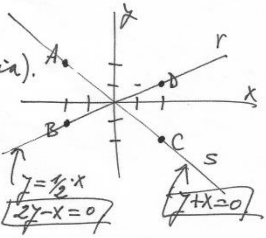
$$A_x=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ x=0;\quad A_y=\begin{vmatrix} \quad " \quad \end{vmatrix}=0;\ y=0;\ A_z=0;\ z=0.$$

$$A_t=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=2\cdot4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot2\cdot3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=48\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=48\cdot6=\boxed{288};\ t=\frac{288}{72}=\boxed{4}.$$

Así tengo: $A=1$, $B=0$, $D=0$, $E=0$; $F=4$;

La ecuación es: $x^2+4=0$; (que es imaginaria).



Debo revisar los cálculos, pues hay soluciones como indican el producto de dos rectas:

$(x+y)\cdot(-x+2y)=0$; $-x^2+xy+2y^2=0$

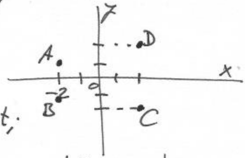
$\boxed{x^2-2y^2-x\cdot y=0}$, donde se ve que $C\neq0$.

NOTA: $x^2+4=0$; o bien: $0=(x+2i)\cdot(x-2i)=x^2-4\cdot i^2=\boxed{x^2+4}$. Es decir si imponemos C=0, nos lleva al producto de dos rectas con coeficientes complejos no reales. Si intentamos su representación: $x^2=-4$; que lleva a ~~error~~ de cálculo.

Desarrollamos a continuación otro caso.

Otro ejemplo: $A\cdot x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; (Caso $C=0$ y $B=1$).

Puntos: $A(-2,1)$, $B(-2,-1)$, $C(2,-2)$, $D(2,2)$.



$$\left\{ x_i^2\cdot A + x_i\cdot D + y_i\cdot E + F = -y_i^2 \right.;\quad i=1,2,3,4;\quad ;\ A\equiv x,\ D\equiv y,\ E\equiv z,\ F\equiv t,$$

$$\begin{cases} 4x-2y+z+t=-1 \\ 4x-2y-z+t=-1 \\ 4x+2y-2z+t=-4 \\ 4x+2y+2z+t=-4 \end{cases};\quad A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad |A|=0;\quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{32}$$

$\text{Rang}(A)=3$;

Hago $t=1$: $$\begin{cases} 4x-2y+z=-2 \\ 4x-2y-z=-2 \\ 4x+2y-2z=-5 \end{cases};\quad A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix};\quad |A|=32;$$

$$A_x=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-14) = \boxed{-28}$$

$x=\frac{-28}{32}=\boxed{\frac{-7}{8}}$.

$$A_y=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-6) = \boxed{-24}$$

$$A_z=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ - & - & - \end{vmatrix}$$

$y=\frac{-24}{32}=\boxed{\frac{-3}{4}}$; $\boxed{z=0}$;

Por tanto: $A=\frac{-7}{8}$; $D=\frac{-3}{4}$; $E=0$; $F=1$;

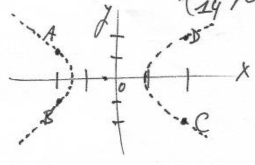
Ecuación: $-\frac{7}{8}x^2+y^2-\frac{3}{4}x+1=0$; $-7x^2+8y^2-6x+8=0$.

$$\boxed{7x^2-8y^2+6x-8=0}$$

Ecuac. reducida/canónica: $7\cdot\left(x^2+\frac{6}{7}x\right)-8\cdot(y^2)-8=0$;

$7\cdot\left(x+\frac{6}{14}\right)^2-7\cdot\frac{36}{14^2}-8y^2-8=0$; $7\left(x+\frac{6}{14}\right)^2-8y^2=8+\frac{36}{28}$;

$\boxed{7\cdot\left(x+\frac{6}{14}\right)^2-8y^2=\frac{260}{28}}$, que es una hipérbola con centro en $\left(\frac{-6}{14},0\right)$.



Actividades y Añoranzas:

Secundaria

3º ESO Junio/2004 -1-

Actividades Primer trimestre:

1.- a) Halla los 2/3 de los 3/5 de 2250
b) Ordena de menos a mayor, y represéntalos sobre una recta: 2/3, 7/5, 5/7, -2/3, -3/5

2.- a) Calcula: $5:(\frac{2}{4}+1)-3:(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$

b) Simplifica hasta tener fracción irreducible: $\frac{2^{-5}.4^2.3^2}{2^3.9^{-1}}$

3.- Opera y simplifica:
a) [1/2 - (3/4 - 1)] : (3/4 + 1) b) (-3)*(3/5 - 1/3) : (-2)*(4/3 - 6/5)

4.- Opera y simplifica:
a) $-2^2+(-3/2)^3+(-5/2)^2$ b) $3'\widehat{25}+0'\widehat{234}$ c) $((-3/2)^2)^3+4/5$

5.- a) Calcula: $\sqrt[5]{\frac{1}{1024}}$ b) Calcula las que sea posible, y di cuales no son posible

$\sqrt{-9}$ $\sqrt[3]{-8}$ $\sqrt[5]{-32}$ $\sqrt[4]{-16}$

6.- a) Realiza:: $-5+3.\frac{2}{6}+2.(1+\frac{3}{2})$

b) Realiza: $\frac{\sqrt{792}}{3}:\frac{3^2.2^3}{27.16}$, simplificando todo lo posible

c) Determina, razonadamente, un número entero positivo que al dividirlo entre 90 y entre 120, en los dos casos nos de resto 3.

