TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 13

Complementos:

Algebra Superior
Suma de Series
Algunos teoremas
Sistemas de Referencia: Ángulos de Euler,
Transformaciones en el plano y en el espacio

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

Edición Septiembre 2020
Editado en España

ISBN:

Depósito Legal:

Resumen de LA OBRA COMPLETA

Vol.1: Números: Naturales y Enteros, Racionales e Irracionales, Reales y Complejos. Sistemas de numeración. Clases de restos módulo m. Sucesiones. Progresiones y Series numéricas. Fracciones continuas. Notación exponencial. Proporcionalidad geométrica. El Número de Oro y el Rectángulo áureo, Pentágono regular. Colección de problemas resueltos.

Vol.2: Álgebra básica: Polinomios y Fracciones, Ecuaciones y su resolución. Expresiones radicales en x. Ecuaciones con radicales. Inecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas no lineales. Sistemas de Inecuaciones. Descomposición de p(x)/q(x) en suma de fracciones simples. Estudio de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Sumas simples de las raíces de p(x) y relación con sus coeficientes. Colección de problemas resueltos.

Vol.3: Parte I
Proporcionalidad numérica: Directa, Inversa. Cálculo mercantil. Temas afines: Mezclas y Aleaciones, Fuentes y Grifos, Móviles, Repartos proporcionales. Proporcionalidad geométrica. Teorema de Thales. Combinatoria ordinaria y con repetición. Potencias del binomio y del trinomio.

Parte II
Teoría de conjuntos, Particiones, Función característica, Conjuntos bien ordenados, Función de elección, Principios de inducción. Álgebra de proposiciones, Tablas de verdad, Implicación lógica. Operadores sobre un conjunto, Estructuras. Álgebra de Boole.

Colecciones de Problemas de gran interés: De Combinatoria, De Sucesiones, De Progresiones, De Cálculo mercantil, De Conjuntos.

Vol.4: Geometría descriptiva en el plano. Polígonos. Perímetros y Áreas. Estudio del Triángulo y de la Circunferencia. Semejanza. Geometría descriptiva en el Espacio. Poliedros. Superficies y Volúmenes de cuerpos geométricos. Partes de la esfera. Trigonometría en el plano y sus aplicaciones. Las Cónicas y su Ecuación general. El Número áureo y el Rectángulo áureo. El Pentágono regular. Problemas resueltos.

Vol.5: Geometría analítica en el plano y en el Espacio. Incidencia y Cálculo de distancias. Estudio de la Circunferencia, Potencia y Ejes radicales. Vectores fijos, Vectores libres. Los Espacios vectoriales V2, V3. Producto Escalar de dos vectores y Ortogonalidad. Producto Vectorial y Producto Mixto de vectores y sus aplicaciones. Espacio vectorial Vn: Dependencia lineal, Sistema generador, Sistema libre, Bases y cambio de base. Sistemas de referencia. Ampliación de Trigonometría. Suplementos sobre Geometría analítica: Cónicas y Cuádricas. Colección de Problemas de gran interés.

Vol.6: Funciones reales básicas elementales y trascendentes. Funciones reales en general. Funciones cuya expresión f(x) se obtiene empíricamente. Interpolación. Sucesiones, Conceptos básicos de Topología, límites y continuidad. El número e. Concepto de Derivada en un punto. Interpretación geométrica. Función derivada de f(x). Derivada de las funciones básicas y trascendentes. Diferencial de f(x). Concepto de Primitiva de f(x): Primitiva de las funciones básicas y trascendentes. Integral indefinida: Métodos básicos de integración.

Sucesiones de Números reales: El Número e, sucesión de Fibonacci. Series de Números reales. Progresiones, Capitalización y Amortización. Criterios de convergencia. Interpolación: Método parabólico progresivo , Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos.

Apéndice I: Sobre límites y continuidad, indeterminaciones y su resolución. Teoremas sobre continuidad. Apéndice II: El límite de sen(x)/x, x -> 0. El Número de oro. Apéndice III: Constantes y Valores notables, Propiedades en los Números combinatorios, Suma de potencias de números naturales, Fórmula Binomial y Multibinomial. Apéndice IV: Logaritmos en base ‘a’ cualquiera, Cambio de base, Ecuaciones y Sistemas con exponenciales y con logaritmos, Uso de la Tabla de logaritmos. Apéndice V: Profundización sobre las Series.

Vol.7: Funciones básicas elementales y trascendentes: Representación gráfica. Derivada y Diferencial en un punto y su interpretación geométrica. Reglas de derivación. Derivadas sucesivas. Diferencial de segundo orden. Funciones y = f(x,y) y Derivadas parciales. Funciones implícitas y Derivación implícita. Aplicación a la Representación gráfica y a los Problemas de optimización. Integral indefinida: Métodos de integración. Concepto de Integral Definida: Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow, Aplicación al Cálculo de áreas. Apéndice I: Dominio de las funciones recíprocas en trigonometría. Funciones hiperbólicas y sus recíprocas. Apéndice II: Sobre Derivabilidad. Apéndice III: Sobre el Teorema de Cauchy. Apéndice IV: Integración de expresiones irracionales. Apéndices V: Integrales Elípticas. Apéndice VI: Integrales Elípticas de Primera y de Segunda especie. Apéndice VII: Integrales Definidas impropias. Colecciones de problemas resueltos. Listados de Prototipos de expresiones integrables.

Vol.8: Aplicación del Cálculo diferencial: Teorema de Fermat, Teorema de Rolle, Teorema de los Incrementos finitos, Otros Teoremas. Conceptos y elementos básicos en el Análisis y Representación gráfica de y = f(x). Funciones de dos variables z = f(x,y) y las Superficies en el Espacio: Derivadas parciales, Segunda derivada. Desarrollo de Taylor. Función implícita, Derivación implícita. Extremos locales y Optimización. Las Cónicas y otras Curvas predefinidas: Lemniscata, Estrofoide, Cicloide, Cardioide, Hipocicloide, Cisoide de Diocles, Folium de Descartes, Envolvente, Espirales, Rasa de n pétalos. Superficies. Superficies predefinidas: La Esfera, Elipsoides, Hiperboloides, Paraboloides, … . Curvas sobre una superficie. Diferencial de arco, Curvatura, radio de curvatura. Diferencial direccional, Gradiente. Iniciación al estudio de las Cuádricas y su relación con el análisis de los extremos locales. Varias Colecciones de problemas resueltos. Apéndice I: Profundiza sobre funciones f(x,y,z) = k y curvas sobre una superficie. Apéndice II: Estudio de las Cuádricas y Extremos locales. Apéndice III: El Resto de Lagrange. Apéndice IV: Listado de derivadas inmediatas. Colección de problemas, Actividades sobre Desarrollo de Taylor.

Vol.9: Integral Definida, Teorema del valor medio, Teorema fundamental del Cálculo, Regla de Barrow. Longitud de un arco de curva, Curva de Viviani. Cálculo de áreas planas. Integral Doble: Cálculo de superficies y volúmenes. Integral Triple: Cálculo de volúmenes. Cálculo de la Superficie y del Volumen de sólidos predefinidos: Zona y Casquete esféricos, Cono esférico, Elipsoide, Paraboloide, Bóveda de Viviani. Cuerpos de revolución: Superficie y Volumen. Revolución de: La Astroide, Cicloide, Cardioide. Integral Curvilínea: Fórmula de Riemann-Green. Integral de Superficie: Fórmula de Stockes, Fórmula de Ostrogradski-Gauss. Apéndice I: Profundización en Métodos de Integración. Apéndice II: Profundización sobre Integral doble y triple, coordenadas curvilíneas. Apéndice III: Complementos, Cambio de coordenadas, Coordenadas curvilíneas, … . Apéndice IV: Complementos, …, La Integral de Euler - Poisson. Colección de Problemas resueltos. Listado de Integrales interesantes.

Vol. 10: Álgebra Lineal: Matrices y Determinantes. Aplicación a los Sistemas lineales: Análisis y resolución, Métodos de Gauss y de Crámer. Espacios vectoriales: Dependencia lineal, Sistema generador y Sistema libre, Bases y dimensión. Aplicaciones Lineales, Endomorfismos, Cambio de base. Espacio Afín, Espacio métrico y Espacio Euclídeo asociados a un Espacio vectorial. Transformaciones geométricas en el Plano y en el Espacio, Cambio de Sistema de referencia, Ángulos de Euler, Determinación de los ángulos de Euler. Apéndice I: Profundización sobre transformaciones en el Plano y cambio de s.d.r.. Apéndice II: Profundización sobre transformaciones en el Espacio y cambio de s.d.r.. Colecciones de problemas resueltos.

Vol.11: Parte I:
Estadística descriptiva en una y en dos variables. Correlación y Rectas de regresión. Teoría y Cálculo de Probabilidades: Regla de Laplace, Probabilidad condicionada, Probabilidad total, Teorema de Bayes. Variable aleatoria y Distribuciones: Funciones de Probabilidad, de Densidad y de Distribución. Distribuciones discretas: Distribuciones Binomial e Hipergeométrica. Distribuciones continuas: Función de Densidad y de Distribución. Distribución Normal, Tipificación, Tabla de la Normal Tipificada y su aplicación. Aproximación de la Binomial mediante una Distribución normal, Ajuste de una Serie de datos mediante una Distribución normal. Colecciones de problemas resueltos.

Parte II: Programación Lineal: Resolución de Problemas Optimización. Interpolación Polinómica: Método progresivo, Método de Lagrange. Colección de problemas resueltos. Apéndice: Sobre Distribución Hipergeométrica y Distribución de Poisson.

Vol.12: Ampliación en el estudio de las Matrices, Teorema de Hamilton – Cayley. Polinomio característico, valores y vectores propios, Diagonalización de matrices. Formas bilineales, Formas cuadráticas. Profundización: Espacios afines, Transformaciones geométricas, Cambio de s.d.r.. Profundización: Geometría Analítica en el Plano y en el Espacio: Cónicas y Cuádricas en cartesianas, sus elementos y clasificación. Geometría Analítica en coordenadas homogéneas: Estudio completo de Cónicas, Cuádricas, Polaridad. Invariantes, Tipo de cónica, Tipo de cuádrica y su ecuación reducida.

Estudio de curvas alabeadas: Tangente, Plano osculador, Normal principal, Binormal, Triángulo intrínseco. Estudio de Superficies: Superficie en general, Regladas y Desarrollables, de Rotación, de Traslación. Plano tangente, Recta normal. Proceso simple y práctico para un Cambio de Sistema de referencia. Cosenos directores de una recta. Orientación en el Plano y en el Espacio.

Complementos/Profundización: Rotación en el Espacio, Teorema de Euler, Ángulos de Euler y su cálculo. Colección de problemas resueltos de gran interés.

Vol.13: COMPLEMENTOS: I: De Álgebra Superior. II: Operadores. III: Transformaciones Proyectivas. IV: De Suma de Series. V: Algunos Teoremas, Sucesión de Fibonacci en la naturaleza. VI: De Geometría, Transformaciones geométricas.

Vol 14: I: Álgebra de vectores: Producto escalar de vectores, Producto vectorial de vectores, Relación de Bibbs , Producto mixto de vectores, Volumen del Tetraedro, Identidad de Lagrange. II: Geometría vectorial: Métodos vectoriales. III: Resultados interesantes Geométrico – Vectoriales: Entre otro: Teorema de Menelao, Teorema del Cuadrilátero, Cuaterna armónica. Razón doble de segmentos, Abscisas proyectivas sobre la recta real ampliada, Correspondencia proyectiva entre dos rectas ampliadas, Proyectividad Involutiva, Teorema del Cuadrivértice de Desargues, Teorema de las Medianas. IV: Todo sobre Geometría en el plano y en el espacio. V: Algunos Teoremas: T. de Ptolomeo, T. geométrico de Euler, T. de Napoleón, Problema de Napoleón. VI: Otros de especial interés: De Programación Lineal, De Cónicas, Añoranzas del Aula.

Cuadernillo 1: Números: 1.- Raíz cuadrada de un número: Justificación. 2.- Raíz cúbica de un número: Justificación. 3.- El Número de Oro y su presencia. La Sucesión de Fibonacci en la naturaleza. (36 págs)

Cuadernillo 2: Estudio de las Cónicas: 1.- La Elipse. Casuística. 2.- La Hipérbola. 3.- La Parábola. 4.- Las Cónicas de Apolonio: Método vectorial. (38 págs)

Cuadernillo 3: De Espacios …: 1.- Espacios vectoriales Euclídeos. 2.- Espacios Euclídeos: En el plano, En el espacio. 3.- Trigonometría. 4.- Productos vectoriales: Producto escalar, Producto vectorial, Producto mixto. Aplicaciones … (54 págs)

Cuadernillo 4: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales. (44 págs)

Cuadernillo 5: Olimpiadas Matemáticas: Ediciones: XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIV, XXX, XXXI, XXXII fase Regional, XXXII fase Nacional. Más dos problemas de interés: Vaso con agua – vaso con vino; los dos trenes y la mosca. (126 págs)

Cuadernillo 6: 1: Teoría de grafos. 2: Aplicación en El problema de los mapas coloreados. 3: Aplicación en el Teorema de Euler para los poliedros. (96 págs)

ÍNDICE

pág.

I De Álgebra Superior

1.1.- Sumas Simples de las raíces de una Ecuación. Relación con los coeficientes

Sea un polinomio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_ix^{n-i} + \dots + a_n \qquad (1)$$

Las raíces de P(x) = 0 las designamos mediante: $x_1, x_2, \dots ,x_n$. Entonces podemos expresarlo así

$$P(x) = a_0 . \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \qquad (2)$$

Al hacer el producto obtenemos, prescindiendo del factor a_0,

$$(2) = (x-x_1).(x-x_2). \dots .(x-x_{n-1}).(x-x_n) =$$

$$= x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n).x^{n-2} - \dots . +-$$

$$+- (x_1x_2x_3{\dots}x_n)$$

Identificando coeficientes de las expresiones (1) y (2) resulta las relaciones

$$a_1 = -a_0. (x_1+x_2+ \dots +x_n)$$

$$a_2 = a_0. (x_1x_2+x_1x_3+ \dots +x_1x_n)$$

$$a_3 = -a_0.(\text{Suma producto de ternas})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3)$$

$$a_n = (-1)^n.a_0. (x_1x_2x_3{\dots}x_n)$$

Por otro lado, tomando el logaritmo de la expresión

P(x) = $a_0 . \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, tengo ln(P(x)) = ln($a_0$) + $\sum_{i=1}^{n} \ln(x - x_i)$, y derivando esta igualdad

$$\frac{P(x)'}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}$$
(4)

Si tomo la fracción $\frac{1}{x-x_1}$ y hago la división tengo

$$\frac{1}{x-x_1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x_1}{x})} = \frac{1}{x} \cdot (1 + \frac{x_1}{x} + \frac{x_1^2}{x^2} + \frac{x_1^3}{x^3} + \cdots)$$
(5)

que es convergente para valores de x tales que $\left|\frac{x_1}{x}\right| < 1$.

Para llegar a (4) debemos recordar cómo realizamos la división $\frac{1}{(1-\frac{x_1}{x})}$:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - \frac{x_1}{x} \\ \hline
 & 1 + \frac{x_1}{x} + \frac{x_1^2}{x^2} + \ldots + \frac{x_1^m}{x^m} + \ldots \\
-1+\frac{x_1}{x} & \\ \hline
\quad \frac{x_1}{x} & \\
\quad -\frac{x_1}{x} + \frac{x_1^2}{x^2} & \\ \hline
\qquad \frac{x_1^2}{x^2} &
\end{array}$$

(6)

Continuando tanto como deseemos. Del mismo modo para las restantes fracciones de la expresión (4).

Si sumamos estos resultados y los llevamos a (4) obtenemos

$\frac{P(x)'}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}$ $= \frac{1}{x} . \left(1 + \frac{x_1}{x} + \frac{x_1^2}{x^2} + \frac{x_1^3}{x^3} + \cdots\right)$ +

$+ \frac{1}{x} . (1 + \frac{x_2}{x} + \frac{x_2^2}{x^2} + \frac{x_2^3}{x^3} + \cdots) + \ldots + \frac{1}{x} . (1 + \frac{x_n}{x} + \frac{x_n^2}{x^2} + \frac{x_n^3}{x^3} + \cdots) =$

$= (1 + 1 + 1 + \cdots + 1).\frac{1}{x} + (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n).\frac{1}{x^2} +$

$+ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2).\frac{1}{x^3} + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3).\frac{1}{x^4} + \ldots +$

$+ (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}).\frac{1}{x^n} +$

$+ (x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n).\frac{1}{x^{n+1}} + \ldots + (x_1^m + x_2^m + x_3^m + \cdots + x_n^m).\frac{1}{x^{m+1}} + \ldots$

Si hago $s_0 = (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$

$s_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$

$s_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$

$s_3 = \ldots\ldots..$

………….

$s_{n-1} = (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1})$

$s_n = (x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_n^n)$

podemos expresar

$$\frac{P(x)'}{P(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \dots + \frac{s_{n-1}}{x^n} + \frac{s_n}{x^{n+1}} + \dots + \frac{s_m}{x^{m+1}} + \dots \quad (7)$$

convergente cuando x cumple: $|\frac{x_i}{x}| < 1$, o bien $|x| > |x_i|$, para todo i.

Def.: Llamamos "Sumas simples" a los valores s_i, i = 0,1,2,..,n,…

Si hacemos la división $\frac{P(x)'}{P(x)}$ e identificamos los coeficientes obtenidos con los del miembro derecha de (6) encontramos el valor de cada una de las sumas simples p_i .

Ejemplo: Para $P(x) = x^3 + px + q$, obtenemos

$s0 = 3$, $s1 = 0$, $s2 = -2p$, $s3 = -3q$, $s4 = 2p^2$, $s5 = 5pq$, …

Observa que p_0 toma siempre valor = grado de p(x).

Relación con los coeficientes:

Demostraremos que las funciones simples s_i y los coeficientes a_j están relacionados como sigue

$a1 = -s_o$

$2.a2 =-(a1.s_1 + s_2)$

$3.a3 = -(a1.s_2 + a2.s_1 + s_3)$

$4.a4 = -(a1.s_3 + a2.s_2 + a3.s_1 + s_4)$

$n.an = - (\sum_{i=1}^{n-1} a_i . s_{n-i} + s_n)$

…………………….

1.2.- Discriminante de una Ecuación P(x) = 0

Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_ix^{n-i} + \dots + a_n$ (8)

y sus raices: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Def.: Llamamos "Discriminante de de P(x) = 0" al siguiente valor:

$$Dis = a_0^{n(n-1)} . D^2 \text{ , donde}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Tenemos D = (Determinante de Vandermonde) =

$= (x_n-x_1). (x_{n-1}-x_1). \dots\dots\dots\dots . (x_2-x_1)$.

$. (x_n-x_2). (x_{n-1}-x_2). \dots \quad . (x_3-x_2)$.

$. (x_n-x_3). (x_{n-1}-x_3). \dots . (x_4-x_3)$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$. (x_n-x_{n-1})$

igualdad que demostramos en (*).

con lo cual

$$Dis = a_0^{n(n-1)}. D^2 = a_0^{n(n-1)}. \prod_{i<j}^{j=n,\dots,2}(x_j - x_i)^2 \qquad (9)$$

Por otro lado tenemos D^2 =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| . \left| \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| =$$

= (Hechos algunos cálculos se ve que …) =

$$= \begin{vmatrix} s_o & s_1 & s_2 & \dots . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots . & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots . & \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots . & s_{2(n-1)-1} \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots . & s_{2(n-1)} \end{vmatrix} . \qquad (10)$$

Por tanto, si calculo las Sumas simples tengo también el valor del discriminante.

Ejemplo: Para el anterior

$$\text{Dis} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix}$$

Corolarios:

a) P(x) = 0 tiene soluciones dobles si, y sólo si, Dis = 0
b) El siguiente cálculo nos dice que:

D > 0 --- > Número par de (pares) de soluciones complejas

D < 0 --- > Número impar de (pares) de soluciones complejas.

En efecto: $[(a + bi) – (a – bi)]^2 = [2bi]^2 = -4.b^2$. (Cada par de soluciones complejas aporta una vez el signo -)

(*) Determinante de Vandermonde Elementos de Matemáticas, Rey Pastor, A. Castro, …) : Es el determinante de la matriz del mismo nombre

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & \dots & h & k \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & h^2 & k^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & \dots & h^3 & k^3 \\ & & \dots\dots\dots\dots.. & & & \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & h^{n-1} & k^{n-1} \end{pmatrix}$$

Para calcular det(M) reduzco a ceros la primer columna restando de cada fila la fila anterior multiplicada por a (comenzar por la última fila):

$$D = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & \dots & h-a & k-a \\ 0 & b.(b-a) & c.(c-a) & \dots & h.(h-a) & k.(k-a) \\ 0 & b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & \dots & h^2.(h-a) & k^2.(k-a) \\ & & \dots\dots\dots\dots.. & & & \\ 0 & b^{n-2}.(b-a) & c^{n-2}.(c-a) & \dots & h^{n-2}.(h-a) & k^{n-2}.(k-a) \end{pmatrix}\right|$$

=

= (Desarrollando por la primer columna, y después sacando el factor común de cada una de las columnas) =

$$= (b-a).(c-a). \dots .(h-a).k-a). \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b & c & \dots & h & k \\ b^2 & c^2 & \dots & h^2 & k^2 \\ & & \dots\dots\dots\dots. & & \\ b^{n-2} & c^{n-2} & \dots & h^{n-2} & k^{n-2} \end{vmatrix} =$$

= (Aplicando la misma reducción que en la inicial) =

= (b-a).(c-a). … .(h-a).k-a).

(c-b). … .(h-b).(k-b).

…………………

.(h-g).(k-g).

.(k-h)

1.3.- Acotación de las raíces de P(x)

Sea el polinomio $P(x) = a_{0.}x^n + a_{1.}x^{n-1} + \dots + a_{i.}x^{n-i} + \dots + a_n$,

Las raíces de P(x) = 0 las designamos mediante: $x_1, x_2, \dots ,x_n$.

Tomo un valor L > 0 y hago la división P(x) : (x – L), y tengo la igualdad

$P(x) = (x-L).[\ c_{0.}x^{n-1} + c_{1.}x^{n-2} + \dots + c_{i.}x^{n-i} + \dots + c_{n-1}] + ro$

Si el resto ro es cero entonces x = L es una solución.

Si ro > 0, y también todos los coeficientes son $c_j >= 0$, entonces P(x) no se anula para ningún valor M > L. Esto es, L es una cota superior de las raíces positivas de P(x).

Si en p(x) sustituyo x por 1/y obtengo q(y). Si x = x1 es una solución de p(x) = 0 , entonces y1 = 1/x1 lo es de q(y) = 0, y recíprocamente. Esto nos lleva a que si L' es una cota superior de las raíces positivas de q(y), entonces l = 1/L' es una cota inferior de las raíces positivas de p(x):

$$q(y) = a_0 + a_{1.}y + \ldots + a_{i.}y^{n-i} + \ldots + a_{n.}y^n ,$$

Las soluciones positivas de p(x) = 0 están en el intervalo [lp, Lp].

Si en p(x) sustituyo x por –x obtengo q(x) = (Cambiar el signo del coeficiente en los términos de grado impar. El término independiente a_n no cambia):

$$q(x) = a_{0.}x^n - a_{1.}x^{n-1} + \ldots +- a_{i.}x^{n-i} + \ldots +- a_n$$

donde he supuesto que n es par.

Si x = x1 es una solución de p(x) = 0, x = -x1 lo es de q(x) = 0, y recíprocamente. Esto nos lleva a que si L' > 0 es una cota superior de las raíces positivas de q(x), entonces Ln = - L' < 0 es una cota inferior de las raíces negativas de p(x):

Si en q(x) sustituyo x por 1/y obtengo

$$r(y) = q(x) = a_0 - a_{1.}y + \ldots +- a_{i.}y^{n-i} + \ldots +- a_{n.}y^n$$

Si x1 es una solución negativa de p(x), entonces y1 = - 1/x1 es una solución positiva de r(y) = 0. De este modo, si ln < 0 es una cota superior de las raíces negativas de p(x), entonces L' = - 1/ln > 0 es una cota inferior de las raíces positivas de r(y). Por lo cual determinaré una cota inferior L' de las raíces positivas de r(y), y tengo ln = - 1/L', cota superior de las raíces negativas de p(x):

Las soluciones negativas de p(x) = 0 están en [Ln, ln]

(*) Lo anterior lo llamamos “Método de Laguerr- Thibault”

Ejemplos 1: a) $p(x) = 2x^4 +4x^3 -59x^2 -61x +30$

Cotas: Lp = 6, lp = 1/3, Ln = -7, ln = -1

b) $p(x) = 3x^4 -18x^3 +6x^2 -18x +73$

Cotas: Lp = 6, lp = 1, (no contiene raíces negativas)

Ejemplo2: Aplicarlo a estos casos

$$P(x) = x^3 +4x^2 +2x -2$$

Analiza sus soluciones reales y/o imaginarias

Sol.- Caso b), resulta: Lp = 1, ln = -4 --- > [-4, 1]

	| 1	4	2	-2	
2	|	2	12		
	1	6	14	….	pruebo con un valor menor

	| 1	4	2	-2
1	|	1	5	7
	1	5	7	5

$P(-x) = -x^3 +4x^2 -2x -2$ --- > $x^3 -4x^2 +2x +2$

	| 1	-4	2	2
3	|	3	-3	-3

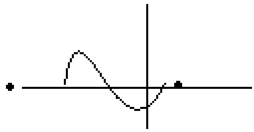
	1	-1	-1	-1
	1	-4	2	2
4		4	0	8
	1	0	2	10

$P(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 2$, $P'(x) = 3x^2 + 8x + 2$

$3x^2 + 8x + 2 = 0 \dashrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{16-6}}{2.3} =$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3} \cong \begin{cases} -0{,}28 \\ -2{,}39 \end{cases}$

Sus tres raíces son reales



Es oportuno recordar aquí el Método de Newton para acotar raíces, ya que hace uso de esta sucesión de polinomios.

Método de Newton (Para acotar raíces)

Sea L un valor real, y considero el desarrollo de Taylor de P(x)

$P(x) = P(L) + (x-L).P'(x) + (x-L)^2.P''(x)/2! + \dots + (x-L)^n.P^{(n}(x)/n!$

Si los valores $P(L), P'(L), P''(L), \dots, P^{(n}(L)$ son todos >= 0, entonces la expresión

$$P(L) + (x-L).P'(L) + (x-L)^2.P''(L)/2! + \dots + (x-L)^n.P^{(n}(L)/n!$$

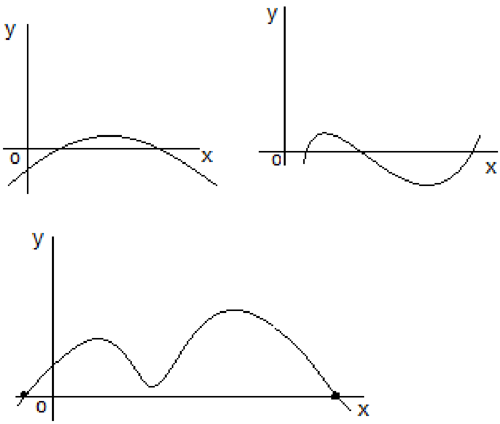
no se anula para ningún valor xo > L. Por lo cual L es cota superior de las soluciones reales de P(x) = 0.

Ejemplo 3: Aplíquese al caso $P(x) = 3x^4 - 18x^3 + 24x^2 - 18x + 73$

1.4.- Número de raíces de P(x) en un intervalo (a, b) Separación de raíces

A) Método de Rolle

La afirmación más simple parece ser la debida al Matemático Rolle (Teorema de Rolle), cuya evidencia queda mostrada gráficamente:



"Entre dos soluciones consecutivas de p(x) = 0 existen un número impar de soluciones de p '(x) = 0, y siempre al menos una.

También se evidencia que entre dos soluciones consecutivas de p '(x) = 0 existe a lo más una solución de p(x) = 0.

(Es consecuencia del conocido Teorema de Rolle)

Si y1, y2 son dos soluciones de p ‘(x) = 0, tenemos dos posibilidades:

- signo de p(y1) <> signo de p(y2) -- > p(x) = 0 contiene en el intervalo (y1, y2) un número impar de soluciones. Si y1, y2 son soluciones consecutivas de p’(x) = 0, entonces p(x) sólo contiene una solución en el intervalo (y1, y2).

- signo de p(y1) = signo de p(y2) -- > p(x) = 0 contiene un número par de soluciones en (y1, y2), ninguna si y1, y2 son consecutivas.

Def.: Sucesión de Rolle:

Si hemos obtenido las cotas Lp y Ln, y tenemos dentro del intervalo

[Ln, Lp] las soluciones de p’(x) = 0, ordenadas de menor a mayor, y1, y2, …, yk, llamamos sucesión de Rolle a la sucesión

Ln, y1, y2, …, yk, Lp

Ejemplo 1

$p(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $p'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$

p’(x) = 0 -- > y1 = -1, y2 = 1.

Cotas para p(x) = 0 -- > Ln = -2, Lp = 2

Con estos datos construimos

	-2	-1	1	2
sig(p(x))	-	+	-	+

Por tanto: Al pasar de y1 a y2 -- > una variación de signo -- > 1 sol. de p(x)

Lo mismo en los intervalos (-1, 1), (1, 2)

Nota: Donde decimos ”una solución” debemos entender “un número impar” de soluciones.

Puedo profundizar su análisis a partir de lo obtenido: En el intervalo

(-1, 1) hacemos

	-1	0	1
sig(p(x))	+	+	-

y por tanto la solución (ó un número impar) está en (0, 1)

Ejemplo 2

$p(x) = x^5 – x^3 - 2x + 1$ --- > $p'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$

(Continúe el alumno)

Ejemplo 3

Sea $P(x) = 12x^4 – 40x^3 - 5x^2 - 6x + 18$

Se puede comprobar que sus raíces positivas están en (1, 4), y las negativas en (-1/3, -1).

Calculando: P(-1) = 20, P(1) = 30

Las soluciones enteras estarán en la lista, -1, 1, 2, 3, 4

Por Ruffini compruebo que x = 3 es solución. Divido por (x -3) y me queda

$Q(x) = 12x^3 - 4x^2 - 17x - 6$

Las raíces fraccionarias de ésta estarán en lista de fracciones teniendo en cuenta que:

Númerador: +-1, +-2, +-3, +-6   (divisores de 6)

Denominador: +-2, +-3, +-4, +-6, +- 12   (divisores de 12)

Excluimos las fracciones que quedan fuera de las cotas, quedando (compruébelo el alumno):

-1/2, -2/3, 3/2

Al hacer comprobaciones (Ruffini) concluimos que estas son las otras tres raíces reales.

B) Método de Sturm. Polinomios de Sturm

Sea P(x) y su derivada P ‘(x). Hacemos la división P(x) : P’(x) y llamo R1(x) al resto.

Llamo P1(x) = P(x), P2(x) = P ’(x), P3(x) = - R1(x), y hago la división

P2(x) : P3(x), obteniendo el nuevo resto R2(x), que llamo P4(x) = -R2(x).

Continuamos haciendo P3(x) : P4(x) y haciendo P5(x) = -R3(x).

Def.: Llamamos sucesión de Sturm a la sucesión obtenida

p1(x), p2(x), p3(x), p4(x), …

Si tengo un intervalo (a, b) podemos calcular el valor de la anterior en cada uno de los extremos, resultando dos sucesiones de valores

p1(a), p2(a), p3(a), p4(a), …

p1(b), p2(b), p3(b), p4(b), …

Si llamo Va al número de variaciones de signo en la sucesión asociada a x = a, y llamo Vb al de la sucesión asociada a x = b, entonces …

Teorema de Sturm:

“El número de raíces reales de P(x) en el intervalo (a, b) coincide con el valor Va – Vb (en valor absoluto)”.

Ejemplo: $P(x) = x^3 - 4x - 1$. Las cotas son Ln = -2, Lp = 3

Sucesión de Sturm: $p1(x) = P(x)$, $p2(x) = P'(x) = 3x^2 - 4$, y la división $p1(x) : p2(x)$ nos da $p3(x) = -Resto = 8x + 3$, y $p2(x) : p3(x)$ nos proporciona $p4(x) = -Resto = 283/8$.

Montamos la tabla:

	-2	-1	0	1	2	3
sig(p1)	-	+	-	-	-	+
sig(p2)	+	-	-	-	+	+
sig(p3)	-	-	+	+	+	+
sig(p4)	+	+	+	+	+	+

Podemos concluir que P(x) = 0 tiene soluciones:

En (-2, -1): Va = 3, Vb = 2 -- > una solución

En (-1, 0):   Va = 2, Vb = 1 -- > una solución

En (0, 1):   Va = 1, Vb = 1 -- > ninguna

En (1, 2):   Va = 1, Vb = 1 -- > ninguna

En (2, 3):   Va = 1, Vb = 0 -- > una solución

Total tres soluciones en (-2, 3). Este mismo resultado nos da si consideramos sólo las sucesiones de signos correspondientes a (-2, 3).

Observar: Sabiendo que Ln, Lp son las cotas, parece muy útil el análisis anterior porque nos da las posibles soluciones enteras en (Ln, Lp). Estas soluciones enteras las tenemos cuando $p1(y_k) = 0$.

Observa que en este ejemplo no hay soluciones complejas.

Ejemplo 1 (Cómo obtener la sucesión de Sturm):

$P(x) = 3x^5 -4x^3 +2x^2 -5x +1$ < --- $p1(x)$

$P'(x)= 15x^4 -12x^2 +4x -5$ < --- $p2(x)$

Divisiones sucesivas aplicando Ruffini:

$p1(x) : p2(x)$

Transformo $p2(x)$: $3/15.p2(x) = 3x^4 -3./15.12x^2 +3/15.4x -3/15.5$

$= 3x^4 -12/5x^2 +4/5x – 1$

$3x^5 \quad -4x^3 +2x^2 -5x +1$ | $3x^4 -12/5x^2 +4/5x – 1$

x

$-3x^5 +12/5x^3 -4/5x^2 +x$

R1 = $-8/5x^3 +6/5x^2 -4x +1$ < ---- $p3(x) = 8/5x^3 -6/5x^2 +4x -1$

$p2(x) : p3(x)$

Transformo $p3(x)$: $15.5/8.p3(x) = 15x^3 -15.5/8.6/5x^2 +15.5/8.4x-15.5/8$

$= 15x^3 -45/4x^2 +75/2x -75/8$

$15x^4 \;\; -12x^2 \;\; +4x \;\; -5$ | $15x^3 -45/4x^2 +75/2x -75/8$

$x +3/4$

$-15x^4 +45/4x^3 -75/2x^2 +75/8x$

$+45/4x^3 - 99/2x^2 + \ \ 107/8x -5$
$-45/4x^3 + \ 135/16x^2 - \ 225/8x + \ 225/32$

R2 = $-657/16x^2 \ - 118/8x + \ 65/32$ < ----

p4(x) = $657/16x^2 +118/8x -65/32$

p3(x) : p4(x)

Transformo p4(x): 8/5.16/657.p4(x) =

$= 8/5x^2 +8/5.16/657.118/8x -8/5.16/657.65/32$

$= \ 8/5x^2 +1888/3285x - 52/657$

$8/5x^3 \quad -6/5x^2 \quad +4x \quad -1$ | $8/5x^2 +1888/3285x - 52/657$

$x - 5830/3285.5/8$

$-8/5x^3 -1888/3285x^2 +52/657x$

$-5830/3285x^2 + 2680/657x -1$

$+5830/3285x^2 +5830/3285.1888/3285x-5830/3285.52/657$

R3 = 2201408/2158245x -60632/431649

< ---- p5(x) = 2201408/2158245x -
60632/431649

Coeficientes en decimal: p4(x) = $41,063x^2 +14,750x -2,031$

p5(x) = 1,020x -0,140

p4(x) : p5(x)

Transformación de p5(x): (41,063 : 1,02).p5(x) = 41,063x -5,636

$41{,}063x^2 + 14{,}750x - 2{,}031 \quad | \ 41{,}03x - 5{,}636$

$x + 0{,}497$

$-41{,}063x^2 + 5{,}636x$

$20{,}386x - 2{,}031$

$-20{,}386x + 2{,}801$

R4 = +0,77 < --- p6(x) = 0,77

C) Método de Budan - Fourier

Más fácil parece la obtención de la sucesión de Budan-Fourier

$P(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ < --- p1(x)

$P'(x) = 15x^4 - 12x^2 + 4x - 5$ < --- p2(x)

$P''(x) = 60x^3 - 24x + 4$ < --- p3(x)

$P^{(3}(x) = 180x^2 - 24$ < --- p4(x)

$P^{(4}(x) = 360x$ < --- p5(x)

$P^{(5}(x) = 360$ < --- p6

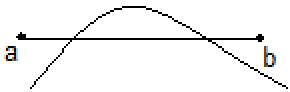
Teorema de Budan – Fourier

El número de raíces reales en (a, b), contada cada una como indica su multiplicidad, no excede a la diferencia entre el número de variaciones de signo de las sucesiones

P(a), P '(a), P ''(a), …, $P^{(n}(a)$

P(b), P '(b), P ''(b), …, $P^{(n}(b)$

y tiene la misma paridad que este número (El número será par si esta diferencia es par, e impar si esta es impar)



Ejemplo 1

Sea $P(x) = 162x^5 +729x^4 -252x^3 -3879x^2 -820x +5600$

Obtenemos que sus cotas son ln = -3, Ln = -2, lp = 1, Lp = 2

Hallamos sus derivadas y montamos la tabla de doble entrada

	p(x)	p '(x)	p ''(x)	…..	n.var.	dif.	raíces
-3							
						3	3
-2							
						0	0
1							
						2	2
2							

Nota: Los signos fueron obtenidos aplicando la Regla de Horner.

