TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 1

Todo Números

PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Obra completa:
Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto

© *El Autor*: *Alejo González Criado*

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

Primera edición Mayo 2017

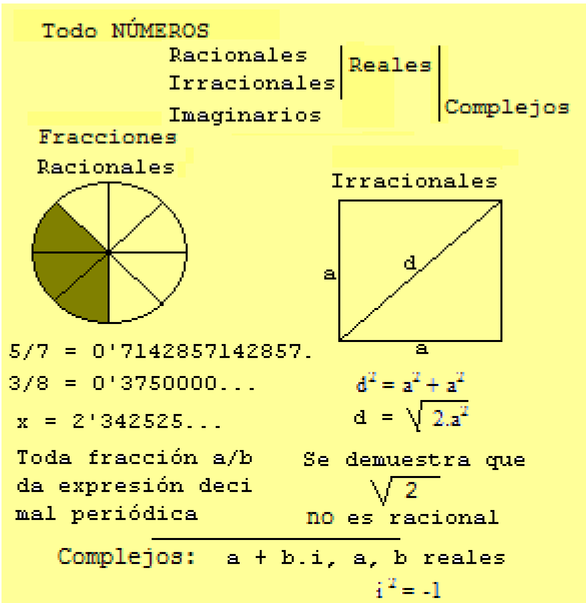
Editado en España

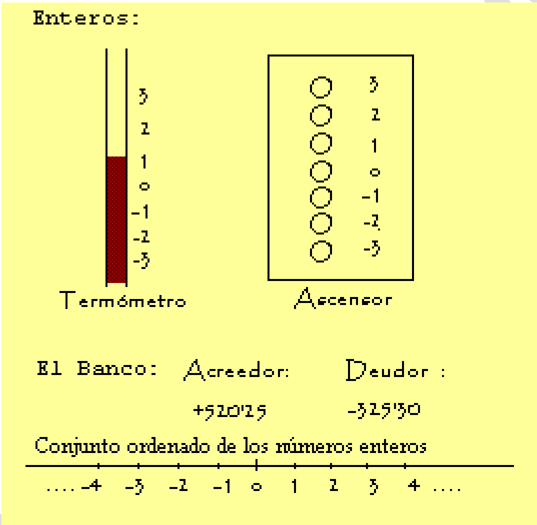
ISBN:
Depósito Legal:

Derechos reservados:
Prohibida toda reproducción, por cualquier medio, sin autorización del autor.

NO COPIAR

VOLUMEN 1


Todo NÚMEROS
Racionales
Irracionales
Imaginarios
Reales
Complejos
Fracciones
Racionales
Irracionales
a
d
a
5/7 = 0'7142857142857.
3/8 = 0'3750000...
x = 2'342525...
$d^2 = a^2 + a^2$
$d = \sqrt{2.a^2}$
Toda fracción a/b
da expresión deci
mal periódica
Se demuestra que
$\sqrt{2}$
no es racional
Complejos: a + b.i, a, b reales
$i^2 = -1$


Enteros:
3
2
1
0
-1
-2
-3
Termómetro
3
2
1
0
-1
-2
-3
Ascensor
El Banco:
Acreedor:
+520'25
Deudor :
-325'30
Conjunto ordenado de los números enteros
.... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ....

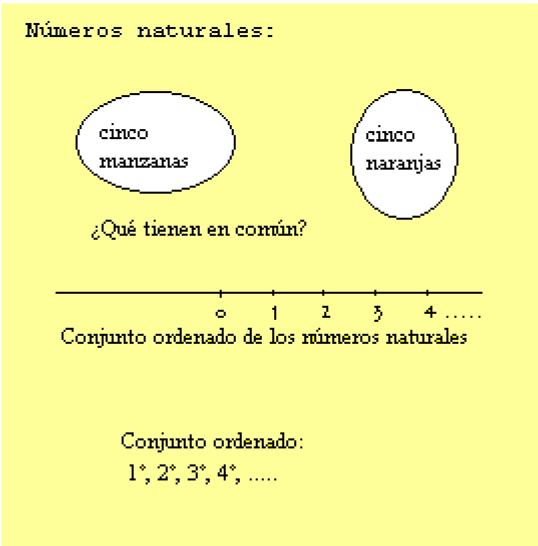
ÍNDICE

NO COPIAR

NO COPIAR

Tema 1

Números Naturales



NO COPIAR

1.- Números Naturales

1.1.- Introducción, Definiciones, Conceptos básicos

“Los números naturales se nos presentan ahí por ‘vía natural’, lo que de ellos se sigue es obra del Hombre”

NUESTROS ancestros:

Para empezar, “Los NÚMEROS naturales” son la piedra angular del Edificio Matemático.

En el principios de los tiempos nadie “sabía” matemáticas, sino del número de piezas de caza que tenía ante sus ojos, del número de cabezas de ganado que cuidaba en el campo, del número de miembros de su círculo familiar, etc., etc.,...

Es lógico y de sentido común que anotasen la cantidad de los mismos, bien mediante marcas en el tronco del árbol más próximo, bien mediante piedrecitas que tuviesen a su alcance, o mediante otros trucos.

De este modo surgiría en sus mentes la idea de “unidad”, el uno, la idea “dos unidades”, el dos, y así hasta donde les permitiera su intelecto.

También es lógico que más tarde adoptasen símbolos para representar las referidas cantidades que, evidentemente, evolucionarían más tarde hasta llegar a nuestros días. Sabemos que cada civilización tomó los que consideró necesarios y más oportunos conformes a su entorno vital.

Posteriormente, propiciado por el intercambio de conocimientos entre diferentes poblaciones y civilizaciones, las élites del conocimiento propondrían unificar estos símbolos, que hoy llamamos "Números naturales", y en gran medida lo consiguieron.

NUESTRO tiempo:

Los Números Naturales se hacen necesarios en el día a día, y a edad muy temprana, con el fin de controlar, por ejemplo, nuestras pertenencias: El niño desea controlar cuántas canicas tiene, cuántas monedas le ha dado su abuelo, cuántos huevos tiene el nido que acaba de descubrir, ... Los adultos: ¿Cuántas cabezas de ganado, cuántas manzanas tiene el árbol, ..., qué saldo tiene en su cuenta bancaria, ...

La **UNIDAD**, un Elemento, un Objeto:

El concepto de "unidad" lo llevamos impreso en nuestras mentes y no requiere más explicación. Lo mismo podemos decir de la noción de "elemento", y de "objeto", que se utilizan como sinónimos.

Conjunto:

"Agrupación de objetos de igual naturaleza"

Concepto de Número natural:

Cantidad:

Si tenemos un conjunto con tres naranjas, otro con tres manzanas, otro con tres canicas, ... Estos conjuntos tienen algo en común: El número de elementos, todos tienen tres elementos. Este hecho lo representamos con el símbolo 3, y decimos que 'la cantidad de naranjas es tres', o bien 'que tenemos tres naranjas'

NO COPIAR

Defi.:

A este **'ente'** (algo que no vemos pero que está ahí) común a todos los conjuntos que contienen el mismo número de elementos, es a lo que llamamos **'NÚMERO NATURAL'**.

Así llegamos a todos los NÚMEROS NATURALES: el 1 (contienen uno), el 2 (contienen dos), el 3 (contienen tres), el 4 , ..., el 25, ..., el 50, ..., el 200, ...

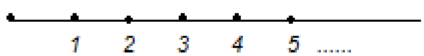
Los Números Naturales son ilimitados:

Si tengo un conjunto con n elementos, siempre podré agregarle un elemento más con lo que ahora contendrá n+1 elementos. Esto significa que existe el número natural n+1, 'mayor y/o más grande' que n. Podemos por tanto afirmar que existe un número natural 'tan grande como queramos'.

Decimos que existen 'Infinitos número naturales'.

Representaremos por N el conjunto de todos los números naturales, y diremos que contiene 'infinitos' elementos. Los representamos mediante los siguientes símbolos: 1,2,3,4,...,n,...

Sobre una recta los representamos así:



Observa que todavía no tenemos el cero

NÚMERO Cardinal de un conjunto:

En Matemáticas y dentro de la ‘Teoría de conjuntos’, llamamos ‘numero cardinal’ al número de elementos que contiene un conjunto.

El conjunto de los números naturales, ordenados de menor a mayor y de izquierda a derecha, lo representamos así: N = {1,2,3,4,...,n,...}.

NÚMERO Ordinal: Lista ordenada o Sucesión de elementos

Lo tenemos cuando tomamos un conjunto amorfo de elementos (sin forma, como una cesta de manzanas) y los colocamos físicamente en línea, tomándolos uno a uno de la ‘cesta’, y colocándolos cada uno a la derecha y junto al anterior.
Lógicamente esta estructura tiene un ‘primer elemento’, y un ‘último elemento’, y diremos que están ‘ordenados’ de izquierda a derecha, y que es una ‘lista’ o ‘sucesión’ ordenados formada por aquellos elementos.

Tenemos un ‘primero’, un ‘segundo’, un tercero, un cuarto, ..., etc.
Se ha convertido en un ‘conjunto ordenado’, y a cada uno lo llamamos **‘número ordinal’**, porque además indica el lugar que ocupa en la lista.

En la práctica los nombramos del siguiente modo.

Números Ordinales

1º	primero	2º	segundo
3º	tercero	4º	cuarto
5º	quinto	6º	sexto
7º	séptimo	8º	octavo

NO COPIAR

9º	noveno	10º	décimo
11º	undécimo	12º	duodécimo

13º décimo tercero

14º décimo cuarto

15º décimo quinto

16º décimo sexto

17º décimo séptimo

18º décimo octavo

19º décimo noveno

20º vigésimo

21º vigésimo primero

22º vigésimo segundo

…………..

26º vigésimo sexto

………….

30º trigésimo

31º trigésimo primero

…………..

38º trigésimo octavo

……

40º cuadragésimo

…….

44º cuadragésimo cuarto

…….

50º quincuagésimo

…….

57º quincuagésimo séptimo

……

60º sexagésimo

…..

70º septuagésimo

……

80º octagésimo

…..

90º nonagésimo

91º nonagésimo primero

…..

100º centésimo

200º ducentésimo

300º tricentésimo

400º cuadricentésimo

500º quincentésimo

600º sexcentésimo

700º septingentésimo

800º octingentésimo

900º noningentésimo 1000º milésimo

NO COPIAR

Números romanos:

En este sistema de numeración se utilizan los siguientes símbolos:

I -> una unidad
V -> cinco unidades
X -> diez unidades
L -> cincuenta unidades
C -> cien unidades
D -> quinientas unidades
M -> mil unidades

Regla:

Un símbolo colocado a la derecha de otro de mayor valor aporta ‘suma’.

Un símbolo colocado a la izquierda de otro de mayor valor aporta ‘resta’.

Los siguientes ejemplos muestran cómo proceder en cada caso.

1 -> I, 5 -> V, 4 -> IV,8 -> VIII,

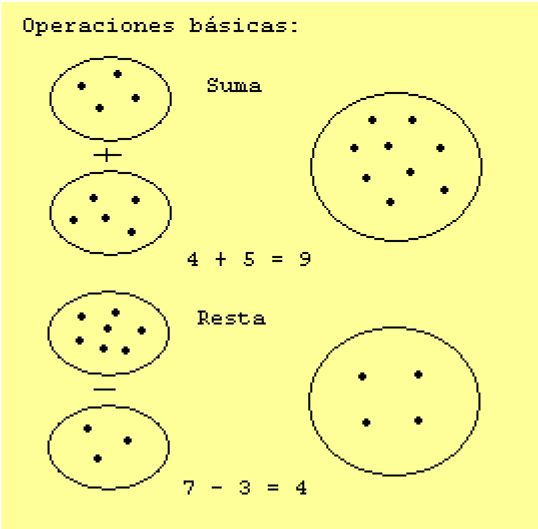
9 -> IX,13 -> XIII, 25 -> XXV,

29 -> XXIX, 76 -> DXXVI, 129 -> CXXIX,

739 -> DCCIXL, 1943 -> MCMXLIII,

2016 -> MMXVI

1.2.- Operaciones básicas en N:



SUMA: a + b = c

Contar:
Consiste en ir ‘nombrando’, o ‘enumerando’, uno a uno los elementos del conjunto que suponemos colocados físicamente en línea.

Tomo un conjunto A con ‘a’ elementos y los agrupamos, o mezclamos, con los de otro B que contiene ‘b’ elementos (de la misma naturaleza); el resultado es un conjunto C con ‘c’ elementos (de la misma naturaleza). Basta ordenar el línea y contar los elementos de A, y a continuación los de B, y obtener así el número de elementos que contiene C, que nos da el valor ‘c’.

Por ejemplo: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $2 + 2 = 4$, ... El niño puede hacer las pruebas deseadas tomando conjuntos con objetos, reuniéndolos, y comprobando el resultado.

Propiedades:

a)Asociativa: $a+(b+c) = (a+b) + c$

b)Conmutativa: $a + b = b + a$

PRODUCTO: $a * b = c$

Multiplicar ‘a’ por ‘b’ significa “sumar ‘a’ veces consigo mismo el valor ‘b’ ”. Esto es: b+b+…(a veces)…+b+b.

Por ejemplo: $1*2 =1+1= 2$, $2*2 = 2+2 = 4$, $2*3 = 2+2+2 = 6$, ...

Propiedades:

a)Asociativa: $a*(b*c) = (a*b)*c$
b)Conmutativo: $a*b = b*a$
c)Distributiva del Producto respecto de la Suma:
$$a*(b+c) = a*b + a*c$$
d)Elemento Unidad: $1*a = a$

Además de las dos operaciones básicas anteriores tenemos la ‘potencia’, consecuencia del producto.

POTENCIA a^n :

Significa “multiplicar n veces, consigo mismo, el valor a”. Esto es:

$$a^n = a*a*...*a, \quad n \text{ veces.}$$

Ejemplo: $4^2 = 16$, $2^5 = 32$,

Propiedades:

a) $a^{n+m} = a^n * a^m$
b) $(a * b)^n = a^n * b^n$

NOTA:
Para que una operación * esté 'bien definida' en un conjunto S ha de ocurrir que para todo par de elementos a y b de S el resultado a*b esté también en S. (* representa una operación cualquiera)

OBSERVA:
La Resta y Cociente no están definidas en el conjunto N de los naturales. De 5 sí puedo sustraer 3, pero de 3 no puedo sustraer 5. Esto nos dice que dados dos valores naturales cualesquiera a, b, no siempre puedo 'de a sustraer b'. **En N no está bien definida la resta.**

En un conjunto con 8 elementos sí caben 4 subconjuntos con 2 elementos cada uno, pero No caben un número de subconjuntos con 3 elementos cada uno, y que no sobre ninguno. Esto significa que 8 sí es divisible entre 2, pero no lo es entre 3. Por tanto, la 'división' No está definida en N para cualquier par de números naturales a y b, y en cualquier orden. **Por tanto 'la división' No está definida en N.**

NO COPIAR

1.3.- Números pares, impares. Divisores, Números primos

DIVISORES:

A pesar de lo dicho antes, diremos que ‘el 2 y el 4 son divisores de 8’, y que 3 no lo es. En cambio ‘el 3 es divisor de 9’ y no lo es del 8.

Números pares, Números impares:

Decimos que un número es ‘par’ si admite el 2 como divisor: 2, 4, 6, 8, 10, ...
En otro caso, diremos que es ‘impar’: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Números Primos y Números compuestos:

En lo que sigue (y para siempre) indicaremos mediante : la operación de ‘dividir’.

Dado un número natural ‘a’, hemos visto que puede o no admitir algún divisor, como en los casos 8:2 = 4, 9:3 = 3. Decimos que 2 es divisor de 8, que 3 lo es de 9.

Si ‘b’ es un divisor de ‘a’, es decir, si a:b = c es posible en N, entonces a = b*c, y diremos que ‘b’ es un divisor de ‘a’, y que ‘a es compuesto’.
Observa que si a:b = c, entonces a:c = b, con lo cual también ‘c’ es divisor de ‘a’.

Diremos que ‘a es primo’ si sus únicos divisores son 1 y el propio a. (Observa: a:1=a, a:a=1).

Los restantes son aquellos que admiten algún divisor distinto de 1 y de a, y los llamamos ‘número compuesto’.

Ejemplo:

Son PRIMOS: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
Son números compuestos: 4, 6, 8, 9, ...

Hay un número ilimitado de números primos.
Hay un número ilimitado de números compuestos.

1.4- Descomposición factorial. Número de divisores

Llamamos "descomposición factorial" al producto de dos o más números a los que llamamos 'factores'.