7.- a) En una población de 4500 personas contraen una enfermedad 360. ¿Qué porcentaje del total representan?
b) En una tienda he pagado 7686 pts, después de hacerme un descuento del 10% . ¿Cuál era el precio marcado?

8.- En una gran finca el 25 % está destinada a cereales, y del resto, el 50 % está destinado como pradera para el ganado y lo que queda es improductivo. Halla la extensión de la finca sabiendo que tiene 9 ha. de terreno improductivo. (Ha= 10000 m2)
(Dame el resultado en hectareas y en m2)

9.- El precio del alumninio se ha incrementado dos veces durante este año: la primera el 15 %, la segunda el 8 %. Pero en el último trimestre ha bajado el 6 %. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida al final del año?

10.- Un depósito dispone de dos grifos A y B, y de un tubo C de desagüe. Sabemos que tarda 6 h. en llenarse cuando están abiertos los tres. También sabemos que el grifo A, abierto él solo, tarda 5 h en llenarlo, y que C, abierto él solo, tarda 4 h en vaciarlo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el depósito el grifo B él solo? Dame el tiempo en horas, minutos y segundos.

11.- a) Al comprar una lavadora me han hecho un descuento del 8 %, por lo cual he pagado 409'4 euros. ¿Cuál era su precio de la lavadora?
b) En un pantano había 340 hl. de agua al comenzar el año, y al final de Junio había disminuido el 43 %. ¿Cuál es el índice de variación, y cuánta agua queda en el pantano?

12.- Una señora sale al mercado y realiza compra en tres lugares o puestos distintos. En el primero ha gastado 2/3 de su dinero, en el segundo ha gastado 1/2 de lo que le quedó, y en el tercero gastó 2/3 de lo que tenía en ese momento. Al terminar observa que le han sobrado 1000 pts. ¿Cuánto dinero llevaba al iniciar las compras ?
1.¿Cuál es el menor número posible de baldosas cuadradas necesarias para cubrir el piso de una habitación cuyas dimensiones son 3,30 m. por 3,90 m. ?

-1ᵗⁱᵒ

13.- Determina un número N sabiendo que la división, tanto entre 6 como entre 40, tiene resto 3, y que N es mayor que 240 pero menor que 250.

14.- a) ¿Cuánto mide una goma en su estado normal, sabiendo que al aumentar el 30 % su longitud es 104 cm. ?
b) Halla el índice de variación cuando pasa de "normal" a "estirada"
c) Halla el índice de variación cuando pasa de "estirada" a "normal"

15.- En un puesto de verduras y frutas, 1/6 del importe de las ventas del dia corresponde a las verduras. Del dinero obtenido en la venta de frutas, los 3/8 corresponde a las naranjas. Si el importe por la venta de naranjas es de 54 e., ¿ Qué caja ha hecho en total ese dia ?

16.- Un grifo tarda 3 h en llenar el depósito, y otro tarda 4 h. Tiene además un tubo de desagüe que tarda 5 h en vaciarlo (con los grifos cerrados y el depósito lleno). Si cuando el depósito está vacío abrimos los tres, ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse ?

17.-Una señora va al mercado y realiza tres compras en tiendas distintas. En la primera gasta 1/3 de su dinero, en la segunda gasta 2/5 de lo que le había quedado y en la tercera gasta 3/4 de lo que tenía en ese momento. Al final comprueba que la quedan 2, 30 euros. ¿Cuánto dinero tenía al iniciar las compras ?

18.- a) Calcula: $5-3.(\frac{2}{4}+1)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}):3$

b) Exprésalos en forma de fracción y haz los cálculos: $\frac{1}{\sqrt{144}}+1'234$

19.- a) Al comprar una lavadora me han hecho un descuento del 8 %, por lo cual he pagado 409'4 euros. ¿Cuál era el precio de la lavadora antes del descuento?

20.- En un puesto de verduras y frutas, 1/6 del importe de las ventas del día corresponde a las verduras. Del dinero obtenido en la venta de frutas, los 3/8 corresponde a las naranjas. Si el importe por la venta de naranjas es de 54 e., ¿ Qué caja ha hecho en total ese día ?

21.- ¿Cuál es el menor número posible de baldosas cuadradas, necesarias para cubrir el piso de una habitación, cuyas dimensiones son 3,30 m. por 3,90 m., y de forma que no tengamos que cortar ninguna baldosa ? Razonar la respuesta.

22.- Determina un número N sabiendo que la división, tanto entre 6 como entre 40, tiene resto 3, y que N es mayor que 240 pero menor que 250.
Razonar la respuesta

23.- a) Realiza: $3.(-x^3+2x-5)-2.(-3x^2+5x+1)$
b) Realiza la división y haz la comprobación: $(6x^5-3x^3+5x^2+4):(x^3-2x+3)$

24.- Dados los polinomios $P(x)=3x^4-2x^2+5$, $Q(x)=(x+1)^2-5x+3$, realiza:
a) $P(x)-2.Q(x)$
b) Halla el valor numérico de $P(x)$ cuando $x=-1$
b) Realiza la división $P(x):Q(x)$

25.- Dados los polinomios $P(x)=3x^4-5x^2+2x-7$, $Q(x)=-2x^3+3x-5$
realiza:
a) $-2.P(x)+3.Q(x)$
b) El valor numérico de $-5.Q(x)$ cuando hacemos $x=-1$