Nota: El polinomio anterior ha sido obtenido haciendo

$(x +8/3).(x +5/2).(x +7/3).(x -4/3).(x -5/3)$ --- >

--- > $1/3.(3x +8).1/2.(2x +5).1/3.(3x +7).1/3.(3x -4).1/3.(3x -5) = 0$ -- >

--- > (3x +8).(2x +5).(3x +7).(3x -4).(3x -5) = 0

Ejemplo 2

Separar las raíces de

$$P(x) = 7x^5 -5{,}47x^3 + 3{,}33x^2 +1{,}72x -0{,}15$$

Indicación: Aplicar el algoritmo de Euclides (Rey Pastor pág.48, 49)

D) Teorema de Descartes:

Sea P(x) = 0. El número de raíces positivas que tiene en (a, b), contadas con su multiplicidad, no excede al número de variaciones de signo que presenta la sucesión de sus coeficientes, y estos dos valores tienen la misma paridad.

Además, si todas sus raíces fuesen reales, entonces:

Número de raíces positivas = número de variaciones en la sucesión de sus coeficientes.

Número de raíces negativas = número de variaciones en la sucesión de los coeficientes de P(-x).

Estrategia singular: Véase en estos dos ejemplos:

a) $P(x)\ 5x^4-8x^3 -x^2 +x -6 = 0$

Hago: $P(x) = (5x^4-8x^3) +(-x^2 +x) - 6 = 0$

$$P(x) = x^3.(5x-8) +x.(-x +1) - 6 = 0$$

Para aquellos valores de $x > 0$ que hagan $(5x - 8) < 0$ y $(-x + 1) < 0$ el valor de P(x) es siempre < 0.

$(5x - 8) < 0$ y $(-x + 1) < 0$ --- > $x < 8/5$ y $x > 1$. Luego sólo se cumple para los valores del intervalo (1, 8/5). No podemos garantizar una cota superior.

b) $P(x) = 3x^4 – 18x^3 + 6x^2 - 18x + 73$

Hago $P(x) = 3x^3.(x - 6) + 6x.(x - 3) + 73$

Para valores $x >= 6$, P(x) es siempre > 0.

1.5.- Aproximación decimal para una raíz irracional

Lo expongo por dos métodos distintos.

A) Por Bipartición reiterada

Sea P(x) = 0 de la que sabemos que tiene una sola raíz en (a, b). Sustituyo en P(x) cada uno de los valores entero m comprendidos en (a, b). Sean m1, m2, m3, … estos valores enteros.

Calculo P(a) y P(m1). Si sig(P(a)) y sig(P(m1)) son distintos, entonces la raíz está en (a, m1), en otro caso está en (m1, b), y paso a probarlo con m2.

Supongamos que hemos llegado a que la raíz está entre dos enteros consecutivos mi, mj. Los represento por m1, m2.

Divido en dos partes iguales: (m1, m1+0,5), (m1+0,5, m2)

Calculo P(m1+0,5) y comparo su signo con el de P(m1). Si tienen signos distintos entonces la raíz es de la forma x = m1+0,d1, dode d1 está entre 1 y 5. En otro caso será de la forma x = m1+0,d2, donde d2 está entre 5 y 9. He obtenido la primer cifra decimal.

Supongo que la raíz está en el primero, y hago m3 = m1+0,5.

Divido el intervalo (m1, m3) en dos partes iguales: (m1, m1+0,25), (m1+0,25, m3), y procedo del mismo modo que antes.

Si está en el primero, entonces la raíz cumple m1 < x < m1,25. en otro caso m1,25 < x < m1+0,50.

De este modo conseguimos una aproximación al tiempo que acotamos el error.

Ejemplo: (pág. 445 del referido texto)

Dado $P(x) = 7x^5 -5,47x^3 +3,33x^2 +1,72x -0,15$ se ha podido saber que tiene una raíz en el intervalo (0, 0,2)

Como un buen ejercicio, aproxima la citada raíz con error menor que 0,0001 (Has de obtener su valor de la forma xo = 0,a1a2a3a4a5, cinco cifras decimales)

B) Método de Horner

Sea P(x) = 0 de la que sabemos que un raíz, única, en el intervalo (a, b).

Designo por x1 la raíz anunciada.

Puede ocurrir:

- a y b son entero consecutivos -- > x1 = a,a1a2…
- a = m,m1m2 por ejemplo, no entero -- > x1 = m,m1m2a3…
- a y b son enteros no consecutivos

Suponemos este tercer caso. Para que el proceso sea inteligible supongamos que el intervalo es [8, 14], de modo que tenemos la sucesión de enteros: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

Comparando los signos de P(8), P(9), P(10), P(11), P(12), P(13), P(14) podemos concretar en qué intervalo del tipo (m1, m2), donde m1 y m2 son consecutivos. Escribiré m en lugar de m1.

La raíz x1 es de la forma x1 = m,a1a2…

El Método de Horner consite en lo siguiente.

Hago el cambio $x = m + y$ en P(x). Observa que $y = 0 \dashrightarrow x = m$, y que el recorrido de ‘y’ es (0, 1), y por tanto la solución de $Q(y) = 0$ está en (0, 1).

Sea $Q(y) = co.y^n + c1.y^{n-1} + \ldots + cn$.

Con el fin de que resulte más ilustrativo tomo $P(x) = 3x^4 +2x^2 -5x +6$

Entonces $Q(y) = co.y^4 +c1.y^3 +c2.y^2 +c3.y + c4$

Nota: Lo que se conoce como “Regla de transformación de Horner”.

Si en éste sustituyo y por x – m tengo

$$Q(x\text{-}m) = co.(x\text{-}m)^4 +c1.(x\text{-}m)^3 +c2.(x\text{-}m)^2 +c3.(x\text{-}m) +c4$$

Si operamos es evidente que $Q(x\text{-}m) \equiv P(x)$, y por lo tanto

$$P(x) = [co.(x\text{-}m)^3 +c1.(x\text{-}m)^2 +c2.(x\text{-}m) +c3].(x\text{-}m) + c4$$

Esto me dice que c4 es el resto, R1, de la división P(x) : (x-m)

El cociente es $C1(x) = co.(x\text{-}m)^3 +c1.(x\text{-}m)^2 +c2.(x\text{-}m) +c3$, que expreso en la forma

$$C1(x) = [co.(x\text{-}m)^2 +c1.(x\text{-}m) +c2].(x\text{-}m) +c3$$

de modo que c3 es el resto, R2, de la división C1(x) : (x-m).

Del mismo modo obtenemos c2 y c1, siendo co el último cociente.

Tenemos ya el polinomio transformado Q(y) con una raíz en (0, 1). Si y1 fuese la citada raíz, la raíz x1 de P(x) sería x1 = m,y1 , que es una aproximación hasta las décimas.

Para obtener y1, como cifra de las décimas, divido (0, 1) en diez partes:

Puntos: 0,1; 0,2; 0,3; …; 0,9

Calculamos $Q(0,d_i)$ hasta encontrar dos puntos consecutivos d_i, d_j en los que cambie el signo de los valores de Q(y). Así tenemos asegurada la cifra de las decenas: $x1 = m,d_i$. Escribiré x1 = m,y1

Si tomo el intervalo (d_i, d_j), y, haciendo el cambio $y = d_i + z$, repetimos el proceso anterior que sigue al cambio x = m +y , llegamos a obtener la cifra z2 de las centésimas, quedando

x1 = m,y1z2

Podremos continuar hasta la aproximación deseada.

1.6- Ecuaciones con raíces opuestas dos a dos

Sea P(x) = P(x) = $a_{0.}x^n + a_{1.}x^{n-1} + \ldots + a_{i.}x^{n-i} + \ldots + a_n$, y x_i sus raíces, de modo que

$$P(x) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Si x_k es una cualquiera de sus raíces, tengo

$$0 = P(x_k) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(x_k - x_i)$$

y si suponemos que también lo es $-x_k$, tenemos

$$0 = P(-x_k) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(-x_k - x_i)$$

lo cual significa que $-x_k$ es raíz de P(-x).

$P(-x) =\pm a_{0.}x^n \pm a_{1.}x^{n-1} \pm \ldots \pm a_{i.}x^{n-i} \pm \ldots \pm a_n$, donde cada signo

depende del grado del monomio correspondiente.

Puesto que x_k es raíz cualquiera de P(x) = 0, y suponiendo que también

$-x_k$ lo es, y por serlo ésta tambié de P(-x) = 0, deducimos que los coeficientes de P(x) y los de P(-x) son proporcionales. Por otro lado, los coeficientes de las potencias pares coinciden, por lo cual el coeficiente de proporcionalidad es 1, y concluyo que los monomios de grado impar no existen.

Condición necesaria para que las raíces de P(x) = 0 sean opuestas dos a dos es que sólo tenga términos de grado par.

Recíproco: Sea $Q(x) = a_{0.}{}^{2m} + a_{1.}x^{2(m-1)} + \ldots + a_{i.}x^{2(m-i)} + \ldots + a_m$

Si x_k es una raíz veamos si también lo es $-x_k$.

$0 = Q(x_k) = Q(-x_k)$, porque todos los términos son de grado par.

Conclusión: Condición necesaria y suficiente para que x_k y $-x_k$ sean raíces de P(x) = 0 es que todos sus términos sean de grado par. (P(x) ha de ser de grado par).

1.7.- Ecuaciones con raíces son inversas entre sí dos a dos

Sea $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \dots + a_i.x^{n-i} + \dots + a_n$, y x_i sus raíces, de modo que

$$P(x) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Si x_k es una cualquiera de sus raíces, tengo

$$0 = P(x_k) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(x_k - x_i)$$

y si suponemos que también lo es $1/x_k$, tenemos

$$0 = P(1/x_k) = a_o.\prod_{i=1}^{n}(1/x_k - x_i)$$

lo cual significa que $1/x_k$ es raíz de P(1/x).

$$= P(1/x) = a_0 + a_1.x + \dots + a_i.x^{n-j} + \dots + a_n.x^n$$

Puesto que x_k es raíz cualquiera de P(x) = 0, y suponiendo que también

$1/x_k$ lo es, y por serlo ésta también de P(1/x) = 0, deducimos que los coeficientes de P(x) y los de P(1/x) son proporcionales, esto es:

$$\frac{a_n}{a_o} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \cdots = \frac{a_0}{a_n}$$

Si $k = \frac{a_n}{a_o}$, entonces también $\frac{a_o}{a_n} = k$, y por tanto:

$$a_n = k.a_o, \quad a_o = k.a_n = k^2.a_o, \quad \text{de donde } k^2 = 1, \ k = \pm 1$$

Si fuese k = 1 serían iguales todos sus coeficientes, y P(x) = 0 podría reducirse a

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x^{n-i} + \dots + 1 = 0$$

y la expresión de P(1/x) = 1 + x + x^2 + … + x^n , es decir coinciden.

Si fuese k = -1 serían: $a_n = -a_o$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$, …, $a_o = -a_n$

Si fuese de grado n par, por ejemplo n = 4, P(x) tendría 5 términos, entonces en +la lista

$$\frac{a_4}{a_o} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2}{a_2} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_0}{a_4}$$

donde vemos que es imposible que $\frac{a_2}{a_2} = -1$.

Por tanto ha de ser de grado n = impar, por ejemplo n = 5. Entonces

$\frac{a_5}{a_o} = \frac{a_4}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_o}{a_5}$, donde podemos comprobar que

cuadra perfectamente la alternancia de signos: $a_i = -a_{5-i}$

Conclusión:

Para que sus raíces sean recíprocas ha de ser de grado n = impar y sus términos de la forma

$$a_i = -a_{n-i}$$

Observa: P(x) = 0 no puede admitir la raíz x = 1, ya que entonces de

$\frac{a_n}{a_o} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \cdots = \frac{a_0}{a_n}$, por una conocida propiedad de las fracciones sería

$\frac{a_n}{a_o} = \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_o}{a_o + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}$ cuyo denominador sería cero.

Evidentemente tampoco puede se P(-1) = 0.

1.8.- Miscelania-1: Problemas de ecuaciones, resueltos

1.- Calcula el discriminante de la ecuación: $p(x) = x^3 - x + 1 = 0$

Conclusión teniendo en cuenta el valor de dicho discriminante.

Sol.: $p(x) = x^3 - x + 1 = 0$

$p'(x) = 3x^2 - 1$

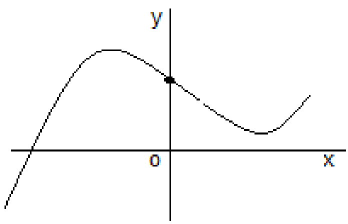
$$
\begin{array}{llllllll}
3x^2 & 0 & -1 & \mid x^3 & & 0 & -x & 1 \\
 & & & 3/x & +2/x^3 & -3/x^4 & +2/x^5 & \ldots \\
-3x^2 & 0 & +3 & -3/x & & & & \\
\hline
 & & 2 & -3/x & & & & \\
 & & -2 & 0 & 2/x^2 & -2/x^3 & & \\
\hline
 & & & -3/x & 2/x^2 & -2/x^3 & & \\
 & & & +3/x & 0 & -3/x^3 & +3/x^4 & \\
\hline
 & & & & 2/x^2 & -5/x^3 & +3/x^4 &
\end{array}
$$

Resultado: $s_o = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = 2$, $s_3 = -3$, $s_4 = 2$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -23$$

Conclusión: No tiene raíces múltiples. Por ser $D < 0$ contiene un par de soluciones complejas, y por tanto sólo una solución real.

La siguiente gráfica muestra la situación aproximada.



2.- Dada la ecuación $p(x) = x^3 + 4x + 1$, determinar:

a) Número de raíces reales

b) Una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean el cuadrado de la dada.

c) Calcula los valores $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $q = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, siendo

x_1 , x_2 , x_3 las raíces de la dada.

Sol.: a) $p(x) = x^3 + 4x + 1$, $p'(x) = 3x^2 + 4$

$3x^2 + 4 = 0$ -- > $x^2 = -4/3$ --- > sin solución -- > $p(x) = 0$ sólo tiene una solución real.

d) Haciendo la división $p'(x) : p(x)$ como en el problema anterior obtenemos:

$s_o = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = -8$, $s_3 = 32$, $s_4 = 20$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 32 \\ -8 & 32 & 20 \end{vmatrix} = -3040 < 0$$. Solo tiene una solución real.

Por lo tanto: $p = s_2 = -8$, $q = s_3 = 32$

b)Sea la ecuación de tercer grado $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$, y deseamos que sus raíces sean el cuadrado de los valores x_1 , x_2 , x_3 , raíces de la dada.

Entonces sabemos que:

$b = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 8$
$c = x_1^2.x_2^2 + x_1^2.x_3^2 + x_2^2.x_3^2 = \ldots.$
$d = -(x_1^2.x_2^2.x_3^2) = -(x_1.x_2.x_3)^2 = -(-1)^2 = -1$

Para obtener c hago lo siguiente

64 = $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) +$

$+ 2.(x_1^2.x_2^2 + x_1^2.x_3^2 + x_2^2.x_3^2) = 20 + 2.(x_1^2.x_2^2 + x_1^2.x_3^2 + x_2^2.x_3^2)$

de donde $2.(x_1^2.x_2^2 + x_1^2.x_3^2 + x_2^2.x_3^2) = 44$ -- > c = 22

Ecuación pedida: $x^3 + 8.x^2 + 22.x - 1 = 0$

3. Obtener la ecuación cuyas raíces sea los cuadrados de la ecuación

$P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

Sol.- Sea $Q(x) = x^3 + b1.x^2 + b2x + b3 = 0$, donde he tomado bo = 1

Sean x1, x2, x3 las raíces de P(x) = 0

Sabemos que $b1 = -(x1^2 + x2^2 + x3^2)$

Calculamos las sumas simples de la dada haciendo P ‘(x) : P(x)

$3x^2$	$-4x$	1	x^3	$-2x^2$	x	1
			$3/x$	$+2/x^2$	$+2/x^3$	$-1/x^4$ ….
$-3x^2$	$6x$	-3	$-3/x$			
	$2x$	-2	$-3/x$			
	$-2x$	4	$-2/x$	$-2/x^2$		
		2	$-5/x$	$-2/x^2$		
		-2	$4/x$	$-2/x^2$	$-2/x^3$	
			$-1/x$	$-4/x^2$	$-2/x^3$	

Continuando obtenemos:

$s_o = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = -1$, $s_4 = -6$, $s_5 = -13$, $s_6 = -19$

Designo las sumas simples de la que nos piden mediante S'_i , y entonces

$S'_1 = x1^2 + x2^2 + x3^2 = s_2$, de donde $b1 = -s_2 = -2$

$S'_2 = x1^4 + \ldots = s_4$, y sabemos que $2.b2 = -(b1.S'_1 + S'_2) =$

$= -(b1.s_2 + s_4) = -(-4 -6)$ -- > $b2 = 5$

$S'_3 = x1^3 + \ldots. = s_6$, -- > $3.b3 = -(b1.S'_2 + b2.S'_1 + S'_3) =$

$= -(b1.s_4 + b2.s_2 + s_6) = -(12 +10 -19)$ -- > $b3 = -3/3 = -1$

La ecuación es: $x^3 -2x^2 +5x -1 = 0$

NOTA: Comprueba que se llega al mismo resultado haciendo

$P(x).P(-x)$ = operando y simplificando = $x^3 -2x^2 +5x -1 = 0$

4.- Halla una ecuación cuyar raíces sean el cubo de la ecuación

$x^2 +x -2 = 0$

Sol.- La ecuación pedida tiene la forma $x^2 -(x1^3+x2^3).x +(x1^3.x2^3) = 0$

donde x1, x2 son la soluciones de la dada.

$x^2 +x -2 = (x-1).(x+2)$ --- > $x1 = 1$, $x2 = -2$

$(x1^3+x2^3) = 1 - 8 = -7$, $(x1^3.x2^3) = -8$, luego la ecuación es

$x^2 + 7x -8 = 0$

5.- Resolver completamente la ecuación

$6x^7 -x^6 -37x^5 +42x^4 -42x^3 +37x^2 +x -6 = 0$

(Observación: Tener presente lo estudiado sobre ecuaciones recíprocas)

Sol.- $6.(x^7 - 1) - (x^6 - x) - 37(x^5 - x^2) + 42(x^4 - x^3) = 0$

6.- a) Halla las raíces fraccionarias de la ecuación

$$4x^3 - 7x + 3 = 0$$

Sol.- Indicación: Hacer el cambio x = y/4 y obtener las raíces enteras de la que resulta.

b)Halla las raíces enteras de $x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$.

1.9.- Eliminación Algebraica. El concepto de Resultante de un Sistema de Ecuaciones.

Dado un sistema de ecuaciones, el caso más simple es

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

consideremos una función, R(…), cuyas variables son los coeficientes de f(x) y g(x).

Def.: Decimos que R es la resultante del sistema (en estudio) si la condición R(…) = 0 es la "Condición necesaria y suficiente para que el sistema sea compatible".

Que sea compatible significa que admita al menos una solución (al menos una solución común a todas las ecuaciones del sistema).

1.10.- Método del MCD para obtener la Resultante

El caso más simple es el sistema formado por dos ecuaciones polinómicas

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Sabemos que sus soluciones comunes (soluciones del sistema) son las de su MCD

D(x) = 0

La condición necesaria y suficiente para que admita al menos una solución es que D(x) sea de grado >= 1. Este hecho nos lleva a que la resultante de (1) es el primer resto constante (y que no sea idénticamente nulo).

Aplicando el algoritmo para el cálculo de D(x) obtenemos la resultante R(…).

Insisto que las raíces comunes en el sistema (1) son las de D(x) = 0.

Como caso particular tenemos el análisis de las soluciones múltiples de P(x) = 0. Si x1 es solución de p(x) = 0 con multiplicidad k, entonces lo es de P ‘(x) = 0 con multiplicidad k-1. Este análisis puede ser realizado obteniendo la resultante del sistema

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ P\,'(x) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

1.11.- Método de Eliminación de Euler para obtener la Resultante

Sea el sistema

$$\begin{cases} \mathrm{P(x) = \ a0.xn \ + \ a1.xn - 1 \ + \ ... \ + \ ai.xn - i \ + \ ... \ + \ an} \\ \mathrm{Q(x) \ = \ b0.xm \ + \ b1.xm - 1 \ + \ ... \ + \ bi.xm - i \ + \ ... \ + \ bm} \end{cases} \qquad (3)$$

P(x) de grado n, Q(x) de grado m.

Supongamos que estos dos polinomios admiten un divisor común d(x) de grado uno, con lo cual

$$P(x) = P1(x).d(x), \text{ donde } P1(x) \text{ es de grado } n\text{-}1$$

$$Q(x) = Q1(x).d(x), \qquad Q1(x) \text{ de grado } m\text{-}1$$

En esta situación

$$d(x) \equiv P(x) : P1(x) \equiv Q(x) : Q1(x) \equiv d(x)$$

de donde

$$P(x).Q1(x) \equiv Q(x).P1(x) \qquad (4)$$

Recíprocamente, supongamos que existen dos polinomios P1(x), Q1(x) tales que se cumple (4), P1(x) de grado n-1, Q1(x) de grado m-1.

Todos los factores de P(x) del tipo (x-a) dividen al miembro derecha de (4), y siendo P1(x) de grado n-1, alguno de esos factores divide a Q(x). Del mismo modo los factores de Q(x) divides al miembro izquierda, y siendo Q1(x) de grado m-1, alguno de éstos divide a P(x). Por consiguiente admiten al menos una solución común.

Lo anterior nos permite enunciar en qué consiste el

Método de eliminación de Euler:

"La condición necesaria y suficiente para que el sistema (3) admite al menos una solución (que sea compatible) es que existan dos polinomios P1(x) de grado n-1, Q1(x) de grado m-1, para los que se cumpla la identidad (4)".

En lo que sigue, para ilustrar el proceso que nos proporciona la resultante tomamos P(x) de grado 2 y Q(x) de grado 3. Sean P1(x) de grado 2, Q1(x) de grado 1, polinomios genéricos, así tenemos

$$(\mathrm{a0}.x^2 + \mathrm{a1}.\mathrm{x} + \mathrm{a2}).(\mathrm{b'0}.x^2 + \mathrm{b'1}.\mathrm{x} + \mathrm{b'2}) \equiv$$

$$(\mathrm{b0}.x^3 + \mathrm{b1}.x^2 + \mathrm{b2}.\mathrm{x} + \mathrm{b3}).(\mathrm{a'0}.\mathrm{x} + \mathrm{a'1})$$

donde los coeficientes de P1 y de Q1 son incógnitas.

Haciendo los productos

(ao.b'o).x^4 + (ao.b'1 + a1.b'o).x^3 + (ao.b'2 + a1.b'1 + a2.b'o).x^2 + (a1.b'2 + a2.b'1).x + a2.b'2 ≡

≡ (bo.a'o).x^4 + (bo.a'1 + b1.a'o).x^3 + (b1.a'1 + b2.a'o).x^2 + (b2.a'1 + b3.a'o).x + b3.a'1

Igualando coeficiente tenemos el siguiente sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{r} ao.b'o = bo.a'o \\ \mathrm{ao.b'1 + a1.b'o = bo.a'1 + b1.a'o} \\ \mathrm{ao.b'2 + a1.b'1 + a2.b'o = b1.a'1 + b2.a'o} \\ \mathrm{a1.b'2 + a2.b'1 = b2.a'1 + b3.a'o} \\ \mathrm{a2.b'2 = b3.a'1} \end{array}\right. \qquad (5)$$

cuyas incógnitas son los coeficientes a'_i , b'_j . Es un sistema homogéneo con 5 ecuaciones (n+m = 5) y 5 incógnitas.

Lo expreso como es habitual, reordenándolo, y escribo su matriz asociada.

$$\left\{\begin{array}{llll} ao.b'o & - bo.a'o & & = 0 \\ \mathrm{a1.b'o + ao.b'1} & \mathrm{- b1.a'o} & \mathrm{- bo.a'1} & = 0 \\ \mathrm{a2.b'o + a1.b'1 + ao.b'2} & \mathrm{- b2.a'o} & \mathrm{- b1.a'1} & = 0 \\ \mathrm{a2.b'1 + a1.b'2} & \mathrm{- b3.a'o} & \mathrm{- b2.a'1} & = 0 \\ \mathrm{a2.b'2} & & \mathrm{- b3.a'1} & = 0 \end{array}\right. \qquad (5')$$

Matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} ao & 0 & 0 & -bo & 0 \\ a1 & ao & 0 & -b1 & -bo \\ a2 & a1 & ao & -b2 & -b1 \\ 0 & a2 & a1 & -b3 & -b2 \\ 0 & 0 & a2 & 0 & -b3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es función de los coeficientes de los dos polinomios dados, y sabemos que el sistema admite solución no trivial precisamente si Det(A) = 0. Por lo cual, la resultante del sistema

$$\begin{cases} \mathrm{a0}.x^2 + \mathrm{a1.x} + \mathrm{a2} = 0 \\ \mathrm{b0}.x^3 + \mathrm{b1}.x^2 + \mathrm{b2.x} + \mathrm{b3} = 0 \end{cases}$$

es $R(\ldots) = \left| \begin{pmatrix} ao & 0 & 0 & -bo & 0 \\ a1 & ao & 0 & -b1 & -bo \\ a2 & a1 & ao & -b2 & -b1 \\ 0 & a2 & a1 & -b3 & -b2 \\ 0 & 0 & a2 & 0 & -b3 \end{pmatrix} \right|$, determinante de A.

Según hemos estudiado en Álgebra lineal sabemos que existe al menos una incógnita libre. Damos valor a una de las incógnitas y el sistema resultante (de orden 4x4) será posiblemente compatible determinado, o indeterminado, pero sí podremos obtener una solución.

Nota: En la práctica es más fácil utiliza el determinante equivalente

$$R(\ldots) = \left| \begin{pmatrix} ao & a1 & a2 & 0 & 0 \\ 0 & ao & a1 & a2 & 0 \\ 0 & 0 & ao & a1 & a2 \\ -bo & -b1 & -b2 & -b3 & 0 \\ 0 & -bo & -b1 & -b2 & -b3 \end{pmatrix} \right|$$

Observa que contiene tantas filas con los coeficientes del primero como el grado del segundo, y tantas filas con los coeficientes del segundo como grado del primero.

Ejemplos 1:

Obtener la resultante de las ecuaciones

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + k = 0$

b) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$

Sol.: Caso a)

Por el Método de Euler sabemos que

$$R(\ldots) = \left| \begin{pmatrix} ao & a1 & a2 & 0 & 0 \\ 0 & ao & a1 & a2 & 0 \\ 0 & 0 & ao & a1 & a2 \\ -bo & -b1 & -b2 & -b3 & 0 \\ 0 & -bo & -b1 & -b2 & -b3 \end{pmatrix} \right|$$

En nuestro caso: R1 =

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6+k & 10 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 13 & 10+k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & 7 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Hago: (f.5 por f.5 -3.f4, f.6 por f.6 +4.f4, f.7 por f.7 +2.f.4, f.8 por f.8 +f.4), y tengo R2 =

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 15+k & 1 & -15+2k & -3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 22+k & 20+2k & 4k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 13 & 10+k & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & 7 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Hago: permuto filas hasta que f.9 pase al lugar f.5 , cambio signos de ésta

R3 =

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 15+k & 1 & -15+2k & -3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 22+k & 20+2k & 4k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 13 & 10+k & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & 7 & k \end{vmatrix}$$

Hago: f.6 por f.6 –4.f.5, f.7 por f.7 +5.f.5, f.8 por f.8 +4.f.5, f.9 por f.9+2.f.5

R4 =

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11+k & 5 & -7+2k & 8-3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 17+k & 10+2k & -10+4k \end{vmatrix}$$

$$
\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 2+k & -8+2k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -4+k
\end{matrix}
$$

R5 = (permuto f.8 hasta la posición f.6, y f.6 hasta la f.9)

$$
\begin{vmatrix}
1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 2+k & -8+2k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 17+k & 10+2k & -10+4k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -4+k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11+k & 5 & -7+2k & 8-3k
\end{vmatrix}
$$

R6 = (Hago: f.7 por f.7 -2.f.6)

$$
\begin{vmatrix}
1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 2+k & -8+2k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10+k & 4-k & 12-2k
\end{vmatrix}
$$

0	0	0	0	0	0	3	3	-4+k
0	0	0	0	0	11+k	5	-7+2k	8-3k

R7 =

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 2+k & -8+2k \\ 0 & -10+k & 4-k & 12-2k \\ 0 & 3 & 3 & -4+k \\ 11+k & 5 & -7+2k & 8-3k \end{vmatrix}$$

Desarrollo por primer columna

R8 = 3.

$$\begin{vmatrix} -10+k & 4-k & 12-2k \\ 3 & 3 & -4+k \\ 5 & -7+2k & 8-3k \end{vmatrix}$$

= [3.(-10+k).(8-3k) +5.(4-k).(-4+k) +3.(-7+2k).(12-2k)] –

- […………..]

+ (11+k).

$$\begin{vmatrix} 9 & 2+k & -8+2k \\ -10+k & 4-k & 12-2k \\ 3 & 3 & -4+k \end{vmatrix} =$$

(f.1 por f.1 -3.f3)

$$\begin{vmatrix} 0 & -7+k & 4-k \\ -10+k & 4-k & 12-2k \\ 3 & 3 & -4+k \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -7+k & 4-k \\ 4-k & 12-2k \end{vmatrix} +$$

$+ \ (-10+k).\begin{vmatrix} -7+k & 4-k \\ 3 & -4+k \end{vmatrix} = \ ....$

NOTA: Podía haber interesado desarrollar por los elementos de la última columna desde el inicio .

$$R1 = -k.\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$R2 = 2. = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejemplos 2:

Aplicando el Método del MCD para obtener la resultante y las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x5 - x4 \ - 3x3 \ + 3x2 \ + 5x \ + k \ = \ 0 \\ \quad x4 \ + x3 - x2 \ - \ 2x \ - 2 \ = \ 0 \end{cases}$$

Divisiones sucesivas

P(x) : Q(x)

```
1   -1   -3   3   5   k   | 1  1  -1  -2  -2
                            ------------------
                             1  -2

-1  -1   1   2   2
------------------------
    -2  -2   5   8   k
     2   2  -2  -4  -4
   -------------------------
             3   4  -4+k  < -- R1   de grado 2
```

Q(x) : R1(x)

```
1    1   -1    -2    -2  |  3    4   -4+k

                            1/3  -1/9  (7-3k)/27

-1  -4/3 (4-k)/3
----------------------
    -1/3   (1-k)/3   -2
     1/3    4/9    (-4+k)/9
   -----------------------------

        (7-3k)/9 (-22+k)/9        -2

       -(7-3k)/9 -4.(7-3k)/27 –(-4+k).(7-3k)/27

      ---------------------------------------------------

         0         (-22+k)/9-4(7-3k)/27  -2+(4-k).(7-
                   3k)/27
```

< --- R2 de grado 1

R1(x) : R2(x)

3 4 -4+k | (7-3k)/9 (-22+k)/9

27/(7-3k) 9/(7-3k).[4 - 3/(7-3k).(-22+k)]

-3 -3/(7-3k).(-22+k)

----

0 [4 - 3/(7-3k).(-22+k)] -4+k

- [4 - 3/(7-3k).(-22+k)] (-22+k)/(7-3k).[4 - 3/(7-3k).(-22+k)]

0 (-4+k) + (-22+k)/(7-3k).[4 - 3/(7-3k).(-22+k)] < --- R3 de grado 0

Para que admitan al menos una solución común ha de ser R3 = 0

(-4+k) + (-22+k)/(7-3k).[4 - 3/(7-3k).(-22+k)] = 0 -- >

(-4+k).(7-3k) +(-22+k).[4 - 3/(7-3k).(-22+k)] = 0 -- >

(-4+k).(7-3k).(7-3k) + (-22+k). [4.(7-3k) - 3.(-22+k)] = 0 --- >

(-4+k).($9k^2$ +49-42k) + (-22+k). [-15k +92] = 0 --- >

(Resulta una cúbica que posiblemente sea difícil de resolver)

2.- Obtener las raíces comunes de

$$8x^4 -4x^3 +18x^2 -3x +9 = 0$$

$$4x^3 +5x +3 = 0$$

3.- Obtener las raíces comunes de

$$2x^5 + x^4 - 5/2.x + 1 = 0$$

$$2x^5 - 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

Sol.: D(x) = MCD = $2x^3 + 2x - 1$

4.- Obtener la resultante del sistema

$$2x^3 + x - 3 = 0$$

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

Sol.: R <> 0

5.- Analiza si tiene o no raíces múltiples la ecuación

$$2x^6 - 9x^4 + 20x^3 - 24x + 28 = 0$$

Sol.: 1+i, 1- i son raíces dobles.

1.12.- Miscelanea-2: Problemas de orden superior, resueltos

1.- Obtener un polinomio irreducible, con coeficientes en Q, que contenga la raíz x = $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Sol.- x1 designa la raíz,

$x1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ -- > $\sqrt{3}$ = $x1 - \sqrt{2}$ -- > $3 = x1^2 + 2 - 2.x1.\sqrt{2}$ -- >

$2.x1.\sqrt{2} = x1^2 - 1$ -- > $x1^2 - 2.\sqrt{2}.x1 - 1 = 0$, y cambiando x1 por x tengo

$x^2 - 2.\sqrt{2}.x - 1 = 0$, en $Q(\sqrt{2})$

Por otro lado: $2.x1.\sqrt{2} = x1^2 – 1$ -- > $4.x1^2.2 = x1^4 + 1 – 2.x1^2$ -- >

$x1^4 – 10.x1^2 + 1 = 0$ -- > $x^4 – 10x^2 + 1 = 0$, en Q(x)

2.- Obtener un polinomio irreducible, con coeficientes en $Q(\sqrt{2})$, que contenga la raíz $x = \sqrt{-2}$

Sol.- Observa que $\sqrt{-2} = i.\sqrt{2}$

$x1 = i.\sqrt{2}$ -- > $x1^2 = - 2$ -- > $x1^2 + 2 = 0$ -- > $x^2 + 2 = 0$ en Q(x)

Sobre $Q(\sqrt{2})$ tengo: $x1 = i.\sqrt{2}$ -- > $x1 - i.\sqrt{2} = 0$ -- >

$x - i.\sqrt{2} = 0$

3.- Determina un p(x) $\in R[x]$, de grado 5, que tenga como raíz doble x1 = 1, y que el polinomio q(x) = p(x) + i $\in C[x]$ tenga como raíz doble x2 = i .