Todo número 'a' puede ser expresado como el producto de dos o más factores: Si a es primo será a = a*1, si a es compuesto será a = b*c, y si b a su vez puede ser expresado b = b*b', tenemos a = b*b'*c, la cual puede descomponer aún más.

Si continuamos descomponiendo en factores hasta que todos los factores resultantes sean números primos llegamos a la 'descomposición factorial de a en números primos':

$$a = p1.p2.p3...p_n ,$$

donde los factores pi son primos.

Si p1 aparece n1 veces, y el factor pi aparece ni veces, podemos escribir producto de potencias así:

$$a = p1^{n1}.p2^{n2}. \dots .pk^{nk}$$

Se puede demostrar que esta descomposición factorial es única para cada número natural 'a'.

NÚMERO de Divisores:

A partir de la descomposición factorial anterior podemos obtener todos los posibles divisores del número ‘a’, y el número de éstos.

El número Nd de estos posibles divisores viene dado por la fórmula:

$$nd = (n1+1)*(n2+1)*...(nk+1).$$

Recomendación:

Practica con ejemplos y observa cómo se obtienen estos divisores.

Ejemplo: $a = 24 = 1.2^3.3$

1
Potencias de 2: $2, 2^2, 2^3$
Potencias de 3: 3

Productos potencias de 2 con potencias de 3:

$3.2, 3.2^2, 3.2^3$

Su número: $nd = (3+1).(1+1)= 8$

Ejemplo: $a = 120 = 1.2^3.3.5$

1
Potencias de 2: $2, 2^2, 2^3$
Potencias de 3: 3

Productos potencias de 2 por potencias de 3:
$3.2, 3.2^2, 3.2^3$

Potencias de 5: 5

Producto de potencias de 5 por cada uno de los obtenidos antes:

$5.2,\ 5.2^2,\ 5.2^3$
5.3
$5.3.2,\ 5.3.2^2,\ 5.3.2^3$

Su número ha de ser: nd= (3+1).(1+1).(1+1)= 16

Ejemplo: $a = 600 = 1.2^3.3.5^2$

1
Potencias de 2: $2,\ 2^2,\ 2^3$
Potencias de 3: 3

Productos potencias de 2 por potencias de 3:

$3.2,\ 3.2^2,\ 3.2^3$

Potencias de 5: $5,\ 5^2$

Producto de potencias de 5 por cada uno de los obtenidos antes:

$5.2,\ 5.2^2,\ 5.2^3$
5.3
$5.3.2,\ 5.3.2^2,\ 5.3.2^3$

$5^2.2,\ 5^2.2^2,\ 5^2.2^3$
$5^2.3$
$5^2.3.2,\ 5^2.3.2^2,\ 5^2.3.2^3$

Su número ha de ser: nd= (3+1).(1+1).(2+1)= 24
(Observa que has de incluir el factor 1)

1.5.- Máximo Común Divisor

Sean a y b dos números naturales. Consideramos sus divisores:

NO COPIAR

Los de a: d1, d2, d3, ...
Los de b: e1, e2, e3, ...

Admiten al menos un divisor común: el 1. Por lo tanto el conjunto de los divisores comunes no es vacío.
Llamamos "Máximo común divisor (MCD)" al mayor de los divisores comunes de a y b. Lo designaremos mediante MCD(a,b)

Su cálculo como sigue.

Cálculo del MCD(a, b):

Sean sus descomposiciones factoriales:

$a = p1^{n1}. ... .pk^{nk}$
$b = q1^{m1}. ... .qh^{mh}$

Tomo los factores primos comunes (es decir iguales), sean pi,qj dos de ellos (pi=qj), y sus exponentes ni, mj. Hago s1=pi, y tomamos el menor de sus exponentes, sea ni, que designo r1. Entonces, s1^r1 es un divisor común de 'a' y 'b', y por tanto es un factor de la descomposición factorial del MCD.

Si repetimos lo anterior con cada par de factores primos comunes, tenemos la descomposición factorial del MCD, esto es:

$$MCD = s1^{r1}. ... .sk^{rk}$$

Si tenemos más de dos números podemos seguir dos caminos:

a) Aplicar lo anterior al conjunto de números, tomando los factores primos comunes a todos y tomando el menor de los exponentes de estos factores comunes.

b) Repitiendo lo anterior tomando el MCD obtenido con los dos primeros números, y repitiéndolo tomando el MCD obtenido y el tercer número. Reiterando hasta agotar el conjunto de números dados. **El MCD común es el último resultado obtenido.**

Ejemplo 1:

Números $a = 360$, $b = 6300$. Halla su MCD

Sol.: $a = 3^2.2^3.5$, $b = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$

$MCD(a,b) = 3^2.2^2.5 = 180$

NOTA: Podemos utilizar el siguiente algoritmo.
Sean los números: a_1 , a_2, …, a_n , positivos. Tomo el menor de estos, sea m. Entonces fijo la lista

$$2, 3, 4, \ldots, m-1, m$$

Probando con cada uno de estos valores encontraré el MCD de la lista de número a_i. Si ninguno lo cumple será porque MCD = 1. (Indicado para utilizarlo utilizando una máquina: Ordenador)

1.6.- Mínimo común múltiplo mcm de dos números

Dado un número natural ‘a’, decimos que 'm es un múltiplo de ‘a’ si ‘a’ es un divisor de m'. Es decir: m:a=c, y m=c*a. Evidentemente, todos los números de la forma m=c*a cumple esta condición de ‘múltiplo de a’.

Conclusión:
Los múltiplos de ‘a’ son de la forma: m=c*a, donde c recorre el conjunto N de todos los números naturales (‘a’ tiene infinitos múltiplos).

Sean a y b dos números naturales. Consideramos sus múltiplo:

Los de a: d1,d2,d3, ...

NO COPIAR

Los de b: e1,e2,e3, ...

El conjunto de múltiplos comunes No es vacío, ya que contiene por lo menos el valor a*b.

Llamamos "Mínimo Común Múltiplo" al menor de los múltiplos comunes:

mcm(a,b) = "Menor de los m.c."

Cálculo del mcm(a,b):

Sean sus descomposiciones factoriales:

$a = p1^{n1}. \dots .pk^{nk}$
$b = q1^{m1}. \dots .qh^{mh}$

Tomo todos los factores primos distintos: p1,p2, ..., q1,q2, ..., (es decir, si pi y qj son iguales, tomo sólo uno de ellos), y tomamos sus exponentes asociados n1, n2, ..., m1, m2, ..., pero de forma que si pi = qj, tomamos el mayor de ni y mj, que lo designaremos por ri.

El mcm es el número cuya descomposición factorial viene dada por los factores y exponentes así seleccionados:

$mcm = s1^{r1}.s2^{r2}. \dots sn^{rn}$

Ejemplo 2:

Números a = 360, b = 6300. Halla su MCD

Sol.: $a = 3^2.2^3.5$, $b = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$

$mcm(a,b) = 3^2.2^3.5^2.7 = 12600$

Si tenemos más de dos números procedemos así:

Aplicar lo anterior al conjunto de números dados, tomando todos los factores primos distintos, y tomando el mayor de los exponentes cuando dos o más de los factores primos coincidan.

Ejemplo 3:

Números $a = 360$, $b = 6300$, $c = 330$. Halla su MCD y su mcm

Sol.: $a = 3^2.2^3.5$, $b = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$, $c = 2.3.5.11$

MCD(a,b,c) = $2.3.5 = 30$,
mcm = $2^3.3^2.5^2.7.11 = 138600$

Relación entre el MCD y el mcm:

Es demostrable el cumplimiento de la siguiente fórmula:

$$mcm = (a*b)/MCD(a,b)$$

Ejemplo 4:

Números $a = 360$, $b = 6300$. Halla MCD y mcm

Sol.: $a = 3^2.2^3.5$, $b = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$

MCD(a,b) = $3^2.2^2.5 = 180$
mcm = a.b/MCD = 12600

Ejemplo 5:

Números $a = 360$, $b = 6300$, $c = 330$. Halla su MCD y su mcm

NO COPIAR

Sol.: $a = 3^2.2^3.5$, $b = 2^2.3^2.5^2.7 = 6300$, $c = 2.3.5.11$

$MCD(a,b) = 3^2.2^2.5 = 180$
$mcm(a,b) = 2^3.3^2.5^2.7 = 12600$

$MCD(180,c) = 2.3.5 = 30$,

$mcm(a,b,c) = 2^3.3^2.5^2.7.11 = 138600$

Recomendación:
Practica con casos concretos y observa los resultados.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS:

1.- Halla la descomposición factorial de los siguientes números:
a) N = 2520
b) N = 4950
c) N = 10725
y hacer la comprobación.

2.- Calcula el MCD de los siguientes pares de números:
a) a = 2520, b = 4950
b) a = 2520, b = 10725
Sol.: a) MCD= 90, b) MCD= 15

3.- Calcula el mcm de los siguientes pares de números:
a) a = 2520, b = 4950
b) a = 2520, b = 10725
Sol.: a) mcm= 138600, b) mcm= 1801800

4.- Divisores de 120

Sol.: Descomposición factorial: $120 = 2^3.3.5$
Núm. de divisores: (3+1).(1+1).(1+1) = 16

Divisores:

1

1 por potencias de 2: 2, 4, 8

los anteriores por las potencias de 3:

3.1,
3.2, 3.4, 3.8

los anteriores por las potencias de 5:

5.1
5.2, 5.4, 5.8
5.3
5.6, 5.12, 5.24

Listado: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120

5.- MCD y mcm de 120 y 150

Sol.: MCD = 30, mcm = 600

6.- Dados N = 8*703 y M = 5*4012, ¿Qué dígito debe ocupar el lugar del asterisco para que el resultado sea divisible por 3.

7.- Dados N = 8*703 y M = 918*9, ¿Qué dígito debe ocupar el lugar del asterisco para que el resultado sea divisible por 11.

8.- Comprueba si N = 401 es o no primo.

9.- Escribe todos los primos menores que 100

NO COPIAR

10.- Escribe todos los divisores de 60, y comprueba que se cumple la fórmula

Núm. de divisores = (1+a).(1+b)…(1+c)

donde a, b, …, c son los exponentes de la descomposición factorial.

11.- a)Calcula el MCD y el mcm de los números: 24, 168, 66.
b)Lo mismo para: 420, 240, 140

12.- Determina el número N sabiendo que se obtiene resto 1 al dividirlo por 7 o por 8. Obtener tres resultados.

13.- Sabemos que el número N está entre 150 y 200, y que da resto 3 al dividirlo por 7 o por 11. Dame tres resultados.

14.- Dos pacientes A y B van al mismo médico: A cada 15 días, B cada 28 días. El día 1 de Enero coincidieron, ¿Cuántos días tardarán en volver a coincidir?, ¿Cuántas veces coincidirán a lo largo del año?.

15.- Tres pacientes: A, B y C van a la misma consulta. A lo hace cada 12 días, B cada 21 días, C cada 34 días. Un determinado día coincidieron. ¿Cuántos días tardarán en volver a coincidir?

16.- Determina el menor número de cuatro cifras que sea divisible por 2, 3 y 5, simultáneamente.

17.- Deseamos vallar una finca rectangular que tiene 1275 m. de largo, 439 m. de ancho. Los hincados han de ir separados todos a igual distancia, y en cada esquina irá un hincado. ¿A qué distancia entre sí hemos de colocarlos, y cuántos hincados se necesitarán?.

NO COPIAR

1.7.- Lema de Bezout:

Sean a, b enteros con a > b, y sea d = mcd(a, b).
Afirmamos que existen valores enteros $\propto$, β que satisfacen la igualdad

$$a.\propto + b.\beta = d$$

Hacemos divisiones sucesivas y tenemos lo siguiente (Es el llamado algoritmo de Euclides)

a = b.q1 + r1 , r1 < b, entero no negativo
b = r1.q2 + r2 , r2 < r1, entero no negativo
r1 = r2.q3 + r3 , r3 < r2, entero no negativo

Llegará un momento en el que $r_k = 0$. Supongamos es el siguiente

r2 = r3.q4 + r4 , r4 = 0 (r3 es último resto no nulo)

Despejo r3 y avanzo de abajo hacia arriba.

r3 = r1 – r2.q3 = r1 – q3.(b – r1.q2) =
= (a – b.q1) – q3.(b – q2.(a – b.q1)) =
= (a + q3.q2.a) + (- b.q1 – q3.b – q3.q2.q1.b) =
= a.(1 + q2.q3) + b.(- q1 – q3 - q3.q2.q1)

Haciendo $\propto$ = 1 + q2.q3, β = - q1 - q3 - q3.q2.q1 , tengo

r3 = a. $\propto$ + b. β

Afirmamos: El valor r3, último resto no nulo, es divisor de a y de b.

a = b.q1 + r1 , r1 < b, entero no negativo
b = r1.q2 + r2 , r2 < r1, entero no negativo
r1 = r2.q3 + r3 , r3 < r2, entero no negativo
r2 = r3.q4

Subiendo al tiempo que sustituimos ….

r1 = r3.(q4.q3) + r3 = r3.(1 + q3.q4)

$b = r3.(1 + q3.q4).q2 + r3.q4 = r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4]$, y por tanto r3 es divisor de b.

$a = r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4].q1 + r3.(1 + q3.q4) =$
$= r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4].q1 + r3.(1 + q3.q4) =$
$= r3. [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$, y por tanto r3 es divisor de a.

Por lo tanto r3 divide a d = mcd(a, b)

r3 = d.(a''.x + b''.y) -- > d divide a r3, por tanto d = r3.

Cuestiones de interés:

1.- Si m divide al producto a.b y es primo con a, entonces divide a b.
En efecto: Si m divide al producto a.b, entonces, tomando la descomposición factorial de m, todos los divisores de m lo son de a.b, pero como es primo con a, esos divisores lo son de b, porque m es primo con a.

2.- Si d^2 divide a $(a + b)^2$, entonces d divide a (a + b)
En efecto, Es evidente

3.- Si d divide a a y a b, entonces d divide a (a + b)
En efecto, a = a'.d, b = b'.d -- > a + b = d. (a' + b') -- > d divide a (a + b)

4.- Si a = b.q + r, entonces mcd(a, b) = mcd(b, r)
En efecto, a = a'.d, b = b'.d -- > d.(a' – b'.q) = r -- > d divide a r
Recíproco, sea c = mcd(b, r) -- > b = b'.c, r = r'.c -- > a = c.(b' + r') -- > c divide a a, y por tanto c divide a b y a, y por tanto c divide al d = mcd(a, b) . Puesto que d y c son el mayor que divide a b, deben coincidir.

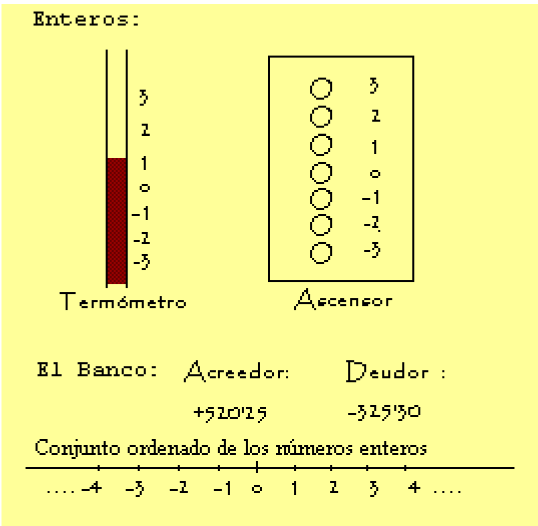
5.- $mcd(a^2, b^2, a.b) = (mcd(a, b))^2$
Sea $d = mcd(a, b)$ -- > d^2 divide a a^2, b^2 , $a.b$ -- > d^2 divide a $D = mcd(a^2, b^2, a.b)$
Por otro lado, $D = mcd(a^2, b^2, a.b)$ -- > D divide a $(a + b)^2$ -- > D divide a $(a + b)$

$$$oOo$$$

NO COPIAR

Tema 2

Números Enteros



PROMOCIÓN
NO VENTA

NO COPIAR

2.- Números enteros

“Los números naturales se nos presentan ahí por ‘vía natural’, lo que de ellos se sigue es obra del Hombre”

2.1.- Consideraciones previas. Definiciones. Número entero

Las relaciones humanas favorecen el desarrollo social, entre otros aspectos el ‘intercambio comercial’ o trueques: Yo te doy esta oveja a cambio de esas gallinas que tú me entregas. Seguro que inconscientemente se llegaría a los conceptos “deudor” - “acreedor”.