26.- Dados los polinomios
$P(x)=3x^5-5x^3+2x-7$, $Q(x)=x^3+3x-5$, $R(x)=x^3-5x+4$,
realiza las operaciones indicadas: $(P(x)+Q(x)):R(x)$

27.- Dados los polinomios $P(x)=3x^4-5x^2+2x-7$, $Q(x)=-2x^3+3x-5$
realiza:
a) $2.P(x)-3.Q(x)$
b) El valor numérico de $3.Q(x)$ cuando hacemos $x=-2$

Actividades Segundo trimestre: 3ºEso Junio/04

1.- a) Resuelve la ecuación: 3.(x-1) + 2.(3 - x) = 5

b) Resuelva los sistemas: $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ -4x+6y=0 \end{cases}$

2.- a) Resuelve: $5x^2 - 125 = 0$ b) Resuelve: $2x^2 - 4x = 0$, c) Resuelve: $2x^2 - 8x + 6 = 0$

3.- Resuelve:

a) $\frac{x.(x-3)}{2}+1=\frac{(3x-2)^2}{8}-\frac{x.(x-2)}{4}$

b) $(x+1)^2 - 3 = 3x$

c) $\sqrt{2x-1}=-3$

4.- Resuelve:

a) $-3x^2 + 27 = 0$ b) $(3-2x)^2+3=4x$ c) $-\frac{3x-3}{3}+\frac{6}{4}=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}$

5.- a) Resuelve: $x^2 - 3'2.x = 0$ b) Resuelve: $3x^2 - 0'75 = 0$

6.- Prepara el sistema y resuélvelo aplicando dos métodos:

$$\begin{cases} \frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(y+1)}{3}=12 \\ 3y-\frac{x-7}{2}=25 \end{cases}$$

7.- Resuelve:

a) $\begin{cases} \frac{2y-5}{5}-\frac{x+3}{3}=1 \\ 5x+y=-10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2-y^2=7 \\ x-y=1 \end{cases}$

8.- Resuelve el sistema por el método preferido: (indicar el método aplicado)

$$\begin{cases} \frac{2(x+1)}{5}+\frac{3(y-1)}{2}=5 \\ 4x-\frac{y+1}{4}=15 \end{cases}$$

9.- Varios amigos y amigas se reparten un premio y les corresponde 15 ∈ a cada uno. Si hubieran sido 4 amigos más les habría correspondido 3 ∈ menos a cada uno. ¿Cuántos amigos eran inicialmente?

10.- Si la base de un rectángulo disminuye 80 m y su altura aumenta 20 m, se convierte en un cuadrado, pero si la base disminuye 60 m y la altura aumenta 20 m, entonces el área disminuye 400 m^2

11.- Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1400 ∈ por un trabajo. ¿Cuánto corresponderá a cada uno si uno de ellos trabajó las dos quintas partes que el otro?

12.- Pedro y Luis compran una camisa cada uno. Las dos tienen el mismo precio, pero Pedro consiguió el 12 % de descuento y Luis consiguió sólo el 8 %, de forma que uno pagó 1'4 ∈ más que el otro. ¿Cuánto costaba cada camisa?

13.- Un ciclista sale a la carretera con velocidad de 15 km/h. Otro ciclista sale media hora después y desea alcanzar al primero en hora y media. ¿Qué velocidad debe lleva el segundo?

14.- Me falta 1 ∈. para poder comprar mi revista preferida. Si tuviese el doble del dinero que tengo, me sobrarían 2 ∈. ¿Cuánto dinero tengo ?. ¿Cuál es el precio de la revista?

-2bis-

15.- Marta tiene 5 años más que su hermano Pedro, y su padre tiene 41 años. Por otro lado podemos afirmar que dentro de 6 años, la edad del padre coincidirá con la suma de las de sus hijos. Determina la edad de cada uno.

16.- El padre de Luis tiene ahora 3 veces la edad de su hijo. Hace 5 años la edad de Luis era la cuarta parte de la de su padre. Halla sus edades.

17.- Juan tiene 16 años, su hermano Paco tiene 14 y su padre 40. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la del padre sea igual a la suma de la de sus hijos?.

18.- Un grupo de amigos se reparten un premio y les corresponden 9 € a cada uno. Si hubieran sido 4 amigos más les hubieran correspondido 1'8 € menos a cada uno. ¿Cuántos amigos hay en el grupo?

19.- Tres socios han obtenido 12900 € de beneficios, que se repartirán proporcionalmente al capital aportado. El socio A aportó 2/3 de lo que aportó el B, y éste aportó 5/6 de lo aportado por C. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

20.- La Sra Mayte ha pagado 6'40 € por 2 kg de naranjas y 3 kg de manzanas, y la Sra María ha pagado, en el mismo momento y la misma tienda, 8'60 € por 4 kg de manzanas y 1 de naranjas. Determina el precio de cada clase de fruta.

21.- Un comerciante mezcla azúcar de dos calidades con el propósito de obtener 100 kg. para venderla a 1 euro/kg. Los precios de origen de cada una son 0,90 euros/kg. y 1,40 euros/kg. ¿Qué cantidad tiene que tomar de cada clase ?

22.- Mezclamos 40 kgs. de arroz de 0'60 e/kg con 60 kgs. de otra clase. La mezcla resulta a 0'80 e/kg . Determina el precio del segundo tipo de arroz.