Sol.- p(x) toma la forma: $p(x) = (x-1)^2.(x^3+b2.x^2 +b1.x +bo)$

$q(x) = (x-1)^2.(x^3+b2.x^2 +b1.x +bo) + i$, y por otro lado q(x) ha de tomar la forma

$q(x) = (x – i)^2.(x^3 +c2.x^2 +c1.x + co)$, y ha de cumplirse

$(x-1)^2.(x^3+b2.x^2 +b1.x +bo) + i = (x – i)^2 .(x^3 +c2.x^2 +c1.x + co)$

Operando e igualando coeficientes

$(x^2 -2x +1).(x^3+b2.x^2 +b1.x +bo) + i = (x^2 -2ix -1).(x^3 +c2.x^2 +c1.x + co)$

$$\begin{cases} (\mathrm{x2} - 2\mathrm{x} + 1).(\mathrm{x3} + \mathrm{b2.x2} + \mathrm{b1.x} + \mathrm{bo}) = (x^2 - 1).(\mathrm{x3} + \mathrm{c2.x2} + \mathrm{c1.x} - \\ i = -2i.x.(\mathrm{x3} + \mathrm{c2.x2} + \mathrm{c1.x} + \mathrm{co}) \end{cases}$$

$b_0 + i = - c_0$ -- > $c_0 = -b_{0 - i}$

$-2.b_0 + b_1 = -2i.c_0 - c_1$

(Continuando obtendríamos los coeficientes)

4.- Calcula tres números complejos z1, z2, z3 tales que

z1 +z2 +z3 = 1,   z1.z2.z3 = 1, |z1| = |z2| = |z3| = 1

Sol.-   Si z = a + bi, sabemos que |z| = z.z', donde z' es su conjugado.

Nuestra condición nos dice que z1.z1' = 1, z2.z2' = 1, z3.z3' = 1

Si z1, z2, z3 son raíces de $z^3 + c2.z^2 + c1.z + co = 0$, sabamos que

c2 = -(z1 +z2 +z3)   = -1

c1 = +(z1.z2 +z1.z3 +z2.z3)

co =- (z1.z2.z3)   = -1

Voy a calcular z1.z2 +z1.z3 +z2.z3

z1.z2 = $\frac{1}{z3} = \frac{1.z3'}{z3.z3'} = z3'$, y del mismo modo: z1.z3 = z2', z2.z3 = z1'

Por tanto z1.z2 +z1.z3 +z2.z3 = z1' + z2' + z3' = 1

(Observa que conjugado de (z1 + z2) = suma de la conjugados)

Los números pedidos son las raíces de $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

5.- Dada la ecuación $x^3 + px + q = 0$, deduce la relación que debe verificarse entre p y q para que dos de sus raíces, x1, x2, cumplan la relación x1/x2 = m.

Sol.:   x1 = m.x2 --- > $\begin{cases} x2^3 + p.x2 + q = 0 \\ m^3.x2^3 + p.m.x2 + q = 0 \end{cases}$ --- >

$$\begin{cases} m^3.x2^3 + m^3.p.x2 + m^3.q = 0 \\ m^3.x2^3 + p.m.x2 + q = 0 \end{cases} \quad \text{-- >}$$

$$\text{p.}(m^3 - m).x2 + (m^3 - 1).q = 0$$

Recordamos ahora que $(x^3 – 1) = (x^2 +x+1).(x-1)$, $(x^2 – 1) =(x+1).(x-1)$,

y aplicado esto a nuestro caso tenemos

$$\text{p.m.}(m^2 - 1).x2 + (m^3 - 1).q = 0 \text{ -- >}$$

p.m.(m +1).(m -1).x2 + (m^2 +m +1).(m -1).q = 0 -- >

p.m.(m +1).x2 + (m^2 +m +1).q = 0 -- > $x_2 = \frac{-q.(m^2+m+1)}{p.m.(m+1)}$

Por otro lado tenemos

x1 + x2 + x3 = 0 -- > 0 = (m +1).x2 + x3 -- > x3 = -(m +1).x2

También: q = - (x1.x2.x3) = - m.$x2^2$ .x3 = m.(m +1).$x2^3$ -- > $x_2^3 = \frac{q}{m.(m+1)}$

entonces $\frac{q}{m.(m+1)} = (\frac{-q.(m^2+m+1)}{p.m.(m+1)})^3$ -- > $1 = -\frac{q^2.(m^2+m+1)^3}{p^3.m^2.(m+1)^2}$, de donde

$\frac{-p^3}{q^2} = \frac{(m^2+m+1)^3}{m^2.(m+1)^2}$, y podríamos hacer p = -(m^2 +m +1), q = m.(m +1)

6.- Dada la ecuación $x^4 + m.x^3 +2x +n = 0$, calcula m y n para que tenga una raíz triple.

Sol.- Sea $\propto$ una raíz triple de la dada. Se cumplirá

$\propto^4 + m. \propto^3 +2\propto +n = 0$

$4.\propto^3 + 3.m.\propto^2 + 2 = 0$

$12.\propto^2 + 6.m.\propto = 0$, donde es solución simple, y

$2.\propto^2 + m.\propto = 0$, de donde $\propto = -m/2$

Sustituyo en p ‘(x): $-4.\frac{m^3}{8} + 3.m.\frac{m^2}{4} + 2 = 0$ -- >

$-4.m^3 + 6.m^3 + 16 = 0$ -- > $2.m^3 = -16$ -- > m = -2

con lo cual $\propto = 1$.

Llevándolo a p(x) queda : 1 -2 +2 +n = 0 -- > n = -1

7.- Sabiendo que $P(x^3) + x.Q(x^3)$ es divisible por $x^2 + x + 1$, demuestra que x1 = 1 es raíz de P(x) = 0 y de Q(x) = 0.

Sol.- Existe R(x) tal que $P(x^3) + x.Q(x^3) = (x^2 + x + 1).R(x)$

Por ser $x^2 + x + 1$ divisor de $P(x^3) + x.Q(x^3)$, las raíces $\varepsilon, \varepsilon^2$ de aquel lo son también de éste. (Recordamos que: $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1).(x - 1)$, y $\varepsilon, \varepsilon^2$ son sus raíces además de la solución x = 1; ε es imaginario; $\varepsilon^3 = 1$)

Entonces $P(\varepsilon^3) + \varepsilon.Q(\varepsilon^3) = 0$, es decir $P(1) + \varepsilon.Q(1) = 0$. Ahora bien, P(1) y Q(1) son racionales (son de Q), mientras que ε es imaginario, por lo tanto ha de ser P(1) = 0, Q(1) = 0.

8.- Demostrar que $\propto$ es raíz doble de

$$p(x) = x^n + a1.x^{n-1} + a2.x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

precisamente si lo es de

$$q(x) = a1.x^{n-1} + 2.a2.x^{n-2} + \ldots + (n-1).a_{n-1} + n.a_n = 0$$

Sol.- Tenemos

$$P(\propto) = (x-\propto)^2.\prod_{i=1}^{n-2}(x-\propto_i)$$

Hago el cambio x = $\frac{1}{y}$ --> Q(y) = $(\frac{1}{y}-\propto)^2.\prod_{i=1}^{n-2}(\frac{1}{y}-\propto_i)$ =

= $\frac{1}{y^2}.(1-\propto.y)^2.\frac{1}{y^{n-2}}.\prod_{i=1}^{n-2}(1-\propto_i.y)$ = $\frac{1}{y^n}.(1-\propto.y)^2.\prod_{i=1}^{n-2}(1-\propto_i.y)$

Sustituyendo directamente en P(x) resulte

Q(y) = $\frac{1}{y^n}.[1+a1y+a2y^2+\cdots+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n]$, de donde extraigo

Q(y) = $1+a1y+a2y^2+\cdots+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n$. Puesto que $\frac{1}{\propto}$ es

raíz doble de éste, será raíz simple de su derivada

Q '(y) = $a1+2.a2y+\cdots+(n-1).a_{n-1}y^{n-2}+a_ny^{n-1}$

Deshaciendo el cambio anterior, esto es, haciendo el cambio y = 1/x en

Q '(y) tenemos R(x) =

$$= \frac{1}{x^{n-1}}.[a1.x^{n-1}+2.a2.x^{n-2}+3.a3.x^{n-3}+\cdots+(n-1).a_{n-1}.x + n.a_n]$$

c.q.d.

9.- Sea la ecuación $x^n+x+1=0$, cuyas raíces designamos por $\propto_i$, i = 1, 2, …, n. Calcula el valor de $\sum_{i\neq j}\frac{\propto_i}{\propto_j}$

Sol.- Si fijo j = k tengo $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\propto_i}{\propto_k} = \frac{1}{\propto_k}.\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\propto_i$. Teniendo en cuenta que $\propto_1+\propto_2+\propto_3+\cdots+\propto_n=0$ obtengo $-\propto_k=\propto_1+\propto_2+\propto_{k-1}+\propto_{k+1}+\cdots+\propto_n$, y volviendo atrás resulta

$$\frac{1}{\propto_k} . \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \propto_i = \frac{-\propto_k}{\propto_k} = -1$$

Del mismo modo si fijo otra cualquiera, y por lo tanto

$$\sum_{i\neq j} \frac{\propto_i}{\propto_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\propto_k} . \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \propto_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\propto_k}{\propto_k} = -n$$

10.- Sea la ecuación $x^n + x + 1 = 0$, cuyas raíces designamos por $\propto_i$, i = 1, 2, …, n. Calcula el valor de $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\propto_i^n}$

Sol.- Se cumple $\propto_k^n + \propto_k + 1 = 0$ --> $\propto_k^n = -(\propto_k + 1)$, y por lo tanto

$$1 - \propto_k^n = 1 + (\propto_k + 1) = 2 + \propto_k$$

En primer lugar obtenemos la ecuación con raíces $2 + \propto_i$, para lo cual hacemos el cambio y = x+2 , o bien x = y -2

$$Q(y) = (y-2)^n + (y-2) + 1 = \ldots$$

Designo β_i sus raíces: $\beta_i = 2 + \propto_i$

Después hago el cambio z = 1/y , o bien y = 1/z

$$R(z) = Q(1/z) = \ldots.$$

Las raíces de ésta son $\gamma_i = \frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{2+\propto_i}$

Hecho lo anterior $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\propto_i^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2+\propto_i} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$

Hechos los cálculos resulta: $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \frac{(-1)^{n-1}.2^{n-1}.n+1}{(-1)^n.2^n-1}$, donde interviene el hecho que $\binom{n}{n-1}$ = n.

11.- Sea la ecuación $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cuyas raíces representamos por x1, x2,x3, x4. Obtener la ecuación cuyas raíces sea y1 = x1.x2.x3, y2 = x1.x2.x4, y3 = x1.x3.x4 , y4 = x2.x3.x4

Sol.- Sabemos que d = x1.x2.x3.x4 de donde x1.x2.x3 = $\frac{d}{x4}$, y del mismo modo $x_i.x_j.x_k = \frac{d}{x_l}$. Esto nos dice que basta obtener la ecuación cuyas raíces sean $\propto_i = \frac{d}{x_i}$, i = 1, 2, 3, 4.

La obtenemos haciendo el cambio $y = \frac{d}{x}$, o bien $x = \frac{d}{y}$. Resulta

$$Q(y) = y^4 + c.y^3 + b.d.y^2 + a.d^2.y + d^3 = 0$$

12.- Sea la ecuación $x^3 - p.x^2 + q.x - r = 0$, cuyas raíces son $\propto_1, \propto_2, \propto_3$. Halla aquella cuyas raíces sean

$$\beta_i = \frac{\propto_i}{\propto_j + \propto_k - \propto_i}\ ,\ i = 1, 2, 3$$

Sol.- Observamos que si permutamos j y k el resultado para β_i es el mismo, por tanto, el número de valores β_i es $\frac{P_3}{P_2} = \frac{6}{2} = 3$. La ecuación pedida es de grado 3.

Sabemos que $-p = -(\propto_1 + \propto_2 + \propto_3)$, de donde $\propto_2 + \propto_3 = p - \propto_1$, y del mismo modo para $\propto_2, \propto_3$.

Por lo tanto $\beta_i = \frac{\propto_i}{p - \propto_i}$, i = 1, 2, 3. El cambio a realizar es $y = \frac{x}{p-2x}$,

$y.(p - 2.x) = x$ --> $x = \frac{p.y}{2.y+1}$

El resultado es $p^3.y^3 - p^3.y^2.(1+2y) + q.p.y.(1+2y)^2 - r.(1+2y)^3 = 0$

13.- Sea la ecuación $a.x^3 + 3b.x^2 + 3c.x + d = 0$, cuyas raíces designamos por $\propto_1, \propto_2, \propto_3$. Halla la ecuación cuyas raíces sean

$$\beta_i = \frac{\propto_j . \propto_k - \propto_i^2}{\propto_j + \propto_k - 2\propto_i} \ , \quad i \neq j, k, \quad i = 1, 2, 3$$

Sol.- La ecuación pedida será de tercer grado.

Sabemos que $\propto_1 . \propto_2 . \propto_3 = \frac{-d}{a}$, de donde $\propto_2 . \propto_3 = \frac{-d}{a.\propto_1}$

$\propto_1 + \propto_2 + \propto_3 = \frac{-3b}{a}$, de donde $\propto_2 + \propto_3 = \frac{-3b}{a} - \propto_1$. Lo mismo para cualquiera de las raíces $\propto_i$.

Entonces $\beta_i = \dfrac{\frac{-d}{a.\propto_i} - \propto_i^2}{\frac{-3b - a.\propto_i}{a} - 2.\propto_i} = \cdots = \dfrac{-(d + a.\propto_i^3)}{-(3.b + 3.a.\propto_i).\propto_i} = \dfrac{d + a.\propto_i^3}{(3.b + 3.a.\propto_i).\propto_i}$

Teniendo en cuenta que $a.\propto_i^3 = -\left(3.b.\propto_i^2 + 3.c.\propto_i + d\right)$, tengo

$$\beta_i = \frac{d - \left(3.b.\propto_i^2 + 3.c.\propto_i + d\right)}{(3.b + 3.a.\propto_i).\propto_i} = \ldots = \frac{-(3.b.\propto_i + 3.c)}{(3.b + 3.a.\propto_i)} = \frac{-(b.\propto_i + c)}{(b + a.\propto_i)} = \frac{-(c + b.\propto_i)}{(b + a.\propto_i)}$$

Por lo tanto basta hacer, en la dada, el cambio de variable $y = \frac{-(c + b.x)}{b + a.x}$.

Expresión de x en función de y: $y.(b + a.x) = -(c + b.x)$ -- > $(a.y + b).x = b.y + c$ --- >

$$x = \frac{b.y + c}{a.y + b}$$

NOTA: Podemos expresar $(y, 1) = \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, que llamamos proyectividad. Del mismo modo $(x, 1) = \begin{pmatrix} b & c \\ a & b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$

14.- Sea la ecuación x^3 -3x +1 = 0, con raíces $\propto_1,\ \propto_2,\ \propto_3$. Halla la ecuación cuyas raíces sean

$$\beta_i = \propto_i + \frac{1}{\propto_i}$$

Sol.- Bastará hacer el cambio y = $x + \frac{1}{x}$

Despejo x: x.y = x^2 + 1 -- > $\begin{cases} x^2 - x.y + 1 = 0 \\ x^3 - 3x + 1 = 0 \end{cases}$ -- > Restándolas

$$\begin{cases} x^2 - x.y + 1 = 0 \\ x^3 - x^2 + x.y - 3x = 0 \end{cases} \text{ -- > } \begin{cases} x^2 - x.y + 1 = 0 \\ x^2 - x + y - 3 = 0 \end{cases} \text{ -- > }$$

Restándolas

$\begin{cases} x^2 - x.y + 1 = 0 \\ x.y - x + y - 4 = 0 \end{cases}$ -- > x.(y – 1) = 4 – y -- > x = $\frac{4-y}{y-1}$

$(\frac{4-y}{y-1})^3 - 3.\frac{4-y}{y-1} + 1 = 0$

NOTA: Observamos que (x -$\propto_i$).$\left(x - \frac{1}{\propto_i}\right) = \ldots$ = x.[$\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\propto_i + \frac{1}{\propto_i}\right)$], y por tanto una vez más nos dice que el cambio adecuado es y = $x + \frac{1}{x}$.

Por otro lado: P(x) = $\prod\ (x - \propto_i)$, y sea Q(x) = $\prod\ \left(x - \frac{1}{\propto_i}\right)$.
Haciendo P(x).Q(x) = $\prod\ (x - \propto_i).\left(x - \frac{1}{\propto_i}\right)$ = x^3. $\prod$ [$\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(\propto_i + \frac{1}{\propto_i}\right)$] . Por lo tanto, otra forma de obtenerlo consiste en hacer primero el cambio y = 1/x para conseguir Q(x), y después hacer P(x).Q(x).

15.- Sea la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, y sus raíces $\propto_1, \propto_2, \propto_3$.

Calcular el valor de la suma $V = \frac{\propto_1^2}{\propto_2^2+\propto_3^2} + \frac{\propto_2^2}{\propto_1^2+\propto_3^2} + \frac{\propto_3^2}{\propto_1^2+\propto_2^2}$

Sol.- Recordamos que $s_2 = \propto_1^2+\propto_2^2+\propto_3^2$ -- > $\propto_2^2+\propto_3^2 = s_2 - \propto_1^2$, entonces podemos escribir

$$V = \frac{\propto_1^2}{s_2-\propto_1^2} + \frac{\propto_2^2}{s_2-\propto_2^2} + \frac{\propto_3^2}{s_2-\propto_3^2}$$

Interesa en primer lugar la ecuación con raíces $\propto_i^2$, i = 1, 2, 3

Observamos que $(x - \propto_1^2).(-x - \propto_1^2) = (x - \propto_1^2).(x + \propto_1^2) = -(x^2 - \propto_1^2)$, lo que nos dice que debo hacer

$$P(x).P(-x) = \prod (x - \propto_1^2).(-x - \propto_1^2) = \prod -(x - \propto_1^2).(x + \propto_1^2) =$$

$$= -\prod_1^3 (x^2 - \propto_1^2)$$, donde hacemos $y = x^2$, obteniendo

$$Q(y) = \prod_1^3 (y - \propto_1^2) = \ldots = y^3 - 5.y + 6.y - 1$$. Observa que

$$\sum_1^3 \propto_i^2 = 5$$

En ésta hacemos el cambio $z = \frac{y}{s_2 - y} = \frac{y}{5-y}$, $z.(5-y) = y$ -- > $y = \frac{5.z}{1+z}$

Operando resulta $R(z) = 29.z^3 - 68.z^2 + 27.z - 1 = 0$, cuyas raíces son $\frac{\propto_i^2}{s_2-\propto_i^2}$. El valor pedido es $V = \frac{68}{29}$

16.- Sea la ecuación $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$, y sus raíces $\propto_i$, i = 1,2,3,4

Calcula el valor $V = \sum_{i<j, j=2,..,4}^{4} \propto_i^2 . \propto_j^2$

Sol.- La suma contiene $C_{4,2} = \frac{4.3}{2} = 6$ términos.

Por otro lado tengo en cuenta que $(\sum_{i=1}^{4} \propto_j^2)^2 = \sum_{i=1}^{4} \propto_j^4 + 2.\sum_{i<j} \propto_i^2.\propto_j^2$, de donde $\sum_{i<j} \propto_i^2.\propto_j^2 = \frac{1}{2}.[s_2^2 - s_4]$.

Sabemos que: $s_o = 4$, $s_1 = - a_1$, $s_2 = a_1^2 - 2.a_2$

$s_3 = (a_1.a_2 - 3.a_3) - a_1.(a_1^2 - 2.a_2)$,

$s_4 = (a_1.a_3 - 4.a_4) - a_2.(a_1^2 - 2.a_2) - a_1.(a_1.a_2 - 3.a_3) + a_1^2.(a_1^2 - 2.a_2)$

Esto nos permite obtener el valor pedido.

17.- Dada la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, con raíces $\propto_i$, i = 1,2,3, calcula el valor

$$V = \sum_{i=1,j,k\neq i}^{3} \frac{\propto_i^2}{\propto_j + \propto_k}$$

Sol.: Siendo $\propto_1 + \propto_2 + \propto_3 = -1$, tengo $\propto_2 + \propto_3 = -(1 + \propto_1)$, y por tanto

$V = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\propto_i^2}{1+\propto_i}$. Obtendremos la ecuación de raíces $\beta_i = \frac{\propto_i^2}{1+\propto_i}$

Para ello hacemos el cambio $y = \frac{x^2}{1+x}$. Tengo que despejar x como sigue $y = \frac{x^2}{1+x}$ -- > $y + x.y = x^2$ -- > $\begin{cases} x^2 - y.x - y = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} x^3 - y.x^2 - y.x = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$ -- > Restándolas

$\begin{cases} x^3 - y.x^2 - y.x = 0 \\ (1+y).x^2 + (y-2).x - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y.x - y = 0 \\ (1+y).x^2 + y.x - 2x - 1 = 0 \end{cases}$, despejo $x^2 = y.(x+1)$, que lo llevo a la segunda

(1+y). y.(x+1) + (y-2).x -1 = 0 -- > [y.(1+y) +(y-2)].x = 1 – y.(1+y) , simplificando

[y^2 +2y -2].x = -(y^2 +y -1) -- > x = $\frac{-(y^2 +y -1)}{y^2 +2y -2}$

18.- Sea la ecuación x^3 -5x^2 +6x -1 = 0, y sus raíces $\propto_i$, i = 1,2,3 .

Obtener aquella cuyas raíces sean $\beta_i = (\propto_i - 2)^2$.

Sol.- Haciendo el cambio y = x -2 obtengo la de raíces $\gamma_i = \propto_i - 2$.

x = y+2 -- > $(y+2)^3$ -5.$(y+2)^2$ +6.(y+2) -1 = 0 --- > …

y^3 +y^2 -2y -1 = 0. En ésta hacemos el cambio z = y^2 para

obtener la de raíces $\beta_i = (\propto_i - 2)^2$. La obtenemos como sigue

(y^3 +y^2 -2y -1).(-y^3 +y^2 +2y -1) = -y^6 +5.y^4 -6.y^2 +1 -- >

y^6 -5.y^4 +6.y^2 -1 = 0 -- > $(y^2)^3$ -5.$(y^2)^2$ + 6.y^2 -1 = 0 -- > z^3 -5z^2 +6z -1 = 0

Otra forma: Hago y = $(x-2)^2$ = x^2 -4x +4

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} yx = x^3 - 4x^2 + 4x \\ x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x = yx \\ x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases}$ -- > Restando: $\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x = yx \\ -x^2 + 2x - 1 = -yx \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = y \\ x^2 - 2x + 1 = yx \end{cases}$ -- > Restando: 2x -3 = yx –y -- >

y.(x-1) = 2x-3 -- > y = $\frac{2x-3}{x-1}$. También: 2x -3 = yx –y -- >

2x –yx = 3-y -- > x = $\frac{y-3}{y-2}$

Esto significa que, para una raíz $\propto_i$ de la dada se verifican al mismo tiempo

$$\beta_i = \frac{2.\propto_i - 3}{\propto_i - 1}, \quad \beta_i = \propto_i^2 - 4 \propto_i + 4$$

19.- Calcula el valor de cada una de las expresiones siguientes

$P_1 = \epsilon^{r_1} + \epsilon^{r_3} + \epsilon^{r_5} + \epsilon^{r_7} + \epsilon^{r_9} + \epsilon^{r_{11}}$

$P_2 = \epsilon^{r_2} + \epsilon^{r_4} + \epsilon^{r_6} + \epsilon^{r_8} + \epsilon^{r_{10}} + \epsilon^{r_{12}}$

donde ϵ es una raíz primitiva de $x^{13} - 1 = 0$, y r_i es el resto obtenido al dividir 2^k por 13 (es decir: $r_i = 2^k \ mó.13$)

Sol.: Tenemos valores de k, de 2^k y del citado resto:

k	1	3	5	7	9	11
2^k	2	8	32	128	512	2048
r_i	2	8	6	11	5	7

………………

k	2	4	6	8	10	12
2^k	4	16	64	256	1024	4096
r_i	4	3	12	9	10	1

………………

$P_1 = \epsilon^2 + \epsilon^8 + \epsilon^6 + \epsilon^{11} + \epsilon^5 + \epsilon^7$

$P_2 = \epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^{12} + \epsilon^9 + \epsilon^{10} + \epsilon^1$

Por ser ϵ raíz primitiva de $x^{13} -1 = (x-1).(x^{12} +x^{11} + \ldots + x^2 +x +1)$

tenemos $P_1 + P_2 = (\epsilon^2 + \epsilon^8 + \epsilon^6 + \epsilon^{11} + \epsilon^5 + \epsilon^7)$ +

+ $(\epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^{12} + \epsilon^9 + \epsilon^{10} + \epsilon^1)$ =

= $\epsilon^{12} + \epsilon^{11} + \epsilon^{10} + \epsilon^9 + \epsilon^8 + \epsilon^7 + \epsilon^6 + \epsilon^5 + \epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon^1 = -1$

Por otro lado, si hacemos el producto de los polinomios

$P1(x) = x^2 + x^8 + x^6 + x^{11} + x^5 + x^7$

$P2(x) = x^4 + x^3 + x^{12} + x^9 + x^{10} + x^1$

obtenemos $Q(x) = 3.[x +x^2 +x^3 + \ldots + x^{11} + x^{12}]$. Esto nos dice que el la suma de los productos dos a dos $\epsilon^i.\epsilon^j$ toma el valor -3, esto es

$P_1.P_2 = -3$. Por lo tanto P_1, P_2 son las raíces de $x^2 +x -3 = 0$.

20.- Sea la ecuación $x^3 +2x^2 +3x +1 = 0$, y sus raíces $\propto_i$, i = 1, 2, 3.

Obtener la ecuación cuyas raíces sean

$$\frac{1}{\propto_1^3} + \frac{1}{\propto_2^3} - \frac{1}{\propto_3^3}, \ \frac{1}{\propto_1^3} - \frac{1}{\propto_2^3} + \frac{1}{\propto_3^3}, \quad -\frac{1}{\propto_1^3} + \frac{1}{\propto_2^3} + \frac{1}{\propto_3^3}$$

Sol.- Oprerando obtenemos $\frac{1}{\propto_1^3} + \frac{1}{\propto_2^3} - \frac{1}{\propto_3^3} = \frac{\propto_2^3+\propto_1^3}{\propto_1^3.\propto_2^3} - \frac{1}{\propto_3^3} =$ $\frac{\propto_1^3.\propto_3^3 +\propto_2^3.\propto_3^3 - \propto_1^3.\propto_2^3}{\propto_1^3.\propto_2^3.\propto_3^3}$, y teniendo en cuenta que $\propto_1.\propto_2.\propto_3 = -1$, tengo

$$\frac{\propto_1^3.\propto_3^3 +\propto_2^3.\propto_3^3 - \propto_1^3.\propto_2^3}{-1} = \frac{\propto_1^3.\propto_3^3 +\propto_2^3.\propto_3^3 + \propto_1^3.\propto_2^3 - 2.\propto_1^3.\propto_2^3}{-1} =$$

pero $\propto_1.\propto_2.\propto_3 = -1$ --> $\propto_1.\propto_2 = \frac{-1}{\propto_3}$,

$= \frac{\propto_1^3.\propto_3^3 + \propto_2^3.\propto_3^3 + \propto_1^3.\propto_2^3 - 2.(\frac{-1}{\propto_3})^3}{-1}$ = -[M + $\frac{2}{\propto_3^3}$] = - $\frac{M.\propto_3^3 + 2}{\propto_3^3}$, donde

M = $\propto_1^3.\propto_3^3 + \propto_2^3.\propto_3^3 + \propto_1^3.\propto_2^3$.

Por otro lado: $(\propto_1^3 + \propto_2^3 + \propto_3^3)^2$ = $\propto_1^6 + \propto_2^6 + \propto_3^6$ + 2.($\propto_1^3.\propto_3^3 + \propto_2^3.\propto_3^3 + \propto_1^3.\propto_2^3$), de donde

2.M = $s_3^2 - s_6$ -- > M = $\frac{1}{2}$. $[s_3^2 - s_6]$

Los cálculos dan: $s_3 = 7$, $s_6 = 25$, y por tanto M = 12

Debemos obtener la ecuación cuyas raíces sean

$\beta_i = -[\frac{12.\propto_i^3 + 2}{\propto_i^3}]$

En primer lugar debemos obtener la de raíces $\propto_i^3$. Teniendo en cuenta que

(x - $\propto_i$). $\left(\frac{x}{\epsilon} - \propto_i\right) . \left(\frac{x}{\epsilon^2} - \propto_i\right) = x^3 - \propto_i^3$, la obtenemos haciendo

P(x).P($\frac{x}{\epsilon}$).P($\frac{x}{\epsilon^2}$) , y haciendo después el cambio y = x^3 .

Si Q(y) es la obtenida con raíces $\propto_i^3$, hacemos en ésta el cambio

z = $-[\frac{12.y + 2}{y}]$ para obtener el final deseado.

21.- Dada la ecuación P(x) = 0, de grado n, con raíces $\propto_i$, i = 1, 2, …,n, consideremos las raíces β_j , j = 1, 2, …, n-1 de la ecuación P '(x) = 0, donde P '(x) es la derivada de P(x).

Demostrar que $\prod_{i=1}^{n} P'(\propto_i) = n^n . \prod_{j=1}^{n-1} P(\beta_j)$

Sol.- Suponiendo que el coeficiente de x^n es uno, tenemos P(x) = $\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{x}-\propto_i)$ -- > $\mathrm{P}(\beta_k) = \prod_{i=1}^{n}(\beta_k-\propto_i)$, de donde

$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}(\beta_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n}(\beta_k-\propto_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{n-1}(\beta_k-\propto_i)\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n-1}.\left(\prod_{k=1}^{n-1}(\propto_i-\beta_k)\right).$$

Por otro lado $\mathrm{P}'(x) = n.\prod_{k=1}^{n-1}(x-\beta_k)$ --- > $\mathrm{P}'(\propto_i) = n.\prod_{k=1}^{n-1}(\propto_i-\beta_k)$, y entonces

$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}(\beta_k) = \prod_{i=1}^{n} (-1)^{n-1}.\frac{1}{\mathrm{n}}.\mathrm{P}'(\propto_i) = \frac{(-1)^{n.(n-1)}}{n^n}.\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}'(\propto_i)$$

, y teniendo en cuenta que $(-1)^{n.(n-1)} = 1$, queda

$$\prod_{i=1}^{n} P'(\propto_i) = n^n.\prod_{k=1}^{n-1} P(\beta_k) \qquad \text{c.q.d.}$$

22.- Sea la ecuación P(x) = 0, y sus raíces $\propto_i$, i = 1, 2, …,n.

Demostrar la igualdad $\sum_{i<j,i=1,\dots,n-1}(\propto_i-\propto_j)^{2p} =$

$$= (-1)^p.\frac{1}{2}.\binom{2p}{p}.s_p^2 + \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i.\binom{2p}{i}.s_{2p-1}.s_i$$

Sol.-

Tenemos $\sum_{j=1}^{n}(x-\propto_j)^{2p} = n.x^{2p} - \binom{2p}{1}.x^{2p-1}.\sum_{j=1}^{n}\propto_j + \dots \mp$

$$\mp \binom{2p}{2p}.\sum_{j=1}^{n}\propto_j^{2p} = s_o.x^{2p} - s_1.\binom{2p}{1}.x^{2p-1} + s_2.\binom{2p}{2}.x^{2p-2} - \dots$$

$$\ldots \mp (-1)^{2p}. s_{2p}. \binom{2p}{2p} = s_o. x^{2p} - s_1. 2p. x^{2p-1} + \cdots + s_{2p}$$

Por tanto $\sum_{j\neq k,,k\, fijo}^{n} (\propto_k - \propto_j)^{2p} =$

$$= s_o. \propto_k{}^{2p} - s_1. 2p. \propto_k{}^{2p-1} + \cdots - s_{2p-1}. \binom{2p}{2p-1}. \propto_k + s_{2p}$$

de donde $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j\neq k}^{n} (\propto_k - \propto_j)^{2p} \right) =$

$$= s_o. s_{2p} - 2p. s_1. s_{2p-1} + \cdots - 2p. s_{2p-1}. s_1 + s_{2p}. s_o$$

donde debemos observar la simetría, y el número de términos es 2p +1.

Recordamos que $\sum_{i<j, i=1,\ldots,n-1}{}'' = \sum_{(i,j)\in C_{n,2}}{}''$, y que $\binom{2p}{p-k} = \binom{2p}{p+k}$

Entonces $2. \sum_{(i,j)\in C_{n,2}} (\propto_k - \propto_j)^{2p} = \sum_{(i,j)\in V_{n,2}} (\propto_k - \propto_j)^{2p} =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j\neq k}^{n} (\propto_k - \propto_j)^{2p} = 2. s_o. s_{2p} - 2. (2p). s_1. s_{2p-1} +$$

$$+ \cdots + 2. (-1)^{p-1}. \binom{2p}{p-1}. s_{p-1}. s_{p+1} + (-1)^p. \binom{2p}{p}. s_p. s_p$$

Por lo tanto

$$\sum_{(i,j)\in C_{n,2}} (\propto_k - \propto_j)^{2p} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^p. \binom{2p}{i}. s_i. s_{2p-i} + \frac{(-1)^p}{2}. \binom{2p}{p}. s_p^2$$

c.q.d.

23.- Demuestra la siguiente igualdad

$$2^{2n}.cos^{2n}(t) = 2.\cos(2nt) + 2.\binom{2n}{1}.\cos\big((2n-2)t\big) + \cdots +$$

$$+\ 2.\binom{2n}{n-1}.\cos(2t) + \binom{2n}{n}$$

Dem.: En primer lugar tengamos en cuenta que

$$\begin{cases} e^{it} = \cos(t) + i.sen(t) \\ e^{-it} = \cos(t) - i.sen(t) \end{cases} \text{ --> } 2.\cos(t) = e^{it} + e^{-it}$$

Teniendo en cuenta esto: $2^{2n}.cos^{2n}(t) = (e^{it} + e^{-it})^{2n} =$

$= \binom{2n}{0}.e^{2nit}.e^{-0.it} + \binom{2n}{1}.e^{(2n-1)it}.e^{-it} + \binom{2n}{2}.e^{(2n-2)it}.e^{-2it} + \cdots +$

$+ \binom{2n}{k}.e^{(2n-k)it}.e^{-kit} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}.e^{it}.e^{-(2n-1)it} + \binom{2n}{2n}.e^{0.it}.e^{-2nit} =$

(Sumando exponentes: $e^{(2n-k)it}.e^{-kit} = e^{2.(n-k)it}$

$= \binom{2n}{0}.e^{2nit} + \binom{2n}{1}.e^{2.(n-1)it} + \binom{2n}{2}.e^{2.(n-2)it} + \ldots + \binom{2n}{k}.e^{2.(n-k)it} + \ldots$

$\ldots + \binom{2n}{n}.e^{0.it} + \cdots + \binom{2n}{2n-1}.e^{-2.(n-1)it} + \binom{2n}{2n}.e^{-2nit}$

Sabemos que $\binom{2n}{2n-m} = \binom{2n}{m}$, y por tanto $\binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n+k}$, y que la suma contiene 2n +1 términos. (observa que comienza por k = 0)

Término central: $\binom{2n}{n}.e^{nit}.e^{-nit} = \binom{2n}{n}.e^{0.it} = \binom{2n}{n}$

$2^{2n}.cos^{2n}(t) = [e^{2nit} + e^{-2nit}]$ + $\binom{2n}{1}$.[$e^{2.(n-1)it} + e^{-2.(n-1)it}$] + … +

+ $\binom{2n}{k}$. [$e^{2.(n-k)it} + e^{-2.(n-k)it}$] + … + $\binom{2n}{n}. e^{0.it}$,

Pero, por otro lado recordamos que $e^{mti} + e^{-mti}$ = [cos(mt) +i.sen(mt)] +

+ [cos(mt) – i.sen(mt)] = 2.cos(mt) , y por lo tanto

$$2^{2n}.cos^{2n}(t) = 2.\cos(2nt) + 2.\binom{2n}{1}.\cos(2(n-1)t) + \cdots +$$

$$+ 2.\binom{2n}{k}.\cos(2.(n-k)t) + \cdots + 2.\binom{2n}{n-1}.\cos(2t) + \binom{2n}{n}$$

c.q.d.

24.- Calcular el valor de la suma $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sen^2(\frac{2k\pi}{n})}$, n primo > 2

Sol.- Debemos recordar que una raíz primitiva, ε, de $x^n - 1 = 0$ puede expresarse en la forma

$$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen(\frac{2\pi}{n}) \text{ , y que}$$

$$\varepsilon^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.sen(\frac{2k\pi}{n}) ,$$

$$\varepsilon^{-k} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - i.sen(\frac{2k\pi}{n})$$

Teniendo en cuenta esto tengo: $\varepsilon^k - \varepsilon^{-k} = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k} =$

$2.i.sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \rightarrow$

$\frac{1}{2.i.sen(\frac{2k\pi}{n})} = \frac{1}{\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}}$ ---> $\frac{1}{-4.sen^2(\frac{2k\pi}{n})} = \frac{1}{(\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})^2}$ -->

$\frac{-1}{4} . \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sen^2(\frac{2k\pi}{n})} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})^2}$

Llamo $2.i.y_k = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}$, $\frac{1}{2.i.y_k} = \frac{1}{\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}}$, y con esta sustitución tengo

$\frac{-1}{4.y_k^2} = \frac{1}{(\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})^2} = \frac{1}{-4.sen^2(\frac{2k\pi}{n})}$

Proceso a seguir:

a)Obtener ecuación con raíces $2.i.y_k = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}$. Esto se consigue haciendo en $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ el cambio

$2.i.y = x - \frac{1}{x}$. Sea Q(y) el polinomio obtenido.

b)Obtener ecuación cuyas raíces sean $z_k = \frac{1}{2.i.y_k} = \frac{1}{\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}}$, para lo cual hacemos en Q(y) el cambio $z = \frac{1}{2.i.y}$. Sea R(z) el polinomio obtenido.

c)Obtener la ecuación de raíces $z_k^2 = \frac{-1}{4.y_k^2} = \frac{1}{(\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})^2}$.
Podemos obtenerla haciendo R(z).R(-z), como veremos.