Llegaría el momento histórico en el que se ‘inventa o crea’ la ‘moneda’, o ‘efectos de valor’, que representarán los objetos que intervienen en el intercambio.
Con ayuda de la moneda, cuyo valor ha sido fijado por ‘consensos’ entre “autoridades competentes”, se facilitan los intercambios y con ello el desarrollo Mercantil y/o Comercial:

“Uno de los intervinientes entrega al otro una ‘cantidad de monedas’ como valor equivalente al valor del objeto que aquel recibe” (previo consenso).

Supongamos dos comerciantes A y B. Los dos se dedican a la venta de mercancías, pero A vende mercancía del tipo a, mientras B la vende del tipo b. Supongamos: A vende a B por valor de x, mientras B vende a A por valor y. Entonces A apunta en su libro: x – y (Haber – Debe), mientras B apuntará en el suyo: y – x (Haber – Debe).

Observa que la suma (x-y)+(y-x) es ‘nada o vacía’ (cero).

Salvo que sean exactamente iguales los valores x, y de las mercancías entregadas, alguna de esas dos operaciones será imposible de realizar dentro de los números naturales: Si x es mayor que y, no podemos hacer y-x.

El comerciante A ha entregado a B mayor valor que B ha entregado a A. Lógicamente B es ‘deudor’ frente a A como ‘acreedor’, y ninguno de los dos sabe cómo resolver esta situación, ni cómo hacerlo constar, de forma simple, en sus libros.

Deben hacer alguna ‘anotación’ complementaria que deje constancia de ello: Por ejemplo “anotar en rojo en el libro de B el valor x-y”, o añadir la palabra ‘deudor’. En el libro de A irá anotado el mismo valor con la indicación ‘acreedor’, o en color verde, por ejemplo.

Las Matemáticas resolvieron esta situación introduciendo el “signo –“ (léase ‘negativo’) que precederá a la cantidad deudora, mientras que la cantidad acreedora irá precedida del “signo +” (que en la práctica suele omitirse).

Aparecen así los que llamamos ‘números negativos’: -a representa ‘deudor’, o ‘defecto’, o ‘por debajo de’, ...; ‘lo contrario de +a’.

Los números negativos se presentan en la vida real en múltiples situaciones: Temperatura positiva (+) o negativa (-); Altura (o altitud) con relación al nivel del mar); en el ascensor de un edificio con sótanos; cuenta con el banco, etc.

Los representamos así:

$$-1,-2,-3,-4,...,-n,...$$

o mejor así:

$$..., -n, ..., -4, -3, -2, -1$$

NO COPIAR

El conjunto Z de los Número enteros

Un número entero es: n natural (algo positivo/favorable), o –n de ‘nueva creación’ (algo desfavorable/negativo).

El cero (0):

Cuando las cuentas queden equilibradas, es decir, cuando x = y, entonces x-y queda en ‘nada’. Ese ‘nada’ lo representamos mediante lo que llamaremos ‘cero’, y lo representamos mediante el “símbolo 0”.

Representamos por Z el conjunto formado por todos los números naturales más todos los negativos, más el cero, y lo llamamos “Conjunto de los **NÚMEROS ENTEROS**”.

Orden en Z:

Pensemos que cuanto mayor es la deuda ‘más negativa es nuestra situación’, y por tanto más hacia la izquierda debe ser situado el valor que la representa.

El conjunto Z de los números enteros queda ordenado así:
Z = {..,-n,..,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,..,n,..},

de menor a mayor y de izquierda a derecha.

Sobre una recta

OPUESTO de un entero:

Sea un número entero a. Si está a la derecha del 0 es entero ‘positivo’, y vendrá representado como un valor natural a; si está a la izquierda del 0 es un entero ‘negativo’, y como tal debe ir escrito de la forma –a, donde a es el valor natural ‘subyacente’ (el valor absoluto).

En el primer caso decimos que es ‘positivo’, en el segundo decimos que es ‘negativo’. Es lógico pensar, y ‘decir’, que son ‘OPUESTOS’ entre sí.

Si ‘a’ es positivo, su opuesto es ‘-a’ que es negativo. Si ‘a’ es negativo, su opuesto es ‘-a’ que es positivo.

Equivale a ‘cambiar el signo’: De positivo pasa a negativo, de negativo pasa a positivo.

VALOR absoluto de un número entero:

Es el ‘valor natural’ que ‘subyace’ y resulta de prescindir del signo. Lo representamos por abs(a), o por |a|

Definición: Si ‘a’ es positivo: abs(a) = a
Si ‘a’ es negativo: abs(a) = -a

Ejemplo: El opuesto de 3 es -3. El opuesto de -5 es 5. El opuesto de -3 es 3.

El opuesto del opuesto de a es el mismo a.
Sobre la recta, el valor /a/ es la distancia de a al origen 0.

NO COPIAR

2.2.- Operaciones básicas en Z

SUMA a+b:

Consideraciones básicas:

a) Si el ascensor sube hasta la segunda planta, y a continuación sube otras tres plantas, estamos en la planta 5 (5ª planta): 2+3 = 5

b) Si el termómetro ha bajado dos grados, y dentro de un tiempo ha descendido un grado, estamos en ‘menos tres’ grados: (-2) + (-1) = -3

c) Si el termómetro subió hasta los 8 grados, y después descendió 3 grados, estamos en ‘cinco’ grados: 8 + (-3) = 5

d) Si en la madrugada la temperatura era de ‘menos tres’ grado, y después subió 6 grados, tenemos la temperatura de 3 grados positivos: (-3) + 6 = 3

Definición:

a) Si los dos son positivos se suman como números naturales.
b) Si los dos son negativos, sumamos sus valores absolutos /a/+/b/, y al resultado le ponemos el signo – (es decir, el resultado es negativo).

c) Si uno es positivo y el otro negativo, tomamos sus valores absolutos: /a/, /b/, y hacemos:

c1) Si estos son distintos, del mayor ‘quitamos’ (restamos) el menor y al resultado le asignamos el signo que tenía el mayor.

c2) Si son iguales, el resultado será 0, que no lleva signo (no tiene sentido considerar ‘positivo’ o ‘negativo’ al ‘vacío’ o a ‘la nada’).

Ejemplo:

a) 5 + 6 = 11
b) -3 + -5 = -8
c) 5 + (-3)= 2, 5 + (-8)= -3

RESTA a-b: a + (-b)

La definimos aplicando esta regla:

Se realiza “sumando a ‘a’ el opuesto (-b) de ‘b’”, y aplicando lo dicho antes para la suma.

Ejemplo: 5–3 = 5+(-3) = 2; 5-(-8) = 5+8 = 13

PRODUCTO a*b:

Multiplicamos sus valores absolutos como si fuesen números naturales, y aplicamos la siguiente regla (llamada ‘Regla de los signos’) para obtener el signo del resultado:

```
* ¡ +   -
--¡----------
+ ¡ +   -
- ¡ -   +
```

NO COPIAR

Mas * Mas = Mas, Mas * Menos = Menos, Menos * Mas = Menos, Menos * Menos = Mas

Propiedades de las Operaciones básicas:

Cumplen las que vimos para los números naturales, y además:

-Existe un número entero, que llamaremos ‘elemento neutro’ (de la suma), que sumado a otro entero ‘a’ cualquiera el resultado sigue siendo ‘a’. Lo representamos por 0 (es el cero al cual ya nos hemos referido)

-Para cada número entero ‘a’ existe otro número entero ‘b’ tal que a + b = 0.
Evidentemente este entero ‘b’ es el opuesto ‘-a’ al que ya nos hemos referido.

Propiedades de +:

a) Asociativa:

$$a + (c + e)= (a + c) + e$$

b) Conmutativa: $a + c = c + a$

c) Elemento neutro: Existe un entero ‘c’ que sumado a otro entero ‘a’ cualquiera el resultado es el mismo ‘a’. Lo cumple el 0

d) Elemento opuesto: Dado ‘a’ cualquiera existe otro entero ‘c’ tal que a+c= neutro. Lo comple el opuesto de ‘a’: a+ (-a)= 0.

NOTA: Hasta aquí decimos que (Z,+) tiene estructura de grupo conmutativo.

Propiedades de *:

a) Asociativa: a*(c*e) = (a*c)*e
b) Conmutativa: a*c = c*a

c) Elemento neutro (elemento unidad): Existe un entero 'c' tal que, para cualquier otro entero 'a', se cumple: a*c= a. Lo cumple el 1.

Observación:

Conviene hacer notar que en Z, dado un número entero a, No existe otro entero b tal que a.b = 1 (neutro del producto).

Propiedad que relaciona + y * entre sí:

Distributiva del * respecto de la +:

a*(c + e) = a*c + a*e

NOTA:
Con estas propiedades, en Matemáticas decimos que Z(+,*) tiene 'estructura de Anillo'.

Potencias de un número entero:

Recuerda cómo se definió la 'potencia' de un número natural a:
a^n = a*a ...(n veces) *a*a

En los enteros, hacemos lo mismo con su valor absoluto /a/, y teniendo en cuenta la 'regla de los signos', el resultado será:

+ si n es par
− si n es impar

NO COPIAR

Ejemplo: $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$, $(-3)^3 = -27$

Propiedades:

a) $a^{n+m} = a^n * a^m$

b) $(a * b)^n = a^n * b^n$

2.3.- Operaciones Combinadas

Llamamos así al caso en el que intervienen, de forma que tengan significado, los Operadores +, -, *, ^, combinadas mediante el uso de los paréntesis (...)

Ejem.: 3+5.(14-5+8)

$-3+5.(-14+5-8)^2$

3+5.(4+(-3+8*2)-10)

Proceso a seguir:

a) Realizar las operaciones interiores a cada paréntesis (...), si los tiene, comenzando por el más interno.

b) Dentro de cada (...), proceder en el siguiente orden:

Paso 1: Hacer las posibles potencias

Paso 2: Hacer los posibles productos

Paso 3: Hacer suma y resta de los valores obtenidos

Paso 4: El valor final del término (...) concluye así:

-Si es de una de las formas: +(...), (...), +a*(...) es decir, que va precedido del signo + (si no lo lleva se entiende que lleva +), entonces el resultado queda con el signo que tenga el valor de su interior.

-Si es de la forma -(...), -a*(...), es decir, va precedido de - , quiere decir que el resultado es el valor de su interior cambiado de signo (el opuesto de su interior).

Observa: '-a' equivale a (-1)*a. Llevar o ponerle el – equivale a multiplicar por -1

Ejemplos:

1.-

a) -(5+8-3)= -10

b) En -3.(5+8-14), prescindiendo del signo tengo: 3.(-1)= -3; su opuesto es +3, que es el resultado final.

c) En 12+3.5-4.(6-2.(8-3+5)), El valor del paréntesis más interno es 10, con lo cual tengo 12+15-4.(6-2*10). El valor de este paréntesis es 6-20= -14, con lo cual tengo 12+15-4.(-14)= 27 + 56 = 83.

Recuerda la regla de los signos para el producto.

2.- Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) 2.(-3+5.7) + 5.(2.13-3.42) + 25

b) (5.7-3).((-3).42+2.13) + 5.[8.(-3+9) + 21)]

NO COPIAR

c) $3^3.(-5)^2.(-7)$

Sol.: a) –411, b) -2855 c) 4725

3.- Realiza

a) 3.[-2 +3.5 +2.(-5 +3) -4.(-2 +3)] = 15

b) -5.[3.(4 -7 +2) -2.(-3 +5 -4)] = -5

c) 3.[-2.[5 +7.(-4 +3 -1) +3] -8.(9 -7 +2)]=

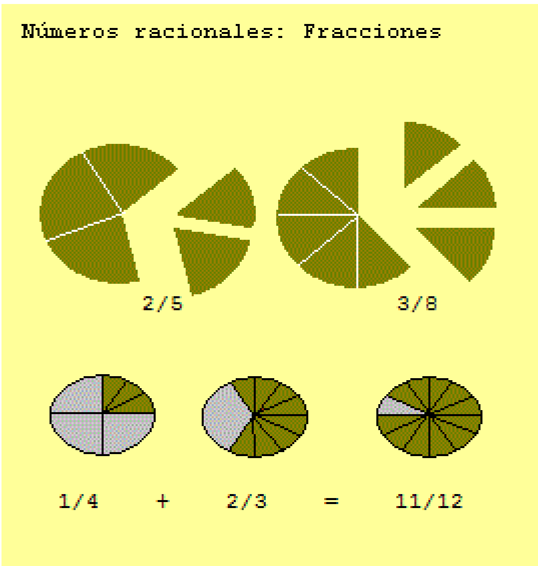
= -78

$$$o0o$$$

NO COPIAR

TEMA 3

NÚMEROS Racionales



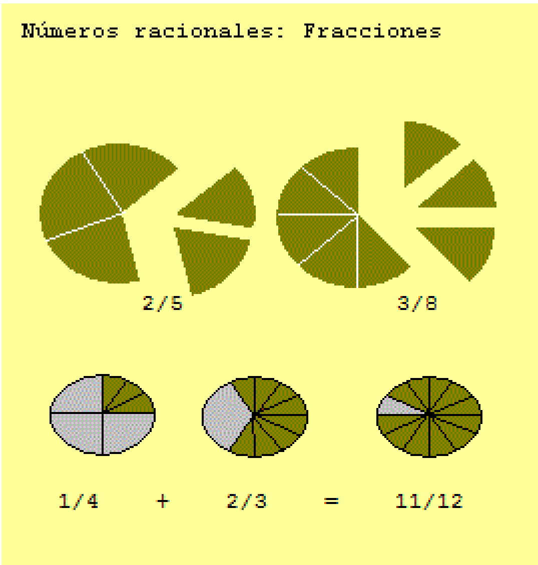
NO COPIAR

3.- Números racionales

3.1.- Fracciones

Hablaremos en primer lugar de las “fracciones” o “números fraccionarios”. Llegaremos a que los Números Racionales están constituidos por los números enteros más los ‘números fraccionarios’ , salvo equivalencias.

Las Fracciones



Las Fracciones se hacen necesarias cuando tenemos que “fraccionar la unidad”.

Si en la celebración del cumpleaños del niño se reúnen sus 5 amigos frente a una tarta, lógicamente a cada uno les corresponde, en buena lógica, una parte por igual. Tendré que dividir la tarta en cinco partes iguales.
A cada una de estas cinco partes la llamamos ‘un quinto’, y escribimos 1/5 para indicarlo (significa: ‘1 de 5’, ‘1 sobre 5’). A cada niño le corresponde ‘un quinto’.

Si se reuniesen 9 amigos, y deseamos que cada uno disfrute de 1/4 (un cuarto) de tarta, necesitaremos comprar 3 tartas, ya que con 2 tartas sólo tengo para 8 de los amigos; con 3 tartas tengo para los 9 y me sobrará.

Al partir las tres tarta en 4 partes cada una obtenemos 12 trozos, es decir 12/4 (doce cuartos de tarta). Entregando 1/4 a cada uno sobrarán 3/4.

Los 9 asistentes van a consumir dos tartas completas más un cuarto de la tercera: 2 + 1/4.

Sobran 3/4 de tarta.

Fracción a/b:

En general, una fracción es una expresión de la forma a/b donde ‘a’ y ‘b’ son números naturales, siendo ‘a’ menor o igual que ‘b’, y cuyo significado es:

“Dividir la unidad en ‘b partes iguales’ y tomar el número ‘a’ de estas partes”.

Cuando ‘a’ = ‘b’ tenemos la ‘unidad’; cuando a es menor que b diremos que es “una fracción propia”.

Por ejemplo, en el caso de la tarta, si a= b, al tomar ‘a’ partes estoy tomando la tarta completa y por tanto a/b coincide con ‘la unidad’.

Interpretación de a/b cuando a es mayor que b. Fracción impropia:

Podemos generalizarlo al caso en que ‘a’ sea mayor que ‘b’, así como sigue.

Podemos hacer lo siguiente:

De a restamos b tantas veces como sea posible hasta que lo que queda sea r menor que b. Si hemos restado c veces, diremos que b cabe c veces en a y quedan además r unidades de a.

Siendo así, es evidente que a = c.b + r (estamos en lo que llamaremos ‘división con resto’).

En general:

-a será un entero positivo o negativo, lo llamamos **numerador**

-b será entero positivo (no cero), lo llamamos **denominador**

Ejemplos:

3/5 es una fracción propia

8/5 es una fracción impropia: 8 = 1.5 + 3

Fracciones equivalentes:

Consideremos el caso anterior de las 3 tartas cortadas en 4 partes cada una, tengo: 12/4, doce cuartos. Si cada una de estas partes la dividimos en dos partes iguales, cada tarta ha quedado dividida en 8 partes iguales, y tengo en total 24 trozos de tarta: 24/8 de tarta. Pero cada uno de estos trozos es igual a “uno de los trozos cuando divido una tarta en 8 partes”, y por tanto el total que tengo ahora es 24/8 (24 octavos de tarta).