23.- Un comerciante mezcla 150 kg de arroz que le costaron a 1'08 €/kg, con 250 kg que le costaron a 0' 65 €/kg. Los mezcla para mejorar las ventas. ¿Qué precio debe fijar para la mezcla si desea obtener lo mismo que le costó?

24.- Un comerciante mexcla 150 kg de arroz que le costaron a 1'08 €/kg, con 250 kg que le costaron a 0' 65 €/kg. Los mezcla para mejorar las ventas y obtener mayor beneficio. ¿Qué precio debe fijar para la mezcla si desea obtener un beneficio de 150 €?

25.- Pepito compra en el kiosco 2 bolígrafos y 3 lapiceros, por los que paga 1,30 euros, y su amigo Juanito, en el mismo kiosco, paga 1,80 euros por 4 lapiceros y 3 bolígrafos. Determina el precio de los lapiceros y de los bolígrafos.

26.- a) De un bidón que estaba lleno de aceite, se han consumido los 7/8 . Después añadimos 38 litros y comprobamos que ha quedado lleno hasta los 3/5 de su capacidad. Determina la capacidad del bidón.

b) Un rectángulo tiene 50 m^2 de área, y uno de los lados mide 5 m más que el otro. Halla sus dimensiones.

27.- En un Centro escolar hay un total de 270 alumnos entre los dos cursos (3° y 4°) del segundo ciclo de la ESO. Se sabe que el 52 % de los alumnos de 3° , y el 45 % de los alumnos de 4° son chicas, sumando un total de 132 alumnas:

a)¿Cuántos alumnos hay en cada curso? b)¿ Cuál es el total de chicos ?

28.- Los padres de Luis tienen una garrafa llena de aceite. Durante una semana han gastado 3/5 del contenido, y la siguiente semana gastaron 2/3 de lo que quedó. Después añadieron 5 litros, y observan que faltan 2/15 para quedar llena. ¿Cuál es la capacidad tiene la garrafa ?

29.- Determina un número x tal que la suma del cuadrado del inmediato anterior con el cuadrado del inmediato posterior nos da el valor 20.

3º ESO D

16/2/05 -3-

Actividades Segundo trimestre:

1.- Resuelve:

a) $\frac{x.(x-3)}{2}+1=\frac{(3x-2)^2}{8}-\frac{x.(x-2)}{4}$

b) $(x+1)^2 - 3 = 3x$

c) $\sqrt{2x-1}=-3$

2.- Resuelve:

a) $-3x^2 + 27 = 0$ b) $(3-2x)^2+3=4x$ c) $-\frac{3x-3}{3}+\frac{6}{4}=\frac{-x}{2}+\frac{3}{2}$

3.- a) Resuelve: $x^2 -3'2.x = 0$ b) Resuelve: $3x^2 -0'75 = 0$

De móviles:

1.- Del punto A sale un móvil con v = 120 km/h, y a la misma hora sale de B otro, al encuentro del primero, con v = 90 km/h. Los puntos A y B están a 600 km de distancia uno del otro. ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse.

2.- Del punto A sale en dirección a B un móvil con v = 130 km/h, y a la misma hora sale de B otro, en la misma dirección y el mismo sentido que el primero, con v = 100 km/h. Los puntos A y B están a 400 km de distancia uno del otro. ¿Cuánto tiempo tardarán en alcanzar el primero al segundo.

3.- Un móvil toma la salida con velocidad de 110 km/h, y media hora después sale otro, en la misma dirección y sentido, con velocidad de 125 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzar al primero?

4.- A las 8 de la mañana sale de la ciudad A un móvil con velocidad de 120 km/h en dirección a la ciudad B. De la ciudad B sale media hora después otro móvil en dirección hacia A con velocidad de 130 km/h. La distancia que separa A y B es de 230 km. (Haz un esquema)

a) ¿A qué hora se encontrarán?
b) ¿A qué distancia de A se produce el encuentro ?

5.- A las 8 de la mañana sale de la ciudad A un móvil con velocidad de 120 km/h en dirección a la ciudad C. De la ciudad B sale media hora después otro móvil en dirección hacia C con velocidad de 110 km/h. La distancia que separa A y B es de 230 km. (Haz un esquema)

a) ¿A qué hora el más rápido alcanza al más lento?
b) ¿A qué distancia de A se produce el alcance?

~~8~~ 6.- Realiza los cálculos simplificando lo posible:

a) $3/2+(-3)^3-5.(\frac{2}{3}-1)^{-2}$ b) $\frac{-2^2+\frac{1}{5}}{5-\frac{2}{3}}$

9.- Varios amigos y amigas se reparten un premio y les corresponde 15 € a cada uno. Si hubieran sido 4 amigos más les habría correspondido 3 € menos a cada uno. ¿Cuántos amigos eran inicialmente?

10.- Si la base de un rectángulo disminuye 80 m y su altura aumenta 20 m, se convierte en un cuadrado, pero si la base disminuye 60 m y la altura aumenta 20 m, entonces el área disminuye 400 m²

11.- Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1400 € por un trabajo. ¿Cuánto corresponderá a cada uno si uno de ellos trabajó las dos quintas partes que el otro?

Actividades: **3º Eso** **Marzo/05** -3fin

1.- Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian 1. Halla el valor de dichos números.

2.- El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en dos unidades el cociente aumente en uno y el nuevo resto es uno. Halla el dividendo y el divisor.