CÁLCULOS:

a) $x^n - 1 = (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1).(x - 1)$, y una raíz primitiva ε de $(x - 1)$

Si $\propto_i$ son las raíces de P(x) = $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$, tengo

P(x) = $\prod_{i=1}^{n-1}(x - \propto_i)$, P($\frac{-1}{x}$) = $\prod_{i=1}^{n-1}(\frac{-1}{x} - \propto_i)$

Teniendo en cuenta que $(x - \propto_i).\left(-\frac{1}{x} - \propto_i\right) =$

$= \ldots = -\propto_i.\left(x - \frac{1}{x}\right) + \propto_i.\left(\propto_i - \frac{1}{\propto_i}\right) = -\propto_i.\left[\left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(\propto_i - \frac{1}{\propto_i}\right)\right]$

las raíces del polinomio P(x). P($\frac{-1}{x}$) son $\beta_i = \left(\propto_i - \frac{1}{\propto_i}\right)$, en nuestro caso concreto: $2.i.y_k = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}$

Por tanto hago el producto P(x). P($\frac{-1}{x}$), y después hago el cambio $2.i.y = x - \frac{1}{x}$

(Recordar que n es impar, por ser primo > 2)

$$P\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^n - 1}{-\frac{1}{x} - 1} = -\frac{-\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{(1+x^n).x}{x^n.(1+x)} = \frac{1+x^n}{x^{n-1}.(1+x)}$$

$$P(x).\,P\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{x^n - 1}{x-1} \cdot \frac{1+x^n}{x^{n-1}.(1+x)} = \frac{(x^n-1).(x^n+1)}{x^{n-1}.(x^2-1)} = \frac{x^{2n}-1}{x^{n-1}.(x^2-1)} =$$

$$= \frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{x^{2n}-1}{x^n} = \frac{x}{x^2-1} \cdot \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \cdot \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) =$$

$$= (x^n - x^{-n}) \cdot \frac{1}{(x - x^{-1})}$$, (n impar por ser primo)

En el punto 7.2 (pág. 83) hemos calculado $(x^n + (-x)^{-n})$, haciendo $2.i.y = x - \frac{1}{x}$, que nos permite obtener la expresión Q(y) como sigue:

$$(x^n - x^{-n}) = \left(\frac{2iy+\sqrt{-4.y^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{2iy-\sqrt{-4.y^2+4}}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2iy+2i.\sqrt{y^2-1}}{2}\right)^n + \left(\frac{2iy-2i.\sqrt{y^2-1}}{2}\right)^n =$$

$$= i^n . [\,(y+\sqrt{y^2-1})^n + (y-\sqrt{y^2-1})^n\,]$$

Entonces P(x). P($\frac{-1}{x}$) $=$ = $(x^n - x^{-n}).\frac{1}{(x-x^{-1})}$ =

$$= \frac{i^n}{2iy} . [\,(y+\sqrt{y^2-1})^n + (y-\sqrt{y^2-1})^n\,] = (*)$$

Desarrollando potencias

$(y+\sqrt{y^2-1})^n =$
$\binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} y^{n-1}.\sqrt{y^2-1} + \cdots + \binom{n}{k} y^{n-k}.(\sqrt{y^2-1})^k +$

$+ \ldots + \binom{n}{n-1} y.(\sqrt{y^2-1}\,)^{n-1} + \binom{n}{n}.(\sqrt{y^2-1}\,)^n$

$(y-\sqrt{y^2-1})^n =$
$\binom{n}{0} y^n - \binom{n}{1} y^{n-1}.\sqrt{y^2-1} + \cdots \pm \binom{n}{k} y^{n-k}.(\sqrt{y^2-1})^k \pm$

$\pm \cdots \pm \binom{n}{n-1} y.(\sqrt{y^2-1}\,)^{n-1} - \binom{n}{n}.(\sqrt{y^2-1}\,)^n$,

(recuerda que n es impar)

Entonces

$$(*) = \frac{i^n}{2iy}.(y+\sqrt{y^2-1})^n + (y-\sqrt{y^2-1})^n =$$

(Se eliminan $\binom{n}{k} y^{n-k}.(\sqrt{y^2-1})^k$ cuando k impar)

$= \frac{i^n}{2iy}.2.[$
$\binom{n}{0} y^n + \binom{n}{2} y^{n-2}.(\sqrt{y^2-1})^2 + \cdots + \binom{n}{k} y^{n-k}.(\sqrt{y^2-1})^k + \ldots +$
$\binom{n}{n-3} y^3.(\sqrt{y^2-1})^{n-3} + \binom{n}{n-1} y.(\sqrt{y^2-1})^{n-1}]$,

(k par)

(Se han eliminado aquellos donde k es impar)

Designo por Q(y) este resultado, que puedo expresar en la forma

$$Q(y) = \frac{2.i^n}{2iy}.y.[\binom{n}{0} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-3}.(\sqrt{y^2-1})^2 + \cdots +$$

$$+\binom{n}{k} y^{n-k-1}.(\sqrt{y^2-1})^k + \ldots + \binom{n}{n-3} y^2.(\sqrt{y^2-1})^{n-3} +$$

$$+\binom{n}{n-1}(\sqrt{y^2-1})^{n-1}],$$ donde k es par

Teniendo en cuenta que n-1 es par, $i^{n-1} = 1$, y por tanto

Q(y) =
$[\binom{n}{0} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-3}.(\sqrt{y^2-1})^2 + \cdots + \binom{n}{k} y^{n-k-1}.(\sqrt{y^2-1})^k +$
$\ldots +$

$$+ \binom{n}{n-3} y^2.(\sqrt{y^2-1})^{n-3} + \binom{n}{n-1}(\sqrt{y^2-1})^{n-1}]$$

Como n-1 es par hago n-1 = 2p, con lo cual n-k-1 = 2p+1-k-1 = 2p-k que es par. Entonces

Q(y) =
$[\binom{n}{0} y^{2p} + \binom{n}{2} y^{2p-2}.(\sqrt{y^2-1})^2 + \cdots + \binom{n}{k} y^{2p-k}.(\sqrt{y^2-1})^k +$
$\ldots +$

$$+ \binom{n}{n-3} y^2.(\sqrt{y^2-1})^{2p-2} + \binom{n}{n-1}\left(\sqrt{y^2-1}\right)^{2p}]$$

o mejor

Q(y) = [$\binom{n}{0} y^{2p} + \binom{n}{2} y^{2(p-1)}.(y^2-1) + \cdots + \binom{n}{k} y^{2(p-\frac{k}{2})}.(y^2-1)^{\frac{k}{2}}$ + …+

+ $\binom{n}{n-3} y^2.(y^2-1)^{p-1} + \binom{n}{n-1}(y^2-1)^p$]

Sus raíces son $2.i.y_k = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}$

b)En Q(y) hago el cambio z = $\frac{1}{2iy}$, 2iy = $\frac{1}{z}$ -- > - 4y^2 = $\frac{1}{z^2}$ -- > y^2 = $\frac{-1}{(2.z)^2}$

Obtengo polinomio en z:

R(z) = = [$\binom{n}{0}(\frac{-1}{(2.z)^2})^p + \binom{n}{2}(\frac{-1}{(2.z)^2})^{p-1}.(\frac{-1}{(2.z)^2}-1) + \cdots +$

+$\binom{n}{k}(\frac{-1}{(2.z)^2})^{p-\frac{k}{2}}.(\frac{-1}{(2.z)^2}-1)^{\frac{k}{2}}$ +…+ $\binom{n}{n-3}\frac{-1}{(2.z)^2}.(\frac{-1}{(2.z)^2}-1)^{p-1} +$

+$\binom{n}{n-1}\left(\frac{-1}{(2.z)^2}-1\right)^p$]

Continuando (observa que en cada término tengo (-1)^p)

R(z) = (-1)^p. [$\binom{n}{0}(\frac{1}{4.z^2})^p + \binom{n}{2}(\frac{1}{4.z^2})^{p-1}.\frac{(1+4z^2)}{4.z^2} + \cdots +$

+$\binom{n}{k}(\frac{1}{4.z^2})^{p-\frac{k}{2}}.(\frac{(1+4z^2)}{4.z^2})^{\frac{k}{2}}$ + …+ $\binom{n}{n-3}\frac{1}{4.z^2}.(\frac{(1+4z^2)}{4.z^2})^{p-1} +$

+ $\binom{n}{n-1}\left(\frac{(1+4.z^2)}{4.z^2}\right)^p$]

Continuando (Saco factor común $(\frac{1}{4.z^2})^p$)

R(z) = $\pm(\frac{1}{4.z^2})^p.[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}.(1+4z^2)+\cdots+\binom{n}{k}.(1+4z^2)^{\frac{k}{2}}+$

$+\ldots+\binom{n}{n-3}.(1+4z^2)^{p-1}+\binom{n}{n-1}(1+4z^2)^p]$

Después de igualar a cero puedo tomar

R(z) = $\binom{n}{n-1}(1+4z^2)^p+\binom{n}{n-3}.(1+4z^2)^{p-1}+\ldots+$

$+\binom{n}{k}.(1+4z^2)^{\frac{k}{2}}+\ldots+\binom{n}{2}.(1+4z^2)+\binom{n}{0}+\binom{n}{2}.(1+4z^2)$ = 0

Sus raíces so $z_k = \frac{1}{\varepsilon^k-\frac{1}{\varepsilon^k}}$

c)Obtengo aquel cuyas raíces sean $z_k^2 = \frac{1}{(\varepsilon^k-\frac{1}{\varepsilon^k})^2}$

Lo cumple el polinomio T(z) = R(z).R(-z), ya que

$$(z-z_k).(-z-z_k) = -(z-z_k).(z+z_k) = -(z^2-z_k^2)$$

Pero R(-z) = R(z), por lo cual hago R(z)^2.

R(z)^2 = $\binom{n}{n-1}^2.(1+4z^2)^{2p}+2.\binom{n}{n-1}.\binom{n}{n-3}.(1+4z^2)^p.(1+4z^2)^{p-1}$

$+\binom{n}{n-3}^2.(1+4z^2)^{2p-2}$ + … (no interesan ….

R(z)^2 = $\binom{n}{n-1}^2.(1+4z^2)^{2p}+2.\binom{n}{n-1}.\binom{n}{n-3}.(1+4z^2)^{2p-1}$ +

$+ \binom{n}{n-3}^2 . (1 + 4z^2)^{2p-2}$ + … (no interesan ….

Sabemos que la suma de las raíces z_k^2 coincide con el coeficiente del término de grado N-1, cambiado de signo, y donde N es el grado del polinomio.

Si operamos

$R(z)^2 = n^2.(4z^2 + 1)^{2p} + 2.n.\frac{n.(n-1).(n-2)}{6} . (4z^2 + 1)^{2p-1}$ + (no interesan…

Haciendo $x = z^2$ tengo

$T(x) = n^2.([\binom{2p}{0} . 4^{2p}. x^{2p} + \binom{2p}{1} . 4^{2p-1}. x^{2p-1} + (no\ interesan..]$ +

$+ \frac{(n-1).(n-2)}{3} \binom{2p-1}{0} . 4^{2p-1}. x^{2p-1} + (no\ interesa\ ...] +$

$+ [(no\ interesa..)])$

Este es de grado N = 2p, siendo N-1 = 2p-1

Después de igualar a cero tengo y hacer que el primer coeficiente, a_0, sea uno, el coeficiente del términos de grado N-1 es

$$\frac{1}{4^{2p}} . \left[2. p. 4^{2p-1} + 4^{2p-1}. \frac{(n-1).(n-2)}{3}\right] = \frac{1}{4} . \left[2. p + \frac{(n-1).(n-2)}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} . \left[\frac{3.(n-1)+(n-1).(n-2)}{3}\right] = \frac{1}{4} . \left[\frac{(n-1).(3+(n-2))}{3}\right] = \frac{1}{4} . \left[\frac{(n-1).(n+1)}{3}\right] = \frac{1}{12} . [n^2 - 1]$$

Por lo tanto $\sum_{0 \le k}^{n} \frac{1}{(\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})^2} = \frac{-1}{12} . [n^2 - 1]$,

(Recuerda que ess igual al coeficiente del término de grado N-1, cambiado de signo)

Tenemos así: $\frac{-1}{4}.\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{sen^2(\frac{2k\pi}{n})} = \frac{-1}{12}.[n^2-1]$ -- > $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{sen^2(\frac{2k\pi}{n})} = \frac{n^2-1}{3}}$

25.- Calcular el valor de la suma $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{cos^2(\frac{2k\pi}{n})}$ π ε

Sol.- Hago y = $sen(\frac{2k\pi}{n})$, x = $cos(\frac{2k\pi}{n})$, $y^2 + x^2 = 1$ -- > $y^2 - 1 = -x^2$

Tomo un resultado obtenido anteriormente (Al tratar el caso del seno)

Q(y) = $[\binom{n}{0}y^{2p} + \binom{n}{2}y^{2(p-1)}.(y^2-1) + \cdots + \binom{n}{k}y^{2(p-\frac{k}{2})}.(y^2-1)^{\frac{k}{2}} + \ldots +$

$+ \binom{n}{n-3}y^2.(y^2-1)^{p-1} + \binom{n}{n-1}(y^2-1)^p]$

Sus raíces son $2.i.y_k = \varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k}$

En ésta hago el cambio $y^2 = 1 - x^2$, $y^2 - 1 = -x^2$

Tengo P(x) = $\binom{n}{0}(1-x^2)^p + \binom{n}{2}(1-x^2)^{(p-1)}.(-x^2) + \cdots +$

$+\binom{n}{k}(1-x^2)^{(p-\frac{k}{2})}.(-x^2)^{k/2} + \ldots + \binom{n}{n-3}(1-x^2).(-x^2)^{p-1} +$

$+ \binom{n}{n-1}.(-x^2)^p =$

$= \binom{n}{0}(1-x^2)^p - \binom{n}{2}(1-x^2)^{(p-1)}.x^2 + \cdots \pm$

$\pm \binom{n}{k}(1-x^2)^{\left(p-\frac{k}{2}\right)}.(x^2)^{\frac{k}{2}} \pm \ldots \pm \binom{n}{n-3}(1-x^2).(x^2)^{p-1} \pm$

$\pm \binom{n}{n-1}.(x^2)^p$

Las raíces de P(x) son $x_k = cos(\frac{2k\pi}{n})$

Hago el cambio $z = \frac{1}{x}$, para obtener aquella cuyas raíces sean

$z_k = \frac{1}{cos(\frac{2k\pi}{n})}$

$z = \frac{1}{x}$ -- > $x = \frac{1}{z}$ -- > R(z) =

$= \binom{n}{0}(\frac{z^2-1}{z^2})^p - \binom{n}{2}(\frac{z^2-1}{z^2})^{(p-1)}.\frac{1}{z^2} + \cdots \pm$

$\pm \binom{n}{k}(\frac{z^2-1}{z^2})^{(p-\frac{k}{2})}.(\frac{1}{z^2})^{k/2} \pm \ldots \pm \binom{n}{n-3}(\frac{z^2-1}{z^2}).(\frac{1}{z^2})^{p-1} \pm$

$\pm \binom{n}{n-1}.(\frac{1}{z^2})^p =$

$= \frac{1}{z^{2p}}.[\binom{n}{0}(z^2-1)^p - \binom{n}{2}(z^2-1)^{(p-1)} + \binom{n}{4}(z^2-1)^{(p-2)} \pm$

$\pm \cdots \pm \binom{n}{k}(z^2-1)^{(p-\frac{k}{2})} \pm \ldots \pm \binom{n}{n-3}(z^2-1) \pm \binom{n}{n-1}]$

Igualando a cero puedo quedarme con la expresión

R(z) = $\binom{n}{0}(z^2-1)^p - \binom{n}{2}(z^2-1)^{(p-1)} + \binom{n}{4}(z^2-1)^{(p-2)} \pm \cdots \pm$

$\pm\binom{n}{k}(z^2-1)^{(p-\frac{k}{2})}+\ldots\ldots\pm\binom{n}{n-3}(z^2-1)\pm n = 0$

Sus raíces son $z_k = \frac{1}{cos(\frac{2k\pi}{n})}$

(Observa: $p-\frac{n-3}{2} = \frac{(n-1)-(n-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$)

Para obtener aquella cuyas raíces sean z_k^2 hago el producto R(z).R(-z), ya que, como vimos en otro lugar $(z-z_k).(-z-z_k) = -(z^2 - z_k^2)$.

Observa que R(-z) = R(z), por lo cual hago

$R(z)^2 = (z^2-1)^{2p} - 2.\binom{n}{2}.(z^2-1)^{p+(p-1)} + \cdots (no\ interesan..$

(Desarrollando)

$= [\binom{2p}{0}.z^{4p} - \binom{2p}{1}.z^{4p-2} + \cdots no\ interesan] -$

$-2.\binom{n}{2}.\left[\binom{2p-1}{0}.z^{4p-2} - \binom{2p-1}{1}.z^{4p-4} + \cdots no\ interesan\right] +$

$+ \ldots no\ interesan =$

$=[z^{4p} - 2p.z^{4p-2} + no\ interesan\ ] - 2.\binom{n}{2}.[z^{4p-2} - (2p-1).z^{4p-4} + \cdots] +$

$+\ldots no\ interesan =$ (Agrupo términos por su grado)

$= z^{4p} - \left(2p + 2.\frac{n.(n-1)}{2}\right).z^{2.(2p-1)} \pm \cdots no\ interresan$

$2p + 2.\frac{n.(n-1)}{2} = (n-1) + n.(n-1) = (n-1).(1+n) = n^2-1$

Por tanto $R(z)^2 = z^{4p} - (n^2 - 1).z^{2.(2p-1)} \pm \cdots no\ interresan$

Haciendo $x = z^2$ nos queda

$T(x) = x^{2p} - (n^2 - 1).x^{2p-1} \pm \cdots no\ interresan = 0$, en la cual, la suma de sus raíces toma el valor $(n^2 - 1)$.

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{cos^2(\frac{2k\pi}{n})} = n^2 - 1$

----

26. Calcula el valor de $\sum_{k=1}^{n-1} tan^2(\frac{2k\pi}{n})$

Sol.- (Examen 82-83)

Hago $y = sen(\frac{2k\pi}{n})$, $x = cos(\frac{2k\pi}{n})$, $t = \frac{y}{x}$, $t^2 = \frac{y^2}{1-y^2} = \frac{1}{\frac{1}{y^2} - 1}$

Observa que $t^2 = tan^2(\frac{2k\pi}{n})$

Tomamos la expresión Q(y), ya conocida y utilizada en el caso del coseno:

$Q(y) = \binom{n}{0} y^{2p} + \binom{n}{2} y^{2(p-1)}.(y^2 - 1) + \cdots + \binom{n}{k} y^{2\left(p-\frac{k}{2}\right)}.(y^2 - 1)^{k/2} +$

$+\ldots+\binom{n}{n-1}.(y^2 - 1)^p$

Haciendo $z = \frac{1}{y}$, tengo $t^2 = \frac{1}{z^2 - 1}$, de donde $z^2 - 1 = \frac{1}{t^2}$.

En ésta hago el cambio $z = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{z}$, y obtengo

R(z) =

$= \binom{n}{0}\frac{1}{z^{2p}} + \binom{n}{2}\frac{1}{z^{2(p-1)}}.\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right) + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{z^{2(p-\frac{k}{2})}}.\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)^{k/2} +$

$+\ldots+\binom{n}{n-1}.(\frac{1-z^2}{z^2})^p =$

$= \frac{1}{z^{2p}}.[\binom{n}{0} + \binom{n}{2}(1-z^2) + \binom{n}{4}(1-z^2)^2 + \cdots +$
$\binom{n}{k}(1-z^2)^{k/2} +$

$+\ldots+\binom{n}{n-1}.(1-z^2)^p]$

Después de igualar a cero puedo quedarme con la expresión

R(z) = $\binom{n}{0} + \binom{n}{2}(1-z^2) + \binom{n}{4}(1-z^2)^2 + \cdots + \binom{n}{k}(1-z^2)^{k/2} +$
$\ldots+$

$+\ldots+\binom{n}{n-1}.(1-z^2)^p$

Teniendo en cuenta que $1 - z^2 = -\frac{1}{t^2}$, tengo

P(t) = $\binom{n}{0} - \binom{n}{2}.\frac{1}{t^2} + \binom{n}{4}.\frac{1}{t^4} + \cdots \pm \binom{n}{k}.\frac{1}{t^k} + \ldots \pm \binom{n}{n-1}.\frac{1}{t^{2p}} =$

$= \frac{1}{t^{2p}}.[\binom{n}{0}.t^{2p} - \binom{n}{2}.t^{2p-2} + \binom{n}{4}.t^{2(p-2)} + \cdots \pm \binom{n}{k}.t^{2p-k} +$
$\ldots\pm$

$\pm\binom{n}{n-1}]$. Después de igualar a cero puedo tomar

P(t) = $\binom{n}{0}.t^{2p} - \binom{n}{2}.t^{2p-2} + \binom{n}{4}.t^{2(p-2)} + \cdots \pm \binom{n}{k}.t^{2(p-\frac{k}{2})} + \cdots \pm$

$\pm\binom{n}{n-1}$

Sus raíces son $t_k = \tan(\frac{2k\pi}{n})$

Para obtener la de raíces $t_k^2 = \tan^2(\frac{2k\pi}{n})$ hago P(t).P(-t) , como hicimos en otro lugar, y teniendo en cuenta que P(-t) = P(t)

P(t)^2 = $t^{4p} - 2.\binom{n}{2}.t^{4p-2} + \binom{n}{2}^2.t^{4p-4} \pm \ldots no\ interesan\ \ldots.$, o bien

P(t)^2 = $(t^2)^{2p} - 2.\binom{n}{2}.(t^2)^{2p-1} + \binom{n}{2}^2.t^{2(2p-2)} \pm \ldots no\ interesan$

cuyas raíces son $t_k^2 = \tan^2(\frac{2k\pi}{n})$

Sabemos que la suma de sus raíces toman el valor $2.\binom{n}{2} = 2.\frac{n.(n-1)}{2}$, y por tanto $\sum_{k=1}^{n-1} tan^2(\frac{2k\pi}{n}) = n.(n-1)$

II *Operadores*

2.1.- INCISO sobre las Sustituciones y Permutaciones

Def.: Llamamos "Sustitución" a una matriz de la forma (de orden 5)

S = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$, donde a_k es un valor de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pueden ser de orden n.

Def.: Llamamos "Permutación" a toda matriz de la forma (de orden 5)

P = $(a_{k_1}\ a_{k_2}\ a_{k_3}\ a_{k_4}\ a_{k_5})$, donde a_{k_j} es un valor de

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, y k_j es un valor de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pueden ser de orden n.

Def.: Una sustitución S opera sobre una permutación P = (3 4 1 5 2) , obteniendo otra permutación P’, del siguiente modo

$$P' = S(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} .(3\ \ 4\ \ 1\ \ 5\ \ 2) = (a_3\ a_4\ a_1\ a_5\ a_2)$$

Ha tomado el elemento a_3 de S, después el a_4, después a_1, … , en el orden indicado en P.

Interpretación: Una sustitución S es una aplicación

S : {1, 2, 3, 4, 5} ---- > { Permutaciones}

k --- > a_k

y su imagen es una permutación $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$

Composición de sustituciones: ToS, sirva un ejemplo

$$\text{Si } S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ToS opera como la composición de aplicaciones

$$ToS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$, por ejemplo: 3 -- > 1 -- > 4

2.2.- El operador siguiente ∇.

Ejemplo: La Ecuación de Fibonacci

INTRODUCCIÓN: Dada una sucesión de valores y1, y2, y3, …, yn,…

una condición (ecuación) como $5.y_{n+2} + 4.y_{n+1} + 6.y_n = 0$ enlaza recurrentemente los valores de dicha sucesión.

Mediante el operador siguiente, representado por ∇ y que opera así:

$\nabla(y_n) = y_{n+1}$, podemos escribir $(5\nabla^2 + 4\nabla + 6)y_n = 0$.

∇

NOTAS: a) La relación entre este operador 'siguiente' y el operador 'diferencia', que representamos por Δ y que opera así:

$\Delta(y_n) = y_n - y_{n-1}$, es la siguiente: $\nabla^k = (1 + \Delta)^k$, $\Delta^k = (\nabla - 1)^k$

No lo comprobamos aquí.

b)El operador ∇ es lineal: $\nabla(a.y_n + b.y_{n-1}) = a.y_{n+1}\ b.y_n$

A) Solución para la igualdad $(\nabla - a)y_n = 0$, a <> 0

Tengo $\nabla y_n - a.y_n = 0$ ---> $y_{n+1} - a.y_n = 0$ --> $y_{n+1} = a.y_n$.

Tenemos así la cadena: $y_1 = a.y_0$,
$y_2 = a^2.y_0$,
$y_3 = a^3.y_0$

y así $y_n = a^n.y_0$. considerando y_0 como una constante A arbitraria, la solución general de la homogénea $(\nabla - a)y_n = 0$, a <> 0, es $A . a^n$

B) Solución para la igualdad no homogénea $(\nabla - a)y_n = b_n$, donde a <> 0, y

$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ es una sucesión de valores conocidos.

Si conociéramos una solución particular c_n tendríamos: $(\nabla - a)c_n = b_n$.

Por linealidad tengo

$$(\nabla - a)(y_n - c_n) = (\nabla - a)y_n - (\nabla - a)c_n = b_n - b_n = 0$$

lo cual nos dice que $(y_n - c_n)$, considerando y_n = un valor, sería una solución de la homogénea

$$(\nabla - a)(y_n - c_n) = 0, \quad \text{y entonces } (y_n - c_n) = A.a^n$$

de donde $y_n = A.a^n + c_n$

Conclusión: Solución general de la no homogénea = solución general de la homogénea + una solución particular.

Poniendo la ecuación $(\nabla - a)y_n = b_n$ en la forma $y_{n+1} = a.y_n + b_n$, y dando valores a n obtenemos

$y_1 = a.y_0 + b_0$

$y_2 = a.(a.y_0 + b_0) + b_1 = \quad a^2.y_0 + a.b_0 + b_1$

$y_3 = a.(a^2.y_0 + a.b_0 + b_1) + b_2 = \quad a^3.y_0 + a^2.b_0 + a.b_1 + b_2$

....

$y_n = a^n.y_0 + a^{n-1}.b_0 + a^{n-2}.b_1 + \ldots + a^{n-k}.b_{k-1} + \ldots + a.b_{n-2} + b_{n-1}$

donde y_0 es una constante arbitraria.

Llamamos término complementario al valor

$a^{n-1}.b_0 + a^{n-2}.b_1 + \ldots + a^{n-k}.b_{k-1} + \ldots + a.b_{n-2} + b_{n-1} = \sum_{0\le k\le n-1} b_k.a^{n-1-k}$

Afirmamos que este término (o valor) complementario es una solución particular: En efecto,

$$(\nabla - a)[\sum_{0\le k\le n-1} b_k.a^{n-1-k}] =$$

$$= \nabla\left(\textstyle\sum_{0\le k\le n-1} b_k . a^{n-1-k}\right) - a.\textstyle\sum_{0\le k\le n-1} b_k . a^{n-1-k}$$

=

$$= \nabla(y_n - a^n . y_0) - a.(y_n - a^n . y_0) =$$

(tener en cuenta que y_0 es constante y $\nabla a^n = \nabla a^{n+1}$)

$=(y_{n+1} – a^{n+1}.y_0) – a. y_n + a^{n+1}.y_0 = y_{n+1} – a.y^n = b_n$

c.q.d.

C) Solución de la ecuación homogénea $[(\nabla -b).(\nabla-a)]y_n = 0$, donde a<>0, b<>0

Tenemos $[(\nabla -b).(\nabla-a)]y_n = (\nabla -b)[(\nabla -a)y_n] = 0$, y por lo visto en el punto A), cualquiera que sea la constante B, una solución es

$(\nabla -a)y_n = B.b^n$, y por tanto tengo $(\nabla -b)(Bb^n) = 0$

Esta ecuación es no homogénea, y aplicando el punto B) tengo, siendo $A=y_0$ una constante arbitraria

$y_n = A.a^n$ + (término complementario)

Escribiendo $y_{n+1} = a.y_n + B.b^n$ y dando valores a n resulta así:

$y_1 = a.y_0 + B.b^0$

$y_2 = a.y_1 + Bb^1 \qquad = a.(a.y_0 + B.b^0) + B.b^1 =$

$= a^2.y_0 + B.(a.b^0 + b^1)$

$y_3 = a.(a^2.y_0 + a.B.(b^0 + b^1)) + B.b^2 =$

$= a^3.y_0 + B.(a^2.b^0 + a.b^1 + b^2)$

………………

$y_n = a^n.y_0 + B.(a^{n-1}.b^0 + a^{n-2}.b^1 + …+ a^{n-k}.b^{k-1} + …+ a.b^{n-2} + b^{n-1})$

Tenemos finalmente (y_0 es una constante A arbitraria)

$y_n = A.a^n + B.\sum_{0\leq k\leq n-1} a^{n-1-k}.b^k$, (A y B constantes arbitrarias)

Si a <> b, el sumatorio es el resultado del cociente $\frac{a^n-b^n}{a-b}$, y puedo escribir

$B.\sum_{0\leq k\leq n-1} a^{n-1-k}.b^k = B.\frac{b^n}{b^n}.\frac{a^n-b^n}{a-b} = b^n.\frac{B}{b^n}.\frac{a^n-b^n}{a-b} = b^n.B^*$, donde B^* es constante arbitraria por serlo B. De esta forma podemos escribir la solución así:

$$y_n = A.a^n + B.b^n \text{ , donde A y B son constantes arbitrarias.}$$

Si a = b <> 0, la ecuación es $(\nabla - a)^2 y^n = 0$

El sumatorio anterior ahora queda así: $\sum_{0\leq k\leq n-1} a^{n-1-k}.b^k = n.a^{n-1}$, y entonces

$B.\sum_{0\leq k\leq n-1} a^{n-1-k}.b^k = n.\frac{B}{a}.a^n = n.B^*.a^n$, de modo que la solución queda de la forma

$y_n = a^n.(A + n.B)$, donde A y B son constantes arbitrarias.

Ejemplo: La Ecuación de Fibonacci

Sabemos que llamamos sucesión de Fibonacci aquella sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_1$, siendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Tenemos por tanto la ecuación

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0, \quad \text{o bien} \quad (\nabla^2 - \nabla - 1)y_n = 0$$

Las raíces de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$ son $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, y por tanto

$y_n = A.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, obtengo

$$\begin{cases} y_0 = A + B \\ y_1 = A.\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B.\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ --- >}$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 2 = A.(1+\sqrt{5}) + B.(1-\sqrt{5}) \end{cases} \text{ --- >}$$

$2 = A.(1+\sqrt{5}) - A.(1-\sqrt{5}) = A.\sqrt{5} + A.\sqrt{5} = 2.A.\sqrt{5}$ -->

$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

Finalmente: $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{-1}{\sqrt{5}}.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{2^n}.[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]$

Operando:

$(1 + 5^{\frac{1}{2}})^n = \binom{n}{0}.5^0 + \binom{n}{1}.5^{1/2} + \cdots + \binom{n}{k}5^{k/2} + \ldots + \binom{n}{n}.5^{n/2}$

$(1 - 5^{\frac{1}{2}})^n = \binom{n}{0}.5^0 - \binom{n}{1}.5^{\frac{1}{2}} + \cdots \pm \binom{n}{k}5^{\frac{k}{2}} \pm \ldots \pm \binom{n}{n}.5^{n/2}$

Entonces

$(1 + 5^{\frac{1}{2}})^n - (1 - 5^{\frac{1}{2}})^n =$

$= 2.[\binom{n}{1}.5^{1/2} + \binom{n}{3}.5^{3/2} + \ldots + \binom{n}{k}.5^{k/2} + \ldots + \binom{n}{n}.5^{n/2}]$, si n impar

$(1 + 5^{\frac{1}{2}})^n - (1 - 5^{\frac{1}{2}})^n =$

$= 2.[\binom{n}{1}.5^{1/2} + \binom{n}{3}.5^{3/2} + \ldots + \binom{n}{k}.5^{k/2} + \ldots + \binom{n}{n-1}.5^{(n-1)/2}]$, n par

Puedo expresar la solución así:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{2^{n-1}}.\sum_{1\le k\ impar}^{n}\binom{n}{k}.5^{k/2} \quad , \text{ si n es impar}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{2^{n-1}}.\sum_{1\le k\ impar}^{n-1}\binom{n}{k}.5^{k/2} \quad , \text{ si n es par}$$

Además, k/2 -1/2 = (k-1)/2 es par por ser k impar, y podemos escribir

$$y_n = \frac{1}{2^{n-1}}.\sum_{1\le k\ impar}^{n}\binom{n}{k}.5^{(k-1)/2} \quad , \text{ si n impar}$$

$$y_n = \frac{1}{2^{n-1}}.\sum_{1\le k\ impar}^{n-1}\binom{n}{k}.5^{(k-1)/2} \quad , \text{ si n par}$$

2.3.- Cálculo de $x^n + (-x)^{-n}$

Llamamos $C_n = X^n + (-X)^{-n}$, y $z = X - X^{-1}$. Hacemos el producto $C_n.z$

Observa que $z = X + (-X)^{-1}$

$C_n.z = (X^n + (-X)^{-n}).(X - X^{-1}) = X^{n+1} - X^{n-1} + (-X)^{-n}.X - (-X)^{-n}.X^{-1} =$

observa: $(-(-X)^{-n}.X^{-1} = +(-X)^{-n}.(-X)^{-1} = (-X)^{-(n+1)}$),

y que $+(-X)^{-n}.X = -(-X^{-n}).(-X) = -(-X)^{-n+1} = -(-X)^{-(n-1)}$

$= X^{n+1} + (-X)^{-(n+1)} - (-X)^{-(n-1)} - X^{n-1} =$

$= [X^{n+1} + (-X)^{-(n+1)}] - [X^{n-1} + (-X)^{-(n-1)}] = C_{n+1} - C_{n-1}$

por tanto $C_{n+1} = C_n.z + C_{n-1}$ ---> $C_{n+1} - z.C_n - C_{n-1} = 0$, y del mismo modo

$C_{n+2} - z.C_{n+1} - C_n = 0$

Utilizando el operador "siguiente", ∇, escribimos

$(\nabla^2 - z.\nabla - 1).C_n = 0$

Resuelvo: $r^2 - z.r - 1 = 0$. Tengo $r = \frac{z\pm\sqrt{z^2+4}}{2} = \frac{z\pm\sqrt{z^2+4}}{2}$ -- >

$$\begin{cases} r1 = \frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2} \\ r2 = \frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el punto 7.1, tenemos

$C_n = A.(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2})^n + B.(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2})^n$, A y B constantes arbitrarias

Condiciones iniciales: n = 0 -- > $C_0 = 1 + 1 = 2,$

n = 1 -- > $C_1 = X - X^{-1} = z$, entonces

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A.\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right) + B.\left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right) = z \end{cases}$$ -- > B = 2 – A -- >

A.($z + \sqrt{z^2+4}$) + $(2 - A).\left(z - \sqrt{z^2+4}\right) = 2z$ -- >

2z = 2.A. $\sqrt{z^2+4}$ +2.z – 2. $\sqrt{z^2+4}$ -- > 2 = 2.A -- > A = 1, B = 1

Por tanto $X^n + (-X)^{-n} = (\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2})^n + (\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2})^n$

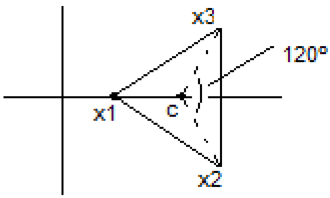
2.3.- Miscelanea-3: Problemas alto nivel, resueltos ó propuestos

1.- Encontrar las condiciones necesarias y suficientes que han de cumplir p, q , en $p(x) = x^3 + p.x + q = 0$, para que sus raíces formen un triángulo equilátero.