Evidentemente, la cantidad de tarta que tengo en 12/4 es la misma que en 24/8.
Decimos que estas fracciones son ‘equivalentes’, y podemos escribir la igualdad 12/4 = 24/8. Observa que: 12*8 = 4*24, (‘producto de extremos igual producto de medios’, y hemos pasado de 12/4 a 24/8 multiplicando numerador y denominador por 2).

En general:

“Dos fracciones a/b, c/d, son equivalentes si se cumple que: a*d = b*c, y sólo si se cumple esto” (‘producto de extremos igual producto de medios’).

Dos fracciones equivalentes representan la misma cantidad de tarta, la misma cantidad de euros, etc. ...

Clase de las fracciones equivalentes a una dada:

Dada una fracción a/b, todas las fracciones de la forma $\frac{n.a}{n.b}$, n natural, son equivalentes a a/b, y equivalentes entre sí.

Recíprocamente. Si a/b y c/d son equivalentes, será posible encontrar k tal que

$$c/d = \frac{k.a}{k.b} \text{ , ó } \quad a/b = \frac{k.c}{k.d}$$

Más adelante definiremos ‘número racional’ como cada una de estas clase de equivalencia.

De momento continuamos tratando las fracciones.

Otras interpretaciones de la expresión a/b:

COCIENTE a/b, RAZÓN a/b, PROPORCIÓN a/b = c/d:

Cociente:

Podemos interpretar la fracción a/b como el cociente o división de ‘a entre b’, que expresamos a:b. Podemos hacer lo que llamamos ‘división entera con resto’ que nos lleva a la expresión que vimos más atrás: a = c.b + r. O podemos hacer la ‘división extrayendo decimales’ , que veremos más adelante.

Razón:

También llamamos ‘razón’ a la expresión a/b, razón entre a y b.

Proporción:

Llamamos ‘proporción’ a la igualdad entre dos razones: a/b = c/d.

En una proporción, los términos a y d los llamamos ‘extremos’, los términos b y c los llamamos ‘medios’.

La condición, necesaria y suficiente, para que dos razones a/b y c/d formen una proporción es que: a*d = b*c, es decir: ‘Producto de extremos igual producto de medios’. Equivale a que las dos fracciones a/b, c/d son equivalentes.

3.2.- Simplificación de fracciones.
Fracción irreducible

De la fracción 24/8 podemos pasar a 12/4 equivalente, y de esta puedo pasar a 6/2 equivalente, y finalmente a 3/1 equivalente. Hemos simplificado todo lo posible.

De la fracción 27/15 podemos pasar a 9/5 equivalente, y no puedo simplificar más.

En general, dada a/b, si a y b admiten un mismo valor 'd', entonces podemos hacer: a'= a:d, b'= b:d, y las fracciones a'/b' y a/b son equivalentes: a'/b' = a/b, ya que a'*b = a'*(d*b') = (a'*d)*b' = a*b'.

Cuando una fracción a/b no se puede simplificar más (lo cual ocurre cuando a y b no tienen ningún divisor común distinto del 1), decimos que esta fracción es 'irreducible'.

Dada a/b, si d es el máximo común divisor de a y b, haciendo:
a'= a/d, b'= b/d, la fracción a'/b' es equivalente a la dada a/b, y además a'/b' es 'irreducible' (No se puede simplificar más).

Fracción OPUESTA de a/b:

Hasta este momento hemos tratado solamente con fracciones a/b donde a y b son enteros positivos.
Podemos generalizar el concepto de fracción al caso a/b donde a es entero negativo, si bien el denominador b ha de ser siempre positivo, porque indica el número de partes en que la unidad es dividida.

Diremos que (-a)/b, es la 'fracción opuesta' de a/b (o simplemente su opuesta).

NO COPIAR

Diremos que a/b es ‘positiva’ si a > 0, y ‘negativa’ si a < 0.

División entera (exacta):

Dada una fracción a/b, con a>0 y a<b, puede ocurrir que b quepa en a exactamente un número c de veces. Entonces c = a:b. Es la división entera exacta.

División entera con resto:

Dada una fracción a/b, a>0 y a>b, puede ocurrir que b quepa en a un número entero c de veces, y que además ‘sobren r unidades de a’, con r<b. En este caso a = c*b + r.

Diremos que c es el cociente, y r es el resto, de la división a:b

3.3.- Operaciones básicas con fracciones

SUMA:

Def.:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

Ejem.: 3/4 + 2/3 = 17/12

Justificación:

De dos tartas iguales tomamos, de una 3/4 y de la otra 2/3. Hacemos común denominador (tomando el mcm de los denominadores) de los denominadores:

mcm(4,3) = 12.

Primer tarta: Este valor 12 lo divido entre el denominador 4 y obtengo 3. Cada una de las 3 partes que tomo de esta tarta las divido en 3 partes, y lo que antes eran 3 partes ahora son 9, que tomo de un total de 12: tengo 9/12.

Segunda tarta: El valor 12 lo divido entre 3 y obtengo 4. Cada una de las 2 partes que tomo de esta tarta la divido en 4 partes, y lo que eran 2 partes ahora son 8 partes, que tomo de un total de 12: tengo: 8/12.

Puesto en la dos tartas son iguales y las hemos dividido en 12 partes iguales, cada una de esas partes representa la misma cantidad, de modo que puedo agruparlas y tomar 9 + 8 = 17 partes, cada una de las cuales es 1/12 (un doceavo). Tenemos por tanto: 17/12 (diecisiete doceavos de tarta).

En la práctica: 3/4 + 2/3 = 9/12 + 8/12 = 17/12.

En lugar del mcm(4,3) podemos tomar un múltiplo común cualquiera de 4 y 3, por ejemplo 2*12= 24, pero el más simple es el mcm de los denominadores.

Si tomásemos el valor 24, el valor 24:4 = 6 multiplica al numerador 3 de la primera, mientras que el valor 24:3 = 8 multiplica al numerador 2 de la segunda, de modo que:

$$3/4 + 2/3 = 18/24 + 16/24 = 34/24$$

Simplificando este resultado queda: = 17/12.

En general, dadas a/b, c/d cualesquiera, un múltiplo común de b y d es su producto b*d.

Esto justifica la expresión de la definición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d}$$

Ejemplo:

3/4 + 2/3 = (9 + 8)/12 = 17/12

Observa:
Cuando los operandos tienen el mis denominador la suma se reduce a sumar los numeradores:

a/b + c/b = $\frac{a+c}{b}$

Ejem.: 3/5 + 1/5 = (15+5)/25 = 20/25 = 4/5

Debemos insistir: Siempre es posible pasar a fracciones equivalentes que tenga denominador común, basta tomar el mcm de los denominadores.

Elemento Neutro (fracción cero):

Es una fracción, única, c/d tal que a/b * c/d = a/b, cualquiera que sea a/b'

Evidentemente lo cumple la fracción 0/d, donde d es cualquiera no nulo (positivo). Podemos escribir sencillamente 0 en lugar de 0/d.

Elemento Opuesto:

Dada a/b, existe otra fracción c/d tal que a/b + c/d = 0 (el neutro) Diremos que c/d es la 'opuesta de a/b'.

Tenemos la fracción –a/b que lo cumple, y además es única (salvo equivalentes).

Aclarando:
Dada $\frac{a}{b}$, si cambio el signo del numerador tengo $\frac{-a}{b}$, y se cumple: $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b.b} = 0$, es decir, $\frac{-a}{b}$ es el opuesto de $\frac{a}{b}$, y cualquier otra equivalente a ella.

RESTA:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d-b.c}{b.d}$$

Llamamos: a/b minuendo, c/d sustraendo

Ejem.: 3/4 - 2/3 = 1/12, 2/3 –3/4= -1/12

Para restar también podemos 'sumar la opuesta de la fracción sustraendo':

a/b – c/d = a/b + (-c/d) = $\frac{a.d-b.c}{b.d}$

PRODUCTO de fracciones:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Ejem.: 3/4 * 2/3 = (3*2)/(4*3)= 6/12
5*3/4 = 15/4

Con el fin de justificar esta fórmula hacemos lo siguiente.

NO COPIAR

a) Porducto de c/d por m:

El producto $m * \frac{c}{d}$ significa tomar m veces la fracción c/d, por lo que es evidente el resultado $\frac{m.c}{d}$.

b) Producto de c/d por 1/m:

$$\frac{1}{m} * \frac{c}{d} = \frac{c}{m.d}$$

Significa que divido la unidad en m.d partes iguales y tomo c partes. Ahora cada una de estas c partes representa una cantidad m veces menor que cuando las tomamos en c/d.

En virtud de la propiedad asociativa (que en los números se cumple siempre) tengo

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \left(a * \frac{1}{b}\right) * \frac{c}{d} = a.\left(\frac{1}{b} * \frac{c}{d}\right) = a.\frac{c}{b.d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplo y Justificación:

Observa que 3/4.2/3 = 3.(1/4.2/3) = 3.2/12 = 6/12.

El producto 3/4.2/3 puedo interpretarlo como dividir el total 2/3 en 3 partes (iguales) y de estas tomar 3.

Para dividir 2/3 en 3 partes iguales multiplico por 4 el denominador 3, de modo que cada parte de las obtenidas equivale a 2/12 de la tarta. Ahora tomo 3 de estas partes, lo que equivale a multiplicar por 3 el numerador, y tengo así 6/12 de la tarta, que es el resultado final.

Elemento Unidad:

Existe una fracción $\frac{c}{d}$, única salvo equivalencia, tal que $\frac{c}{d} * \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, para cualquier fracción $\frac{a}{b}$.

Evidentemente lo cumple la fracción $\frac{1}{1}$, o cualquier equivalente a esta como $\frac{c}{c}$.

Decimos que es el 'elemento unidad' del producto, y podemos escribir 1 en lugar de 1/1, y en lugar de c/c. (Es el elemento neutro para el producto).

Inversa de a/b:

Dada a/b no nula (por tanto a<>0), existe otra fracción c/d tal que a/b * c/d = 1/1.

Si a/b no nula con a>0, entonces b/a lo cumple:

$$\frac{b}{a} * \frac{a}{b} = \frac{b.a}{a.b} = \frac{1}{1} = 1$$

La inversa de a/b es b/a. (Recuerda que el denominador ha de ser siempre >0)

Si a/b no nula con a<0, entonces su inversa es $\frac{-b}{-a}$:

$$\frac{a}{b} * \frac{-b}{-a} = \frac{-a*b}{-b*a} = \frac{1}{1}$$

Por tanto: Para cada fracción a/b, no nula, existe otra c/d tal que a/b*c/d = 1 , y ésta es única (salvo equivalentes).

Resumen:

-Si a/b es positiva su inversa es b/a

NO COPIAR

-Si a/b es negativa su inversa es –b/(-a)

DIVISIÓN de dos fracciones:

Definición:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

Observa que equivale a multiplicar la fracción dividendo por el inverso de la fracción divisor, y es lo que se suele hacer en la práctica.

Ejemplo: 3/4 : 2/3 = 9/8

o bien 3/4:2/3 = 3/4.3/2 = 9/8

NOTA: La división queda justificada por la existencia del inverso y el elemento unidad, así como por la existencia del opuesto y del elemento neutro en el caso de la resta.

3.4.- NÚMERO Racional:

Vimos que dada una fracción a/b positiva ésta puede ser un representante de la clase de todas las equivalentes con ella: $\frac{n.a}{n.b}$, n recorre todo N.

Otra fracción c/d no equivalente con a/b determina otra clase distinta. Lo mismo para cualquier otra.

Definición:

Llamamos número racional a cada una de estas clases de equivalencia.

Representamos por Q el Conjunto de todos los números racionales.

Observa:

a) Cualquier fracción e/f perteneciente a la clase determinada por a/b puede ser tomada para representar la clase. Pero dentro de la clase sólo existe una que es irreducible (MCD(a,b) = 1). En la práctica tomaremos ésta para representar el **número racional**, siempre que sea posible, y salvo que el proceso de cálculo no lo recomiende. Por ejemplo, 2/3, 4/6, 12/18, ..., representan el mismo número racional. Siempre que podamos tomaremos 2/3 para operar con dicho número, si bien puede hacerse del mismo modo con los otros.

b) Si tengo a/b positiva, -a/b es negativa y su clase de equivalencia nos lleva al número racional negativo representado por ella u otra equivalente.

Operaciones en Q:

Todas las operaciones definidas para las fracciones son válidas para los números racionales, tomando como representante cualquier elemento de la clase.

El conjunto Q y su estructura:

Representamos por Q(+,*) el conjunto de todos lo números racionales dotado de la Suma y del Producto.

Propiedades de +:

a) Asociativa:
$\frac{a}{b} + \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right] = \left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right] + \frac{e}{f}$, evidente (el alumno puede comprobarlo)

b) Conmutativa: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, evidentemente

c) Elemento neutro: Vimos que es $\frac{0}{b}$, b>0
d) Elemento opuesto: Dada a/b, vimos que su opuesta es $\frac{-a}{b}$.

Con estas propiedades, en Matemáticas decimos que Q(+) tiene ‘estructura de grupo (aditivo)’.

Propiedades de *:

a) Asociativa: $\frac{a}{b} * \left(\frac{c}{d} * \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} * \frac{c}{d}\right) * \frac{e}{f}$, evidente (el alumno puede hacer algo más)

b) Conmutativa: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{c}{d} * \frac{a}{b}$, evidente

c) Elemento neutro (elemento unidad): Vimos que lo cumple la fracción $\frac{1}{1}$, ó $\frac{b}{b}$ con b>0.

d) Elemento inverso: Dada $\frac{a}{b}$ no nula y positiva, vimos que su inversa es la fracción $\frac{b}{a}$. Si a<0, es decir que $\frac{a}{b}$ es negativa, su inversa es $\frac{-b}{-a}$. Observa que el denominador ha de ser positivo.

Con estas propiedades, decimos que Q*(*) tiene estructura de grupo (multiplicativo). (Q* representa Q excluyendo el neutro de la suma, es decir el cero)

Además cumple la siguiente propiedad

Distributiva del * respecto de la +:

$$\frac{a}{b} * \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b} * \frac{c}{d} + \frac{a}{b} * \frac{e}{f}$$

Estructura:

Con estas propiedades, decimos que Q(+,*) tiene estructura de 'Cuerpo conmutativo'

3.5.- Potencias en Q

Defi.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Elevamos el numerador y el denominador.

Significa multiplicar a/b consigo mismo n veces:

$$\frac{a}{b} * \dots * \frac{a}{b} = \frac{a \dots . a}{b. \dots . b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $(2/3)^3 = (2^3)/(3^3) = 8/27$.

Propiedades:

Recordamos que en los números naturales:
$$a^{m+n} = a^m . a^n , \quad (a^n)^m = a^{n.m}$$

Lo mismo se cumple para una fracción:
$$(\frac{a}{b})^{m+n} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n$$

Observa:
$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \ldots (m\ veces) \ldots . a}{a \ldots . (n\ veces) \ldots . a} = a^{m-n}$$

Consecuencias:

a) Si n=m, $\frac{a^n}{a^n} = 1$ y $\frac{a^n}{a^n} = a^0 \rightarrow \quad a^0 = 1$, lo cual nos dice que hemos de dar la siguiente definición.

Def.: $a^0 = 1$

b) Exponente negativo:

$$a^{-k} * a^k = a^{-k+k} = a^0 = 1 ,$$
por lo que a^{-k} ha de ser el inverso de a^k .

Def.: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

Por el mismo razonamiento llegamos a que
$$(\frac{a}{b})^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

3.6.- División entera con resto

Sea $\frac{a}{b}$

Si a>b, sea m el número de veces que b cabe en a (obtenemos m restando b de a tantas veces como sea posible).

El resto es r = a - m*b.

Se cumple que:

$$a = m*b + r, \quad \frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}$$

Llamamos
‘m es el cociente entero’, ‘r es el resto’

3.7.- Orden en Q

Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si hacemos común denominador tenemos:

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{c.b}{b.d}$$

Hecho esto, puesto que tienen el mismo denominador, las tartas han sido divididas en el mismo número de trozos, y por tanto los trozos son iguales. Evidentemente será menor aquella que tenga menor numerador (estamos tomando menos trozos). Por tanto, debemos definir un orden así:

Definición:

$\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{c}{d}$ si a*d es menor que c*b

Así queda definido un orden en Q.