3.- Divide 473 en dos partes de modo que al dividir la mayor por la menor se obtenga cociente 7 y resto 9.

4.- Halla las edades actuales de dos personas sabiendo que: "hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la de la segunda, y dentro de 20 años la de la primera será el doble de la otra.

5.- Hemos mezclado dos líquidos de densidades 0'7 y 1'3 y hemos obtenido 30 litros de un líquido de densidad 0'9. ¿Cuántos litros he tomado de cada uno.

6.- Un barco que hace el servicio de llevar pasajeros por un río, los traslada desde A hasta B, que distan 75 km, en 3 horas, mientras que desde B hasta A lo hace en 5 horas. Halla la velocidad del barco y de la corriente, supuestas constantes.

7.- La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número le añadimos 18, el número que resulta coincide con el que resulta de invertir el orden de las cifras del número dado. Halla el número tomado inicialmente.

8.- Un orfebre tiene dos lingotes. El lingote A contiene 550 gr. de oro y 60 gr. de cobre, el B contiene 400 gr. de oro y 100 gr. de cobre. Desea preparar otro lingote que pese 640 gr. y cuya ley sea 0'825. ¿Qué cantidad debe tomar de cada uno.

9.- Un padre dice a su hijo: " Hoy tu edad es 1/5 de la mía, y hace 7 años no era más que 1/9 ". Halla sus edades.

10.- Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿ De qué te quejas? Si yo te tomara un saco , mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si yo te doy un saco tu carga se igualaría a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba cada uno?

11.- Prepara el sistema y resuélvelo por el método preferido:

a) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y-4}{3} = 5 \\ \dfrac{3x-2}{5} + 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-5}{4} - \dfrac{y-2}{3} = 8 \\ \dfrac{2x+1}{5} + \dfrac{3y-5}{3} = 6 \end{cases}$

12.- Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 24 \\ -2x + y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

13.- Resuelve por tanteo. Después resuelve aplicando método:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 5 \end{cases}$

14.- Resuelve:

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ \quad 2y + z = 4 \\ \quad\quad 2z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x \quad - z = 4 \\ x + y \quad = 6 - z \end{cases}$

ACTIVIDADES 3º ESO Verano /05 -4-

1.- Realiza dejando el resultado en forma de fracción:

a) $4-3:(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{3})+5$

b) $((\frac{1}{2}+3)^2)^{-1}-5^2$ Simplifica dejando el resultado en fracción irreducible:

c) $2'05+3'243$, dejando el resultado en forma de fracción

2.- Ana regala a Luis un tercio de su colección de sellos, y después regala la mitad de los restantes a su prima María. Del total de sellos regalados, la cuarta parte son de España, y los 210 restantes son del resto de Europa. ¿Cuántos sellos tenía Ana?. ¿Cuántos ha regalado a María?

3.- Durante el año 2004 un producto modificó su precio en dos ocasiones. Primero en Marzo subió el 5 %, y después en Septiembre bajó el 3 %. Utilizando los índices de variación resuelve lo siguiente:

a) Si el precio inicial era de 54 €, halla su precio final.
b) Si el precio final fuese de 85 €, ¿Cuál era su precio inicial?

4.- Un comerciante mezcla 150 kg de arroz, que ha costado a 1'20 €/kg, con 250 kg de otra clase cuyo precio desconocemos. Sabemos que vendiendo la mezcla a 0'99 €/kg consigue un beneficio de 50 €, además de lo que a él le costaron los productos. Determina el precio del segundo tipo de arroz.

5.- A las 8 h de la mañana sale un ciclista con velocidad de 15 km/h., y media hora más tarde sale otro en la misma dirección pero sentido contrario, con velocidad de 20 km/h. ¿Qué hora será cuando se encuentren a 95 km de distancia entre sí?

6.- En una cadena de montaje, 17 operarios trabajando 8 h/dia son capaces de ensamblar 850 aparatos a la semana. La próxima semana tienen que conseguir el ensamblaje de 1000 aparatos con el fin de satisfacer un pedido urgente. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar para conseguirlo?

7.- Realiza dejando el resultado en forma de fracción:

a) $5^{-2}-3.(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{2}{3})+5$

b) $((\frac{2}{3}-1)^{-1})^3-3^2$ Simplifica dejando el resultado en fracción irreducible:

c) $2'05+3'2\widehat{43}$, dejando el resultado en forma de fracción

8.- Un depósito dispone de dos grifos A y B, y de un tubo de desagüe. Sabemos que el grifo A tarda en llenarlo 6 h., que el B tarda 5 h, y que C tarda 8 h en vaciarlo cuando está lleno. Si el depósito está vacío y abrimos los tres al mismo tiempo, ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?. Razona la respuesta.

9.- En una gran finca el 25 % está destinada al cultivo de cereales, y del resto el 50 % estás dedicado a pradera para el ganado. El resto de la finca es improductivo. Determina la extensión de la finca sabiendo que la parte improductiva supone 9 ha.

10.- Un comerciante ha mezclado 150 kg de arroz, que le ha costado a 1'20 €/kg, con 250 kg de otra clase cuyo precio desconocemos. Sabemos que vendiendo la mezcla a 0'99 €/kg obtiene, además del coste, un beneficio de 50 €. Determina el precio del segundo tipo de arroz.

11.- A las 8 h. de la mañana sale un ciclista con velocidad de 15 km/h., y media hora después sale otro, del mismo punto, en la misma dirección pero sentido contrario, con velocidad de 20 km/h. ¿Qué hora será cuando se encuentren a 130 km de distancia entre sí?