Sol.- Sean x1, x2, x3 sus raíces. Sabemos que al menos una es real (por ser de grado impar), sea x1 solución real. Si han de formar triángulo, x2, x3 no serán reales, por lo que serán complejos comjuagados.

Además, por ser equilátero, mediante giros de amplitud $g = 120^o$ y centro el punto (c, 0) centro del triángulo, cada vértice pasa a ocupar el consecutivo.

Por ser números complejos conjugados su representación toma esta forma



Tomo el número complejo u = cos(g) + i.sen(g), $g = 120^o$

$$u = -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

El centro c es un valor real. Al realizar el giro g obtenemos la siguiente transformación de los vértices:

$$\begin{cases} x2 - c = u.(x1 - c) \\ x3 - c = u.(x2 - c) \\ x1 - c = u.(x3 - c) \end{cases} \;\text{---}> \begin{cases} x2 = c + u.(x1 - c) \\ x3 = c + u.(x2 - c) \\ x1 = c + u.(x3 - c) \end{cases} \;\text{--}>$$

El coeficiente de x^2 en p(x) es cero, por lo tanto

0 = x1 +x2 +x3 = 3.c + u.(x1 +x2 +x3) -3.u.c --- >

0 = 3.c.(1 – u) + u.0 --- > c = 0

Por lo tanto $\begin{cases} x2 = u.x1 \\ x3 = u.x2 \\ x1 = u.x3 \end{cases}$ -- > x2 = u.x1, x3 = u^2.x1

Por otro lado, en p(x) se cumple: q = -x1.x2.x3 = $-u^3 x1^3 = -x1^3$
(Observa que u^3 = cos(360) +i.sen(360) = 1)

Entonces 0 = $x1^3 + p.x1 - x1^3$ -- > p = 0. Queda: x^3 + q = 0

siendo sus raíces los valores: $x_k = \sqrt[3]{-q}$

2.- Sean x_i las raíces de x^3 +px + q , polinomio de R[x], y sean los valores $y_i = x_i + \frac{1}{x_i}$. Determinar las condiciones necesarias y suficientes que han de verificar p y q para que estos valores sean reales: $y_i \in R$.

Sol.- Si las raíces x_i son reales no hay nada que demostrar.

Supongamos que x1 es real y las otras dos son complejas, en cuyo caso x2, x3 son conjugadas. Vimos en otro lugar (número …) que:

D > 0 --- > El número de pares de raíces complejas es par

D < 0 --- > El número de pares de raíces complejas es impar.

Como en este caso a lo más puede tener un par de soluciones complejas, las condiciones pedidas equivale a exigir que D > 0.

3.- Dada $X^4 + 3x^3 + x + 1 = 0$ cuyas raíces son $\propto_i$, Calcular el valor de la suma

$$\sum_{i,j,k,l\ dist}(\propto_i^2 + \propto_j^2).\propto_k.\propto_l$$

Sol.-

4.- Calcula las raíces de $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}.\binom{n}{i}.x^i$, sabiendo que P(x) admite la proyectividad

$$T(z) = \frac{-z}{z-2}$$

Sol.-

5.- Racionalizar sobre Q y Z/7 la expresión

$\frac{1}{\varepsilon^n+\varepsilon^{n-1}+\cdots+\varepsilon+1}$, donde ε es una raíz común de los polinomios

$p(x) = x^{n+2} - 2x^n - 3x^2 + 6$,

$q(x) = x^{n+2} + x^{n+1} - x^n - x^{n-1} - \ldots - x^2 - 2x - 2$

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

6.- Resolver sobre Z la ecuación $x^2 + y^2 - x.y = a_n$, donde a_n son los números primos que verifican (la condición)

$a_{n+2} - 2.a_{n+1} + a_n = 0$. Condiciones iniciales: $a_0 = 5$, $a_1 = 11$

Sol.- Utilizando el operador "incremento" ∇ tenemos

$(\nabla^2 - 2.\nabla + 1).a_n = 0$. Resuelvo $\mathrm{r}^2 - 2.\mathrm{r} + 1 = 0$, y tengo

$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{cases}$, solución doble.

(Tomado de otro anterior ….)

Obtenemos los vectores propios $C^1{}_n$, $C^2{}_n$, asociados a r1, r2 :

$$\begin{cases} (\nabla - r_1)C_n^1 = 0 \\ (\nabla - r_2)C_n^2 = 0 \end{cases} \text{-->} \begin{cases} \nabla C_n^1 = r_1.C_n^1 \\ \nabla C_n^2 = r_2.C_n^2 \end{cases} \text{-->} \begin{cases} C_{n+1}^1 = r_1.C_n^1 \\ C_{n+1}^2 = r_2.C_n^2 \end{cases}$$

(Observa: ∇ opera como una homotecia)

Entonces $C_{n+1}^1 = r_1.C_n^1 = r1.(r_1.C_{n-1}^1) = r_1^2.C_{n-1}^1 = \cdots = r_1^n.C_1^1$

y del mismo modo $C_{n+1}^2 = r_2^n.C_1^2$. Por lo tanto tenemos

$\begin{cases} C_n^1 = r_1^n.C_o^1 \\ C_n^2 = r_2^n.C_o^2 \end{cases}$, siendo $C_n = r_1^n.C_o^1 + r_2^n.C_o^2$ la solución general.

Vamos a obtener C_o^1 y C_o^2 como sigue.

$$\text{n = 0 -->} \begin{cases} C_0 = r_1^0.C_o^1 + r_2^0.C_o^2 \\ C_0 = X^0 + (-X)^{-0} = 2 \end{cases} \text{-->} \quad C_o^1 + C_o^2 = 2$$

$$\text{n = 1 -->} \begin{cases} C_1 = r_1^1.C_o^1 + r_2^1.C_o^2 \\ C_1 = X^1 + (-X)^{-1} = z \end{cases} \text{-->} \; r_1^1.C_o^1 + r_2^1.C_o^2 = z$$

Entonces $a_n = A.1^n + B.1^n$ --> $a_n = A + B$

$a_0 = A.1^0 + B.1^0$ -- > $a0 = A + B = 5$

7.- Calcula las raíces del polinomio $\sum_{i=0}^{5}(-1)^{5-i}.\binom{5}{i}.y^i.(1-2^{5-i})$, sabiendo que admite la proyectividad T(y) = $\frac{-y}{-3y+1}$, y que el cambio x = $\frac{y-1}{y-2}$ transforma dicha proyectividad en la proyectividad T(x) = $\frac{1}{x}$.

Sol.- Desarrollando la expresión sumatoria obtenemos

$-\binom{5}{0}.y^0.(1-2^5) +\binom{5}{1}.y.(1-2^4) -\binom{5}{2}.y^2.(1-2^3) +\binom{5}{3}.y^3.(1-2^2) -\binom{5}{4}.y^4.(1-2)$ +

$+\binom{5}{5}.y^5.(1-2^0) =$

$= 31 - 5.15.y +10.7.y^2 -10.3.y^3 +5.y^4$ -- > $5y^4 -30y^3 +70y^2 -75y +31$

Cambio: x = $\frac{y-1}{y-2}$ -- > x.(y-2) = y -1 -- > y.(x -1) = 2x -1 -- > y = $\frac{2x-1}{x-1}$

Operando (haciendo común denominador):

$y^4 = \frac{(2x-1)^4}{(x-1)^4}$, $y^3 = \frac{(2x-1)^3.(x-1)}{(x-1)^4}$, $y^2 = \frac{(2x-1)^2.(x-1)^2}{(x-1)^4}$, y = $\frac{(2x-1).(x-1)^3}{(x-1)^4}$

Por lo tantp tengo en x:

Q(x) = $\frac{1}{(x-1)^4}$.

$.[5.(2x-1)^4$ -30. $(2x-1)^3.(x-1)+70.(2x-1)^2.(x-1)^2-$

-75. $(2x-1).(x-1)^3 + 31$

Operando:

$$(2x-1)^4 = \binom{4}{0}.16x^4.(-1)^0 + \binom{4}{1}.8.x^3.(-1)^1 + \binom{4}{2}.4x^2.(-1)^2 +$$

$$+\binom{4}{3}.2x.(-1)^3 + \binom{4}{4}.2^0.(-1)^4 =$$

$= 16.x^4 -32.x^3 + 24.x^2 -8.x + 1$

De forma análoga

$(2x-1)^3 = 8.x^3 -12.x^2 +6.x -1$

$(8.x^3 -12.x^2 +6.x -1).(x-1) = 8.x^4 -20.x^3 +18.x^2 -7x +1$

$(2x-1)^2.(x-1)^2 = (4x^2 -4x +1).(x-1)^2 = 4.x^4 -12.x^3 +13.x^2 -6x +1$

$(2x -1).(x-1)^3 = \ldots.. = 2.x^4 -7.x^3 +9.x^2 -5.x +1$

Haciendo Q(x) = 0 podemos tomar la ecuación

$Q(x) = 5.(16.x^4 -32.x^3 + 24.x^2 -8.x + 1) -30.(8.x^4 -20.x^3 +18.x^2 -7x +1) +$

$+ 70.(4.x^4 -12.x^3 +13.x^2 -6x +1) -75.(2.x^4 -7.x^3 +9.x^2 -5.x +1) + 31 = 0$

(Continúe el alumno)

8.- Resuelve sobre el conjunto Z de los números enteros, la ecuación

(a.t+1).x +t.y +t.z = 0 , donde ‘a’ está en Z

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

Probar que si A es (un anillo) abeliano anulado por p (p primo), entonces A $\cong (Z/p)^{\pi}$

Sol.- Aclaración: Anulado por p equivale a que $x^p = 1$, para todo x de A

9.- Demostrar que dados dos polinomios P(x,y), Q(x,y) $\in C[x,y]$, tienen un factor común si, y sólo si, su resultante verifica R(p,q) = 0

Sol.- C[x,y] es el anillo sobre los números complejos C.

III *Transformaciones Proyectivas*

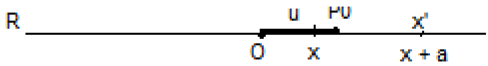
3.1.- Transformaciones Proyectivas

Si en una recta R fijamos un sistema de referencia, por ejemplo fijando un punto O y una unidad de medida u, podemos definir sobre ella una transformación de modo que al punto P_1 le asocia el punto P_2, al punto P_2 le asocia el punto P3, … Esta correspondencia de biunívoca.

Llamaremos x a la distancia de P al punto origen O, previamente fijado, y decimos que x es la abscisa de P. Sea P_0 el punto cuya abscisa es u.

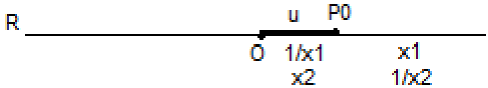
Ejemplos: Estos primeros ejemplos son casos muy simples de transformación de la recta R.

- x' = x + a, es una traslación que asocia cada punto P en el punto P ' . Traslada cada punto la distancia d = a, en la orientación positiva si a > 0, orientación negativa si a < 0. Dependiendo del valor absoluto de se dan un número ilimitado de posibles traslaciones.



- x' = -x, es la simetría, única, y de modo que x = -x '. Es una involución.

- x' = $\frac{1}{x}$, es la inversión, única. Si x > u, entonces $0 < \frac{1}{x} < u$, es decir 0 < x' < u. Observa: u' = $\frac{1}{u}$ = u, ya que u es la unidad en el sistema de referencia fijado.



Caso general de una proyectividad. Su expresión

En el siguiente punto veremos que, en general, la expresión

$x' = \frac{a.x+b}{c.x+d}$ define una proyectividad (sobre una recta R)

siempre que el determinante D = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ sea no nulo.

NOTA: Es una transformación geométrica, no un endomorfismo en un espacio vectorial. Esta es la razón por la que no es posible una expresión matricial.

Podré despejar x en función de x ', de modo que tendré una correspondencia biunívoca.

Tengo: $x' = \frac{a.x+b}{c.x+d}$ -- > $x'.(c.x + d) = a.x + b$ -- >

$x.(c.x' - a) = -d.x' + b$ -- > $x = \frac{-dx'+b}{c.x'-a}$

Con el fin de llegar a la siguiente expresión muy utilizada,

escribimos las anteriores de la forma:

$$x' = \frac{c.x+d}{a.x+b}, \qquad x = \frac{-bx'+d}{a.x'-c} \qquad (1)$$

con lo cual

$$a.xx' + b.\,x' - cx - d = 0 \qquad (2)$$

Observación:

- Si fuese D = 0, a.d –b.c = 0 -- > a.d = b.c -- >

  $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = k$ -- > c = k.a, d = k.b -- > $x' = \frac{(k.a)x+(k.b)}{a.x+b} =$

  $= \frac{(k.a)x+(k.b)}{a.x+b} = k.\frac{a.x+b}{a.x+b}$ = k , constante. La imagen sería siempre el punto P_k que dista k del origen.

- Si en $x' = \frac{c.x+d}{a.x+b}$ el valor x_1 de x es tal que $a.x_1 + b = 0$, y por tanto $x_1 = \frac{-b}{a}$, su imagen x_1' es el infinito (o no está definido como valor real). Diremos que Px_1 es el *punto límite*. Del mismo modo en la transformación $x = \frac{-bx'+d}{a.x'-c}$ tenemos el punto límite $P'_{x1'}$ donde $x_1' = \frac{c}{a}$.

3.2.- Determinación de una proyectividad

En la expresión (2) de la proyectividad intervienen cuatro parámetros (o constantes), pero, por ir igualada a cero, podemos dar valor a uno de aquellos quedando sólo tres que hemos de determinar. Por tanto es suficiente conocer tres puntos Px_i y sus imágenes $P'x'_i$, i = 1, 2, 3, distintos en ambos casos. Tenemos así

$$\begin{cases} a.\,x_1x_1' + b.\,x_1' - cx_1 - d = 0 \\ a.\,x_2x_2' + b.\,x_2' - cx_2 - d = 0 \\ a.\,x_3x_3' + b.\,x_3' - cx_3 - d = 0 \end{cases}$$ --- > Sistema homogéneo con una

incógnita libre (Incógnitas son: a, b, c, d)

Matriz M = $\begin{pmatrix} x_1x'_1 & x'_1 & -x_1 & -1 \\ x_2x'_2 & x'_2 & -x_2 & -1 \\ x_3x'_3 & x'_3 & -x_3 & -1 \end{pmatrix}$

Supongamos que hacemos d = k, un valor concreto no nulo. Tengo entonces

$\begin{cases} a.x_1x'_1 + b.x'_1 - cx_1 = k \\ a.x_2x'_2 + b.x'_2 - cx_2 = k \\ a.x_3x'_3 + b.x'_3 - cx_3 = k \end{cases}$ --> A = $\begin{pmatrix} x_1x'_1 & x'_1 & -x_1 \\ x_2x'_2 & x'_2 & -x_2 \\ x_3x'_3 & x'_3 & -x_3 \end{pmatrix}$, y la

ampliada

$$B = \begin{pmatrix} x_1x'_1 & x'_1 & -x_1 & k \\ x_2x'_2 & x'_2 & -x_2 & k \\ x_3x'_3 & x'_3 & -x_3 & k \end{pmatrix}$$

cumpliéndose que ran(B) = ran(A) = 3

Podemos resolver (por ejemplo por el método de Crámer):

a = $\frac{1}{|A|}$. $\begin{vmatrix} k & x'_1 & -x_1 \\ k & x'_2 & -x_2 \\ k & x'_3 & -x_3 \end{vmatrix}$, b = $\frac{1}{|A|}$. $\begin{vmatrix} x_1x'_1 & k & -x_1 \\ x_2x'_2 & k & -x_2 \\ x_3x'_3 & k & -x_3 \end{vmatrix}$

c = $\frac{1}{|A|}$. $\begin{vmatrix} x_1x'_1 & x'_1 & k \\ x_2x'_2 & x'_2 & k \\ x_3x'_3 & x'_3 & k \end{vmatrix}$

Los valores a, b, c, son dependientes del parámetro d = k.

Ejemplos:

1.- Sean los valores $x_{1} = 3, x_1' = 0$; $x_2 = 0, x_2' = -1$; $x_3 = -3/5$, $x_3' = 1$

Determinar la expresión de la proyectividad.

Sol.: $a.xx' + b.\ x' - cx - d = 0$ (2)'

Hago $d = k \dashrightarrow$ $a.xx' + b.\ x' - cx = k$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad |A| = [0 +0 +0] - [-9/5\ ] = 9/5$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & k \\ 0 & -1 & 0 & k \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{3}{5} & k \end{pmatrix},$$

$$D_a = \begin{vmatrix} k & 0 & -3 \\ k & -1 & 0 \\ k & 1 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = [-3k/5\ -3k] - [3k] = -33k/5$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 0 & k & -3 \\ 0 & k & 0 \\ -\frac{3}{5} & k & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = [0] - [9k/5] = -9k/5\ ,$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & -1 & k \\ -\frac{3}{5} & 1 & k \end{vmatrix} = [0] - [3k/5] = -3k/5$$

Por lo tanto: $a = -33k/5 : 9/5 = -33k/9 = -11k/3$

$b = -9k/5 : 9/5 = -9k/9 = -k$

$c = -3k/5 : 9/5 = -3k/9 = -k/3$

Haciendo k = -3 queda: a = 11, b = 3, c = 1,   d = -3

La proyectividad es: 11.xx‘ + 3.x‘ - x + 3 = 0

2.- Dados los pares homólogos (1 ; 2), (2 ; ∞), (∞ ; -3), halla su expresión.

Sol.: Sustituyendo en a.xx‘ + b. x‘ – cx – d = 0   obtengo

$$\begin{cases} 2a+2b-c-d=0 \\ \frac{-b}{a}=2 \\ \frac{c}{a}=-3 \end{cases} \text{---}> \begin{cases} 2a+2b-c-d=0 \\ b=-2a \\ c=-3a \end{cases} \text{---}>$$

$2a-4a+3a-d=0$ -- > a = d, b = -2d, c = -3d

Haciendo d = 1, tengo la expresión: xx‘ - 2. x‘ + 3.x – 1 = 0

3.3.- Razón simple de tres puntos. Razón doble de cuatro puntos.

Def. 1: Dados tres puntos de la recta R: $P_1(x_1),\ P_2(x_2),\ P_3(x_3)$, llamamos ‘Razón simple’ al valor $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$, y lo designamos por $(P_1\ P_2\ P_3)$, o bien mediante $\frac{P_1P_3}{P_1P_2}$, escribiendo también

$$(P_1\ P_2\ P_3)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\ ,\ \ \frac{P_1P_3}{P_2P_3}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$$

Def. 2: Dados cuatro puntos de la recta R: $P_1(x_1),\ P_2(x_2),$ $P_3(x_3), P_4(x_4)$, llamamos ‘Razón doble’ al valor cociente de las dos razones simple: $\frac{P_1P_3}{P_2P_3}$,

$\frac{P_1P_4}{P_2P_4}$, esto es, al valor $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$. La designamos mediante $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$, y/o mediante $\frac{(P_1\ P_2\ P_3)}{(P_1\ P_2\ P_4)}$.

3.4.- Propiedad esencial de toda proyectividad

"Toda proyectividad conserva el valor de la razón doble"

"Al aplicar una proyectividad, la razón doble de cuatro puntos y la de sus homólogos coinciden" .

Recíproco: "Una transformación biunívoca sobre una recta que conserve el valor de la razón doble es una proyectividad"

Demostración:
Sea una proyectividad que transforme los cuatro puntos $P_i(x_i)$ en los puntos $P'(x'_i)$, i = 1, 2, 3, 4, de forma biunívoca.

Expresión de la proyectividad: $x' = \frac{c.x+d}{a.x+b}$, $x = \frac{-bx'+d}{a.x'-c}$

$$x'_3 - x'_1 = \frac{c.x_3+d}{a.x_3+b} - \frac{c.x_1+d}{a.x_1+b} = \cdots = \frac{(bc-ad).(x_3-x_1)}{(ax_3+b).(ax_1+b)}$$

$$x'_3 - x'_2 = \frac{c.x_3+d}{a.x_3+b} - \frac{c.x_2+d}{a.x_2+b} = \cdots = \frac{(bc-ad).(x_3-x_2)}{(ax_3+b).(ax_2+b)}$$

$$x'_4 - x'_1 = \frac{c.x_4+d}{a.x_4+b} - \frac{c.x_1+d}{a.x_1+b} = \cdots = \frac{(bc-ad).(x_4-x_1)}{(ax_4+b).(ax_1+b)}$$

$$x'_4 - x'_2 = \frac{c.x_4+d}{a.x_4+b} - \frac{c.x_2+d}{a.x_2+b} = \cdots = \frac{(bc-ad).(x_4-x_2)}{(ax_4+b).(ax_2+b)}$$

Por definición de razón doble

$$(P'_1\ P'_2\ P'_3\ P'_4) = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2} = \frac{\frac{(bc-ad).(x_3-x_1)}{(ax_3+b).(ax_1+b)}}{\frac{(bc-ad).(x_3-x_2)}{(ax_3+b).(ax_2+b)}} : \frac{\frac{(bc-ad).(x_3-x_2)}{(ax_3+b).(ax_2+b)}}{\frac{(bc-ad).(x_4-x_2)}{(ax_4+b).(ax_2+b)}} =$$

$$= \frac{\frac{(x_3-x_1)}{(ax_1+b)}}{\frac{(x_3-x_2)}{(ax_2+b)}} : \frac{\frac{(x_4-x_1)}{(ax_1+b)}}{\frac{(x_4-x_2)}{(ax_2+b)}} = \frac{(x_3-x_1)}{(x_3-x_2)} : \frac{(x_4-x_1)}{(x_4-x_2)} = (P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ )$$

Demo del recíproco: Dejamos como variable el cuarto punto e imponemos la condición de que las razones dobles coinciden.

$$(P_1'\ P_2'\ P_3'\ P_4'\ ) = \frac{(x_3'-x_1')}{(x_3'-x_2')} : \frac{(x'-x_1')}{(x'-x_2')} = \frac{(x_3-x_1)}{(x_3-x_2)} : \frac{(x-x_1)}{(x-x_2)} =$$

$(P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ )$ --- >

$$\frac{(x_3'-x_1')}{(x_3'-x_2')} \cdot \frac{(x-x_1)}{(x-x_2)} = \frac{(x_3-x_1)}{(x_3-x_2)} \cdot \frac{(x'-x_1')}{(x'-x_2')} \text{ ---> } \frac{(x'-x_1')}{(x'-x_2')} = k.\frac{(x-x_1)}{(x-x_2)},$$

donde

$$k = \frac{\frac{(x_3'-x_1')}{(x_3'-x_2')}}{\frac{(x_3-x_1)}{(x_3-x_2)}} \quad .$$

$$\frac{(x'-x_1')}{(x'-x_2')} = k.\frac{(x-x_1)}{(x-x_2)} \text{ --> } (x'-x_1').(x-x_2) = k.(x-x_1).(x'-x_2')$$

Operando: $x'.x - x'.x_2 - x_1'.x + x_1'.x_2 =$

$$= k.[x'.x - x_2'.x - x'.x_1 + x_2'.x_1]$$

de donde:

$(1-k).x.x' + (k.x_1 - x_2).x' + (k.x_2' - x_1').x + (x_1'.x_2 - k.x_2'.x_1) = 0$

que es la ecuación de una proyectividad.

3.5.- Ecuaciones que admiten una proyectividad. Ejemplos

Sea P(x) = 0 que admite la proyectividad x' = $\frac{a.x+b}{c.x+d}$

Veremos cómo están relacionadas sus raíces.

Pasos a seguir: $x' = T(x) = \frac{a.x+b}{c.x+d}$

a) Hallamos los puntos dobles de la proyectividad, sean $\propto y \ \beta$.
Si son distintos, entonces T es una homotecia. Si son el mismo, entonces T es una traslación.

Si es homotecia, el cambio de variable (en la proyectividad) y = $\frac{x-\propto}{x-\beta}$ la transforma en $y' = k.y$. despejando x de $y = \frac{x-\propto}{x-\beta}$ obtengo

$x = \frac{\beta.y-\propto}{y-1}$, y llevando este cambio al polinomio P(x) = 0 obtengo

Q(y) = 0

b) Si T es involución de orden m, lo cual significa que $k^m = 1$, entonces dos casos:

b1) m = n = gr(P). En este caso existe un solo ciclo.

b2) m < n, entonces existen ciclos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, que se relacionan cíclicamente.

Supongamos el caso b2. Entonces se llega a que los β_i son raíces de una ecuación de la forma

$0 = m.a_n + m.a_{n-m1}.y^{m1} + m.a_{n-m2}.y^{m2} + \ldots + m.a_{n-mk}.y^{mk}$,
donde $m_i \equiv 0$ (mód. m), $1 \leq m_i \leq n$

(No continúa)

Ejemplo: Calcula las raíces del polinomio

$P(x) = \sum_{i=0}^{5}(-1)^{5-i}.\binom{5}{i}.y^i.(1-2^{5-i})$, sabiendo que admite la proyectividad: x' = T(x) = $\frac{-x}{-3x+1}$

Sol.- Vimos que, hecho el desarrollo, el polinomio es

$$P(y) = 5y^4 -30y^3 +70y^2 -75y +31$$

Obtengo los puntos dobles de la proyectividad x' = $\frac{-x}{-3x+1}$, como sigue.

x = $\frac{-x}{-3x+1}$ -- > $-3x^2 +x = -x$ -- > (3x – 2).x = 0 -- > x = 0, x = 2/3

Hago el cambio de sistema de referencia: y = $\frac{x-0}{x-\frac{2}{3}}$. Este cambio transforma la expresión de la proyectividad a la forma: y' = k.y , donde

k = a/d, siendo, en general, T(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$. En este caso: a = -1, d = 1 -- > k = -1 . Por lo tanto y' = - y, que es una involución de orden m = 2.

Entonces: $a_n = a_4 = 31$, $a_{n-2} = a_2 = 70$, $a_{n-4} = a_0 = 5$, por lo cual la ecuación es

$$0 = 31 + 70.y^2 + 5.y^4$$

Haciendo $z = y^2$ tengo: $5.z^2 + 70.z + 31 = 0$, que resuelta me da

$$z1 = \frac{-70+\sqrt{4900-620}}{10} = \frac{-70+\sqrt{4280}}{10} = \frac{-70+2.\sqrt{1070}}{10} = \frac{-35+\sqrt{1070}}{5}$$

$$z2 = \frac{-35-\sqrt{1070}}{5}$$

3.6.- Miscelanea-4: Cuestiones y problemas de alto voltaje

1.- Demostrar que P(x) ∈ Z[x] tiene discriminante un múltiplo de p (p primo) si, y sólo si, tiene raíces dobles sobre F_p .

Sol.- (Represento p^* para múltiplo de p)

Sea $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}.x + a_n$, en Z[x].

Pasando a $\frac{Z[x]}{p.Z} \cong F_p[x]$, obtenemos

$$Q(x) = b_0.x^n + b_1.x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}.x + b_n,$$

donde $b_i \equiv a_i$ (mód. p)

Si las raíces de P(x) son: α_i, i = 1, 2, …, n , entonces

$$P(x) = a_0.\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i) \text{ , y por tanto}$$

$$Q(x) = b_0.\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i) \text{ , donde } \beta_i \equiv \alpha_i \text{ (mód. p)}$$

El discriminante de P(x) = 0 es el valor

$$D = a_0^{n.(n-1)}.[(\alpha_n-\alpha_1)^2.(\alpha_{n-1}-\alpha_1)^2.(\alpha_{n-2}-\alpha_1)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_1)^2.$$

$$(\alpha_n-\alpha_2)^2.(\alpha_{n-1}-\alpha_2)^2.(\alpha_{n-2}-\alpha_2)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_2)^2.$$

…………………………

$(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2]$, y pasando a F_p obtenemos

$$D' = b_0^{n.(n-1)}.[(\beta_n-\beta_1)^2.(\beta_{n-1}-\beta_1)^2.(\beta_{n-2}-\beta_1)^2 \ldots (\beta_2-\beta_1)^2.$$

$$(\beta_n-\beta_2)^2.(\beta_{n-1}-\beta_2)^2.(\beta_{n-2}-\beta_2)^2 \ldots (\beta_3-\beta_2)^2.$$

…………………………

$(\beta_n - \beta_{n-1})^2]$,

Ahora bien, si D = p^* , entonces D ' = 0, lo cual significa que, sobre F_p, existen β_i = β_j , i, j distintos

Recíprocamente, si sobre F_p existen β_i = β_j , i, j distintos, entonces

(β_i- β_j) = 0, y por tanto $(\alpha_i - \alpha_j) = p^*$, con lo cual también D = p^* .

c.q.d.

2.- Dado el polinomio $P(x) = x^n - n.q.x + (n-1).r$, demuestra que $P(x) = 0$ tiene una raíz doble $\propto$ precisamente si $r^{n-1} = q^n$.
$\propto$

Sol.- Supongamos que $\propto$ es raíz doble. Entonces

$$\begin{cases} \propto^n - n.q.\propto \ +(n-1).r = 0 \\ \quad n.\propto^{n-1} - n.q = 0 \end{cases} \text{---} >$$

$$\begin{cases} \propto^n - n.q.\propto \ +(n-1).r = 0 \\ \quad \propto^{n-1} = \ q \end{cases}$$

$q.\propto - n.q.\propto \ +(n-1).r = 0$ -- > $q.\propto.(1-n) + (n-1).r = 0$

$q.\propto = r$ -- > $\propto = \frac{r}{q}$. Entonces $\propto^{n-1} = \frac{r^{n-1}}{q^{n-1}}$, y por lo tanto

q = $\frac{r^{n-1}}{q^{n-1}}$, de donde $q^n = r^{n-1}$ c.q.d.

Recíproco. Supongamos que $q^n = r^{n-1}$.

Tenemos $\begin{cases} P(x) = x^n - n.q.x + (n-1).r = 0 \\ P'(x) = n.x^{n-1} - n.q = 0 \end{cases}$ --> $x^{n-1} = q$

Esto nos dice que $\beta = \sqrt[n-1]{q}$ es raíz de P'(x) = 0.

Veamos si también lo es de P(x) = 0.

$\beta^{n-1} = q$ --> (sustituyendo en P(x))

$P(\beta) = \beta^n - n.q.\beta + (n-1).r = \beta^{n-1}.\beta - n.q.\beta + (n-1).r =$

$= q.\beta - n.q.\beta + (n-1).r = q.\beta.(1-n) + (n-1).r =$

$= (n-1).[r - q.\beta]$. Pero, por hipótesis $q^n = r^{n-1}$ --> $q = \frac{r^{n-1}}{q^{n-1}}$

y por tanto $\beta^{n-1} = \frac{r^{n-1}}{q^{n-1}}$, de donde $r = q.\beta$, y así $[r - q.\beta] = 0$.

Sí es raíz de P(x)

3.- Sea G un p-grupo (p primo) y $H < G$ un subgrupo normal no trivial.

Probar que $H \cap Z(G)$ es no trivial (Z(G) es el centro de G).

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

Indicación: Operar por conjugación.

4.- Demostrar que el grupo diédrico D_n es resoluble y calcular su longitud.

Sol.-

5.- Dado el morfismo de anillos Z --- > Z[$\sqrt{5}$], calcular los ideales primos I_p de Z[$\sqrt{5}$] tales que $I_p \cap Z = 2.Z$ (Abreviado: (2) = 2.Z)

¿Es 'principal' el anillo Z[$\sqrt{5}$]?

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

6.- Sea G un grupo abeliano de orden p^n , (p primo) . (Significa que todo elemento de G es de orden p).

Probar que los Aut(G) = $\{A \in M_n(F_p)\ tal\ que\ |A| \neq 0\}$

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

7.- Sea G = (R, +) el grupo aditivo de los números reales, y considero la operación de G sobre C = RxR (conjunto de los números complejos) como sigue:

Fijado z de C, $T_z(t) = e^{i.t}.z$,

R --- > C

t ----- > w = $e^{i.t}.z$

Se pide calcular: -Las órbitas

-El espacio de invariantes

-Los subgrupos estabilizadores

Demostrar que el espacio cociente se identifica con la semi-recta real.

Sol.-

NOTA (propia): Creo que el enunciado sería más convincente si definimos la aplicación

RxC ---- > C

(t, z) ----- > w = $e^{i.t}.z$

8.- Probar que t ∈ N es primo con n ∈ N, n > 12, precisamente si

$$t^{(\emptyset(n)-1)!} \equiv 1 \ \acute{m}\acute{o}d(n)$$

Sol.- (Examen Algebra. Curso 82/83)

Aclaración: $\emptyset(n)$ no es primo casi nunca

9.- Sea G un grupo finito de orden $|G| = p_1.p_2\ldots.p_k$, donde los p_i son primos distintos. Probar que si $Hom_Z\left(G,\frac{Z}{p_i}\right) \neq 0, \forall i = 1,2,\ldots,k$, entonces G es abeliano (Conmutador).

Sol.-

10.- Sea G un grupo abeliano y $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de homomorfismos de G en G tales que f_0 es el morfismo constante de imagen e (el neutro de G), y f_1 es el morfismo identidad, y que para cada n>= 0 y cada g de G se tiene

$$f_{n+2}(g).f_{n+1}(g^{-2}).f_n(g) = g$$

Probar que $f_n(g) = g^{\frac{n^2+n}{2}}$

Sol.- Sin resolver

IV ***De Suma de Series***

4.1.- La Constante de Euler. Suma de Series

Sea la serie alternada

$$1 - \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} - \cdots$$
(1)

Veamos que la de valores absolutos

$$1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} + \cdots$$
(2)

es monótona creciente.

Es creciente: Sabemos que $(1 + \frac{1}{n})^n$ es creciente y que

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ = e , y por tanto $(1 + \frac{1}{n})^n < e, para\ todo\ n$. Por otro lado, también sabemos que $e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, para\ todo\ n$, véase estudio completo de la serie $(1 + \frac{1}{n})^n$ al definir el número e. Tenemos por tanto

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, para\ todo\ n$$
(3)

Tomamos logaritmos en (3): $n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, de donde $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. Teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, llegamos a que $\lim_{n\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$,

Aplicando el Criterio de Leibniz a la serie alternada (1), ésta es monótona decreciente.

Podemos concluir que (1) es convergente. Su suma la representamos por C y la llamamos “Constante de Euler” . Se ha podido calcular su valor

C = 0,5772156649… = Suma de la serie (1)

CONSECUENCIAS:

A) Llamamos $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ = Suma de la Serie armónica.

Observamos que $\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$

$= \ln(2) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) =$

$= \ln(n+1)$

Por otro lado sea la suma $S_n =$

$= 1 - \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Es fácil comprobar que $S_n = H_n - \ln(n+1)$

Compruebo que S_n es monótona creciente:

$S_{n+1} - S_n = [H_{n+1} - \ln(n+2)] - [H_n - \ln(n+1)] =$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+2}{n+1}) > 0$, ya que

$\ln(\frac{n+2}{n+1}) < \frac{1}{n+1}$. Por tanto es monótona creciente. Por tanto

$\lim_{n\to+\infty} S_n = C$, y entonces $\lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln(n+1)) = C$.

Esto permite tomar como valor de H_n la aproximación

$$H_n \approx C + \ln(n+1),\ cuando\ n \to +\infty$$

Observa que H_n es la suma de los inversos de los números naturales hasta n.

B) Sea de $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} =$ Suma de los inversos de los impares.

Sea $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} =$ Suma de los inversos de los números pares

Tenemos $A_n + B_n = \sum_{k=1, k\ impar}^{2n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$

Entonces $A_n + B_n = H_{2n}$

Teniendo en cuenta que $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} . H_n$, tengo

$A_n = H_{2n} - B_n = H_{2n} - \frac{1}{2} . H_n$.