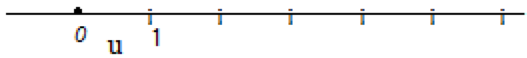
NO COPIAR

3.8.- Representación sobre una recta.
Densidad en Q. Lagunas en la recta racional

Recta Racional

Dibujamos una recta y sobre ella marcamos un punto como 'origen', que hacemos corresponder con el número racional 0:

Tomo un segmento unidad u



A la derecha de 0 marcamos puntos a distancia u de modo que tenemos segmentos iguales.

El segmento entre dos marcas lo llamaremos ‘intervalo’, y suponemos que todos tienen la misma longitud igual a la unidad u elegida, conviniendo que esta longitud (o amplitud) es la unidad: l(a,b)= 1. Esta será la unidad de medida.

Supongamos que $\frac{a}{b}$ es positiva. Expresamos

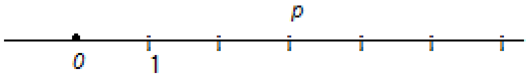
$$\frac{a}{b} = \mathrm{m} + \frac{r}{b}$$

Hecho lo anterior, tomamos ‘m’ unidades sobre la recta, y a continuación dividimos el siguiente intervalo (hacia la derecha) en ‘b’ partes iguales, y de estas tomo r partes. Obtenemos un punto ‘p’ sobre la recta. Este punto representa la fracción a/b dada.

Nos desplazamos siempre de izquierda a derecha, y de modo que resulta el segmento [0,p].

Ejemplo:

12/5 = 2 + 2/5; Tomo 2 intervalos completos, y el tercero lo divido en 5 partes iguales, y de estas tomo 2. Ahí tengo el punto p asociado a 12/5.



Si a es menor que b entonces m=0 y seguimos como antes dividiendo el primer intervalo. Observa que en este caso a/b es menor que la unidad. Es una fracción propia y el punto p queda dentro del segmento [0,1].

Para $\frac{-a}{b}$ opuesto de $\frac{a}{b}$ procedemos del mismo modo pero desplazándonos de derecha a izquierda, partiendo de 0. La representación de $\frac{-a}{b}$ es el punto simétrico, respecto del punto 0, del punto p correspondiente $\frac{a}{b}$.

Conclusión:

A cada número racional $\frac{a}{b}$ le corresponde un único punto p de la recta, y a números racionales distintos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ les corresponden puntos distintos’.

La llamamos “Recta racional”.

Lagunas en la recta racional:

El recíproco no es cierto:
Dado un punto cualquiera de la recta ‘geométrica’ no siempre existe un número racional cuya imagen sea este punto.

NO COPIAR

Al tratar los número reales veremos que en la 'recta racional' existen lagunas. Esto significa que en la recta geométrica (recta de puntos sobre un plano) existen puntos que no corresponden a ningún número racional (no son cubiertos por ningún número racional, sí lo serán por un número real como veremos más adelante). Decimos que la recta racional tiene lagunas.

DENSIDAD en la Recta Racional Q:

A pesar de la existencia de lagunas como acabamos de indicar, tenemos los siguiente de gran interés en Matemáticas.

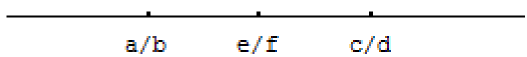
Dados dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el racional

$$\frac{e}{f} = \frac{1}{2}.(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$$

tiene como imagen en la recta el punto medio del segmento [$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$]. En efecto:

a/b + e/f = a/b + 1/2.(c/d – a/b) = a/b + 1/2.c/d – 1/2.a/b = (a/b – 1/2.a/b) + 1/2.c/d = 1/2.a/b + 1/2.c/d = $\frac{1}{2}.(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$

Observa que los intervalos [a/b, e/f] y [e/f, c/d] están dentro de [a/b, c/d]



Significa:

Entre dos números racionales cualesquiera a/b, c/d siempre existe otro número racional.

Podríamos continuar tomando ahora el intervalo [a/b, e/f]. Obtenemos otro número racional e1/f1 situado entre estos dos, y un nuevo intervalo [a/b, e1/f1], ‘encajado’ en [a/b, e/f].

Si continuamos obtenemos una sucesión de intervalos encajados, y una sucesión de números racionales:

e0/f0, e1/f1, e2/f2, ..., ilimitada (infinitos términos).

Conclusión:

Entre dos números racionales cualesquiera a/b, c/d existen infinitos números racionales.

Por este hecho, en Matemáticas decimos que la recta racional, y por tanto el conjunto Q de los racionales, es un conjunto denso.

INTERVALOS encajados, Sucesiones, Límite:

NOTACIÓN:

En lo sucesivo, en lugar de a/b para representar un número racional utilizaremos simplemente a, b, ..., para representar diferentes números racional.
Por otro lado, hablaremos de ‘intervalo’ en lugar de segmento.

Tomamos dos números racionales a y b. Tengamos en cuenta el segmento [a, b]. Su punto medio se corresponde con el valor r1 =(a+b)/2.

Evidentemente $a < r1 < b$. Tomamos el segmento [a, r1]. Su punto medio se corresponde con el valor r2 =(a+r1)/2. Evidentemente $a < r2 < r1$.

NO COPIAR

Tomamos el segmento [a, r2]. Su punto medio se corresponde con el valor r3 = (a+r2)/2. Se cumple r3 < r2 < r1.

Tomamos el segmento [a, r3]. Su punto medio se corresponde con el valor r4 =(a+r3)/2. Se cumple r4 < r3 < r2< r1.

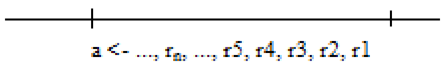
Observa que la longitud de cada intervalo es 1/2 la del anterior.

Podemos continuar hasta que la longitud (o ampliación) del intervalo sea menor que un valor pequeño ‘e’ prefijado.

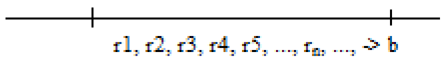
Obtenemos así una lista, o sucesión, de ‘intervalos encajados’ (cada uno está dentro del precedente) cuya amplitud puede ser tan pequeña como queramos.

Obtenemos también una ‘sucesión decreciente’ de valores racionales ri mayores que ‘a’ pero que se aproximan a ‘a’ tanto como queramos.

Esquemáticamente así:



Seguro que el alumno será capaz de construir una ‘sucesión creciente’, todos menores que ‘b’ pero que se aproximan a ‘b’ tanto como queramos:



En Matemáticas decimos que ‘a’ es el límite de aquella sucesión cuando ‘n tiende a infinito’ (n se hace arbitrariamente grande: n --> oo, o tan grande como queramos. Al símbolo oo lo llamamos infinito).

‘Infinito’ significa arbitrariamente grande

Conclusión:

Todo número racional ‘a’ puede ser expresado como el límite de una sucesión, creciente o decreciente, de números racionales.

3.9.- División con decimales.
Expresión decimal asociada a una fracción

Regla practica:

Sea una fracción a/b positiva.

Consideramos dos casos.
a) Si a > b, Sea m las veces que b 'cabe' en a; m es la parte entera de a:b (‘a dividido entre b’), y r1 = a-m*b es el primer resto.

Para obtener el primer decimal tomo r1 y lo multiplico por 10. Sea e1 el número de veces que b cabe en r1*10. e1 es la primer cifra decimal. El valor e1 puede ser cero, y ocurre así cuando r1.10 < b. El segundo resto es: r2 = r1*10 - e1*b.

Para la segunda cifra decimal tomo r2*10, y sea e2 el número de veces que b cabe en r2*10. Tomo el tercer resto: r3 = r2*10 - e2*b.

Para la tercer cifra decimal tomo r3*10 y sea e3 el número de veces que b cabe en r3*10.

Repetimos el proceso tantas veces como cifras decimales deseamos obtener.

Iríamos anotando los valores obtenidos así: c’e1e2..., y la llamamos ‘fracción decimal’ o ‘expresión decimal’.

NO COPIAR

Si en alguno de los pasos obtenemos ri = 0, el proceso finaliza ya que las siguientes cifras decimales también serán 0. Decimos que es **‘fracción decimal exacta’ (número finito de cifras decimales)**.

Si de forma ilimitada nos da resto ri no nulo, hemos de finalizar los cálculos conformándonos con una expresión decimal finita c’e1e2...ek, que es **‘una aproximación’** de a/b. (entraríamos aquí en el ‘control de errores’, que no abordaremos ahora) Decimos que su expresión decimal es ilimitada.

b) Si a < b la parte entera es c = 0, y r1 = a. Seguimos ahora el mismo proceso descrito antes, obteniendo la expresión 0’e1e2....

3.10.- Periodicidad en la expresión decimal de la fracción a/b

Teniendo en cuenta lo que precede pueden suceder dos casos:

a) Al hace la división a:b, la expresión decimal sea limitada (finita), esto es, en algún momento es ri = 0. A partir de ese paso todas las cifras decimales obtenidas son cero, y tenemos a/b = c’e1e2...ek. Expresión **decimal finita (o expresión decimal exacta)**.

b) Al hacer a:b, no resulte en ningún paso resto 0, en cuyo caso la expresión decimal es ilimitada (No podemos finalizar la obtención de decimales), ya que no cesa de presentar resto no nulo.

En este caso, podemos demostrar que la expresión decimal ilimitada es **periódica, cuyo significado explicamos a continuación**.

Periódica significa:

Aparece un grupo (o bloque) finito de cifras decimales consecutivas, que se repite de forma ilimitada dentro de la expresión decimal global.
Demostramos que esto ocurre siempre al hacer a:b
En efecto: Al realizar a:b, Los posibles restos distintos, no nulos, son: 1,2,3,...,(b-1); entonces el resto rk se repetirá como muy tarde en el paso número 'b', y a continuación se repetirán los restos que seguían a rk y en el mismo orden. Se presenta así de nuevo un bloque de cifras decimales repetido. Si continuamos tomando decimales volverá a ocurrir y se presentará de nuevo el mismo bloque repetido.
Ejemplo:

Compruébalo con las fracciones: 2/3, 3/5, 5/7, 7/12.

Concluimos:

Una fracción a/b nos dará siempre una expresión decimal que será uno de estos dos casos:

a) Finita, expresión exacta (período cero)
b) Expresión decimal ilimitada periódica

3.11.- Expresión decimal y Fracción generatriz

Hemos visto que 'Toda fracción a/b da una expresión decimal periódica'. Veremos que el recíproco también es cierto: 'Toda expresión decimal periódica procede de una fracción c/d'.

La primera afirmación quedó probada en el apartado anterior. Veremos a continuación la segunda afirmación.

CASUÍSTICA:

A) Expresión decimal finita: $\frac{a}{b}$ = c,e1e2...ek
Hacemos c,e1e2...ek = ce1e2...ek :10^k , que es su fracción generatriz.

Ejemplo: 3/2 = 1’5, Es finita; 13/25= 0’52

B) La expresión es ilimitada periódica

Ocurre así. Si tenemos, por ejemplo, la fracción 5/7, los posibles restos no nulos y distintos son: 1,2,3,4,5,6. De modo que, como muy tarde en el sexto paso de la división aparecerá un resto repetido, por ejemplo el 5. Entonces, a partir de este resto repetido se repetirá la misma secuencia: 6,1,2,3,4,5, de restos que preceden a éste.
Lo mismo en cualquier otro caso: El número de restos distintos siempre es menor o igual que el denominador, que es finito.

Periodo y anteperiodo:

Este grupo de cifras distintas que se repite de forma ilimitada, es lo que llamamos **periodo**.

El conjunto de cifras decimales que preceden a la primera cifra decimal del primer grupo que constituyen el periodo lo llamamos **anteperiodo**.

Ejemplo:

2/3 = 0’66666...., Es periódica, periodo con una sola cifra, el 6. No tiene anteperíodo.

5/7 = 0’7142857142857...., Es periódica, período 714285, no tiene anteperiodo.

18/17 = Haz la división, aunque será algo larga el caso merece la pena. Observa que las cifras decimales del cociente aparecen repetidas, pero los restos son diferentes, y por tanto no se presenta todavía nuevo periodo hasta el paso 16 (el denominador es 17). Entonces aparece de nuevo el resto 1, y vemos cómo comienza la repetición de restos en el mismo orden, y la repetición de cifras decimales del cociente.

El resultado es: 18/17 =
= 1’058823529411764705.....

El período es 0588235294117647. No tiene anteperiodo.

Es un buen ejercicio para que el alumno lo repita por su cuenta.

Ejemplo:
Casos en los que además aparece anteperíodo:
251/990 = 0’25353...., período 53, anteperíodo 2

213/900 = 0,2366...., período 6, anteperíodo 23

Obtención de la fracción generatriz asociada a una expresión decimal periódica:

Es la fracción a/b cuya expresión decimal coincide con la dada.

En primer lugar vemos mediante unos ejemplos cómo se obtiene esta fracción. Utilizaremos por primera vez el símbolo x para simplificar la explicación y hacerlo inteligible.

NO COPIAR

Ejemplo:

a) x=0’23666....
El anteperiodo tiene 2 cifras, el periodo tiene 1 cifra.

Hago: 1000.x = 236’666....
Hago: 100.x = 23’666....

Restamos miembro a miembro: 900.x = 213 , de donde: x = 213/900.
Observa:
He multiplicado x por la unidad seguida de tantos ceros como indica el anteperiodo más el periodo, y después he multiplicado x por la unidad seguida de tantos ceros como indica el anteperiodo. Así lo repetiremos en cada caso concreto.

b)x = 0’25353.... Hago: 1000.x =

= 253’5353...
10.x = 2’5353.....
Restando: 990.x = 251 , de donde:
x = 251/990

c) x = 0’323232... Hago: 100.x =

= 32’3232....

x = 0’3232....
99.x = 32, de donde:

x = 32/99

Si es una expresión con parte entera no nula:

x = 25’3464646... = 25+ 0’3464646..., y aplicamos lo anterior a x = 0’3464646....

Regla general práctica:

Sea 0,e1e2f1f2f2f1f2f3... la parte decimal del número, donde suponemos que e1e2 es el anteperiodo y f1f2f3 es el periodo. Se puede demostrar que el numerador viene dado por e1e2f1f2f3 - e1e2, (anteperiodo seguido del periodo menos el anteperiodo) y el denominado viene dado por 99900 (tantos nueves como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo).

Ejemplo:
0,23456456.... Anteperiodo: 23, periodo: 456

Numerador: 23456 - 23 = 23433
Denominador: 99900

Frac. generatriz: 23433/99900

Demostración: x = 0,23456456456...

100000.x = 23456,456456...
100.x = 23,456456456...

Resto miembro a miembro: 100000.x – 100.x =
= 23456 - 23 = 23433 99900.x = 23433
De donde: x = 23433/99900

Si lleva parte entera: a,e1e2f1f2f3...., entonces, hecho lo anterior con la parte decimal, realizamos la suma: a + $\frac{c}{d}$, donde $\frac{c}{d}$ es la fracción generatriz obtenida antes.

ACTIVIDADES/ Problemas:

1.- a) Simplifica las siguientes fracciones
216/252, 1925/195

b) Pasa a común denominador
7/5, 3/4, -2/6

c) Pasa a mínimo común denominador
7/5, 3/4, -2/6

Sol.: a) 6/7, 385/65
b) 168/120, 90/120, -40/120
c) 84/60, 45/60, -20/60

2.- Realiza los siguientes cálculos con fracciones

a) 3/5 +5.7/4 –3.11/13

b) 5/3.-2/7 +3/2.8/5 –3/7

c) -2.(3/7 +5.4/3 –8/5) +
+ 7/3.(-1/3 +4/5)

Sol.: a) 1771/260, b) 1099/735,
c) 3119/315

3.- Ordena de menos a mayor las siguientes fracciones:
2/3, 4/5, 5/7

Sol.: 2/3 = 70/105, 4/5 = 84/105,

5/7 = 75/105
Ordenadas: 2/3 < 5/7 < 4/5

4.- a) Realiza la división sin obtener decimales (división entera), y haz la comprobación:

25735:243

b) Realiza la división obteniendo decimales con precisión hasta las milésimas (tres decimales):

25735:243

Sol.: a) Cociente: 105, Resto: 220

d) Cociente: 105’905, Resto: 0’085

5.- Halla la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

a) x = 0’32254
b) x = 0’325325325....
c) x = 0’72325325325....
d) x = 3’325325325....