12.- Supongamos que en Enero el litro de gasolina estuviera a 0'88 €/litro, y que después se han producido dos subidas: La primera del 5 %, la segunda del 4 %. Se pide, utilizando los índices de variación:

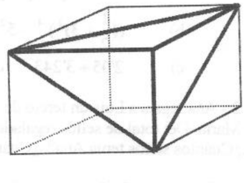
a) Precio después de la segunda subida, dando el resultado con tres cifras decimales.
b) Tanto por ciento de la subida, después de las dos subidas. Resultado con tres decimales.

13.- Tenemos dos circunferencias secantes, cuyos centros distan OO' = 25 cm. Sus radios son r = 10 cm, R = 17 cm. Dibujalas (aproximadamente) y traza una tangente exterior común. Llama M y N los puntos de tangencia. Se pide:

a) El perímetro del cuadrilátero MNOO'.
b) Calcula el área del citado cuadrilátero.

14.-

a) Calcula la superficie total del tetraedro rayado de la figura.
b) Calcula el volumen del citado tetraedro.



15.- Un bidón cilíndrico de 30 cm de diámetro pesa, vacío, 5 kg, y lleno de agua pesa 27'608 kg. Se pide:

a) La superficie total del cilindro.
b) Tenemos el cubo con agua, por ejemplo hasta la mitad de su altura, e introducimos un guijarro quedando totalmente sumergido en el agua. Si observamos que el nivel del agua ha ascendido 5 cm, determina el volumen del guijarro.

16.- a) Escribe la ecuación de la recta que pase por P(-3, 3) y sea paralela al eje ox. ¿Cuánto vale su pendiente?
b)Halla la ecuación de la recta que sea paralela a la recta s: $3x + 2y - 3 = 0$, y pase por el punto P(3, -2).

17.- En una consultora A aplican la siguiente tarifa a sus asociados: Cuota fija de 250 ∈ y 15 ∈ por cada consulta. Otra consultora B aplica: Cuota fija de 300 ∈ y 10 ∈ por cada consulta. Se pide:

a) Expresar en cada caso, mediante una función, el coste en función del número x de consultas, y hacer una representación gráfica (en el mismo sistema de coordenadas).
b) ¿A partir de qué número de consultas interesa la consultora B?

18.- En la figura, PM es tangente a la circunferencia en M. El radio de la circunferencia es r = 10 cm, y OP = 30 cm.

a) Calcula el perímetro y el área del triángulo OPM.
b) Si suponemos que el ángulo en P vale P = 30°, Calcula el área del triángulo curvilíneo PMN.

19.- Dibuja una pirámide de base cuadrada, cuyo lado de la base mide l = 12 cm . La arista mide a = 20 cm. Se pide:

a) El área lateral.
b) El volumen de la pirámide

20.- Tenemos un cono cuya base tiene radio R = 15 cm. Dentro del cono tenemos una esfera de radio r = 10 cm, quedando ésta inscrita al cono (es decir, tangente al cono interiormente). Haz dibujo. Calcula el volumen que queda dentro del cono pero exterior a la esfera.

21.- a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por P(-1, 3) y es paralela al eje oy (eje de ordenadas). Represéntala.
b)Halla la ecuación de la recta que es paralela a la recta s: $5x + 3y - 6 = 0$, y pasa por el punto P(2, 3). Represéntala.

22.- En una empresa de mantenimiento aplican la siguiente tarifa semestral a sus clientes: Cuota fija de 200 ∈ y 15 ∈ por cada servicio realizado. Otra empresa del mismo ramo aplica semestralmente: Cuota fija de 300 ∈ y 10 ∈ por cada servicio prestado. Se pide:

a) Expresar en cada caso, mediante una función, el coste en función del número x de servicios realizados en un semestre, y hacer una representación gráfica (en el mismo sistema de coordenadas).
b) ¿Para qué número de servicios el coste coincide? ¿A partir de qué número de servicios interesa la segunda empresa?

23.- Resuelva las ecuaciones:

a) $(x+1)^2 - 3x = 3$

b) $\sqrt{2x-1}=3$

c) $\frac{x.(x-3)}{2}+\frac{x.(x-2)}{4}=\frac{(3x-2)^2}{8}-1$

24.- Pedro y Luis compran una camisa, no iguales pero que marcan el mismo precio. Pedro consiguió el 12 % de descuento mientras Luis consiguió sólo el 8 %. De esta forma Luis pagó 1'4 euros más que Pedro. ¿Cuál era el precio de cada camisa?

25.- Resuelve el sistema:

a) $\begin{cases} \frac{2x}{5}-\frac{y}{3}=\frac{1}{15} \\ -15x+15y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2-y^2=9 \\ x-y=0 \end{cases}$

26.- Pedro ha comprado en el kiosco 2 bolígrafos y 3 lápices por 1'70 euros. Un rato después su amigo Juan ha pagado en el mismo kiosco 2'40 euros por 4 lapiceros y 3 bolígrafos. Determina el precio de un bolígrafo y de un lapicero.

27.- El padre de Luis tiene actualmente 3 veces la edad de su hijo. Hace 5 años la edad de Luis era la cuarta parte de la de su padre. Determina sus edades actuales.