Resumiendo: Teniendo en cuenta que $H_n = C + \ln(n+1) - \varepsilon_n$

Suma del inverso de los pares $B_n =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} . [C + \ln(n+1) - \varepsilon_n]$$

Suma de los inversos de los impares $A_n =$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ = [C +ln(2n+1) -ε_{2n}] $- \frac{1}{2}.[C + \ln(n+1) - \varepsilon_n]$ =

$= \frac{C}{2} + \ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) + \varepsilon'_n$

C) La serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ =

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots =$$

= $A_n - B_n$ = [H_{2n} - $\frac{1}{2} . H_n$] – [$\frac{1}{2} . H_n$] = H_{2n} - H_n =

= [C +ln(2n+1) -ε_{2n}] – $[C + \ln(n+1) - \varepsilon_n]$ = $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) + \varepsilon$,

y por tanto: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$

NOTA aclaratoria:

Suma de la serie armónica: $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m}$,

Suma de la serie de logaritmos L_{2m-1} =

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{m}{m-1}\right)$$

Tengo U_{m-1} =

$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m}) - (\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{m}{m-1}\right)$ =

$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m}) - \ln(m) = H_n - \ln(m)$

Resumen:

Suma inversos de los naturales: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ = C+ln(n+1) + ε

Suma inversos de los pares = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. [C+ln(n+1) + ε]

Suma inversos de impares =$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε]

4.2.- Suma de Series numéricas

4.2.1.- Suma de los inversos de los impares menos el inverso de los pares, colocados de forma consecutiva en el lugar que sea un cuadrado perfecto, esto es:

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \cdots$$

Sea n = k^2 , cuadrado perfecto.

Si tenemos en cuenta la notación y el estudio de la Constante de Euler y sus consecuencias, podemos expresar

$$S_n = S_{k^2} = A_{k^2-k} - B_k =$$

$$= \left[\frac{C}{2} + \ln\left(\frac{2(k^2-k)+1}{\sqrt{(k^2-k)+1}}\right) - \varepsilon\right] - \frac{1}{2}.[C + \ln(k+1) - \varepsilon] =$$

$$= \ln\left(\frac{2(k^2-k)+1}{\sqrt{(k^2-k)+1}}\right) - \frac{1}{2}.\ln(k+1) + \varepsilon = \ln(2(k^2-k)+1) -$$

$$- \quad \frac{1}{2}.\ln((k^2-k)+1) - \frac{1}{2}.\ln(k+1) + \varepsilon =$$

$$= \ln(2(k^2-k)+1) - \frac{1}{2}.\ln((k+1).((k^2-k)+1)) + \varepsilon =$$

$= \ln\left(\frac{2(k^2-k)+1}{\sqrt{(k+1).((k^2-k)+1)}}\right) + \varepsilon$ -- > $+\infty$, cuando k -- > $+\infty$. Observa que el numerador es de grado dos mientras que el denominador es de grado 3/2 < 2 .

Por tanto aquella serie es divergente.

4.2.2.- Suma de términos negativos que son los inversos de los números pares, sumando de forma consecutiva el inverso de los impares colocados en el lugar de orden múltiplo de 5:

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Sea n = 5.k , múltiplo de 5. Tenemos

$S_n = S_{5k} = - B_{5k-k} + A_k =$

$= -\frac{1}{2}.[C + \ln((5k-k)+1) - \varepsilon] + \left[\frac{C}{2} + \ln\left(\frac{2k+1}{\sqrt{k+1}}\right) + \varepsilon\right] =$

$= -\frac{1}{2}.\ln((5k-k)+1) + \varepsilon + \ln\left(\frac{2k+1}{\sqrt{k+1}}\right) + \varepsilon = \ln(\frac{2k+1}{\sqrt{(k+1).(4k+1)}}) + \varepsilon$ $\rightarrow 0$

cuando k -- > $+\infty$

Por tanto la serie es convergente

4.2.3.- Estudia la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.5.8...(3.n-1)}{3.4.5....(n+2)}$

$$a_n = \frac{2.5.8...(3.n-1)}{3.4.5....(n+2)}$$

$$a_{n+1} = \frac{2.5.8...(3.n-1).(3(n+1)-1)}{3.4.5....(n+2).((n+1)+2)}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{....}{....} : \frac{....}{....} = \frac{3n+2}{n+3} \rightarrow 3$, cuando n -- > $+\infty$

6.2.4.- Estudia la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1.5.10.15....(5.(n-1))}{2.6.11.16...(5.(n-1)+1)}$

$a_n = \frac{1.5.10.15....(5.(n-1))}{2.6.11.16...(5.(n-1)+1)}$,

$a_{n+1} = \frac{1.5.10.15....(5.((n+1)-1))}{2.6.11.16...(5.((n+1)-1)+1)} = \frac{5.10.15....(5.n)}{6.11.16...(5.n+1)}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.5.10.15....(5.n)}{2.6.11.16...(5.n+1)} : \frac{1.5.10.15....(5.(n-1))}{2.6.11.16...(5.(n-1)+1)} = \ ...... = \frac{5n}{5n+1}$

Por criterio del cociente queda dudoso.

Criterio de Raabe: $\lim_{n\rightarrow+\infty} n. [1 - \frac{5n}{5n+1}] = \lim_{n\rightarrow+\infty} n. [\frac{1}{5n+1}] = \frac{1}{5}$

por lo tanto es Divergente.

4.2.5.- Estudia la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right))$

Recordamos que: $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ -- > $2.sen\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos(x)$

Tengo que $1 - \cos\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 2.sen^2\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)$

Por Criterio de Pringheim $\lim_{n\rightarrow+\infty} n^k.sen^2\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\rightarrow+\infty} n^k.(\frac{3}{2\sqrt{n}})^2 =$

$$= \lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{9}{4}.n^{k-1} = \begin{cases} 0\,, si\ 0 < k < 1 \\ +\infty, si\ k > 1 \\ \frac{9}{4}\ , si\ k = 1 \ \ -> \ \ Divergente \end{cases}$$

4.2.6.- Estudia la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{3})^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$a_n = (\frac{1}{3})^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}$

$a_{n+1} = (\frac{1}{3})^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)-1}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ \ldots. = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{n}}$. Por criterio del cociente queda dudoso.

Criterio logarítmico: Tenemos en cuenta también el hecho ya probado que la suma de los inversos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} = C+\ln(n)+\varepsilon$$

Tengo: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln(n)} =$

$= \ln\left(\frac{1}{3}\right).\lim_{n\to+\infty}\frac{C+\ln(n)}{\ln(n)} = \ln\left(\frac{1}{3}\right).\lim_{n\to+\infty}[\frac{C}{\ln(n)}+\frac{\ln(n)}{\ln(n)}] =$

$= \ln\left(\frac{1}{3}\right).[0+1] = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3),$

por tanto $-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(a_n)}{\ln(n)} = \ln(3) > 1$ -- > Convergente

4.2.7.- Estudiar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2}{3})^n$

Es p.g. de razón r = 2/3 , $a_1 = 1$. Su suma toma el valor

$S = \frac{a_1}{1-r} = \cdots = 3$

4.2.8.- Estudiar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.(\frac{1}{2})^n$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ Es p.g. con r = -1/2, $a_1 = 1$

Su suma toma el valor S = $\frac{a_1}{1-r} = \cdots = \frac{2}{3}$

4.2.9.- Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ Es p.g. con r = 1/2, $a_1 = 1/2$

Suma S = $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/2} = \cdots = 1$

4.2.10.- Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}} \text{ , } si\ n\ par \\ \frac{1}{2^n} \text{ , } si\ n\ impar \end{cases}$

Tengo:

S = $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2k-1}}+\frac{1}{2^{2k-2}}+\cdots$

Agrupo términos: $\frac{1}{2^{2k-1}}+\frac{1}{2^{2k-2}} = \frac{3}{2^{2k-1}}$, con lo cual me queda

S = $\frac{3}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\cdots+\frac{3}{2^{2k-1}}+\cdots$ = 3.$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k-1}}$

El sumatorio es p.g. con r = $\frac{1}{2^2}$, a_1 = ½

S' = $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{4}{6}$ --> S = 3.S' = 4/2 = 2

4.2.11.- Calcula la suma S = $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2^{2n-1}}$

Lo hemos visto antes

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n-1}} = S = 3.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \ldots \text{ (como 2.10) } =$$

$= 3.\frac{2}{3} = 2$

4.3.- Suma por descomposición en suma de fracciones simples

4.3.1.- Sumar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$

Ha sido comprobada su convergencia (Método de Pringheim)

Descompongo en fracciones simples: $\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ -- >

1 = A.(n+1) +B.n = (A +B).n + A -- > $\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$ -- > B = -1

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \quad \lim_{n=+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

4.3.2.- Sumar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-1}{n.(n+1).(n+2)}$

Después de comprobar su convergencia descompongo en fracciones simples:

$$\frac{3n-1}{n.(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \text{ -- > } A = \frac{-1}{2}, B = 4, \; C = -\frac{7}{2}$$

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k.(k+1).(k+2)} =$$

$= -\frac{1}{2}.(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}) + \ 4.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) -$

$- \quad \frac{7}{2}\ .(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}) =$

$= -\frac{1}{2}.(1+\frac{1}{2}) + \frac{-1}{2}\ .\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) + 4.\frac{1}{2} + \ 4.\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) -$

$- \quad \frac{7}{2}\ .(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}) =$

$= [-\frac{1}{2}.\frac{3}{2}+\frac{4}{2}] + \ \left(-\frac{1}{2}+4-\frac{7}{2}\right).\left(\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}\ \right) +$

$+ \frac{4}{n+1} + 7.(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}) = \ \frac{5}{4} + \ 0.(\ldots) + (\frac{11}{n+1} + \ \frac{7}{n+2})$ -- > $S_n = \frac{5}{4}$

4.3.3.- Sumar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1).2n.(2n+1).(2n+2)}$ Conviene recordar que:

Suma inversos de los naturales: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ = C+ln(n+1) + ε

Suma inversos de los pares = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. [C+ln(n+1) + ε]

Suma inversos de impares =$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε]

Comenzamos:

Descomponiendo en suma de fracciones simples obtenemos:

$1 = A.2n.(2n+1).(2n+2) + B.(2n-1).(2n+1).(2n+2) +$

$+C.(2n-1).2n.(2n+2) + D.(2n-1).2n.(2n+1) \rightarrow$

$$1 = A.2n.(4n^2 + 6n + 2) + B.(2n - 1).(4n^2 + 6n + 2) +$$

$$+C.2n.(4n^2 + 2n - 2) + D.2n.(4n^2 - 1) \rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = -2.B \\ 0 = 4.A - 2.B - 4.C - 2.D \\ 0 = 12.A + 8.B + 4.C \\ 0 = 8.A + 8.B + 8.C + 8.D \end{cases} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = 4.A + 1 - 4.C - 2.D \\ 0 = 3.A - 1 + C \\ 0 = 2.A - 1 + 2.C + 2.D \end{cases} \quad , \qquad C = 1 - 3.A$$

$$\begin{cases} -1 = 4.A - 4.(1 - 3.A) - 2.D \\ \ \ 1 = 2.A + 2.(1 - 3.A) + 2.D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ \ 3 = 16.A - 2.D \\ -1 = -4.A + 2.D \end{cases}$$

Sumándolas: $2 = 12.A \rightarrow A = \frac{1}{6} \rightarrow C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{6}$,

Tengo

$$S_n = \frac{1}{6}.\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{6}.\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right).\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}.\frac{1}{2n+1}\ ) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right).\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}\right) + \frac{1}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2n+2} = (*)$$

Vimos que: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε],

o de forma equivalente: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε]

y $\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. [C+ln(n+1) + ε],

o de forma equivalente

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2} \text{ . [C+ln(n+1) + } \varepsilon]$$

donde C es la constante de Euler.

$$(*) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{C} + 2.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) + \varepsilon) - \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{C} + \ln(\mathrm{n}+1) + \varepsilon) +$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left(C + 2.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) + \varepsilon\right) - \frac{2}{6} \cdot (\mathrm{C} + \ln(\mathrm{n}+1) + \varepsilon) + \frac{-5}{12} + f(n) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left(2.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) - \ln(\mathrm{n}+1) + \varepsilon\right) - \frac{5}{12} + f(n)$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \left(\ln\left(\frac{(2n+1)^2}{n+1}\right) - \ln(n+1)\right) - \frac{5}{12} + f(n) + \varepsilon =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \ln\left(\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}\right) - \frac{5}{12} + f(n) + \varepsilon = \frac{1}{3} \cdot 2.\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{5}{12} + f(n) + \varepsilon$$

$$f(n) + \varepsilon \to 0, si\ n \to +\infty, \quad \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \to \ln(2)\,, si\ n \to +\infty$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{ln}(\mathbf{2}) - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$$

4.3.4.- Sumar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+3}{2n.(2n+1).(2n+2).(2n+3)}$

Después de comprobar su convergencia descompongo en fracciones simples:

$$\frac{1}{2n.(2n+1).(2n+2).(2n+3)} = \frac{A}{2n} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+2} + \frac{D}{2n+3} \dashrightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{-1}{2}, D = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+3} =$$

$$= \frac{1}{4}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{4}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} +$$

$$+ \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n+3}\right) = (*)$$

Tengamos en cuenta que

Suma inversos de los naturales: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = C+\ln(n+1) + \varepsilon$

Suma inversos de los pares = $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}.[C+\ln(n+1) + \varepsilon]$

Suma inversos de impares $=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.[C+2.\ln(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}) + \varepsilon]$

$$(*) = \frac{1}{4}.[C+\ln(n+1)+\varepsilon] - \frac{1}{2}.\left[-1+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2}.\left(C+2.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right)+\varepsilon\right)\right] -$$

$$- \frac{1}{4}.\left[-1+\frac{1}{n+1}+C+\ln(n+1)+\varepsilon\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}.\left[-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2}.\left(C+2.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right)+\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{4}{6}\right) + \left(\frac{-1}{2.(2n+1)} + \frac{-1}{4.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right).C + \left[\frac{1}{4}.\ln(n+1) - \frac{2}{4}.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) - \frac{1}{4}.\ln(n+1) +\right.$$

+ $\frac{2}{4}.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right)$] $+ \varepsilon$ =

= $\frac{1}{12} + \left(\frac{-1}{2.(2n+1)} + \frac{-1}{4.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)}\right) + 0.C +$
$0.\ln(n+1)$ +

+ $0.\ln\left(\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}\right) + \varepsilon$ = (**)

Veamos el valor del límite de $\frac{-1}{2.(2n+1)} + \frac{-1}{4.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)}$

$\frac{-1}{2.(2n+1)} + \frac{-1}{4.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)} = \frac{-1}{4.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)}$ =

= $\frac{1}{2}$.[$\frac{-1}{2.(n+1)} + \frac{1}{2.(2n+3)}$] $= \frac{1}{2} . \frac{-(4n+6)+(2n+2)}{4.(n+1).(2n+3)} = \frac{1}{2}.\frac{-2n-4}{4.(n+1).(2n+3)}$ -> 0

Por tanto S = $\frac{1}{12}$

4.3.5.- Calcula los valores $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n^2}$

Sol.:

Más adelante resultará útil la siguiente notación:

$S_1(x) = \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$

$S_2(x) = \cos(x) - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{\cos(nx)}{n^2}$

Hago $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{sen(nx)}{n}$

Derivadando: $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\cos(nx)$

Por otro lado llamo

S = $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\operatorname{sen}(nx)$,

C = $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\cos(nx)$

Tengo $C + i.S = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.[\cos(nx) + i.sen(nx)]$ =

= $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.e^{nx.i}$ = $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.(e^{x.i})^n$ = $\frac{e^{ix}}{1+e^{ix}}$ $=$

(Del mismo modo que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$)

$= \frac{\cos(x)+i.sen(x)}{1+(\cos(x)+i.sen(x))} = \frac{\cos(x)+i.sen(x)}{(1+\cos(x))+i.sen(x)} =$

$= \frac{[\cos(x)+i.sen(x)].[(1+\cos(x)-isen(x)]}{[(1+\cos(x))+i.sen(x))].[(1+\cos(x)-isen(x)]} =$

$= \frac{[\cos(x).(1+\cos(x))+sen^2(x)]+i.[sen(x).(1+\cos(x))-\cos(x).sen(x)]}{(1+\cos(x))^2+sen^2(x)} =$

$= \frac{(1+\cos(x))+i.sen(x)}{2+2.\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)}{2.(1+\cos(x))} + i.\frac{sen(x)}{2.(1+\cos(x))}$

Por consiguiente: C = $\frac{1}{2}$, S = $\frac{sen(x)}{2.(1+\cos(x))}$

Pero, teniendo en cuenta que C representa $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\cos(nx)$, y que S'(x) = $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\cos(nx)$, tengo

S'(x) = $\frac{1}{2}$. Integrando S(x) = $\frac{x}{2} + K$, y por tanto

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{sen(nx)}{n} = \frac{x}{2} + K$

Para x = 0, tengo 0 = K, luego $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{sen(nx)}{n} = \frac{x}{2}$

Integrando de nuevo tengo: $\frac{x^2}{4} + K = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{(-1).cos(nx)}{n^2} =$

= $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}.\frac{cos(nx)}{n^2}$, por lo tanto

$\frac{x^2}{4} + K = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{cos(nx)}{n^2} = -\cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2^2} - \frac{\cos(3x)}{3^2} + \cdots =$
$-S_2(x)$

Integrando de nuevo: $\frac{x^3}{12} + K.x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{sen(nx)}{n^3}$, y su integral definida en el intervalo $[0, \pi]$:

$$(\frac{x^3}{12} + K.x]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{12} + K.\pi$$

$$(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{sen(nx)}{n^3}]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{sen(n\pi)}{n^3} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{sen(0)}{n^3} = 0$$

Por lo tanto $\frac{\pi^3}{12} + K.\pi = 0$, de donde K = - $\frac{\pi^2}{12}$, y ahora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} .$$

Para x = 0 nos queda

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} ,$$
$$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n^2}$$

es decir: $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$

CONTINUAMOS:

Tomo ahora $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{\cos(nx)}{n^2}$, y en ésta hago el cambio de x por $\pi - x$.

Teniendo en cuenta que

$\cos\big(k.(\pi - x)\big) = \cos(k\pi).\cos(kx) + sen(k\pi).sen(kx) =$

$$= (-1)^{\mathrm{k}}.\cos(kx) + 0 = \begin{cases} \cos(kx, \ si\ k\ par \\ -\cos(kx)\,, si\ k\ impar \end{cases}$$

tenemos: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{\cos(n.(\pi-x))}{n^2} =$

$$= -(-\cos(x)) + \frac{\cos(2\mathrm{x})}{2!} - \frac{(-\cos(3x))}{3!} + \frac{\cos(4x)}{4!} - \frac{(-\cos(5x))}{5!} + \cdots =$$

$$= \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2!} + \frac{\cos(3x)}{3!} + \frac{\cos(4x)}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

Pero vimos más arriba que

$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$, y cambiando x por $\pi - x$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{cos(n.(\,\pi-x))}{n^2} = \frac{(\,\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

o bien $\frac{\pi^2-2.\pi.x+x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} =$

$$= \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2!} + \frac{\cos(3x)}{3!} + \frac{\cos(4x)}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

Haciendo x = 0 nos queda $\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$,

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4.3.6.- Calcula el valor de las series $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.\frac{1}{k+1}$

Sol.: Recordamos que

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}.x + \binom{n}{2}.x^2 + \cdots + \binom{n}{k}.x^k + \cdots + \binom{n}{n}.x^n =$$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.x^k$. Integrando tengo: $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\frac{x^{k+1}}{k+1}$ + C

Haciendo x = 0 obtengo valor de la constante C = $\frac{1}{n+1}$, y por tanto

$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{n+1}$. Haciendo x = 1 resulta

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} .$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} . \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$$

4.3.7.- Calcula el valor de las series

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n.(2n+2).(2n+4)}$$

Sol.: Evidentemente S = $\frac{1}{8} . \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}$.

Calculamos S' =$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}$. Descomponiendo en sumas simples resulta $A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2}$

$S_n' = \frac{1}{2} . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} =$ (*)

Recordamos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = C + \ln(n) + \varepsilon \text{ , donde C es la constante de Euler}$$

$$(*) = \frac{1}{2} . \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \left[1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right] + \frac{1}{2} . \left[-1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} . [C + \ln(n) + \varepsilon] + [1 - (C + \ln(n+1) + \varepsilon)] +$$

$$+ \frac{1}{2} . \left[-1 - \frac{1}{2} + (C + \ln(n+2) + \varepsilon)\right] = \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) . C +$$

$$+ \left[\ln\left(\sqrt{n}\right) - \ln(n+1) + \ln\left(\sqrt{n+2}\right)\right] + \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{4} + 0.C + \ln\left(\frac{\sqrt{n.(n+2)}}{n+1}\right) + \varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n.(n+2)}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n.(n+2)}{(n+1)^2}} = 1$$

Por tanto S' = $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{4}$, y S = $\frac{1}{32}$

NOTA: A modo de ilustración presento otra forma, observando que los términos presentan la forma de una Progresión Hipergeométrica:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\propto.n+\beta}{\propto.n+\gamma}$$

En efecto

$$a_n = \frac{1}{2n.(2n+2).(2n+4)} \ , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1).(2(n+1)+2).(2(n+1)+4)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n.(2n+2).(2n+4)}{2(n+1).(2(n+1)+2).(2(n+1)+4)} = \frac{2n}{2n+6} = \frac{n}{n+3} \ , \ de\ donde:$$

$$\propto = 1, \beta = 0, \gamma = 3$$

Aplicando la fórmula: $S_n = \frac{a_n.[\propto.n+\beta]-a_1.\gamma}{\propto+\beta-\gamma} = \frac{\frac{1}{2n.(2n+2).(2n+4)}.[n]-\frac{1}{48}.3}{1-3} =$

$$= \frac{\frac{1}{2.(2n+2).(2n+4)}-\frac{3}{48}}{-2} = \frac{3}{96} - \frac{1}{4.4.(n+1).(n+2)} \dashrightarrow \frac{3}{96} \ , cuando\ n \to +\infty$$

Por tanto S = $\frac{3}{96} = \frac{1}{32}$

4.3.8.- Calcula el valor de las series

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1).(2n+1).(2n+3)}$$

Sol.: Por descomposición en sumas simples

$$\frac{1}{(2n-1).(2n+1).(2n+3)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+3}$$, obteniendo:

A = 1/8 , B = -1/4, C = 1/8

El resultado es **S =** $\mathbf{\frac{1}{12}}$

Otra forma (Que interesa por formación): Vemos si es Hipergeométrica.

$a_n = \frac{1}{(2n-1).(2n+1).(2n+3)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1).(2(n+1)+1).(2(n+1)+3)}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1).(2n+3).(2n+5)}{(2n-1).(2n+1).(2n+3)} = \frac{2n-1}{2n+5} .$$

Es Hipergeométrica con: $\propto = 2, \beta = -1, \gamma = 5$. $a_1 = \frac{1}{1.3.5} = \frac{1}{15}$

Su suma S = $\frac{-a_1.\gamma}{\propto+\beta-\gamma} = \frac{\frac{-1}{15}.5}{2-1-5} = \frac{-\frac{1}{3}}{-4} = \frac{1}{12}$

(Observa que es suma de una serie ilimitada)

4.3.9.- Calcula el valor de las series

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8.n^2+n-1}{n.(n+1).(4n^2-1)}$$

Sol.: Descompongo en sumas simples: Teniendo en cuenta que $4n^2 - 1 = (2n+1).(2n-1)$

$$\frac{8.n^2+n-1}{n.(n+1).(4n^2-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{2n+1} + \frac{D}{2n-1}$$, obteniendo:

A = 1, B = -2, C = 1, D = 1

Tendremos en cuenta que

Suma inversos de los naturales: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ = C+ln(n+1) + ε

Suma inversos de los pares = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$. [C+ln(n+1) + ε]

Suma inversos de impares =$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε]

Entonces: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2.\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ =

$= [C + \ln(n+1) + \varepsilon] - 2.\left(-1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) +$

$+ \left(-1 + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε] =

$= \left(2 - \frac{2}{n+1} - 1 + \frac{1}{2n+1}\right) + [C + \ln(n+1) + \varepsilon] - 2.[C + \ln(n+1) + \varepsilon] +$

$+ 1/2.$ [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε] + $\frac{1}{2}$. [C+2.ln($\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}$) + ε] =

$= 1 + \frac{(n+1)-(4n+2)}{(n+1).(2n+1)}$ + 0.C + ln($\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}$) ;

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-(3n+1)}{(n+1).(2n+1)} = 0$, $\ln\left(lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}\right) = \ln(4)$, por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 + \ln(4), \quad \mathbf{S = 1 + ln(4)}$$

4.4.- Progresiones Aritmético-Geométricas

4.4.1 Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, donde $a_n = b_n.c_n$

Def.: Si $\{b_n\}$ es p.a. y $\{c_n\}$ es p.g. decimos que $\{a_n\}$ es aritmético-geométrica.

Si r es la razón de la p.g., siguiendo lo que se dirá a continuación conseguimos obtener su suma.

Paso A: Como hicimos en las p.g., podemos hacer

$$S - r.S = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) - r.(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) =$$

$$= (1-r).(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) = (1-r).S$$

Paso B: $(1-r).S - r.(1-r).S = (1-r)^2.S = \ldots$

Al realizar $(1-r)^2.S$ ocurrirá que todos los términos, salvo un número finito, son nulos. Esto nos permitirá despejar el valor S.

Si $\{b_n\}$ es p.a. ordinaria ($b_{n+1} = b_n + d$), se cumple la siguiente fórmula

$$\mathbf{S} = \frac{1}{1-r} . \left(a_1 + \frac{d.c_2}{1-r}\right) \qquad (*)$$

4.4.2.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.n^2+3}{2.3^n}$

Hago $b_n = 2n^2 + 3$, $c_n = \frac{1}{3^n}$, que es p.g. con r = 1/3

$b_{n+1} = 2.(n+1)^2 + 3 = 2.(n^2+2n+1)+3$

$b_{n+1} - b_n = \cdots = 4n + 2$, Lamo $b'_n = b_{n+1} - b_n = 4n + 2$

$b'_{n+1} - b'_n = 4.(n+1) + 2 - (4n+2) = 4$ -- >

Es aritmética de orden 2 con d = 4 (No podemos aplicar (*))

Tengo S = $\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.n^2+3}{3^n} = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.c_n$

$a_1 = b_1.c_1 = \frac{5}{3}, \quad c_2 = \frac{1}{9}$

Llamo $S' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.n^2+3}{3^n}$, $\quad S = \frac{1}{2}.S'$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right).S' = \left(\frac{5}{3}+\frac{11}{9}+\frac{21}{27}+\frac{35}{81}+\cdots\right)-\frac{1}{3}.\left(\frac{5}{3}+\frac{11}{9}+\frac{21}{27}+\frac{35}{81}+\cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{11}{9}+\frac{21}{27}+\frac{35}{81}+\cdots\right)-\left(\frac{5}{9}+\frac{11}{27}+\frac{21}{81}+\frac{35}{243}+\cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\cdots\right) = \frac{2}{3}\ .S'$$

Resto de nuevo

$$\left(1-\frac{1}{3}\right).\frac{2}{3}.S' = \left(\frac{5}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\cdots\right) - \frac{1}{3}.\left(\frac{5}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\cdots\right)-\left(\frac{5}{9}+\frac{6}{27}+\frac{10}{81}+\frac{14}{243}+\cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{81}+\frac{4}{243}\ldots\right) = \frac{4}{9}\ .S'$$

Resto otra vez

$$\left(1-\frac{1}{3}\right).\frac{4}{9}.S' = \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{81}+\frac{4}{243}\ldots\right)-\frac{1}{3}.\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{81}+\frac{4}{243}\ldots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{81}+\frac{4}{243}\ldots\right)-\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{27}+\frac{4}{81}+\frac{4}{243}+\cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}+\frac{-4}{9}+\frac{3}{27}\right) \rightarrow \frac{8}{27}\ .S' = \frac{36}{27} \rightarrow S' = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \rightarrow \boldsymbol{S = \frac{9}{4}}$$

4.4.3.- Calcula la suma: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

$b_n = n$, es aritmética con d = 1, $c_n = \frac{1}{2^n}$ es p.g con r = $\frac{1}{2}$

Aplico la fórmula S = $\frac{1}{1-r}$. $(a_1 + \frac{d.c_2}{1-r})$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$; $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1.\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2$

Otra forma:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots\right)-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots\right)=$$

…….

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right) = \frac{1}{2} \,.S$$

Repito

$$\left(1-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.S = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)-\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$
$$=$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \,.S \rightarrow \quad S = 2$$

4.4.4.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{3^{n+1}}$

$b_n = n + 2$, es p.a. con d = 1, $c_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ es p.g. con r = $\frac{1}{3}$

Aplico la fórmula. Tengo $a_1 = \frac{3}{9}$, $c_2 = \frac{1}{27}$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{1.\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{9} + \frac{3}{2.27}\right) = \cdots = \frac{7}{12}$$

El alumno puede aplicar el proceso visto en el ejemplo anterior y obtendrá el mismo resultado.

4.4.5.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

$b_n = n^2 + 1$; Compruebo: $b_{n+1} - b_n = \cdots = 2.n + 1$

Hago $b'_n = 2.n + 1$; $b'_{n+1} - b'_n = \cdots = 2$

Por tanto $\{b_n\}$ $es\ p.g.de\ orden\ 2,\ con\ d = 2$

$c_n = \frac{1}{5^n}$ $es\ p.g.\ con\ r = \frac{1}{5}$

Aplico el procedimiento general:

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right).S = \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{25} + \frac{10}{5^3} + \frac{17}{5^4} + \cdots\right) - \frac{1}{5} . \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{25} + \frac{10}{5^3} + \frac{17}{5^4} + \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{5}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \cdots\right) = \frac{4}{5} .S$$

Repito

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right).\frac{4}{5}.S = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{5}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \cdots\right) - \frac{1}{5} . \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{5}{5^3} + \frac{7}{5^4} + \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{25} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \cdots\right) = \left(\frac{4^2}{5^2}\right).S$$

Repito

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right).\frac{16}{25}.S = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{25} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \cdots\right) - \frac{1}{5} . \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{25} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{-1}{25} + \frac{1}{125}\right) = \frac{64}{125} .S \rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{46}}{\mathbf{64}} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{32}}$$

4.4.6.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.n+1}{7^n}$

$b_n = 2.n + 1,\ \ es\ p.a.\ ordinaria\ con\ d = 2$

$c_n = \frac{1}{7^n}\ , es\ p.g.\ con\ r = \frac{1}{7}$

Aplicando la fórmula S = $\frac{1}{1-r}\ .(a_1 + \frac{d.c_2}{1-r})$, siendo $a_1 = \frac{3}{7}\ , c_2 = \frac{1}{49}$

obtenemos $S = \frac{5}{9}$

El alumno puede aplicar el procedimiento general visto en anteriores.

4.4.7.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.n^2+3}{2.3^n}$

En primer lugar $S = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.n^2+3}{3^n}$. Calculamos

$S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.n^2+3}{3^n}$

Se puede comprobar que b_n es p.a. de orden 2, con d = 4.

$c_n = \frac{1}{3^n}$, es p.a. con r = $\frac{1}{3}$

Hemos de aplicar el proceso ya conocido, tres veces, obteniendo

$$S' = \frac{9}{2} \rightarrow \ \ S = \frac{9}{4}$$

4.4.8.- Calcula la suma $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{10^n}$

Tomamos el desarrollo de $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Derivamos miembro a miembro:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

Multiplicamos por x

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

Derivamos otra vez:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 . x^{n-1}$$

Multiplicamos por x:

$$\frac{x.(1+x)}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 . x^n$$

Hago $x = \frac{1}{10}$ y me queda: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{10^n} = \frac{\frac{1}{10}.(1+\frac{1}{10})}{(1-\frac{1}{10})^3} = \frac{\frac{11}{10^2}}{(\frac{9}{10})^3} = \frac{110}{9^3} = \frac{110}{729}$

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{10^n} = \frac{110}{729}}$$

NOTA: Llamamos operador θ al que opera así: f(x) --- > x.f ‘(x)

En el anterior hemos aplicado dos veces este operador a la función

f(x) = $\frac{1}{1-x}$

4.4.9.- Calcula la suma $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{2n+1}{(2n)!} . (\frac{\pi}{3})^{2n-1}$

Tomo el desarrollo en serie de cos(x):

cos(x) = $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Multiplico por x:

x.cos(x) = $x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$

Derivo:

cos(x)-x.sen(x) = $1 - \frac{3x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{7x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{(2n)!}.x^{2n}$

Divido entre x:

$$\frac{\cos(x) - x.sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{(2n)!}.x^{2n-1}$$

Hago x = $\frac{\pi}{3}$, y obtengo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{(2n)!}.(\frac{\pi}{3})^{2n-1} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}.sen(\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \ldots = \frac{3 - \pi.\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2n+1}{(2n)!}.(\frac{\pi}{3})^{2n-1} = \frac{3 - \pi.\sqrt{3}}{2\pi}}$$

4.5.- Series de Tipo Hipergeométricas

4.5.1.- Sea una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Def.: Decimos que es Hipergeométrica si cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha.n+\beta}{\alpha.n+\gamma}$, para ciertos valores reales $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tales que $\alpha.n+\gamma \neq 0$

y $\alpha+\beta-\gamma \neq 0$

En estas condiciones se cumple la siguiente fórmula

$$S_n = \frac{a_n.(\alpha.n+\beta)-a_1.\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}, \quad \text{donde } \alpha+\beta-\gamma \neq 0$$

y si la serie es convergente, lo cual exige que $a_n \to 0$, entonces

$$S = \frac{-a_1.\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}, \quad \alpha+\beta-\gamma \neq 0$$

Demostración: Supongamos que existen los citados valores de modo que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha.n+\beta}{\alpha.n+\gamma}$, para todo n.

Entonces

$$a_2.(\alpha+\gamma) = a_1.(\alpha+\beta)$$

$$a_3.(2\alpha+\gamma) = a_2.(2\alpha+\beta)$$

$$a_4.(3\alpha+\gamma) = a_3.(3\alpha+\beta)$$

....

$$a_{n+1}.(n.\alpha+\gamma) = a_n.(n.\alpha+\beta)$$

Sumando miembro a miembro obtengo

$\gamma.(S_{n+1} - a_1) + \alpha.(a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + n.a_{n+1}) =$

$= \alpha.(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots + n.a_n) + \beta.S_n$

$\gamma.(S_n + a_{n+1} - a_1) + \alpha.(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots + n.a_n) -$

$- \alpha.a_1 + \alpha.n.a_{n+1} - \alpha.S_n + \alpha.a_1 =$

$= \alpha.(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots + n.a_n) + \beta.S_n$. Simplificando

$\gamma.(S_n + a_{n+1} - a_1) + \alpha.n.a_{n+1} - \alpha.S_n =$

$= \beta.S_n$, de donde

$(\gamma - \alpha - \beta).S_n = \gamma.(-a_{n+1} + a_1) - \alpha.n.a_{n+1} = -(\gamma + \alpha.n).a_{n+1}$ = -

$(\gamma - \alpha - \beta).S_n = -(\gamma + \alpha.n).a_{n+1} + \gamma.a_1$, donde finalmente

$$S_n = \frac{a_{n+1}.((\alpha.n+\gamma) - \gamma.a_1}{\alpha + \beta - \gamma}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha.n+\beta}{\alpha.n+\gamma} \rightarrow a_{n+1}.(\alpha.n + \gamma) = a_n.(\alpha.n + \beta)$$

la anterior puede quedar así: $S_n = \frac{a_n.(\alpha.n+\beta) - \gamma.a_1}{\alpha + \beta - \gamma}$ c.q.d.

4.5.2.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+1)}$

Dos formas:

Descompongo en suma de fracciones simples: $\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

Obtengo A = 1, B = -1 . Obtenemos S = 1

Otra forma: Es el tipo Hipergeométrica: $\frac{\frac{1}{(n+1).(n+2)}}{\frac{1}{n.(n+1)}} = \frac{n.(n+1)}{(n+1).(n+2)} = \frac{n}{(n+2)}$

$\propto = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2$. $S_n = \frac{\frac{1}{n.(n+1)}.(n+0)-\frac{1}{2}.2}{1-2} = \frac{\frac{1}{n+1}-1}{-1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

4.5.3.- Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(x+1).(x+2)...(x+n)}$, para x > -1

Convergencia: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots \lim \ \frac{n+1}{n+1+x} = 1$ → Caso dudoso

Por Raabe: $\lim_{n\to+\infty} n.(1 - \frac{n+1}{n+1+x}) = \lim \ n.\left(\frac{x}{n+1+x}\right) = x$.