Sol.: a) 32254/100000, b) 325/999,

c)72253/99900, d) 3 + 325/999 = 3322/999

6.- Realiza los cálculos y comprueba los resultados:

a) $2 + 3/2 +5$
b) $3/2 + 5.(1/2 + 1)$
c) $2 + (3/2 + 2)^2$
d) $3/2 + 5.(1/2 + 1) + 3.(4 + 1/2)$
e) $3/2 + 3.(1/2 + 1)^2$

Sol.:
a) 64/12, b) 33/2, c) 57/4, d) 45/2, e) 33/4

1.- Realiza los cálculos y comprueba los resultados:

a) $3/2 + 2.[(2 + 1/2) + 1]$
b) $5 + 3/2 + [(1 + 1/2) + 1] – [3/2 + 2]$
c) $5 +3/2 +[2 +[3 +(1 +1/2) +(1 +1/2) +1] + + 1/2]$
d) $5 +3/2 +2.[[3 +2.(1 +1/2) + 3.(1 +1/2)+ +3]+1]$

Sol.:
a) 17/2, b) 11/2, c) 512/32, d) 142/4

7.- Realiza los cálculos:

a) $(1/2 + 3/4 – 2/3) + 5$
b) $3/2.(1-4/5)$
c) $(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+1):\frac{5}{2}$
d) $[-3+\frac{2}{3}+(5-7)^3\quad]^2$

8.- De una Vasija, que estaba completamente llena, he sacado 5/7 de su contenido y compruebo que todavía quedan en ella 34 litros.´
a) ¿Cuál es su capacidad?.
b)¿Cuántos litros he sacado la primer vez?

9.- Voy a la gasolinera y con 25 l. se llena el depósito. Después de consumir 2/3 de la capacidad del depósito vuelvo a repostar y se llena con 30 l.
a)¿Cuál es la capacidad del depósito?
b)¿Cuántos litros contenía antes de repostar la primer vez?.

10.- a)No tengo dinero. ¿Qué cantidad tengo si tomo los 3/2 de los 5/4 de 2000 euros?

b)Gasto 2/5 de mi dinero y me quedan 360 euros. ¿Cuánto dinero tenía?

c)Gasto 2/5 de mi dinero y después gasto 2/3 de lo que me quedó, sobrándome 100 euros. ¿Cuánto dinero tenía?

11.- Un propietario vende 2/3 de una finca. Después vende 3/5 de lo que quedó y dona a una Congregación religiosa las 40 hectáreas restantes. ¿Cuál era la extensión de la finca, en hectáreas y en m^2?

12.- De una finca se vendieron 2/3 de su superficie, y en una segunda venta se vendieron 3/5 de lo que quedaba, y el resto fue vendido a 18 euros/m^2 obteniendo 36000 euros. ¿Cuál era la capacidad de la finca?.

13.- Una señora va al mercado y realiza compras en tres puestos distintos. En el primero gasta 2/3 de su dinero, en el segundo gasta 1/2 de lo que le quedó, y en tercero 2/3 de lo que tenía en ese momento. Comprueba que le ha sobrado 1 euro. ¿Cuánto dinero tomó para realizar esas compras?

14.- En un puesto de verduras y fruta 1/6 de las ventas del día corresponde a verduras. De lo obtenido en la venta de frutas 3/8 corresponde a naranjas. Sabiendo que el importe por la venta de naranjas asciende a 150 euros, ¿Qué caja ha hecho por el total de ventas ese día?

15.- De un bidón que estaba lleno de aceite se han consumido 7/8, y añadiendo 38 litros ha quedado lleno hasta los 3/5 de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad del bidón?

16.- En casa de Pedro tienen una garrafa llena de aceite. La primer semana han gastado 3/5 y la segunda gastaron 2/3 de lo que quedó. Añadieron 5 litros y observan que faltan 2/15 de su capacidad para quedar llena. ¿Cuál es la capacidad de la garrafa?

17.- Completa el siguiente cuadro (los espacios …) de modo que en cada fila, en cada columna, y en cada diagonal sumen 15 unidades:

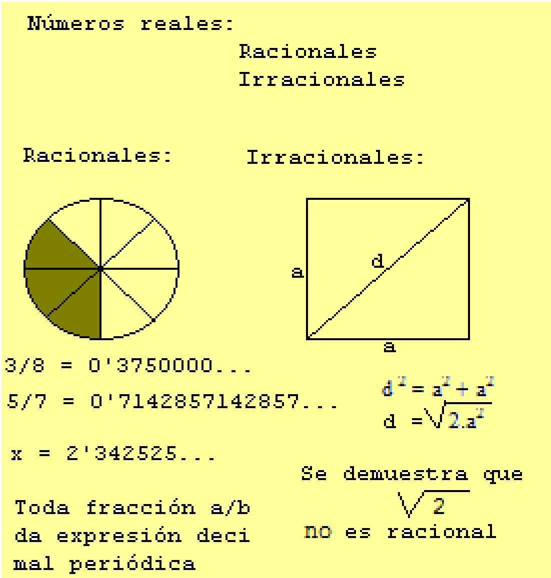
$$\begin{vmatrix} 5 & \dots & \frac{16}{6} & \frac{9}{2} \\ \dots & \frac{25}{6} & 4 & \dots \\ \dots & \frac{7}{2} & \dots & \frac{26}{6} \\ 3 & \dots & \dots & 5/2 \end{vmatrix}$$

$$$oOo$$$

NO COPIAR

TEMA 4

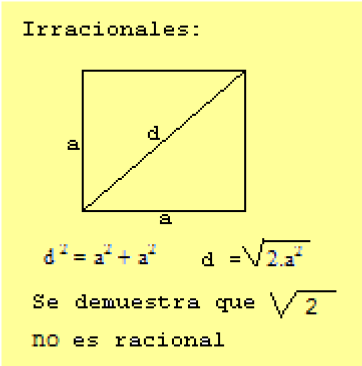
Números Irracionales
Números Reales



NO COPIAR

COPIA PROMOCIONAL
NO VENTA

4.1.- Números Irracionales



Los Matemáticos y estudiosos desde muy antiguo se dieron cuenta que se dan situaciones en las que no es posible ‘resolver’ con los números racionales. Por ejemplo, cuando intentaron calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado l. (ya era conocido el Teorema de Pitágoras).

Otro caso es el de la longitud de la circunferencia (perímetro del disco). En este caso encontraban que la razón $\frac{L}{D}$ no es racional.

Para que se entienda mejor lo que sigue veremos antes algunos resultados de interés dentro de Q(+,*)

Algunos resultados de interés:

a) Cuadrado perfecto y raíz cuadrada:

Decimos que el número ‘a’ es un ‘cuadrado perfecto’ si existe otro número racional ‘b’ tal que $b^2 = a$. Decimos que b es la ‘raíz cuadrada’ de a.

Nota:
En ocasiones podemos ver representados por sqr(a) la raíz cuadrada de a en lugar de $\sqrt{a}$. Más adelante en este trabajo podemos ver también rad(a,n/m) en lugar de $\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$, índice racional $\frac{n}{m}$ cualquiera.

b) Decimos que a divide a b si la división b:a es exacta.

c) c es primo con a si no tienen ningún factor primo común: MCD(c,a) = 1

d) Si c divide al producto a.b y c es primo con a, entonces necesariamente c divide a b.

En efecto, si c es primo con ‘a’, todos los factores primos de c (en su descomposición factorial) tienen que serlo de ‘b’.

Anticipamos:

El conjunto de los números reales va a estar formado por la reunión de los números racionales (conjunto Q), que ya hemos estudiado, y los números irracionales que veremos a continuación.

Continuamos razonando y detectando la presencia de entes No racionales:

La diagonal de un cuadrado

NO COPIAR

Si tomamos un cuadrado de lado l. Su diagonal ‘d’ cumple: $l^2 + l^2 = d^2$. Si l=1 tengo $d^2 = 2$, y la pregunta es: ¿Existe un número racional ‘r’ tal que $r^2 = 2$?.

Si tenemos el cuadrado de lado 5, se cumple: $d^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Tenemos que determinar el valor d tal que $d^2 = 50 = 2.25$.

Como $\sqrt{2.25} = \sqrt{2}\ .5$, no volvemos a hacer la misma pregunta. O nos la hacemos para $\sqrt{50}$.

Veamos qué respuesta podemos dar

Afirmamos que $\sqrt{2}$ no es racional:

Supongamos que sí lo es y que sqr(2)= a/b, fracción irreducible (siempre podemos hacer que a/b sea irreducible). Elevando al cuadrado:

$2 = a^2/b^2$, $2.b^2 = a^2$, y por tanto 2 es divisor de a^2, y también será 2 divisor de ‘a’. Entonces a= 2.a’, y por tanto $a^2 = 4.a'^2$. Volviendo a la anterior tengo: $2.b^2 = 4.a'^2$, de donde $b^2 = 2.a'^2$, y por tanto 2 divide a b^2, y entonces también 2 divide a ‘b’, sea b= 2*b’. Queda entonces: a/b = $\frac{2.a'}{2.b'}$. Esto contradice el hecho de que a/b es irreducible. Nos ha llevado a una contradicción, y por tanto No puede ser sqr(2) = a/b.

Conclusión: $\sqrt{2}$ no es un valor racional.

sqr(2) representa un ‘ente’ No racional tal que $(sqr(2))^2 = 2$. Lo llamaremos ‘irracional’.

$\sqrt{3}$ no es racional:

Si sqr(3) = a/b (irreducible), entonces

3 = a^2/b^2, de donde $3.b^2 = a^2$, de donde que 3 divide a a^2, y por tanto 3 divide a 'a'. Sea a= 3.a', de donde $a^2 = 9.a'^2$, y entonces $3.b^2 = 9.a'^2$, de donde $b^2 = 3.a'^2$, de donde que 3 divide a b^2 , y por tanto 3 divide a 'b'. Esto contradice el hecho de ser a/b irreducible, y concluimos como en el caso de sqr(2).

Conclusión: $\sqrt{3}$ no es racional.

sqr(3) representa un ente No racional tal que $(sqr(3))^2 = 3$. Irá al colectivo de los irracionales.

En general:

Afirmamos: Si 'm' no es un cuadrado perfecto, entonces el $\sqrt{\boldsymbol{m}}$ **no** es un valor racional. Es un ente tal que $(sqr(m))^2 = m$.

En lo que sigue podemos suponer que m no admite factores de la forma c^2 , ya que entonces tendríamos: sqr(c^2 * m') = c * sqr(m'), y centraríamos el análisis en sqr(m').

a)Sea m par: m = 2*m' y continuaríamos el razonamiento con sqr(m').

b)Sea m impar:

Si sqr(m)= a/b, irreducible, entonces

m = $\frac{a^2}{b^2}$, de donde $m.b^2 = a^2$.

Consideramos dos situaciones:

NO COPIAR

-Si m es primo entonces ‘a’ no divide a m, y por tanto ‘a’ tiene que dividir a b^2 , y por tanto ‘a’ divide a ‘b’, lo cual contradice el que $\frac{a}{b}$ es irreducible.

Queda probado que si m es primo, entonces $\sqrt{m}$ no es racional.

-Si m no es primo será m = k.c (ningún factor es de la forma r^2 , ya que entonces podríamos prescindir de él).

Quedamos en que m = k.c. Entonces k.c = $\frac{a^2}{b^2}$, de donde $k.c.b^2 = a^2$. Entonces k y c son divisores de ‘a’, y por tanto a= k.c.a’. Llevándolo a la anterior tengo: $k.c.b^2 = k^2.c^2.a'^2$, de donde $b^2 = k.c.a'^2$. Por tanto k y c son divisores de ‘b’. Esto contradice que $\frac{a}{b}$ sea irreducible.

Queda demostrado que es necesario introducir nuevos ‘entes’. En Matemáticas a estos entes los llamamos ‘Número irracional’, por No ser racionales.

NOTA:
Debe quedar claro que estos ‘descubrimientos’ o ‘creaciones’ siempre responden a problemas reales a los que hemos de dar solución. Así volverá a ocurrir cuando ‘saltemos’ de los ‘números reales’ a los números complejos.

Podríamos afirmar: El Hombre descubre lo que está ahí en la Naturaleza, en primer lugar los Números naturales, por ser los más ‘simples’ e inocentes.

Si bien, para ‘crecernos’, nos queda el derecho a afirmar: La Naturaleza nos pone delante los Números naturales, y el resto es creación del Hombre.

El dicho popular, debido al Matemático Dedekin, dice así: 'Los Números naturales fueron creados por Dios, el resto es creación del Hombre', y parece que esto es verdad.

Otras situaciones que llevan a la necesidad de crear estos entes No racionales:

Resolver la ecuación $x^2 - a = 0$, donde $a > 0$ racional.
$x^2 = a$, y si 'a' es un cuadrado perfecto la solución es inmediata: $x^2 = c^2$, $x = +c$, $x = -c$. Pero si no lo es, lo único que podemos hacer es expresar $x = \sqrt{a}$, cuyo valor es imposible calcular (sólo podemos obtener una proximación, tan 'fina' como deseemos).

Ejemplo:

Resolver $x^3 = 27$; solución $x = 3$; $x^3 = 8$, tiene la solución 2.

Pero $x^2 = 9$, no tiene solución inmediata. Lo mismo ocurre si planteamos $x^2 = a$, donde a no sea el cubo de otro valor racional. Aunque aquí no lo demostremos, es cierto que su solución no es racional (Entraríamos en el radical de índice 3, que veremos más adelante).

NOTA:
La expresión decimal de una raíz $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ no exacta se obtiene 'paso a paso', y el resultado es siempre 'no periódica'. En la práctica lo único posible es una 'aproximación' y controlar el error que se comete dependiendo del número de cifras decimales calculadas.

Incluso utilizando calculadora, u otra máquina (léase ordenador), lo único posible es una expresión decimal finita No periódica que aproxima al verdadero valor que representamos por sqr(a). Esto

NO COPIAR

también es válido para los radicales $\sqrt[m]{a}^{\frac{n}{}}$ cualesquiera que estudiaremos después.

El Número pi

Supongamos un círculo y su borde que llamamos circunferencia.
Sea l = longitud de ésta, y
d = diámetro.
Se ha demostrado que la razón l/d No es un número racional sino un ente que representamos mediante el símbolo pi (léase pi), y colocamos en el 'cajón' de los que llamamos números irracionales (por no ser racional). Su valor: pi= 3'1415927....; expresión ilimitada y no periódica.

En Geometría básica veremos que: l = pi.d = 2.pi.r, donde r es el radio.

El Número e

Su valor ha sido definido como el límite, cuando n se hace arbitrariamente grande, de $(1+\frac{1}{n})^n$, donde n representa un número natural que toma valores consecutivos 1,2,3,..., arbitrariamente grande. Lo designamos por e (léase 'número e').

Se ha podido demostrar que no es racional, y por tanto lo ponemos en el cajón de los números irracionales.

Otra forma de obtener números irracionales:

Si hemos probado que toda fracción $\frac{a}{b}$, al hacer a:b da como resultado una expresión decimal periódica, y recíprocamente cualquier expresión decimal ilimitada periódica se corresponde con una fracción, llegamos a que toda expresión decimal ilimitada

No periódica hemos de incluirla en el colectivo de los números irracionales como los obtenidos en los apartados anteriores.

Podemos obtenerlos como sigue.

Podemos escribir expresiones decimales no periódicas así:

0,221213213421345...

Observa y 'extrae' la ley que se sigue para que no llegue a presentarse período.

Observación:

No entramos aquí en hechos como que **'todo número irracional puede ser expresado como el límite de una sucesión convergente de números racionales', hecho que es cierto**. Queda reservado a Cursos superiores.

Más adelante trataremos los 'radicales' rad(a;n/m) y cómo operar con ellos.

De momento nos quedamos con la existencia de 'entes', de interés dentro del desarrollo de las Matemáticas, que No son racionales, cuyo origen puede estar en los 'radicales', o de otro tipo como el número pi, el número e, etc, ...

CONJUNTO I de los irracionales:

Representamos por I el conjunto de todos los que llamamos 'números irracionales'.

NO COPIAR

4.2.- Los Números reales

Llamamos Números reales los números racionales más los irracionales. Su conjunto lo representamos por R. Así tenemos R = Q U I (U es la unión de conjuntos)

En general un número real viene dado por una expresión decimal, que puede ser:

-Entero positivo (los naturales N, decimales 0)
-Entero positivo o negativo (los enteros Z, decimales 0)
-Expresión decimal periódica (racionales Q)
-Expresión decimal No periódica (irracionales I)

4.3.- Operaciones básicas con Números reales

Según el caso real puede tratarse de operación entre entero, entre enteros y fracciones, entre fracciones, en cuyo caso lo hemos estudiado al tratar los números racionales. Observa que Q incluye al conjunto Z de los enteros (basta ponerles en la forma $\frac{a}{1}$).

Por tanto será suficiente pasar a estudiar lo siguiente casos con expresiones decimales.