28.- A las ocho de la mañana sale de A un móvil con velocidad de 130 km/h. Media hora después sale de B otro móvil, en la misma dirección y sentido que el anterior, con velocidad de 120 km/h. La distancia entre A y B es de 105 km

a) ¿A qué hora alcanzará el primero al segundo?
b) ¿A qué distancia de A se produce el alcance?

29.- Resuelva las ecuaciones:

a) $(x+1)^2-3x=3$

b) $\sqrt{2x-1}=3$

c) $\frac{5x-6}{x}=x$

30.- Un comerciante mezcla 250 kg de arroz que costó a 0'60 €/kg con 150 kg de otra clase que costó a 1'20 €/kg. ¿A qué precio tiene que vender la mezcla si desea obtener un beneficio de 60 €.

31.- A las ocho de la mañana sale de A un móvil con velocidad de 130 km/h. Media hora después sale de B otro móvil, en la misma dirección y el mismo sentido que el anterior, con velocidad de 120 km/h. La distancia entre A y B es de 110 km

a) ¿A qué hora alcanzará el primero al segundo?
b) ¿A qué distancia de A se produce el alcance?

Actividades y Añoranzas:

Bachillerato y Ciclos de F.P.

1º Bach. **Alumnos con las Mate. Pendiente** **Final** **9/ 05/ 05**

Nombre .... **Grupo ....** **Número ....** **Valor: ....**

1.- a) Simplifica y opera: $\sqrt{32}-\frac{\sqrt{50}}{2}+\frac{5}{\sqrt{18}}$

b) Racionaliza la expresión: $\frac{1}{2.\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

c) Opera y simplifica. $\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}}$

2.- Resuelve las ecuaciones: a) $\frac{x}{3}.(x-1)-\frac{x}{4}.(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0$

b) $\sqrt{5x+6}=3+2x$

3.- La madre tiene actualmente 27 años más que su hija, y dentro de 12 años la edad de la madre será el doble que la de la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada una ?

4.- Resuelve los sistemas: a) $\begin{cases}\frac{x+1}{3}+y=1\\ \frac{x-3}{4}+2y=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y+3=0\\ x^2+y^2=5\end{cases}$

5.- Tres empresas A, B y C aportan 2,3 y 5 millones de euros para iniciar la empresa. A los 5 años reparten beneficios en proporción al capital invertido inicialmente. Se sabe que a C le han correspondido 189.000 € más que a B. ¿ A cuánto ascendieron los beneficios ?

$$$$$$$$$$$$$$$$$$

6.- a) Representa sobre una recta el conjunto de valores de x que verifican: $|3x-6|\leq 3$

b) Determina el conjunto de los valores de x para los cuales esté bien definida la raíz cuadrada (Resultado en forma de intervalos) $\sqrt{27-3.x^2}$

7.- a) Resuelve la ecuación: 2.log(x) = log(27) + log(4) – log(3)

b) Determina el valor de x en las siguientes igualdades:
$\log_x(125)=3$, $\log_3(x)=4$

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x}-5.2^x+4=0$ b) $4^{2x-1}=0'25$ c) $\begin{cases}7^{x+y}=49^3\\ 7^{x-y}=49\end{cases}$

9.- Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

10.- Estudia su continuidad y representa la función: $f(x)=\begin{cases}x+1, & si\ x\in[-3,0)\\ x^2-2x+1, & si\ x\in[0,3)\\ 4, & si\ x\in[3,8)\end{cases}$

Septiembre: **2º Bach.(CC.SS.)** **/ 09/ 05**

Nombre .... **Grupo ....** **Número ....** **Valor: ....**

1.- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$, calcula A^2

b) Calcula todos los valores de x e y para los cuales se verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Valor: 3, 7

2.- a) Estudia el siguiente sistema dependiendo de los valores que tome el parámetro a": $\begin{cases} x - ay + z = a \\ x + y + z = 2 \\ -ax + 2y - z = 2a + 1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, por el método de Crámer, para un valor de "a" que lo haga compatible y determinado.

Valor: 6, 4

3.-Una tienda posee tres tipos de conservas cárnicas: A, B y C. Un cliente compra el primer mes 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, siendo 500€ el total abonado. Al mes siguiente compra 20 unidades de A y 25 de C, siendo 415€ el total abonado. Se sabe que el precio medio de los tres productos es de 9€/unidas. Expresa el enunciado mediante un sistema de ecuaciones y resuélvelo por el método de Gauss para obtener el precio de cada producto.

Valor: 10

4.-a) Halla los valores de x para los cuales la matriz A no admite inversa: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & x \end{pmatrix}$

b) Resuelva la ecuación matricial: $X.A + B = I$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor: 5, 5

$$$$$$$$$$$$$$$

1.- a) Disponemos de un dado trucado de cuatro caras numeradas del 1 al 4, y se sabe que P(4)=4.P(1), P(3)=3.P(1), P(2)=2.P(1), donde P(i) indica la probabilidad de que resulte la cara número "i". Determina el valor de P(i), para cada i = 1, 2, 3, 4

b) Disponemos también de dos urnas: U_1 con 1 bola roja y 2 verdes; U_2 con 2 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos el dado anterior y, si resulta número par tomamos una bola de U_1, en otro caso la tomamos de la urna U_2. Determina la probabilidad de que sea verde.