Por tanto $x \begin{cases} > 1 \to conv \\ < 1 \to div. \end{cases}$

En lo que sigue suponemos x > 1

Veamos si es Hiper.g: (Tratando x como parámetro-valor constante)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{n+1}{x+n+1}, \quad \propto = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = x+1$$

Observa que, si x > 1 se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim \ \frac{n!}{(x+1).(x+2)...(x+n)} < \lim \ \frac{n!}{(2).(3).(4)...(n+1)} =$$

$= \lim \frac{n!}{n!.(n+1)} = \lim \frac{1}{(n+1)} = 0.$ Por tanto puedo utilizar

$$S = \frac{-\frac{1}{x+1}.(x+1)}{1+1-(x+1)} = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} > 0$$

4.6.- Regla de Horner para sumar series

4.6.1.- Se aplica al tipo de series $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n$, P(n) polinomio en n

Sea P(n) = c0 + c1.x + c2.x^2 + … + ck.x^k, de grado k

Veamos que puede ser expresado de la forma

$$P(n) = a_0 + a_1.n + a_2.n.(n-1) + a_3.n.(n-1).(n-2) + \cdots +$$

$$+ a_h.n.(n-1).(n-2) \ldots \big(n-(h-1)\big) + \cdots$$

$$P(n) = a_0 + \sum_1^k a_h.n.(n-1) \ldots (n-(h-1)) \qquad (1)$$

Cálculo de los coeficientes a_h: Dando valores a n en la expresión (1)

$P(1) = a_0 + a_1 \rightarrow a_1 = P(1) - a_0$ (a_0 fijado previamente)

$P(2) = a_0 + 2a_1 + 2.1.a_2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}.(P(2) - (a_0 + 2!.a_1))$

$P(3) = a_0 + 3a_1 + 3.2.a_2 + 3.2.1.a_3 \rightarrow$

$$a_3 = \frac{1}{3!}(P(3) - (a_0 + 3a_1 + 3!.a_2)$$

$P(4) = a_0 + 4a_1 + 4.3.a_2 + 4.3.2.a_3 + 4.3.2.1.a_4 \rightarrow$

$$a_4 = \frac{1}{4!}(P(4) - (a_0 + 4a_1 + 4.3.a_2 + 4!.a_3)$$

……………………

P(h) = $a_0 + h.a_1 + h.(h-1).a_2 + h.(h-1).(h-2).a_3 + \cdots +$

$+ h.(h-1).(h-2) \ldots 2.1.a_h \rightarrow$

$$a_h = \frac{1}{h!}(P(h) - (a_0 + ha_1 + h.(h-1).a_2 + \cdots + h!.a_{h-1})$$

Para lo que sigue tomo esta notación : $A_n = \frac{P(n)}{n!}.x^n$, de modo que

$$A_0 = P(0) = a_0$$

$$A_1 = P(1).x = (a_0 + a_1).x$$

$$A_2 = \frac{P(2)}{2!}.x^2 = \frac{1}{2!}.(a_0 + 2a_1 + 2.1.a_2).x^2$$

$$A_3 = \frac{P(3)}{3!}.x^3 = \frac{1}{3!}.(a_0 + 3a_1 + 3.2.a_2 + 3.2.1.a_3).x^3$$

$$A_4 = \frac{P(4)}{4!}.x^4 = \frac{1}{4!}.(a_0 + 4a_1 + 4.3.a_2 + 4.3.2.a_3 + 4.3.2.1.a_4).x^4$$

…..

$$A_h = \frac{P(h)}{h!}.x^h =$$

$= \frac{1}{h!}.(a_0 + h.a_1 + h.(h-1).a_2 + h.(h-1).(h-2).a_3 + \cdots +$

$+ h.(h-1).(h-2) \ldots 2.1.a_h).x^h$

……

$$A_k = \frac{P(k)}{k!}.x^k \quad = \frac{1}{k!}.(a_0 + k.a_1 + k.(k-1).a_2 +$$

$$+ k.(k-1).(k-2).a_3 + \cdots + k!.a_k).x^k$$

……..

Si n > k = grado de P(n):

$$A_n = \frac{P(n)}{n!}.x^n \quad = \frac{1}{n!}.(a_0 + n.a_1 + n.(n-1).a_2 + n.(n-1).(n-2).a_3 +$$

$$+ n.(n-1)\ldots\big(n-(n-k)\big)a_k + 0 + 0 + \cdots + 0).x^n$$

Sumamos miembro a miembro

$S_n(x) = \sum_{h=0}^{n} A_h =$

$$= a_0.(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) +$$

$$+ a_1.x.(1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}) +$$

$$+ a_2.x^2.(1 + \frac{3.2x}{3!} + \frac{4.3x^2}{4!} + \frac{5.4x^3}{5!} + \cdots + \frac{n(n-1).x^{n-2}}{n!}) +$$

$+ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+ a_h.x^h.(1 + \frac{(h+1).h\ldots2.x}{(h+1)!} + \frac{(h+2).(h+1)\ldots3.x^2}{(h+2)!} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(h-1)).x^{n-h}}{n!}) +$$

$+ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$

$+$

$a_k.x^k.(1+\frac{(k+1).k...2.x}{(k+1)!}+\frac{(k+2).(k+1)...3.x^2}{(k+2)!}+\cdots+\frac{n(n-1)...(n-(k-1)).x^{n-k}}{n!})+$

$+\quad 0 + 0 + (para\ h > k\ )$

Reescribo la anterior

$S_n(x) = \sum_{h=0}^{n} A_h =$

$= a_0.(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}) +$

$+ a_1.x.(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}) +$

$+ a_2.x^2.(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}) +$

$+$ ....

$+ a_h.x^h.(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-h}}{(n-h)!}) +$

$+$ ....

$+\ a_k.x^k.\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right) +$

$+\quad 0 + 0 + (para\ h > k$

Interesa ahora tener en cuenta el desarrollo en serie del e^x, que es la siguiente:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Haciendo $n \to +\infty$ $en\ S_n(x)$, obtengo

$S(x) = a_0.e^x + a_1.x.e^x + a_2.x^2.e^x + \cdots + a_k.x^k.e^x + 0.e^x + \cdots +$

$+ 0.e^x + \cdots =$

$= e^x.(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k)$, k = grado de P(n)

4.6.2.- Suma S = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} .x^n$

Cálculo de los coeficientes:

$a_j = \frac{1}{j!} .[P(j) - (a_0 + j.a_1 + j.(j-1).a_2 + \cdots +$

$+ j.(j-1) \ldots \big(j-(j-2)\big).a_{j-1}]$

P(h) = $a_0 + h.a_1 + h.(h-1).a_2 + \cdots + h.(h-1) \ldots (h - (h-1).a_h$

donde

$a_h = \frac{1}{h!} .[P(h) - (a_0 + h.a_1 + h.(h-1).a_2 + \cdots +$

$+ h.(h-1) \ldots \big(h-(h-2)\big).a_{h-1}]$

0 = P(0) = $a_0 + 0.a_1 + 0.a_2 + \cdots + 0.a_h$ -- > $a_0 = 0$

1 = P(1) = $a_0 + 1.a_1 + 0.a_2 + \cdots + 0.a_h$ -- > 1 = 0 + a_1 -- > $a_1 = 1$

4 = P(2) = $a_0 + 2.a_1 + 2.1.a_2 + 0.a_3 + \cdots + 0.a_h$ -- > 4 = 2 + 2. a_2

$a_2 = 1$

9 = P(3) = $a_0 + 3.a_1 + 3.2.a_2 + 3.2.1.a_3 + 0.a_4 + \cdots + 0.a_h$ -- >

$9 = 3 + 3.2 + 3.2.1.a_3 \rightarrow 9 = 9 + 6.a_3 \rightarrow a_3 = 0$

Del mismo modo $a_h = 0$ $si\ h > 2$

Por tanto S(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} .x^n = e^x.(x + x^2)$

Por ejemplo: Si haciendo x = 1 nos queda: S = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2.e$

Si x = 2 nos queda: S = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}.2^n = e^2.(2 + 4) = 6.e^2$

NOTA: Puesto que $\frac{0^2}{0!}.2^0 = \frac{0}{1}.1 = 0,\ tengo$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} .2^n = 6.e^2$

4.6.3.- Casos deducibles de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n$

S(x) = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!} .x^{n-1}$

Derivando en $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n$, teniendo en cuenta que

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n = e^x.(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k)$, tengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!}.x^{n-1} = e^x.\left(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k\right) +$$

$$+ e^x.(a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \cdots + k.a_k.x^{k-1}) =$$

$$= e^x.(a_0 + a_1.(1 + x) + a_2.x.(2 + x) + a_3.x^2.(3 + x) + \cdots +$$

$$+ a_k x^{k-1}.(k + x)) = e^x.a_0 + e^x.\sum_{h=1}^{k} a_h.x^{h-1}.(h + x)$$

NOTA: Puesto que $a_0 . x . x^{-1} = a_{0\,,}\ tengo$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!} . x^{n-1} = e^x . \sum_{h=0}^{k} a_h . (h + x) . x^{h-1}$$

Cuando x = 1 tengo:

S = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!} = e . (a_0 + 2 . a_1 + 3 . a_2 + \cdots + (k + 1) . a_k) =$

$= e . \sum_{h=0}^{k} a_h . (1 + h)$, k = grado de P(n)

4.6.4.- Suma S = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-2n+1}{(n-1)!}$

S(x) = $e^x . \sum_{h=0}^{k} a_h . (h + x) . x^{h-1}$

Cálculo de los coeficientes a_h : Obtenemos $a_0 = 1$, $a_1 = -1$,

$a_2 = 1$, $a_3 = 0$, y del mismo modo $a_h = 0$, h > 2

Por tanto, haciendo x = 1 tengo: S(1) = $e^1 . \sum_{h=0}^{k} a_h . (h + 1) . 1^{h-1}$ =

= $e . (1 - 2 + 3) = 2 . e$

Ejemplo 2: Calcula la suma S = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-2n+1}{(n-1)!} . 3^{n-1}$

S(x) = $e^x . \sum_{h=0}^{k} a_h . (h + x) . x^{h-1}$

Cálculo de los coeficientes a_h :

P(n) = $a_0 + a_1 . n + a_2 . n . (n - 1) + a_3 . n . (n - 1) . (n - 2) + \cdots$

Por otro lado P(n) = $n^2 - 2n + 1$

P(0) = 1 -- > $a_0 = 1$, P(1) = 0 -- > 0 = $a_0 + a_1.1 = 1 + a_1 \rightarrow a_1 = -1$

P(2) = 1 -- > $1 = a_0 + a_1.2 + a_2.2.(2-1) \rightarrow 1 = 1 - 2 + + 2.a_2$

$2.a_2 = 2 \rightarrow a_2 = 1$,

P(3) = 4 -- > $4 = a_0 + a_1.3 + a_2.3.2 + a_3.3.2.1$ -- >

4 = $1 - 3 + 6 + 6.a_3 \rightarrow 6.a_3 = 0 \rightarrow a_3 = 0$

y del mismo modo $a_h = 0$, si h > 3

Por tanto, haciendo x = 3 tengo: S(3) = $e^3.\sum_{h=0}^{k} a_h.(h+3).3^{h-1}$ =

= $e^3.(3.3^{-1} - 4.3^0 + 5.3) = (1 - 4 + 15).e^3 = 12.e^3$

4.6.5.- S = $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-2)!} .x^{n-2}$

Derivando dos veces en $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n$, teniendo en cuenta que

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n = e^x.(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k)$, tengo

Derivando:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!}.x^{n-1} = e^x.\left(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k\right) +$$

$$+ e^x.(a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \cdots + k.a_k.x^{k-1}) =$$

$$= e^x.(a_0 + a_1.(1+x) + a_2.x.(2+x) + a_3.x^2.(3+x) + \cdots +$$

+ $a_k x^{k-1}.(k+x))$

Derivando otra vez:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-2)!}.x^{n-2} = (e^x.\left(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k\right) +$$

$$+ \ e^x.(\ a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \cdots + k.a_k.x^{k-1})) +$$

$$+ (e^x.(\ a_1 + 2.a_2.x + 3.a_3.x^2 + \cdots + k.a_k.x^{k-1}) +$$

$$+ e^x.(\ 2.a_2 + 3.2.a_3.x + \cdots + k.(k-1).a_k.x^{k-2})) =$$

Haciendo x = 1:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-2)!} = (e.(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k) +$$

$$+ \ e.(\ a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \cdots + k.a_k)) +$$

$$+ (e.(\ a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \cdots + k.a_k) +$$

$$+ \text{e}.(\ 2.a_2 + 3.2.a_3 + \cdots + k.(k-1).a_k)) =$$

$= e.(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 2.e.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \cdots +$
$k.a_k) +$

$+ \text{e}.(\ 2.a_2 + 3.2.a_3 + \cdots + k.(k-1).a_k) =$

$= e.\sum_{h=0}^{k} a_h + 2.e.\sum_{h=1}^{k} h.a_h + e.\sum_{h=2}^{k} h.(h-1).a_h$

NOTA: Observa que

$$e.\sum_{h=0}^{k} a_h = e.(a_0 + a_1) + e.\sum_{h=2}^{k} a_h$$

$2.e.\sum_{h=1}^{k} h.a_h = 2.e.a_1 + e.\sum_{h=2}^{k} 2.h.a_h =$

$e.\sum_{h=2}^{k} h.(h-1).a_h = e.\sum_{h=2}^{k} h^2.a_h - e.\sum_{h=2}^{k} h.a_h$

Entonces

$e.\sum_{h=0}^{k} a_h + 2.e.\sum_{h=1}^{k} h.a_h + e.\sum_{h=2}^{k} h.(h-1).a_h =$

$= e.(a_0 + a_1) + e.\sum_{h=2}^{k} a_h + 2.e.a_1 + e.\sum_{h=2}^{k} 2.h.a_h +$

$+ e.\sum_{h=2}^{k} h^2.a_h - e.\sum_{h=2}^{k} h.a_h =$

$= e.(a_0 + 3.a_1) + e.\sum_{h=2}^{k}(h^2 + 2h + 1).a_h - e.\sum_{h=2}^{k} h.a_h =$

$= e.(a_0 + 3.a_1) + e.\sum_{h=2}^{k}((h+1)^2 - h).a_h =$ (*)

Si observamos que:

$a_0 + 3.a_1 = a_0.((0+1)^2 - 0) + a_1.((1+1)^2 - 1)$, tengo

(*) = $e.\sum_{h=0}^{k}((h+1)^2 - h).a_h$

4.6.6.- Calcula la suma S(x) = $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2n + 1}{(n-2)!}.x^{n-2}$

Tomo S(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n = e^x.\left(a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_k.x^k\right)$

donde k = grado de P(n)

Cálculo de los coeficientes a_h:

P(n) = $2n^3 - 3n^2 + 2n + 1$

P(n) = $a_0 + a_1.n + a_2.n.(n-1) + a_3.n.(n-1).(n-2) + \cdots$

P(0) = 1 -- > $a_0 = 1$, P(1) = 2 -- > 2 = $a_0 + a_1.1 = 1 + a_1 \rightarrow a_1 = 1$

P(2) = 9 -- > $9 = a_0 + a_1.2 + a_2.2.(2-1) \rightarrow 9 = 1 + 2 + + 2.a_2$

$2.a_2 = 6 \rightarrow a_2 = 3$,

P(3) = 34 -- > $34 = a_0 + a_1.3 + a_2.3.2 + a_3.3.2.1$ -- >

34 = $1 + 3 + 18 + 6.a_3 \rightarrow 6.a_3 = 12 \rightarrow a_3 = 2$

y del mismo modo $a_h = 0$, si h > 3 . (P(n) es de grado 3)

Por tanto S(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n = e^x.(1 + x + 3.x^2 + 2.x^3)$

Derivando:

S'(x) = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-1)!}.x^{n-1} = e^x.(1 + x + 3x^2 + 2x^3) + e^x.(1 + 6x + 6x^2)$ =

= $e^x.(2 + 7x + 9x^2 + 2x^3)$

Derivando otra vez:

S''(x) = $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-2)!}.x^{n-2} =$

= $e^x.(2 + 7x + 9x^2 + 2x^3) + e^x.(7 + 18x + 6x^2) =$

= $e^x.(9 + 25x + 15x^2 + 2x^3)$

Por lo tanto: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P(n)}{(n-2)!}.x^{n-2} = e^x.(9 + 25x + 15x^2 + 2x^3)$

4.6.7.- Calcula la suma S = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{8^{n+1}.n!}$

Tomo S = $\frac{1}{8} . \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} . (\frac{1}{8})^n$, y teniendo en cuenta que ya que $a_0 = 0$, escribo

$$S = \frac{1}{8} . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} . (\frac{1}{8})^n$$

Tomo S(x) = $\frac{1}{8} . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} . x^n$, y operando como en anteriores obtengo

$$\frac{1}{8} . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} . x^n = e^x . (x + x^2)$$

Haciendo $x = \frac{1}{8}$, $resulta$: $S = \frac{1}{8} . e^{\frac{1}{8}} . \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) = \cdots = \frac{9 . \sqrt[8]{e}}{8^3}$

4.6.8.- Calcula la suma S = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2n + 1}{2^n . n!}$

Tomo S = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2n + 1}{2^n . n!}$ - A_0 , donde $A_0 = 1$

Me quedo con S = $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 2n + 1}{n!} . (\frac{1}{2})^n$ - A_0

Cálculo de los coeficientes a_h:

P(n) = $2n^3 - 3n^2 + 2n + 1$

P(n) = $a_0 + a_1 . n + a_2 . n . (n-1) + a_3 . n . (n-1) . (n-2) + \cdots$

P(0) = 1 -- > $a_0 = 1$, P(1) = 2 -- > 2 = $a_0 + a_1 . 1 = 1 + a_1 \rightarrow a_1 = 1$

P(2) = 9 -- > $9 = a_0 + a_1 . 2 + a_2 . 2 . (2-1) \rightarrow 9 = 1 + 2 + + 2 . a_2$

$$2 . a_2 = 6 \rightarrow a_2 = 3 ,$$

P(3) = 34 -- > $34 = a_0 + a_1.3 + a_2.3.2 + a_3.3.2.1$ -- >

$$34 = 1 + 3 + 18 + 6.a_3 \to 6.a_3 = 12 \to a_3 = 2$$

y del mismo modo $a_h = 0$, si h > 3 . (P(n) es de grado 3)

Tengo

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}.x^n = e^x.(1 + x + 3x^2 + 2x^3)$$

Hago $x = \frac{1}{2} \to S\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{8}\right) = e^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{4+2+3+1}{4}\right) = \frac{5}{2}.\sqrt{e}$

Por tanto: S = $S\left(\frac{1}{2}\right) - A_0 = \frac{5}{2}.\sqrt{e} - 1 = \frac{5.\sqrt{e}-2}{2}$

Calcula la suma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4.n^2-1)^2}$

Descompongo en suma de fracciones simples.

$$\frac{1}{(4.n^2-1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2.(2n-1)^2} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{(2n+1)^2} + \frac{C}{2n-1} + \frac{D}{(2n-1)^2}$$ -- >

…

Nos lleva al sistema: $\begin{cases} 0 = 8.A + 8.C \\ 0 = A.(-8+4) + B.4 + C.(8-4) + D.4 \\ 0 = A.(-2) + B.(-4) + C.(-2) + D.4 \\ 1 = A.1 + B.1 + C.(-1) + D.1 \end{cases}$ -- >

C = -A

$\begin{cases} 0 = -8.A + 4.B + 4.D \\ 0 = -4.B + 4.D \\ 1 = 2.A + B + D \end{cases}$ -- > D = B -- > $\begin{cases} 0 = -8.A + 8B \\ 1 = 2.A + 2.B \end{cases}$ -- >

$$B = A, \quad A = \frac{1}{4}\ , \quad B = \frac{1}{4}\ , \quad D = \frac{1}{4}\ , \quad C = -\frac{1}{4}\ ,$$

Por tanto

$$S = \frac{1}{4}\,.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) - \frac{1}{4}\,.\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\,.\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = (*)\ ,$$ simplificando

$$(*) = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{4}\,.\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\,.\frac{\pi^2}{8} = \frac{-8+\pi^2}{16}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{-8+\pi^2}{16}}$$

4.7.- Series Potenciales

4.7.1.-

Def.: Llamamos series potenciales a las de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n . x^n$

Def.: Radio de convergencia: $R = \frac{1}{L}$, $donde\ L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Recordamos que si existen
$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, y $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces coinciden.
Puede no existir $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y sí existir $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
Puesto que es más fácil calcular $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

si existe éste, es suficiente.

4.7.2.- S(x) = $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n^2-1}{(n+1)!} . x^n$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3.(n+1)^2-1\right).(n+1)!}{(3n^2-1).(n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+6n+2}{(3n^2-1).(n+2)} = 0$$

Por lo tanto R = +∞ (Es convergente para todo valor de x)

Suma: Descompongo en suma de fracciones simples:

$$\frac{3n^2-1}{(n+1)!} = \frac{A}{(n-1)!} + \frac{B}{n!} + \frac{C}{(n+1)!} = \frac{A.(n+1).n+B.(n+1)+C}{(n+1)!} \text{ -- > }$$

$$= \begin{cases} 3 = A \\ 0 = A + B \\ -1 = B + C \end{cases} \text{ -- > A = 3, B = -3, C = 2}$$

Entonces

$S_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{3}{(n-1)!} - \frac{3}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}\right).x^n$. Separando en tres sumas tengo

$$3.x.\sum_{h=2}^{n}\frac{x^{h-1}}{(n-1)!} = 3.x.(-1+e^x)$$

$$-3.\sum_{h=2}^{n}\frac{x^h}{n!} = -3.\left(-\left(1+\frac{x}{1!}\right)+e^x\right)$$

$$\frac{2}{x}.\sum_{h=2}^{n}\frac{x^{h+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{x}.\left(-(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})+e^x\right)$$

Sumando estos reultados resulta:

$S_n(x) = \frac{-2+x-x^2}{x} + \frac{2-3x+3x^2}{x}.e^x$ (Resultado comprobado)

4.7.3.- $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2.x^n$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1, \quad caso\ dudoso$$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^{2/n} = 1, \quad dudoso\ también$$

Si tomo el término incluyendo la variable x:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}.x^{n+1}}{a_n.x^n} = L = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.x = x$$

Por lo tanto: $\begin{cases} |x| < 1 \to converg \\ |x| = 1 \to dudoso \\ |x| > 1 \to diverg \end{cases}$

Para x dentro del intervalo (-1, 1) hacemos lo siguiente:

Tomo $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Derivo: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1}$. Multiplico por x: $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^n$

Derivo otra vez: $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2.x^{n-1}$.

Multiplico por x : $\frac{x.(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2.x^n$. Final: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2.x^n = \frac{x.(1+x)}{(1-x)^3}$

4.7.4.- $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2}.x^n$

$S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}.x^k$

Recordamos que $\binom{k}{2} = \frac{k.(k-1)}{2}$, y entonces

$S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k.(k-1)}{2}.x^k = \frac{2.1}{2}.x^2 + \frac{3.2}{2}.x^3 + \frac{4.3}{2}.x^4 + \cdots + \frac{n.(n-1)}{2}.x^n$

$2.S_n(x) = 2.x^2 + 6.x^3 + 12.x^4 + \cdots + n.(n-1).x^n$ (1)

$2.x.S_n(x) = 2.x^3 + 6.x^4 + 12.x^5 + \cdots + n.(n-1).x^{n+1}$ (2)

Las resto

(1) – (2) = $2.(1-x).S_n(x) =$

$$= 2.(x^2 + 2.x^3 + 3.x^4 + \cdots + (n-1).x^n) - n.(n-1).x^{n+1}$$
(3)

Observa que hemos hecho:

$$n.(n-1) - (n-1).(n-2) = \cdots = 2.(n-1)$$

$$2.3 - 2 = \cdots = 2.2 \ , \ etc, etc \ ,$$

Multiplico de nuevo por x el resultado anterior:

$$2.(1-x).x.S_n(x) =$$

$$= 2.(x^3 + 2.x^4 + 3.x^5 + \cdots + (n-1).x^{n+1}) - n.(n-1).x^{n+2}$$
(4)

Resto

$$(3) - (4) = 2.(1-x).S_n(x) - 2.(1-x).x.S_n(x) =$$

$$= 2.(1-x).(1-x).S_n(x) = 2.(1-x)^2.S_n(x) =$$

$$= 2.(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n) - n.(n-1).x^{n+1} - (n-1).x^{n+1} +$$

$$+ n.(n-1).x^{n+2} \ , \quad \text{(Observa que: (n-1)-(n-2) = 1)}$$

Puedo escribir

$$2.(1-x)^2.S_n(x) =$$

$$= -2.(1+x) + 2.(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n) -$$

$$-(n-1).(n+1).x^{n+1} + n.(n-1).x^{n+2}$$

$$2.(1-x)^2.S_n(x) =$$

$$= -2.(1+x) + 2.\frac{1}{1-x} - (n^2-1).x^{n+1} + n.(n-1).x^{n+2}$$

Ahora tenemos en cuenta que $n.(n-1).x^{n+2} = \frac{n.(n-1)}{(\frac{1}{x})^{n+2}}$, y teniendo en cuenta que $\left|\frac{1}{x}\right| > 1$, tengo $\frac{n.(n-1)}{(\frac{1}{x})^{n+2}} \to 0, si\ n \to +\infty$, y lo mismo

$$(n^2-1).x^{n+1} = \frac{n^2-1}{(\frac{1}{x})^{n+1}} \to 0, si\ n \to +\infty$$

Por tanto, en el límite cuando n -- > $+\infty$ tenemos

$2.(1-x)^2.S(x) = \frac{2}{1-x} - 2.(1+x) = \cdots = \frac{2.x^2}{1-x}$, y $\boldsymbol{S(x)} = \boldsymbol{\frac{x^2}{(1-x)^3}}$

4.7.5.- $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{x.(x+1).(x+2)\dots(+n)}$

Convergencia: Tomo $a_n = \frac{n!}{x.(x+1).(x+2)\dots(x+n)}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!.x.(x+1).(x+2)\dots(x+n)}{n!.x.(x+1).(x+2)\dots(x+n).(x+(n+1))} = \frac{n+1}{x+(n+1)} \to 1\ , si\ n \to +\infty,$ $todo\ x$

Por Raabe: $\lim_{n\to+\infty} n.\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n.\left(1-\frac{n+1}{x+(n+1)}\right) =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n.x}{x+(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{\frac{x}{n}+\frac{n+1}{n}} = \frac{x}{1} = x$

Por lo tanto: $\begin{cases} x > 1 \to conveg \\ x < 1 \to diverg \\ x = 1 \to dudoso \end{cases}$

Sea x > 1, y calculamos la suma:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{x+(n+1)}$ nos dice que es hipergeométrica con

$\propto = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1 + x$ Puesto que $a_n \to 0$ puedo utilizar

(Observa que $a_1 = \frac{1}{x.(x+1)}$)

S(x) = $\frac{-a_1.\gamma}{\propto + \beta - \gamma} = \frac{-\frac{1}{x.(x+1)}.(1+x)}{1+1-(1+x)} = \frac{-1}{x.(1-x)} = \frac{1}{x.(x-1)}$. **S(x) =** $\boldsymbol{\frac{1}{x.(x-1)}}$**,**
x > 1

Caso x = 1: $x = 1 \to S = \sum \frac{n!}{1.2.3\ldots n.(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$, que ha sido calculada en otro lugar (Suma de los inversos …)

4.7.6.- Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} .x^n$

Radio de convergencia: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1).(2n+2)} = \frac{1}{4}$, por tanto R = 4

Converge para todo x tal que |x| < 4

4.7.7.- Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .x^n$

Radio de convergencia: : $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ |a_n| = \frac{1}{n}$

$L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \cdots = 1$, por tanto R = 1 (Converge en (-1, 1))

NOTA: La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .x^n$ es el desarrollo de y = ln(1+x) .

4.7.8.- Sea $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \,.\, x^{2k+1}$

Se trata del desarrollo de y= arcTan(x), que es

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \,.\, x^{2k+1}$$

Radio de convergencia: Aplico D'Alamber incluyendo x

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \cdots = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{x^2.(2k+1)}{2k+3}\right| = x^2$$

Converge para los valores de x tales que $x^2 < 1, esto\ es\ |x| < 1$

4.7.9.- Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \,.\, x^n$

R = $+\infty$. Es el desarrollo de y = e^x

2.7.10.- Sea $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k . \frac{1}{(2k)!} \,.\, x^{2k}$

R = $+\infty$. Es el desarrollo de y = cos(x)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k . \frac{1}{(2k)!} \,.\, x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} \pm \cdots$$

4.7.11.- Sea $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k . \frac{1}{(2k+1)!} \,.\, x^{2k+1}$

R = $+\infty$. Es el desarrollo de y = sen(x)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k . \frac{1}{(2k)!} \,.\, x^{2k} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \pm \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \pm \cdots$$

4.7.12.- Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} n!.\,x^n = 1 + x + 2!.\,x^2 + 3!.\,x^3 + \cdots + n!.\,x^n + \cdots$

R = 0.

4.7.13.- Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n}\,.\,x^n = 2 + 2^2.\,x + 2^4.\,x^2 + 2^6.\,x^3 + \cdots + 2^{2n}.\,x^n + \cdots$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2(n+1)}}{2^n} = \cdots = 4, \quad \text{R} = \frac{1}{4}$$

4.7.14.- $a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\,,\quad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\,,\quad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Para lost res casos: R = 1

4.7.15.- $2.\,x + 2.\,x^2 + 2^3.\,x^3 + 2^3.\,x^4 + 2^5.\,x^5 + 2^5.\,x^6 + \cdots +$

$+2^{2k+1}.\,x^{2k+1} + 2^{2k+1}.\,x^{2k+2} + \cdots =$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}(2^{2k+1}.\,x^{2k+1} + 2^{2k+1}.\,x^{2k+2})$

Separamos en dos subSucesiones:

S1 = $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2k+1}.\,x^{2k+1}$, S2 = $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2k+1}.\,x^{2k+2}$

Por criterio del cociente:

$L = \lim_{k\to+\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \cdots = \lim_{k\to+\infty} |2^2.\,x^2| =$

$= 4.x^2$, $4.x^2 < 1$ -- > $|x| < \frac{1}{2}$. S_1 converge en $(-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2})$

Para S2: $L = \lim_{k\to+\infty} |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \cdots = \lim_{k\to+\infty} |2^2.\,x^2|$, obtenemos lo mismo de antes.

S_2 es convergente en $\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

4.7.16.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$, $a_n = \frac{1}{n^n}$

Radio de convergencia:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n.(n+1)} =$$

$$= \lim \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n}\right) = 0.\frac{1}{e} = 0 \to R = +\infty$$

4.7.17.- $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\ln(n)}.x^n$, $a_n = n^{\ln(n)}$

Radio de convergencia:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n^{\ln(n)}|} = \lim_{n\to+\infty}(n^{\frac{\ln(n)}{n}})$$

Tomo logaritmos: $\ln(L) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n} .\ln(n)\right) =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} . \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) = 0 . 0 = 0$$

$\ln(L) = 0 \to L = 1.$ R = 1. Converge en (-1, 1)

NOTA: Recordamos lo siguiente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = (*)$ $Tipo\ \frac{\infty}{\infty}$

Aplico la Regla de H'Lópital: (*) = $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{k.x^{k-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{k.x^k} =$ 0

En particular: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \cdots = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}.n^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}} = \cdots = 0$

4.7.18.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} . x^n$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$

El alumno comprobará que L = $\frac{1}{e}$, R = e

4.7.19.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^n} . x^n$, $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^n}$

El alumno comprobará que L = 4 , R = $\frac{1}{4}$

4.7.20.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} . x^n$, $a_n = \frac{n}{2^n}$

$L = \lim_{n\to+\infty}(\frac{(n+1).2^n}{n.2^{n+1}}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2.n}\right) = \frac{1}{2}$, R = 2

V *Series de Funciones*

5.1.- Series de Funciones

5.1.1.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot (x+2)^n$, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

Hago y = x + 2, con lo cual tengo la serie de potencias: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot y^n$

Como siempre obtenemos, por criterio del cociente: L = $\frac{1}{2}$, R = 2

Converge para los valores de $y \in (-2, 2)$. y = x + 2 -- > x = y – 2,

Así: $y = -2 \rightarrow x = -4$, $y = 2 \rightarrow x = 0$. Por tanto $x \in (-4, 0)$.

5.1.2.- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k.(k+1)} \cdot (x-3)^{2k-1}$, $a_n = \frac{2^k}{k.(k+1)}$

Hago y = x – 3, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k.(k+1)} \cdot y^{2k-1}$

Criterio del cociente al término completo:

$$\lim_{k\rightarrow+\infty} \left| \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1).(k+2)} .y^{2k+1}}{\frac{2^k}{k.(k+1)} .y^{2k-1}} \right| = \cdots = \lim_{k\rightarrow+\infty} \left| \frac{2.k.y^2}{(k+2)} \right| = 2.y^2$$

$$2.y^2 < 1 \rightarrow |y| < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .$$

$$|y| < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow |x-3| < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x-3 < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x < \frac{6+\sqrt{2}}{2} \\ -(x-3) < \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x > \frac{6-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto converge para $x \in (\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{6+\sqrt{2}}{2})$

5.1.3.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} . (x-1)^n$, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Hago y = x – 1. Contiar como en el anterior.

5.1.4.- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}.(n!)^2} . x^{2n}$

Actividad para el alumno.

5.1.5.- Realiza las siguientes sumas:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+1}$ = x. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = (*)$, $(hago\ m = n+1)$

(*) = $x. \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = x.\left(-x + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m}\right) = (**)$

Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $es\ el\ desarrollo\ de$ ln$(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$

(**) = $-x^2 + x.\frac{1}{2}$. ln $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{x^m}{m} = -x - \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m} =$

$= -\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}$. ln $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

5.2.- Series Telescópicas

5.2.1.-

Def.: Llamamos telescópicas a las series de la forma

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, donde $a_n = b_n - b_{n+1}$

Se cumple que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente precisamente si lo es la sucesión (b_n) .

5.2.2.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1).(2n-1)}$

$b_n = \frac{1}{(2n-1)}$, $b_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)}$,

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} = \frac{2n+1-(2n-1)}{(2n+1).(2n-1)} = \frac{2}{(2n+1).(2n-1)}$$

Por tanto $\frac{1}{(2n+1).(2n-1)} = \frac{1}{2} . \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right)$

Por tanto: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1).(2n-1)} = \frac{1}{2} . \sum \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{2} . \sum \frac{1}{(2n+1)}$

5.2.3.- $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$

Estúdiela el alumno

5.2.4.- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n.(n+1)} . \frac{1}{2^n}$

$\frac{n+2}{n.(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{B}{n+1} \rightarrow \quad A = 2, \; B = -1$

Por tanto: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n.(n+1)} . \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right) . \frac{1}{2^n} =$

$= \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) . \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3}\right) . \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) . \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right) . \frac{1}{2^n} = =$

$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{32}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right) . \frac{1}{2^n} =$

$= 1 - \frac{1}{n+1} . \frac{1}{2^n}$. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} . \frac{1}{2^n}\right) = 0$, por tanto

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n.(n+1)} . \frac{1}{2^n} = 1}$$

5.3.- Otros casos:

5.3.1.-

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$, $S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} \rightarrow S = \frac{1}{8}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n^2+n-1}{n.(n+1).(4n^2-1)}$, $S = 1 + \ln(4)$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$, $S = 15.e$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{n.(n+1).(n+3)}$, $S = \frac{17}{12}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n+1}{(n-1)!}$, $S = 20.e$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1).(2n+1).(2n+3)}$, Es hipergeométrica con:

$\propto = 2, \ \beta = -1, \ \gamma = 5$,
$que\ se\ obtienen\ descomponiendo\ en\ suma\ de\ fracciones\ simples.$

$$S = \frac{1}{12}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+sen(nx)}{n^2}$, Está acotada por $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n))^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$

Por lo tanto es convergente.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n+1}} =$

$= (\frac{1}{2})^0 = 1,$ caso dudoso.

Aplicar otro criterio más "fuerte".

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{(n+4).n!} .x^n$. Estúdiela el alumno.

$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}$. Estúdiela el alumno.

5.4.- Aproximación de un valor dado mediante una serie

5.4.1.- Aproxima el valor de e:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta.x}}{(n+1)!}.x^{n+1}$$

Haciendo x = 1 tengo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$ *es el término complementario, que sumado, si su valor*

fuese conocido, nos daría el valor exacto de e.