Operaciones básicas con expresiones decimales:

NOTA: Aclaraciones sobre la notación 'decimal'
Para evitar errores en el texto puedes ver la coma de decimal en la parte superior.

Un número real en expresión decimal toma la siguiente forma:

...a3a2a1,e1e2e3...

donde, en la parte entera (izquierda de la coma)

a1 son las unidades de primer orden (unidades)
a2 son las de segundo orden (decenas)
a3 son las de tercer orden (centenas)
a4 son las de cuarto orden (millares)
....

en la parte decimal (derecha de la coma)

e1 decimal de primer orden (décimas)
e2 decimal de segundo orden (centésima)
e3 decimal de tercer orden (milésimas)
e4 decimal de cuarto orden (diezmilésima)
....

Hacemos notar que, por ejemplo,

$$a,e1e2e3e4 = \frac{1}{10^3}.ae1e2e3,e4$$

Para evitar errores y ambigüedad escribiremos la coma arriba:
Así, 23’52... en lugar de 23,52...
Desarrollaremos un par de ejemplos concretos de cada una de las operaciones, explicando en la medida de lo posible cada paso.

SUMA:

Eje.:

```
     2’035
 +   0’967
  ----------
    3’002
```

NO COPIAR

Sumo 5+7 = 12 milésimas= 1 cént.+ 2 milés.; apunto 2 milésimas y llevo (reserva para el lugar precedente) 1 centésima.

Sumo 3+6 = 9 cent. + 1 cent. (que tengo de la reserva) = 10 cent.= 1 déc.+ 0 centés. Apunto 0 cent., y llevo 1 décima (reserva para el lugar precedente).

Sumo 0+9 = 9 décimas + 1 que llevaba= 10 déc.= 1 unidad (entera) + 0 déc. Apunto 0 déc. y llevo 1 unidad.

Sumo 2+0 = 2 unidades + 1 unidades que llevaba (de la reserva) = 3 unidades.

Ejemplo:

```
   203’2591
 +  98’9643
  -----------
   302’2234
```

Compruébelo el alumno

RESTA:

Los términos de la resta se llaman:

```
 A    minuendo
-B    sustraendo
-----
 C    Resultado
```

Comprobación de la resta: Ha de cumplirse B+C=A

Explico con detalle un ejemplo:

```
   3’235
   - 1’843
  ---------
   1’392
```

Resto: 5-3 = 2 milésimas; apunto 2 milés.; no llevo.

Resto: 3-4, imposible; tomo 1 décima (= 10 cent.) del orden (lugar) inmediato superior (anterior), con lo cual tengo 13 cent.

En aquel orden (o lugar) quedaron 1 décima.

Resto: 13-4 = 9 cent., y apunto 9. Para hacer esto hemos tomado 1 décima y así quedan sólo 1 décima para el siguiente paso.

Resto: 1-8, imposible; he de tomar 1 unidad = 10 déc., y de 3 unidades que tengo quedan 2. Tengo 10+1 = 11 décimas para restar las 8 déc..

Hago 11-8 = 3 décimas y apunto 3.

Resto: 2-1 = 1 unidad, y apunto 1. He terminado.

Téngase en cuenta que es equivalente: ‘restar 1 décima a las 2 décima con lo cual queda 1 décima’ ó ‘dejar las 2 déc. como están y sumar 1 déc. a las 8 déc. del sustraendo’. Así: 1-8 es lo mismo que 2-9. Y lo mismo en el caso de las unidades (o en cualquier otro orden). En la práctica habitual se suele hacer por el segundo procedimiento, por su analogía con lo que se hace en el caso de la suma.

Compruebe el alumno los siguientes ejemplos:

a)	b)	c)
0’2345	12’034	2’25
- 0’2336	- 5’456	-3’34
----------	---------	------
0’0009	6’578	- 1’09

NO COPIAR

En el caso c) la resta es imposible. En estos casos hacemos la operación con sus valores absolutos: 3’34 – 2’25 = 1’09, y tomar como resultado el valor obtenido cambiado de signo, es decir: - 1’09 (el signo del que tenga mayor valor absoluto). Muy importante que el alumno tenga en cuenta estos detalles.

Recomendación: Practicar y utilizando la Aplicación informática asociada a este trabajo.

PRODUCTO:
Sea el producto A x B

A es el multiplicando y B es el multiplicador, también llamados ‘factores’.

CASOS y Ejemplos:

a) **Entero por decimal:**

2*23’0458 = 46,0916

23’0458 x 25 = 23’0458x(20+5) = (23’0458 x 2)x10 + 23’0458 x 5 = 460’916 + 115’2290 = 576’1450

En la práctica se colocan los factores y operamos como sigue:

```
        23’0458
  x       25
  -----------
     1152290
     460916
 -----------
     5761450
```

Hemos operado prescindiendo de la coma, y al final he de ‘marcar’ tantos decimales como los decimales que suman entre multiplicando y multiplicador; en este caso 4 del multiplicando, y el resultado es 576’1450

Por tratarse del primer caso explicamos los pasos seguidos: 5x8 = 40; anoto 0 unidades y reservo las 4 decenas para el lugar de éstas; 5x5 = 25; tomo las 5 decenas + las 4 que reservé del paso anterior y tengo 9 decenas que coloco en su lugar; reservo las 2 centenas; así continúo con la primer línea ... . En la segunda línea: 2x8 = 16; tomo las 6 decenas que anoto en su lugar, y reservo 1 centena; Continúo con la segunda línea ... . Paso después a la tercer línea, teniendo el cuidado de colocar cada resultado en el orden (lugar) que le corresponde. Al final quedan en columna las unidades, las decenas, las centenas, ... Sumamos estas columnas como sumamos expresiones decimales (visto más atrás).

b) Decimal por decimal:

```
          23’045
 x     3’24
----------------
     92180
    46090
 69135
-------------
 7466580
```

Operamos como si no llevasen decimales, y después separamos tantos decimales como la suma de los decimales de los dos factores.
Resultado: 74’66580

Otro ejemplo: Que el alumno debe completar

NO COPIAR

```
                  23’045
               x  432’34
             -------------
       ..180
      ...35
     ...90
    ...35
   92180
 --------------
   996327530
```

Completa los lugares de . y   comprueba el resultado.

El resultado es: 9963’27530

Recordamos una vez más la regla de los signos para el producto. Esta misma es la Regla de los signos para la división, que veremos a continuación.

*	+	-
+	+	-
-	-	+

De modo que si uno sólo de los factores es negativo, el resultado es negativo. Si los dos son positivos o los dos negativos, el resultado es positivo.

Observa:

a) Multiplicar por -1 equivale a cambiar el signo.
b) Multiplicar por 10, por 100, por 1000, ..., equivale a añadir ceros a la derecha, y si el multiplicando es decimal basta mover la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tiene el multiplicador.

DIVISIÓN:

Los términos de una división se llaman

A : B = C

Dividendo Divisor Cociente

Prueba de la división:

Dividendo = Cociente x Divisor

Caso: Decimal entre un entero:

a) El dividendo es mayor que el divisor:

25’346 : 12 = 2 + (1’346 : 12) = 2 + ... =

Por tanto basta explicar la división 1’346 : 12
Como el dividendo no cabe en el divisor lo multiplico por 10 (y se convierte en decimal), y al final dividiré el resultado por 10. Tengo ahora 13’46 : 12 = 1 + (1’46 : 12). El resultado 1 es una décima: 0,1. Para hacer 1’46:12 vuelvo a multiplicar el dividendo por 10 (y se convierte en centésimas), y después al final dividiré el resultado otra vez por 10.

Tengo ahora 14’6:12 = 1 + (2’6:12). El resultado 1 se ha de convertir en 0’01 (al dividirlo por 10 dos veces).

Para hacer 2’6:12, vuelvo a multiplicar por 10, y tengo 26:12 = 2 + 2:12. El resultado 2 ha de convertirse en 0’002 (al dividirlo al final por 10 tres veces).

Tengo ya el resultado con tres decimales, si deseo más decimales haré 2:12 aplicando lo anterior: 20:12 = 1 + (8:12), luego hago: 80:12 = 6 +(8:12), y así obtenemos tantos decimales como queramos.

NO COPIAR

Con cinco decimales, una aproximación del resultado es: 2+ 0’1+ 0’01 +0’002+ 0’0001 + 0’00006 = 2’11216. Este no es el resultado exacto ya que podríamos obtener más decimales.

El error absoluto es: 25’346 – (12 x 2’11216) = 0’00008, y El error relativo 0’00008:25’346. (lo único que tiene interés es una cota de un y otro tipo de errores. No entramos más allá en la Teoría de errores)

En la práctica se colocan y operamos de la siguiente forma:

```
25’346 ¡ 12
        ---------
```

El primer paso es hacer desaparecer los deci males, lo que equivale a multiplicar el dividendo por 1000, y después al final, el resultado de hacer 25346:12 lo dividiremos por 1000.

```
El resultado    25346 ¡ 12
                     --------
                      2112
                     13
                      14
                       26
                        2
```

lo obtengo como sigue

25:12 = 2, 2x12 = 24, 25-24 = 1

Bajo el 3 y tengo 13
13:12 = 1, 1x12=12, 13-12 = 1

Bajo el 4 y tengo 14
14:12 = 1, 1x12 = 12, 14-12 = 2

Bajo el 6 y tengo 26
26:12 = 2, 2x12 = 24, 26-24 = 2

Si no deseo más de tres decimales hemos terminado, y el resultado es: 2’112

Si quiero más decimales:
Multiplico por 10 y tengo 2x10 = 20,

20:12 = 1, 1x12 = 12, 20-12 = 8,

Multiplico otra vez por 10 y tengo 8x10 = 80,

80:12 = 6, 6x12=72, 80-72 = 8,

Supongamos que no deseo más de 5 decimales
El resultado aproximado de la división es: 2’11216 (la cifra decimal de lugar 5 puede no ser exacta; es la primer cifra no exacta; los 4 primeros decimales sí lo son).

b) El dividendo es menor que el divisor:

2’346 : 12; Multiplico el dividendo por 10, y después al final diviré el resultado por 10. Tengo 23’46:12, y a partir de aquí aplico el proceso del caso a). Obtengo 23’46:12=1’955, con tres decimales, y dividiendo por 10 queda 0’1955.

En la práctica procedemos como indicamos antes:
El resultado

```
 2346   ¡ 12
        --------
        195
  114
    66
     6  resto final
```


NO COPIAR

lo obtenemos como sigue

23:12 = 1, 1x12 = 12, 23-12 = 11

Bajo el 4, y tengo 114
114:12 = 9,9x12 = 108, 114-108 = 6

Bajo el 6, y tengo 66
66:12 = 5, 5x12 = 60, 66-60 = 6

Si sólo deseo tres decimales el resultado es 0’195

Si deseamos más decimales procedemos como en el ejemplo anterior: multiplicando por 10 tantas veces como sea necesario y cuantos decimales deseemos.

c) Decimal entre decimal:

Ejemplo 1:

23’463 : 5’24, equivalente a 2346’3 : 524

Hemos multiplicado dividendo y divisor por la misma potencia de 10, la necesaria para que el divisor sea un entero. El resultado de la división no varía porque hemos multiplicado los dos términos por el mismo factor (Se cumple siempre: a:b = (n*a):(n*b))

A partir de aquí aplicamos lo anterior. Hemos multiplicado dividendo y divisor por el mismo factor 100, por lo tanto el resultado final es el que obtengamos, sin más arreglos.

Comprueba que el resultado (aproximado) de la anterior es: 4’4, o bien: 4’47, o bien: 4’477, dependiendo del número de decimales que deseemos.

Ejemplo 2:

23’46 : 5’247, equivalente a 2346 : 524’7, equivalente a 23460 : 5247, y a partir de aquí ya sabemos cómo operar. Hemos multiplicado dividendo y divisor por 1000.
Comprueba que el resultado, aproximado, es: 4’4, o bien 4’47, o bien 4’471, o bien 4’4711, dependiendo del número de decimales deseados.

Observa: En todos los casos de división, para ejecutarla, hemos de conseguir que el divisor sea un entero.
POTENCIAS con exponente entero:

Defi.:

Para todo número real ‘a’, y todo entero positivo n, definimos la potencia

$$a^n = a.a. \ldots (n \text{ veces}) .a.a$$

(Como hicimos en el caso de los naturales y ...)

También vimos cómo hemos de definirla en los siguientes casos:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n>0$$

y aplicar la conocida Regla de los signos.

NOTA: Después que estudiemos más adelante los ‘radicales’, extenderemos el concepto de potencia al caso de exponente fraccionario.

NO COPIAR

Propiedades de las potencias (recordatorio):

Recordamos las propiedades ya estudiadas en parte:

$(a.b)^n = a^n.b^n$
$a^n.a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{n.m}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4.4.- Operaciones Combinadas

Tratamos ahora el caso de operaciones combinadas, es decir, operaciones que implican +, -, *, :, e incluso potencias, ligadas entre sí además con el uso de paréntesis.

Remitimos a las explicaciones dadas en el caso de los números enteros y/o racionales.

Ejemplo 1:

3+2/3-5.(1/2+5/2-2.5/3)

$-3+2.3/4+3/2.(-5/3+2.7/2)^2$

Puede llevar (...) encajados (unos dentro de otros)

-3+2.(-6+3/2.(7+1/5)-8/5)

Se resuelve cada paréntesis 'de dentro hacia fuera', hasta que queden solamente las operaciones básica y potencias. Entonces proceder en este orden:

-Primero las potencias.
-Siguen los productos y divisiones, en el orden en que estén dadas de izquierda a derecha.

-Siguen las sumas y restas, en el orden que están dadas de izquierda a derecha.

PROPIEDADES y estructura de R(+,*):

Las propiedades de la suma y del producto son las mismas que en Q(+,*). Incluso la propiedad 'distributiva' de * respecto de +, que completa su estructura de 'CUERPO'.

Decimos que R(+,*) es el 'Cuerpo de los números reales'.

4.5.- Los Radicales. Potencias con exponente racional

Definición de radical:

Dados a real mayor que cero y n entero positivo, designamos por rad(a,n) al 'número real' tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Llamamos 'radicando' al valor 'a', y llamamos 'índice' al valor 'n'.

Definición de potencia con exponente m/n:

Dados a real mayor que cero y un racional m/n positivo, definimos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Por abuso de la notación escribimos en ocasiones rad(a;$\frac{n}{m}$) en lugar de rad(a^m;n)

Ejemplo 1:

NO COPIAR

rad(5;2) --> Es el radical cuyo radicando es 5 y su índice 2. Su valor c es tal que $c^2 = 5$.

Pero debemos tener en cuenta, nos vemos forzados a aceptarlo, que el valor c= sqr(5) (raíz cuadrada de 5) es inalcanzable, y la única salida que tenemos es tomar una aproximación y operar con ésta donde sea necesario, y, si interesa, acotar el error que se está cometiendo.

Observaciones sobre los radicales:

Aunque las siguientes dificultades quedarán resueltas al pasar a los Números complejos sí conviene poner en guardia desde este momento.

Ejemplo 2:
No existe rad(-4;2) en R, ya que no existe 'c' en R cuyo cuadrado sea negativo (regla de los signos del *).

En cambio sí existe rad(-8,3), ya que $(-2)^3 = -8$.

Casuística:

a)Si n es par, entonces rad(a;n) existe sólo si a>0, y el resultado son dos valores opuestos.

Ejemplo 3:

Los resultados para rad(4,2) son 2 y -2.
Los resultados para rad(9,2) son 3 y -3.
Los de rad(16;4) admite los valores 2 y -2.

b)Si n es impar, entonces rad(a;n) existe siempre, cualquiera que sea el signo de 'a', pero el resultado es único.

Ejemplo 4: rad(-8;3) = -2, y sólo este.
Ejemplo 5: rad(8;3) = 2, y sólo éste.

Evidentemente: $\sqrt[n]{0}$ = 0.

NOTACIÓN:

Un radical nunca debe tener índice fraccionario, por lo que si vemos escrito rad(c;$\frac{b}{a}$), que es equivalente a rad(c^a;b) = $(\text{rad}(c;b))^a$, será por abuso de la notación.

Por motivos prácticos utilizaremos rad(a;n), con el mismo significado que $\sqrt[n]{a}$, y rad(a; $\frac{n}{m}$) para designar $\sqrt[n]{a^m}$ = $a^{\frac{m}{n}}$

Tengamos en cuenta que rad(a;n) = $a^{\frac{1}{n}}$ y rad(a;$\frac{n}{m}$) = $a^{\frac{m}{n}}$ = $(\text{rad}(a;n))^m$

4.6.- Operaciones con Radicales

Algunos conceptos necesarios:

En general, cuando hablamos de ‘radical’ nos referimos a expresiones como: rad(5;3), 2.rad(5;2), 3.rad(5;3), c.rad(a;n), ...