Valor: 4, 6

2.- A) De dos sucesos A y B se sabe que P(A)= 0'6, P(B)= 0'7, $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'3$

Calcula : $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$

B) En una distribución N(18, 4): a) Determina el valor de $P(11 < X < 25)$

b) Halla k tal que $P(x < k) = 0,6331$

Valor: 4, 6

3.- En un I.E.S. hay tres profesores de Física. Cuando un alumno se matricula tiene igual probabilidad de que le asignen uno u otro profesor de Física. La probabilidad de obtener nota final un sobresaliente con el profesor A es 0'3, la de obtenerla con el profesor B es 0'28, y la de obtenerla con el profesor C es 0'35.

a) Calcula la probabilidad de que un alumno matriculado en Física obtenga nota final de sobresaliente.
b) Sabiendo que un alumno ha obtenido nota final de sobresaliente, halla la probabilidad de que le haya tocado el profesor C.

Valor: 5, 5

4.- Considérese una población en la que se estudia una característica X que sigue una distribución normal de media $\mu = 12$ y varianza $\sigma^2 = 16$. Se pide:

a) Probabilidad de que un individuo de la población, elegido al azar, tenga la característica X con valor superior a 14.

b) Se considera una muestra aleatoria de tamaño n = 9. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ tenga un valor superior a 14 ?

Valor: 5, 5

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

1.- Dada la función $$f(x)=\begin{cases} a-2x, & si \quad x \leq -1 \\ -x^2+4x-3, & si \quad -1 \prec x \leq 4 \\ 5+bx, & si \quad x \succ 4 \end{cases}$$

a) Determina los valores de "a y b" para que sea continua en R
b) Represéntala para los valores obtenidos.

Valor: 4, 6

2.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4}$, Se pide:

a) Dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
b) Estudia sus asíntotas obteniendo su ecuación y comportamiento de la curva en relación con ellas.
c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos y su gráfica.

Valor: 3, 3, 4

3.- Sea la función $f(x)=x^2+ax+8$.

a) Determina el valor de "a" para que la recta tangente en el punto de abscisa x = 6 corte al eje de abscisas (eje ox) en x = 14/3.
b) Calcula el valor del área limitada por la curva y = f(x), el eje ox, y las rectas x = 4, x = 6.

Valor: 5, 5

4.- En un espacio que tiene forma de semicírculo de diámetro 20 m deseamos construir un jardín de forma rectangular, y de modo que quede inscrito en el semicírculo. (Uno de los lados debe quedar sobre el diámetro del semicírculo). Halla las dimensiones del citado jardín rectangular si deseamos que tenga área máxima.

Valor: 10

Control-2   25/2/05   2º Bach-A   probabil.

1.- Sol.: a) Se tiene que cumplir:

$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=1$;

$P(1)+2P(1)+3P(1)+4P(1)=1 \Rightarrow [1+2+3+4]\cdot P(1)=1 \Rightarrow \boxed{P(1)=\frac{1}{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2)=\frac{2}{10}$; $P(3)=\frac{3}{10}$; $P(4)=\frac{4}{10}$;

b) $P(\text{"nº par"})=P(2)+P(4)=\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=\boxed{\frac{6}{10}}$;

$P(\text{"nº impar"})=\boxed{\frac{4}{10}}$;

$P(V)=P(\text{par})\cdot P(V/_{\text{par}})+P(\text{imp.})\cdot P(V/_{\text{imp.}})=\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{5}=$
$=0'4+0'24=\boxed{0'64}$

— o —

2.- Sol.: a) $\text{nº c.p.}=C_{20,3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2}=20\cdot 19\cdot 3=\boxed{1140}$

(*) S ≡ "De las 3 sabe al menos 2" ≡ "Aprueba"

$\text{nº c.f.}=\left[\text{nº casos que sabe sólo dos}\right]+\left[\text{nº casos que sabe tres}\right]=C_{12,2}\cdot C_{8,1}+C_{12,3}=$
$=528+220=\boxed{748}$

$P(\text{"Aprobar"})=\frac{748}{1140}=\frac{374}{570}=\boxed{0'66}$

b) S ≡ "De los tres sólo sabe uno";

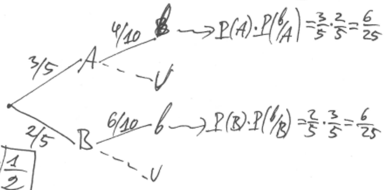
$\text{nº c.f.}=C_{12,1}\cdot C_{8,2}=12\cdot 28=\boxed{336}\Rightarrow P(S)=\frac{336}{1140}=\boxed{0'29}$

— o —

3.- Sol.: $\begin{cases} P(B)=\frac{2}{3}\cdot P(A) \\ P(B)+P(A)=1 \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{2}{3}P(A)+P(A)=\frac{5}{3}P(A)\Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{3}{5}}$, $P(B)=\frac{2}{5}$

a) S ≡ "Ganar el juego";

$P(S)=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\boxed{\frac{12}{25}}=0'48$



b) $P(B/S)=\frac{P(B)\cdot P(S/B)}{P(S)}=\frac{6/25}{12/25}=\frac{6}{12}=\boxed{\frac{1}{2}}$

(*) Otra forma: a) $P(\text{"Aprobar"})=\left[\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{8}{18}+\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{11}{18}+\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{11}{18}\right]+\left[\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}\right]=\cdots=\boxed{0'66}$

$=3\cdot 0'154+0'192=\boxed{0'654}$

(operar con 3 decimales sólo).

BIBLIOGRAFÍA

Geometría Vectorial
Norberto Cuesta Dutari,
Ed.: 1968, Editorial Alhambra S.A.