En la realidad no es conocido y, si no lo añadimos cometemos un error. De lo que se trata es de acotar este error. En este caso

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}\ ,\ y\ que\ \ e < 3\ y\quad 0 < \theta < 1$$

5.4.2.- Aproximación de los siguientes valores

$e^{0,4}$, $sen(0,2)$, $\ln(1,3)$, $\ln(3)$,

NOTA: Es oportuno recordar aquí lo que sigue

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.h + \frac{f''(a)}{2!}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.h^n + R(a,h)$$

$$R(a,h) = \frac{f^{(n+1}(a+c.h)}{(n+1)!}.h^{n+1}\ ,\quad 0 < c < 1$$

5.4.3.- Aproxima el valor $\sqrt[3]{9}$

Tomo $(1+x)^{\frac{1}{3}} = \quad (desarrollo \ldots)$

5.4.4.- **Otros:**

Sea $a_n = n^2.(n!)^{\frac{c}{n}}.(\cos(b))^{3n}$, c $y\ b\ \ reales$

$\lim_{n\to+\infty}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} n^2.(n!)^{\frac{c}{n}}.(\cos(b))^{3n} =$ (*)

Tomamos $n! = \frac{n^n.\sqrt{2.\pi.n}}{e^n}$, con lo cual

(*) =

$$\lim_{n\to+\infty} n^2.(\cos(b))^{3n}.\left(\frac{n^n.\sqrt{2.\pi.n}}{e^n}\right)^{\frac{c}{n}} = \lim_{n\to+\infty}(n^2.(\cos(b))^{3n}.\left(\frac{n}{e}\right)^c.$$

$$.\sqrt[n]{(2.\pi)^c}.\left(\sqrt[n]{n}\,\right)^c) = (**)$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt[n]{n} \to 1,\ y\ que\ \sqrt[n]{(2.\pi)^c} \to (2.\pi)^0 = 1$

nos queda:

$$(**) = \lim_{n\to+\infty}(n^2.\left(\cos(b))^{3n}.\left(\frac{n}{e}\right)^c\right) = \begin{cases} +\infty,\ \ si \cos(b) = 1 \\ \pm\infty,\ \ si \cos(b) = -1 \\ +\infty.0,\ \ si\ |\cos(b)| < 1 \end{cases}$$

Actividad: Halla $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ldots =$

$$= (\cos(b))^3.\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{e}\ .\sqrt[n]{(2.\pi.n)^c}} =$$

$$= (\cos(b))^3.\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\frac{3}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}}.(2.\pi.n)^{\frac{c}{n^2}}\right) =$$

$$= (\cos(b))^3.\frac{1}{1}\ .\lim_{n\to+\infty}(2.\pi)^{\frac{c}{n^2}}.n^{\frac{c}{n^2}} = \cdots$$

Continúe el alumno.

5.4.5.- Estudio de la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. El número e

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}.\frac{1}{n+1} + \cdots + \binom{n+1}{k}.\frac{1}{(n+1)^k} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}.\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}.\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{k}.\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}.\frac{1}{n^n} = (*)$$

Desarrollando los números combinatorios obtengo

$$(*) = 1 + 1 + \frac{n.(n-1)}{2!.n^2} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{3!.n^3} + \cdots + \frac{n.(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!.n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{(n-1)}{2!.n} + \frac{(n-1).(n-2)}{3!.n^2} + \cdots + \frac{(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!.n^{n-1}} = (**)$$

Haciendo $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, ... , $\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$

$$(**) = 2 + \frac{1}{2!}.\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}.\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

De forma análoga

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}.\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}.\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + 1.\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Se cumple $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, por lo cual $1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$, y por tanto

$a_n < a_{n+1}$. Conclusión: $\{a_n\}$ *es monótona creciente.*

(Observa que además en a_{n+1} suma el término $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$)

Veamos que está acotada:

Observa que $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1.2.3\ldots k} < \frac{1}{1.2.2\ldots 2} = \frac{1}{2^k}$, y entonces, teniendo en cuenta además que

$$\left(1 - \frac{j}{k}\right) < 1 \text{ ,} \quad \text{tenemos:}$$

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right).\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}.\left(1 - \frac{1}{n}\right).\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$$

$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Sumamos la p.g $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$S_n = \frac{\frac{1}{2^n}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{2.1}{2}.\left(\frac{1}{2^n}\right) - 1}{-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$, por tanto $a_n < 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$

La sucesión $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ está acotada. Por tanto tiene límite.

Su límite lo llamamos "número e" : $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

5.4.6.- Otros casos

A) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right).\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1.e = e$

B) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+h} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^h.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1^h.e = e$

C) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{h.n} = (\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n})^{h} \to e^{h}$

D) $a_n = (1+\frac{1}{a})^{a}$, $a > 0$. $\lim_{a\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a} = e$

E) $a_n = (1+a)^{\frac{1}{a}}$, $a > 0$. $\lim_{a\to+0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$

6.1.- TEOREMA DE Dirichlet para progresiones aritméticas

El **teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas** es un resultado de la teoría analítica de números demostrado por el matemático Dirichlet. Este teorea sobre la distribución de los números primos en, fue conjeturado por Gauss y finalmente demostrado en 1837 por Dirichlet, nombre por el que actualmente se le conoce.

Enunciado:

Sean a y d tales que su máximo común divisor sea uno (primos entre sí), (Mía: Números enteros positivos primos entre sí, entonces la progresión aritmética $a_n = a + n.d$ contiene infinitos números primos) entonces la progresión aritmética a + n.d contiene infinitos números primos.

Quiere decir:

Que los números *a* + *n.d* forman una progresión aritmética en la que hay infinitos números primos congruentes (con a) módulo *d (Mía: Existen, en esa sucesión, infinitos números primos que son congruentes (con a y entre sí) módulo d)* .

Por ejemplo, el teorema asegura que hay una cantidad infinita de números primos que terminan en 7, ya que los números que terminan en 7 forman una progresión aritmética (7, 17, 27, 37, ...), es decir, es una sucesión de números de la forma *a* + *n.d* con *a* = 7 y *d* = 10, siendo estos primos entre sí.

Demostración:

La demostración del teorema utiliza las propiedades de ciertas funciones multiplicativas (conocidas como funciones – L de Dirichlet) y varios resultados sobre aritmética de números complejos y es suficientemente compleja como para que algunos textos clásicos de teoría de números decidan excluirla de su repertorio de demostraciones.

NOTA: La demostración la tenemos en un pdf llamado ap-Dirichlet.pdf, en la carpeta OS(C:)>User>Alejo>Documents (No permite pasarlo como documento.doc, ni interesa de momento). Estudiarla en su versión pdf.

6.2.- Pequeño Teorema de Fermat

El pequeño teorema de Fermat es uno de los teoremas clásicos de teoría de números relacionado con la divisibilidad. Se formula de la siguiente manera:

Si p es un número primo, entonces, para cada número natural a, con a > 0, $a^p \equiv a \pmod p$

Sin embargo, el teorema suele ser presentado de esta otra forma:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (m\acute{o}d\ p)$$

Demostración (Condición necesaria para que p sea primo)**:**

La prueba original de Euler (y Leibniz) es sencilla, en términos de comprensión lógica, ya que sólo utiliza métodos elementales que una persona con nociones básicas de álgebra puede entender.

Su demostración se basa en el principio de inducción, que consiste en demostrar que: "Si cierta propiedad *P* de los números naturales se cumple para *n* y también se cumple para *n* + 1, entonces se cumple para todo *n"*.

Es fácil ver que si se cumple para *n*, y para *n* + 1, también se cumple para *n* + 2, *n* + 3, etc. ya que, llamando como n_1 a *n* + 1, se cumple para n_1 y n_1+1, por tanto, para *n*, *n*+1 y *n*+2, y así sucesivamente.

Para la demostración también se utiliza la propiedad de que: "Si *p* es un número primo, entonces el coeficiente binomial $\binom{p}{k}$ es divisible por *p*, para todo *k*, tal que $1 \leq k < p$. Esto es así puesto que el coeficiente binomial se define como:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!.(p-k)!}$$

Donde el signo ! corresponde al factorial de un número, que indica la multiplicación de todos los números naturales menores o iguales a dicho número, por ejemplo, $p! = p\cdot(p\text{-}1)\cdot(p\text{-}2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Puesto que en el denominador, los factoriales son valores enteros menores que p, estos factores no pueden coincidir con *p* ni dividir al número primo *p* del numerador, de modo que el resultado es múltiplo de p.

NOTA: Observemos que $n^p \equiv n\ (mód. p) \leftrightarrow n^p - n \equiv 0\ (mód. p)$, es decir $n^p - n$ es divisible por p.

Dicho esto, la demostración consiste en los siguientes pasos:

Supongamos que

- Utilizamos el binomio de Newton para expandir la potencia

$$(n+1)^p = \binom{p}{0} n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \cdots +$$
$$+ \binom{p}{p-1} n + \binom{p}{p} =$$
$$= \frac{p!}{1.p!} . n^p + \frac{p!}{1.(p-1)!} . n^{p-1} + \cdots + \frac{p!}{(p-1)!.1} . n + 1 =$$
$$= n^p + p.n^{p-1} + \frac{p!}{2!.(p-2)!} . n^{p-2} + \cdots + p.n + 1 =$$

(Resto n y sumo n al miembro derecha)

$$= (n^p - n) + p.n^{p-1} + \frac{p!}{2!.(p-2)!} . n^{p-2} + \cdots + p.n + (n+1)$$

de donde

$$(n+1)^p - (n+1) = (n^p - n) + p.n^{p-1} + \frac{p!}{2!.(p-2)!} . n^{p-2} + \cdots +$$
$$+ p.n$$

- Agrupando factores y reordenando la identidad:
- Por hipótesis, hemos supuesto que n^p - *n* es divisible por *p*, y dado que todos los términos del sumatorio del miembro de la derecha son divisibles por *p*, tenemos que *p* divide a $(n + 1)^p - (n + 1)$.
- Ahora bien, $1^p - 1$ es divisible por *p*, por lo tanto $2^p - 2$ también es divisible por *p*, y así sucesivamente.

6.3.- Test de primalidad:

El *pequeño teorema de Fermat* da una condición necesaria para que un número *p* sea primo. Es necesario que, para todo número natural *a* menor que *p*, a^{p-1} - 1 sea divisible por *p*, o sea, que a^{p-1} sea congruente con *uno* módulo *p* (en notación moderna como

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$).

Este principio es la base del test de primalidad de Fermat. Este test, al que asumimos una entrada *n*, consiste en ir probando que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ para una serie de valores de *a*, tales que sean menores que *n*. Si *n* es primo, entonces la congruencia se cumplirá siempre (condición necesaria del teorema) mientras que si *n* es compuesto, la congruencia puede no cumplirse. Si para algún valor de *a* (menor que *n*) no se cumple la congruencia, entonces *n* es compuesto. Una descripción de este test de forma general, en forma de algoritmo escrito en pseudocódigo, podría ser la siguiente.

Algoritmo Test de primalidad de Fermat.

Entrada: Un número natural *n* > 1, el número *k* de veces que se ejecuta el test y nos determina la fiabilidad del mismo.

Salida: COMPUESTO si *n* es compuesto y POSIBLE PRIMO si *n* es un posible primo.

1. Para j desde 1 hasta k haga lo siguiente:
    1. Generamos un número entero aleatorio, a, comprendido entre 1 y n-1
    2. Si $a^{n-1} \not\equiv 1$ (mód. n) entonces:

        Retornará COMPUESTO, en otro caso

Retornará POSIBLE PRIMO

Mi NOTA: El valor de k determina la fiabilidad del resultado. Es el número de veces que toma un valor aleatorio a, entre 1 y (n-1), y hace la prueba.

Lo ideal sería un algoritmo que me garantice si p no es primo. Propongo el siguiente pseudocódigo:

Dado p, si para algún entero a, $1 < a < (p-1)$, se cumple que

a^{p-1} /≡ 1 (mód. p),

entonces p no es primo. En otro caso es posible primo y haciendo el cociente p : a y comprobando si el resultado es o no entero, podemos garantizar si p es primo.

Sobre Criptografía asimétrica

La criptografía con clave pública corresponde a un código que se agrega para asegurar la confidencialidad de los mensajes con la ayuda de dos claves criptográficas. Una, que permite cifrar el mensaje, es pública. La otra, que tiene como objetivo el descifrado, es privada.

Una importante familia de códigos asimétricos utiliza la tecnología llamada RSA. La clave secreta está determinada por la descomposición de un número entero grande, a menudo de varias centenas de cifras. Este tiene dos factores primos. Lo esencial de las técnicas industriales de principios del siglo XXI se basa en el *pequeño teorema de Fermat* para generar grandes números primos o para comprobar la primalidad de un número.

6.4.- Generalización del T. de Fermat:

A)

Una pequeña generalización del teorema, que se sigue de él, dice lo siguiente: “Si *p* es primo y *m* y *n* son enteros *positivos* tales que

$m \equiv n$ (mod p-1), entonces $a^m \equiv a^n$ (mod p) para todos los enteros a”.

Expresado así, el teorema se utiliza para justificar el método de cifrado de clave pública RSA.

B)

El pequeño teorema de Fermat se puede generalizar mediante el teorema de Euler; para cualquier módulo *n* y cualquier entero *a* coprimo con *n*, se tiene:

$$a^{\varphi(n)-1} \equiv 1\ (mód.n)$$

donde φ(n) es la función φ (fi) de Euler que cuenta el número de enteros entre 1 y *n* coprimos con *n*. Esta es de hecho una generalización, ya que si $n = p$ es un número primo, entonces $\varphi(p) = p - 1$.

Aun así, todavía se puede generalizar más, como así se muestra en el teorema de Carmichael. Como antes, para cualquier módulo *n* y cualquier entero *a* coprimo con *n*, se tiene:

$$a^{\lambda(n)-1} \equiv 1\ (mód.n)$$

donde ahora λ(n) es la función de Carmichael (λ lambda).

La Sucesión de Fibonacci en la Naturaleza

Parece ser que la sucesión de Fibonacci está estrechamente emparentada con la naturaleza. Algunos aseguran que Leonardo encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos, y es muy posible que así sea.

Reconozco que la primer vez que encontré un texto que relacionaba la citada sucesión con la cría de conejos me dejó perplejo, porque no explicaba con claridad cómo comenzaba ese proceso, ya que decía algo así: "… el primero engendra uno, este engendra dos, cada uno engendra otros dos, … ". Pero no quedaba muy claro que se cumpliese la construcción de la sucesión de Fibonacci.

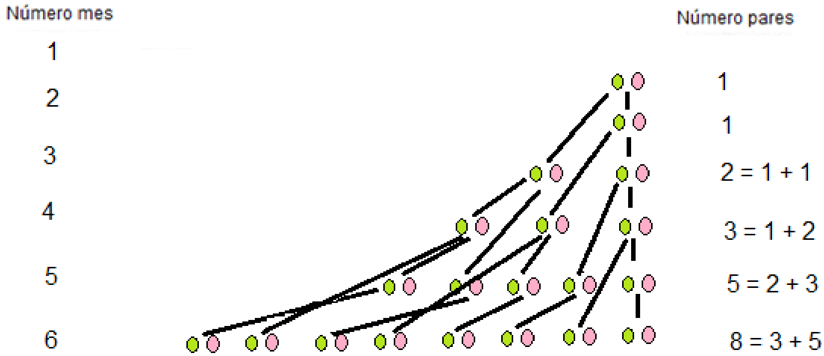
Posteriormente encontré que algo así como: "… la primer pareja engendra … y aquí la duda, engendra un conejo macho, ó una hembra, ó una pareja macho y hembra". No lo dejaban claro.

Más tarde, gracias a otras referencias que aludían a estos hechos, llegué a la siguiente conclusión, confirmada en otros textos consultados después.

De ser cierto el asunto de los conejos, es decir, que Leonardo de Pisa pasase algunos de sus ratos libres criando conejos, parece que en lo que hemos de fijarnos es en el número de parejas engendradas y no en el total de parejas ni en el total de conejos. Otro detalle importante a tener en cuenta es que sólo las dos generaciones más jóvenes tienen capacidad para engendrar.

Ocurriría así: "El primer mes compró una pareja de conejos (de sexos opuestos), y al final del segundo mes aquella había engendrado otra pareja. Al final del tercer mes cada una de las anteriores había engendrado otra pareja, por tanto dos parejas engendradas, tres parejas con capacidad de engendrar. Al final del cuarto mes se han engendrado tres nuevas parejas, y así tiene cinco parejas con capacidad de engendrar.

Para ilustrarlo gráficamente represento por  una pareja: hembra y macho. Entonces lo que trato de explicar queda representado en el siguiente gráfico:



y continuaría de la misma forma.

ADEMÁS:

Otro hecho que los especialista han constatado es el siguiente:

Las ramas y las hojas de las plantas son más o menos eficientes para atrapar el máximo de luz solar posible de acuerdo a la forma en que se distribuyen alrededor del tallo. Si miras un poco en tu jardín, verás que no hay plantas en que las hojas se encuentren una justo en la vertical de la otra. En general, las hojas nacen siguiendo una espiral alrededor del tallo. Fijemos nuestra atención en una hoja de la base del tallo y asignémosle el número cero. Luego, contemos cuántas hojas hay en el tallo hasta encontrarnos directamente sobre la hoja “cero”. Veremos que en la mayoría de las plantas este número pertenece la sucesión de Fibonacci. Además, si contamos cuántas vueltas dimos antes de obtener la superposición de las hojas, nuevamente se obtiene un número de la sucesión de Fibonacci. (Esto dicen los especialistas en el tema).

VII *De Geometría*

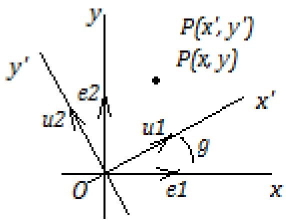
7.1.- Cambio de Sistema de referencia en el Plano

Cambio de Sistema de referencia (s.d.r.) de S (O; {e1, e2}) a S' (O; {u1, u2}). Llamo B = {e1, e2} y B' = {u1, u2}, que consideramos ortonormales, estando relacionadas mediante

u1 = a11.e1 + a12.e2

u2 = a21.e1 + a22.e2

Sea un punto P representado en las dos referencias.



OP = x.e1 + y.e2

OP = x'.u1 + y'.u2

Tengo:

x.e1 + y.e2 = x'.u1 + y'.u2 =

= x'.(a11.e1 + a12.e2) + y'.(a21.e1 + a22.e2) =

= (x'.a11 + y'.a21).e1 + (x'.a12 + y'.a22).e2 -- >

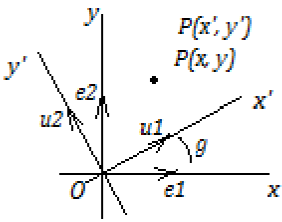
$$\begin{cases} x = x'.a11 + y'.a21 \\ y = x'.a12 + y'.a22 \end{cases}$$

o bien, matricialmente:

$$(x, y) = (x', y') \cdot \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$$

Giro del s.d.r.:

Realizo el giro G con centro en O y amplitud g, de tal forma que el eje Ox pasa a Ox', el eje Oy pasa a Oy'.



OP = x.e1 + y.e2

OP = x'.u1 + y'.u2

Sean las expresiones de la base B' en la base B:

u1 = a11.e1 + a12.e2

u2 = a21.e1 + a22.e2

x' = OP * u1 = (x.e1 + y.e2) * (a11.e1 + a12.e2) = a11.x + a12.y

y' = OP * u2 = (x.e1 + y.e2) * (a21.e1 + a22.e2) = a21.x + a22.y

Es decir, matricialmente

$$(x', y') = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad (x, y) = \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Por otro lado

a11 = u1 * e1 = cos(g)

a12 = u1 * e2 = sen(g)

Por tanto: u1 = cos(g).e1 + sen(g).e2

a21 = u2 * e1 = - sen(g)

a22 = u2 * e2 = cos(g)

Por tanto: u2 = - sen(g).e1 + cos(g).e2

Volviendo a (1) tengo

$$\begin{cases} x' = \cos(g) \, . \, x + sen(g) . \, y \\ y' = \ -sen(g). \, x + \cos(g) \, . \, y \end{cases}$$

Matricialmente:

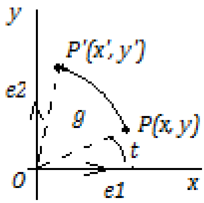
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1)

7.2.-   Giro en el plano

Vamos a ver cómo ocurre en el cado del giro con centro en O en el que la imagen de P(x, y) es P’(x’,y’)

En este caso el sistema de referencia queda fijo.



OP = x.e1 + y.e2

OP’ = x’.e1 + y’.e2

x = OP * e1 = cos(t), y = sen(t)

x’ = OP’ * e1 = cos(t + g) = cos(t).cos(g) – sen(t).sen(g) =

= cos(g).x - sen(g).y

y’ = sen(t + g) = sen(t).cos(g) + cos(t).sen(g) =

= cos(g).y + sen(g).x

$$\begin{cases} x' = \cos(g)\,.\,x - sen(g).\,y \\ y' = sen(g).\,x + \cos(g)\,.\,y \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -\,sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2)$$

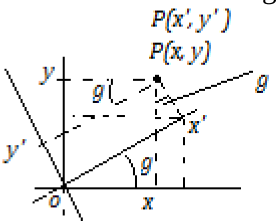
Observa que esta matriz es la traspuesta (también inversa) de la obtenida en el cambio de sistema de referencia, matriz (1)

Otra forma:

Giro del s.d.r. :

Observando la siguiente figura quedan justificada la relación entre las coordenadas (x, y), (x’, y’) de un punto P del plano.

Giro en sentido contrario a las agujas del reloj.



$x = x'.\cos(g) - y'.sen(g)$
$y = x'.sen(g) + y'.\cos(g)$

Expresado en forma de matriz (vector fila)

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Haciendo las traspuestas

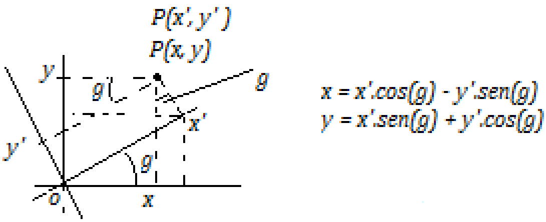
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que la inversa de la matriz coincide con la traspuesta nos queda

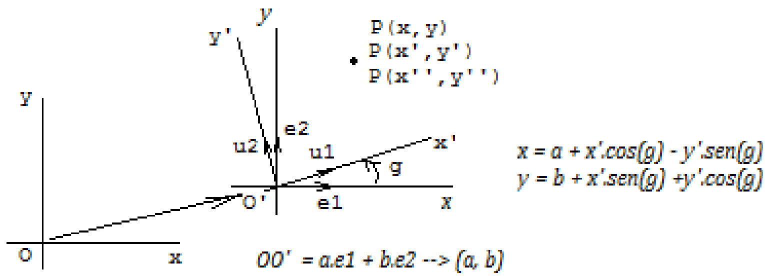
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Observa que coincide con (1). Esto es así porque también aquí lo que realmente hacemos es un cambio de sistema de referencia.

Traslación más giro:



Al giro mostrado en la figura la traslación añade la suma del vector que traslada el origen O al origen O': OO' = (a, b)



Tengo

$$(x, y) = (a, b) + (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

O bien

$$(x - a, y - b) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

y multiplicando por la derecha con la inversa

$$(x - a, y - b) \,.\, \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} = (x', y')$$

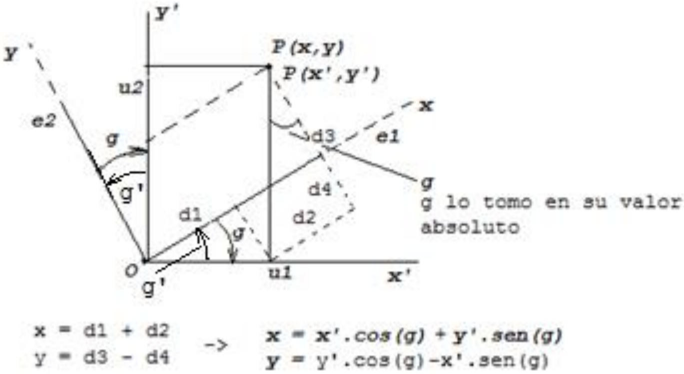
o bien tomando las traspuestas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \qquad (5)$$

que es similar a la (4).

Giro: Caso de otra posición relativa:

El giro g se hace en el sentido de las agujas del reloj.



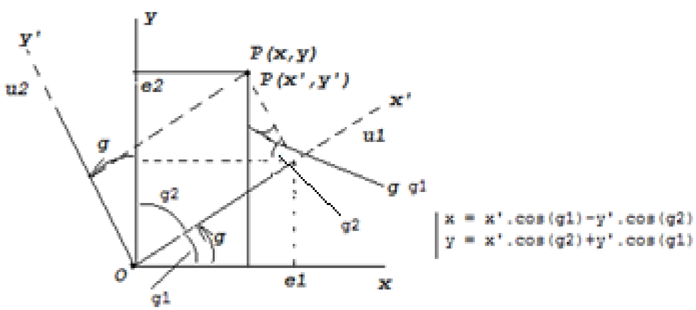
$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

Giro expresado mediante los cosenos directores

Giro en sentido contrario a las agujas del reloj.

Me propongo expresarlo en función de los cosenos directores: cos(g1), cos(g2) de la recta ox' conforme se muestra en la siguiente figura.



Teniendo en cuenta que sen(g1) = cos(90-g1) = cos(g2) nos queda

$$\begin{cases} x = x'.\cos(g1) - y'.\cos(g2) \\ y = x'.\cos(g2) + y'.\cos(g1) \end{cases}$$

donde cos(g1), cos(g2) son los cosenos directores de la recta Ox' respecto del sistema de referencia S inicial.

Matricialmente

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g1) & cos(g2) \\ -cos(g2) & \cos(g1) \end{pmatrix}$$

Realización práctica: Datos:

-Sistema de partida S = {O; ox, oy}, ortonormal y con la base canónica de vectores

B = {e1 = (1,0); e2 = (0,1)}

-Sistema destino S' = {O; ox', oy'}, ortonormal, que puede estar relacionado con el primero de tres formas posibles:

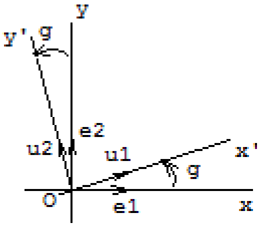
a) Conocemos la base B' = {u1, u2} asociada con S' es ortonormal y que viene dada por

$$\begin{cases} \mathrm{u1} = \mathrm{c11.e1} + \mathrm{c12.e2} \\ \mathrm{u2} = \mathrm{c21.e1} + \mathrm{c22.e2} \end{cases}$$

b) Conocemos la ecuación de la recta ox' respecto del sistema S

c) Conocemos el ángulo g que forma el eje ox' con el eje ox.

Resolución:
Caso a:



cos(g) = e1*u1 = c11 -- >

$$\begin{cases} \cos(g1) = c11 \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - c11^2} \end{cases}$$

Caso b:

Sea ox': ax + by = 0

Obtengo un vector director: x = b, y = -a

$$v = (b,-a) \dashrightarrow w = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\cos(g) = e1 * w = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{-- >}$$

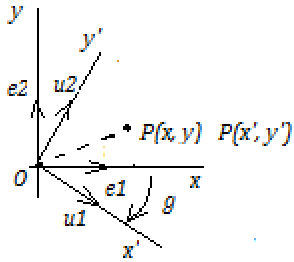
$$\begin{cases} \cos(g1) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Observa: $\cos(g2) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Caso c:
En este caso lo tenemos muy sencillo

$$\begin{cases} \cos(g1) = \cos(g) \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - \cos(g)^2} \end{cases}$$

7.3.- Giro en el espacio ligado a un plano



OP = x.e1 + y.e2
OP = x'.u1 + y'.u2

x' = OP * u1 = (x.e1 + y.e2) * u1 = x.(e1*u1) + y.(e2*u1) =
= cos(g).x + cos(pi/2 + g).y = cos(g).x - sen(g).y

y' = PO * u2 = (x.e1 + y.e2) * u2 = x.(e1*u2) + y.(e2*u2) =
= cos(pi/2 – g).x + cos(g).y = sen(g).x + cos(g).y

Por tanto, matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6}$$

Observa que coincide con el resultado (2)

7.4.- En el Espacio: Cambio de Sistema de referencia

Introducción

Datos:
-Sistema de partida S = {O; ox, oy, oz}, ortonormal y con la base canónica

$$B = \{e1 = (1,0,0);\ e2 = (0,1,0);\ e3 = (0,0,1)\}$$

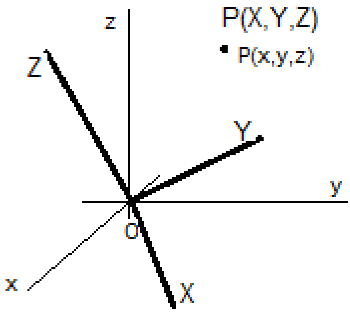
-Sistema destino S' = {O; ox', oy', oz'}, ortonormal, del que conocemos su relación con el sistema S de alguna de las siguientes formas:

a) Conocemos la base B' = {u1, u2, u3} asociada con S', ortonormal, dada por

$$\begin{cases} u1 = c11.e1 + c12.e2 + c13.e3 \\ u2 = c21.e1 + c22.e2 + c23.e3 \\ u3 = c31.e1 + c32.e2 + c33.e3 \end{cases}$$

b) Conocemos la expresión del plano x'Oy' respecto del sistema S

Caso a)



$$OP = x.e1 + y.e2 + z.e3$$

$$OP = X.u1 + Y.u2 + Z.u3$$

Entonces

$$x.e1 + y.e2 + z.e3 = X.u1 + Y.u2 + Z.u3 =$$

$$= X.(c11.e1 + c12.e2 + c13.e3) + Y.(c21.e1 + c22.e2 + c23.e3) + Z.(c31.e1 + c32.e2 + c33.e3) =$$

= (X.c11 + Y.c21 + Z.c31).e1 + (X.c12 + Y.c22 + Z.c32).e2 +

+ (X.c13 + Y.c23 + Z.c33).e3, y por tanto

$$\begin{cases} x = \mathrm{X.c11} + \mathrm{Y.c21} + \mathrm{Z.c31} \\ y = \mathrm{X.c12} + \mathrm{Y.c22} + \mathrm{Z.c32} \\ z = \mathrm{X.c13} + \mathrm{Y.c23} + \mathrm{Z.c33} \end{cases}$$

y matricialmente

$$(x, y, z) = (X, Y, Z) \cdot \begin{pmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$(X, Y, Z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{pmatrix}^{-1} \qquad (2)$$

Caso b):

Cambio de s.d.r. mediante un giro G compuesto por tres giros

Deseamos pasar del Sistema S(O; x, y, z) al Sistema S'(O; x', y', z')

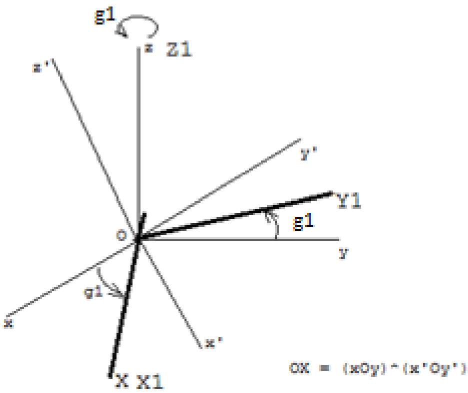
Sea OX la recta común a los planos de coordenadas xOy, x'Oy'.

Sea m: ax + by + cz = 0 el plano x'Oy' expresado en el sistema S.

Giro g1: Eje de giro el eje Oz, ángulo de giro g1 por el que el eje Ox pasa a la recta OX.

Obtendré cos(g1):

El eje ox pasa a la recta OX , pasando así al nuevo sistema de ejes (O; X1, Y1, OZ1). El plano X1OY1 es ortogonal con Oz, por serlo con OZ1.



Calculamos la recta OX intersección de los dos planos xOy, x'Oy' (xOy es el plano z = 0, por lo que OX está en z = 0).

Para la recta OX tengo

$$\text{OX: } \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ -- > } \begin{cases} ax + by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Obtengo vector director de OX haciendo:

x = b -- > y = -a -- > p1(b, -a, 0)
x = 0 -- > y = 0 -- > p2(0, 0, 0) , y obtengo

v = (b, -a, 0) , en la base B(e1, e2, e3), y su módulo |v| = $\sqrt{a^2 + b^2}$
Un vector director de Ox es e1

El producto escalar v*e1 = |v| . cos(g1) = $\sqrt{a^2 + b^2}$. cos(g1)

y por otro lado v*e1 = b , por tanto b = $\sqrt{a^2 + b^2}$. cos(g1), de donde cos(g1) = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

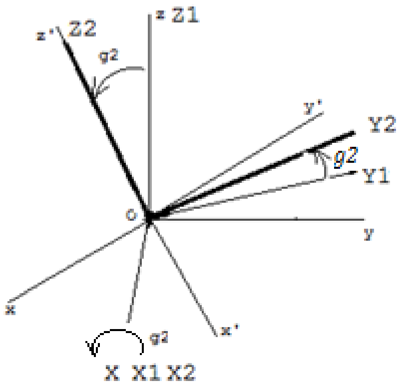
Resumen: cos(g1) = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Giro g2: Eje de giro es la recta OX , que es el eje OX1 del sistema de ejes (O; X1, Y1, Z1) , y ángulo g2 de modo que el eje Oz pasa a coincidir con el eje Oz', resultando el nuevo sistema de ejes (O; X2, Y2, Z2), donde OX2 coincide con OX1 y OZ2 coincide con Oz'.

Obtendré cos(g2):

El eje Oz pasa al eje Oz', el eje OY1 pasa al eje OY2.

Puesto que OX1 queda fijo, los nuevos ejes OZ2 y OY2 son ortogonales con OX1, es decir yacen sobre el plano ortogonal con OX.



Por otro lado, puesto que OZ2 coincide con Oz', el eje OY2 está sobre el plano x'Oy', y por tanto es la recta común a los planos X1OY1, x'Oy'.

Necesito el vector director w de la recta Oz' expresado en la base B(e1, e2, e3). El eje Oz' es ortogonal con el plano x'Oy' : ax + by +cz = 0, y por tanto nos vale el vector w = (a, b, c), en la base B(e1, e2, e3). Su módulo es

$$/w/ = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Producto escalar w*e3 = |w|.|e3|.cos(g2) = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. cos(g2)

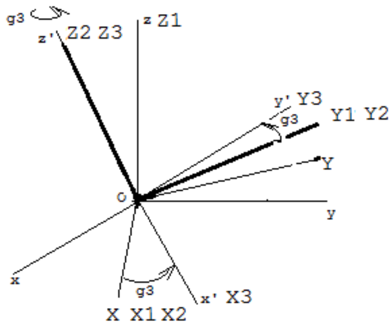
Por otro lado w*e3 = c, y por tanto c = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. cos(g2)

de donde cos(g2) = $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Resumen: cos(g2) = $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Giro g3: Eje de giro es el eje OZ2 (oz') y ángulo g3 de modo que la recta OX pase al eje Ox', y necesariamente la recta OY2 pasa al eje Oy'.

Obtendré cos(g3):



El ángulo g3 es el que forman la recta OX con la recta ox', que son conocidas ya que OX es la intersección de los planos xOy, x'Oy' y fue calculada al obtener g1, la segunda es el eje ox' del nuevo sistema de referencia.

Volviendo atrás:

Plano x'Oy': ax + by + cz = 0 , recta OX: $\begin{cases} ax+by=0 \\ z=0 \end{cases}$

Vimos que el vector director de OX es v = (b, -a, 0) , expresado en la base B(e1, e2, e3), y su módulo $|v| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Un vector director de Ox' es u1 expresado en B(e1, e2, e3).

Sea $\quad u1 = c11.e1 + c12.e2 + c13.e3$, cuyo módulo es

$$|u1| = \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$$

Teniendo en cuenta el producto escolar v*u1 = |v|.|u1|. cos(g3) =

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}} \cdot \cos(g3)$$

Por otro lado sabemos que v*u1 = b.c11 – a.c12, y por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}} \cdot \cos(g3) = b.c11 - a.c12, \quad \text{de donde}$$

$$\cos(g3) = \frac{b.c11 - a.c12}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$$

Resumen: $\cos(g3) = \frac{b.c11 - a.c12}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$

Entonces, el giro G que deseamos realizar es el resultado de la composición de los tres giros anteriores (operando de derecha a izquierda):

Si operamos por columnas: $G = g_3.g_2.g_1$

Conocidos los tres ángulos tomamos las matrices de transformación obtenidas en el punto 4.3:

Obteniendo las nuevas coordenadas (x', y', z') en función de las originales (x, y, z).

Continuamos:

Giro g1: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Giro g2: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Realizando g1 y a continuación g2 tengo

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro g3: Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

(Comprobadas)

Como en 4.3, realizamos la composición de los tres giros:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

=

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Productos: g3*g2*g1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$\begin{array}{c} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ \text{Col. 1} \qquad\qquad \text{Col. 2} \qquad\qquad \text{Col. 3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ & & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ & & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Primer col. *Segunda col.* *Tercer col.*

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ & & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ & & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}$$

$$.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)