Decimos que c es su coeficiente. El radicando es a; el índice es n.

Radicales semejantes:

Son aquellos que tienen igual radicando e igual índice, y difieren en el coeficiente.

Ejemplo 1:

3.rad(8;3), 5.rad(8;3) son semejantes, y 3.rad(8;3), 3.rad(8;2) no lo son.

Paso a índice común:

Notación como potencia: Recordemos que hemos definimos la potencia con exponente fraccionario así:

$c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$,

y en consecuencia: $c^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{c^a}$

Recordamos que si el exponente es negativo, tenemos: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Por tanto, en los radicales tenemos:

$$\sqrt[-n]{c} = c^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$$

Para conseguir que tengan el mismo índice (aunque sea fraccionario) pasamos a formato potencia como sigue:

rad(a;n)= $a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}.m} = \sqrt[n.m]{a^m}$

rad(a;m)= $a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}.n} = \sqrt[n.m]{a^n}$

SUMA/RESTA de Radicales:

Sólo se pueden sumar o restar entre sí radicales que sean semejantes.

Ejemplo 2:

a) 2.rad(5;2) + 4.rad(5;2)- 3.rad(5;2) = 3.rad(5;2)

b) -5.rad(3;4) + rad(3;4) + 7.rad(3;4) = 3.rad(3;4)

Producto/División:

Se pueden realizar siempre que tengan el mismo radicando, o, si teniendo distinto radicando llevan el mismo índice.

A) Llevando el mismo radicando:

Pasando a potencia y a índice común, tenemos:

a) rad(a;n).rad(a;m)= $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} =$

$= a^{\frac{m+n}{n.m}}$ = rad(a^{m+n} ; $n.m$)

b) rad(a;n):rad(a;m) = $a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} =$

$= a^{\frac{m-n}{n.m}}$ = rad(a^{m-n} ;n.m)

Ejemplo 3:

a) rad(5;3).rad(5;2) = $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})} =$

$= 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[5]{5^6}$

b) rad(5;3) : rad(5;2) = 5^(1/3):5^(1/2) = 5^(1/3-1/2) =
= 5^(-1/6) = 1/5^(1/6) = $\frac{1}{\sqrt[6]{5}}$

NO COPIAR

3.rad(5;3).2.rad(5;2) = 6.5^(2/6).5^(3/6) = 6.5^(5/6) =
= $6.\ 5^{\frac{5}{6}}$

c) 3.rad(5;3):2.rad(5;2)=(3/2).5^(2/6): 5^(3/6) = (3/2).5^(-1/6) = (3/2).[1/5^(1/6)] = $\frac{3}{2}\ .\frac{1}{\sqrt[6]{5}}$

B) Distinto radicando pero el mismo índice:

rad(a;n).rad(b;n)= $a^{\frac{1}{n}}\ .\ b^{\frac{1}{n}}\ = (a.b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a.b}$

Ejemplo 4:

rad(5;3).rad(8;3) = ...= $40^{1/3}$ = rad(40;3)

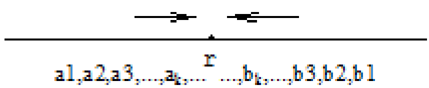
4.7.- Sucesiones convergentes de números racionales

Con lo que sigue sólo pretendemos la iniciación del alumno en los conceptos de ‘sucesión y de límite de una sucesión’.

Sea dos sucesiones (o listas ordenada) de números racionales:
a1,a2,a3,...,ak,... , creciente,
b1,b2,b3,...,bk,... , decreciente,

y tales que todo valor ai es menos que cualquiera de los valores bj, y que las distancias d=(bi – ai) se hacen cada vez menores cuando i va creciendo. Decimos que ak ocupa el lugar k.

Gráficamente:



Si para cada valor e > 0 tan pequeño como queramos, existe un lugar ke a partir del cual se cumple que (bi–ai) < e siempre que i > ke, decimos que las dos sucesiones son convergentes a un valor real 'r' (valor casi siempre desconocido). La 'convergencia' significa que podemos aproximarnos a ese valor tanto como queramos.

En lo que sigue tener en cuenta que segmento es sinónimo de intervalo.

Otra situación es la siguiente:

Tomamos dos números racionales a y b, y tomamos el intervalo [a, b]. Su punto medio se corresponde con el valor r1 = $\frac{a+b}{2}$.

Evidentemente a < r1 < b. Tomamos el segmento [a, r1]. Su punto medio se corresponde con el valor r2 = $\frac{a+r1}{2}$. Evidentemente a< r2 < r1 .

Tomamos el segmento [a, r2]. Su punto medio se corresponde con el valor r3 = $\frac{a+r2}{2}$. Se cumple a < r3 < r2 < r1.

Tomamos el segmento [a, r3]. Su punto medio se corresponde con el valor r4 = $\frac{a+r3}{2}$, a < r4 < r3 < r2 < r1.

Tomamos el segmento [a, r4] y repetimos el proceso tantas veces como queramos, o hasta que la longitud del segmento [a, ri] sea menor que un valor e 'pequeño' prefijado. Hemos obtenido así una sucesión decreciente (por si resulta más inteligible los ordeno de derecha a izquierda):

...,r4,r3,r2,r1, que converge al valor a.

NO COPIAR

En este caso sí conocemos el valor ‘a’ y por tanto carece de interés determinar el límite.
Recalcamos: El intervalo [a,rk] tiene longitud cada vez menor:

$$(r_k\text{-}a) = \frac{1}{2}.(r_{r-1} - a) = \frac{1}{2^2}.(r_{k-2} - a) = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^k}.(b\text{-}a).$$

y por tanto tan pequeño como queramos haciendo k tan grande como sea necesario. Dicha sucesión es convergente, y converge en el valor a.

En Matemáticas este hecho lo indicamos así:
$\lim_{n\to+\infty}(r_n) = a$, cuando n se hace arbitrariamente grande.

Obtenemos también una lista, o sucesión, de intervalos [a,ri], que además cada uno está ‘encajado’ en el precedente.

Decimos que es una sucesión de intervalos encajados.

Ejercicios:

a) El alumno debe observar e interpretar cual es el límite si en lugar de tomar el intervalo [a, r1] tomamos el de la derecha: [r1, b], y seguimos tomando siempre el de la derecha.

b) ¿Qué ocurre si tomamos alternativamente una vez el de la izquierda y en el siguiente paso tomamos el de la derecha?.

4.8.- Aproximación de un número real. Cálculos con valores aproximados

Al operar con expresiones decimales sólo podemos operar con expresiones finitas, por lo que en muchos casos se hace obligado operar con valores aproximados.

Supongamos por un momento que obtenemos el valor de rad(5;2), utilizando una calculadora que me de tantos decimales como deseemos:

con

10, 100, 1000, ... decimales

Dependerá de la potencia de la máquina para conseguir las deseadas. Pero nunca llegaremos a su valor exacto. Hemos de conformarnos con una aproximación.

Si no tuviésemos calculadora (situémonos antes de su existencia), esta aproximación la podríamos obtener construyendo dos sucesiones de números racionales, tomando aproximaciones de rad(5;2), por defecto y por exceso:

a1,a2,a3,... por defecto y creciente,
b1,b2,b3,... por exceso y decreciente.

Observa que será bi > aj, para cualesquiera i,j.

Evidentemente la diferencia (bi-ai) es cada vez menor. Además, dado 'e' pequeño (e>0 tan pequeño como queramos), puedo conseguir que (bi-ai) < e desde un lugar ke en adelante.

Los términos de estas dos sucesiones son números racionales (por tener un número finito de cifras decimales), y las sucesiones convergen, evidentemente, al valor rad(5;2).

Podemos repetirlo para cualquier otro número irracional.

Conclusión IMPORTANTE:

Todo número real r puede ser expresado como el límite de dos sucesiones convergentes de números racionales.

Observa que si r es un valor ‘a’ racional, bastará tomar la sucesión constante con términos $a_n = a$.

Sería ‘relajante’ para el alumno si tomase un radical $\sqrt[n]{b}$ y practicase construyendo las dos sucesiones citadas, una por defecto y creciendo, otra por exceso y decreciendo.

RESUMEN:
Cuando operamos con números reales, expresados mediante una expresión decimal, lo hacemos siempre necesariamente con expresiones finitas (número finito de cifras, incluso cuando lo hacemos con la ayuda de calculadora y/o del ordenador), ya que con expresiones ilimitadas resulta imposible operar (Incluidas Calculadora y la más potente Computadoras).

PARA CONCLUIR:

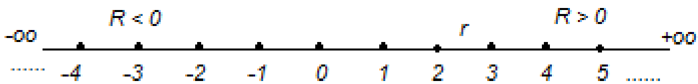
a) Si se trata de una expresión periódica, podemos obtener la fracción generatriz y operar con ella. Pero, dependiendo de la finalidad de los cálculos, es frecuente ahorrarse ese esfuerzo y operar con una aproximación que sea ‘suficiente’.

b) Si se trata de una expresión no periódica, como puede ser el resultado que una calculadora nos da al calcular un radical rad(c;n), necesariamente tenemos que tomar una aproximación, tomando todas o parte de las cifras decimales

que nos proporciona la máquina. En cálculos con repercusión importante se hará un control del error.
(Existe una Teoría del error, que aquí no trataremos)

4.9.- La Recta real.
Densidad de la recta real

Fijada una recta geométrica y sobre ella un segmento como 'unidad de medida', podemos hacer que a cada punto de la recta le corresponda un número real, y recíprocamente, a cada número real asociamos un punto de la recta. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre puntos de la recta y el conjunto R de los números reales.



En esta recta ya no hay 'lagunas', y decimos que es 'un continuo'. De hecho cada segmento sobre sobre la recta real es 'un continuo', en el sentido de que a cada punto del intervalo le corresponde un único número real.

La densidad de R (y la de Q) significa lo siguiente:

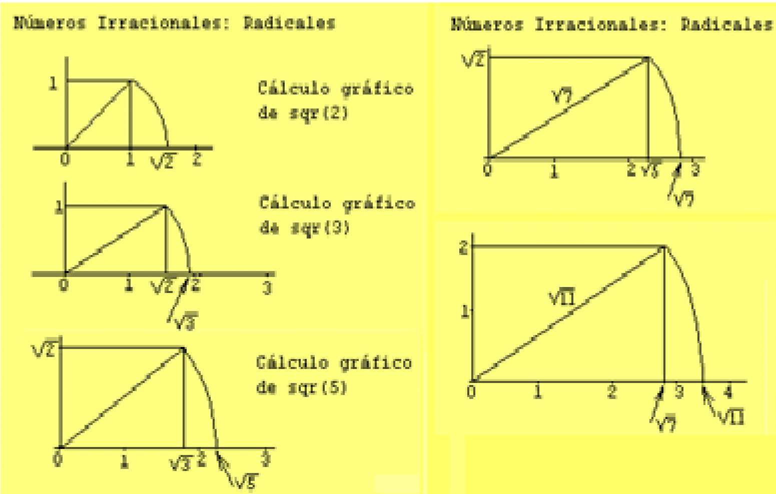
Dados dos valores a, b, con a < b, siempre existe otro valor real c tal que a < c < b.

En efecto: Es suficiente tomar c = $\frac{a+b}{2}$, que es el punto medio del segmento [a,b], ya que a + $\frac{b-a}{2} = \frac{2a+(b-a)}{2} = \frac{b+a}{2}$

NO COPIAR

Conclusión: Entre dos números reales a, b, existen infinitos valores reales. Del intervalo [a,b] se pueden extraer sucesiones con infinitos elementos.

Observa los siguientes gráficos. Mostramos cómo calcular algunos valores irracionales.



ACTIVIDADES:

1.- a) Extrae factores:

$$3.\sqrt{12}\,,\ \sqrt[3]{54}$$

b) Haz índice común:

$$\sqrt[3]{5}\,, \qquad \sqrt{3}$$

Sol.: a) $6.\sqrt{3}\,,\ 3.\sqrt[3]{2}$

b) $5^{1/3} = 5^{2/6} = \sqrt[6]{5^2}$,

$3^{1/2} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{3^3}$,

2.- Extrae factores y agrupa términos semejantes:

a) $3.\sqrt{2} - 5.\sqrt{3} + \sqrt{12}$

b) $7.\sqrt{50} + 5.\sqrt{27} - 8.\sqrt{245} + 2.\sqrt{3} - 4.\sqrt{5}$

Sol.: a) $3.\sqrt{2} - 3.\sqrt{3}$

b) $35.\sqrt{2} + 47.\sqrt{3} - 60.\sqrt{5}$

3.- Realiza las operaciones indicadas:

a) $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

c) $(\sqrt{2})^3$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

Sol.: a) $\sqrt{6}$, b) $\sqrt{3/2}$,

c) $\sqrt{8}$, d) $\sqrt[6]{2}$

4.- Determina tres valores reales que estén en el intervalo abierto (2’25 2’256)
Representa aproximadamente los resultados sobre la recta real.

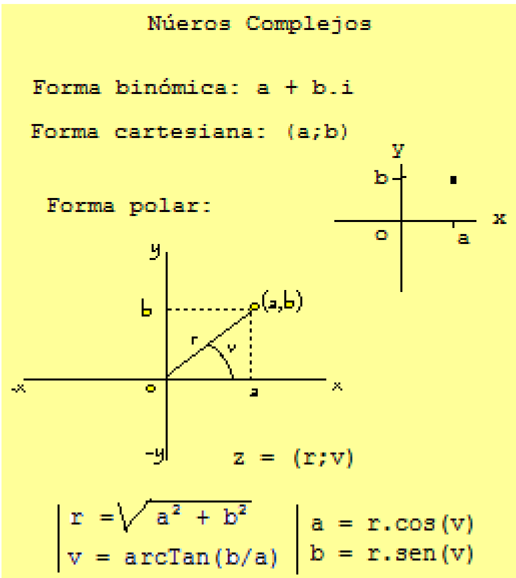
Sol.: x1 = (2,25 + 2,256)/2 = 2’253
x2 = (2,25 + 2,253)/2 = 2’2515
x3 = (2,25 + 2,2515)/2 = 2’25075

$$$$oOo$$$$

NO COPIAR

TEMA 5

Números Complejos



NO COPIAR

5.- Números Complejos

5.1.- Necesidad de los Números complejos:

Supongamos que necesitamos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$, equivalente a: $x^2 = -1$.

Sabemos que en los números reales el resultado del cuadrado de un número siempre es un valor positivo. Por tanto aquella es irresoluble en R.

Necesitamos ampliar el conjunto R con el fin de resolver situaciones como la anterior. Aquí es donde opera la 'creación matemática', o mejor, la 'acción de los Estudiosos retirando el polvo que recubre lo que AHÍ ESTÁ'.

Con el fin de resolver $x^2 = -1$ introducimos en el 'juego' un nuevo 'ente', que designamos por i, dotándole de la propiedad que lo determina: $i^2 = -1$.

Tenemos así el conjunto R+{i}, y hemos de conseguir que al dotarlo de las operaciones básicas: Suma/Resta y Producto/División, resulte una estructura 'cerrada' que envolverá la estructura de cuerpo R(+,*) de los números reales. Cerrada significa que al operar dos cualesquiera de sus elementos el resultado queda dentro de él.

Si designamos C = R+{i}, y deseamos que se cumpla lo descrito antes, también debemos incluir los de la forma: b.i, a + b.i, donde a y b son reales.

Para conseguirlo debemos introducir 'mediante definición' los siguiente entes, que llamaremos Números complejos.

NÚMERO Complejo:

Defi.:
Llamaremos 'Número complejo' a toda expresión de la forma: a+b.i, donde a, b son números reales, e 'i' es tal que $i^2 = -1$.

Escribiremos: z = a + b.i, para representar un número complejo.

Diremos que 'a' es su parte real, 'b' es su parte imaginaria, i es la "unidad imaginaria".

En lo sucesivo escribiremos también a+bi en lugar de a+b.i

Representaremos por C el conjunto de todos los posibles números complejos. Evidentemente R está incluido en C.
Si designamos por < la inclusión de conjuntos, tenemos:

$$N < Z < Q < R < C$$

5.2.- Operaciones básicas en C

Deseamos extender a C las Operaciones Básicas que ya tenemos y conocemos en R, y de modo que se cumplan todas las propiedades de la estructura de cuerpo. Designaremos por C(+,*) el resultado obtenido.

SUMA:

$$(a+bi) + (a' + b'i) = (a+a') + (b+b')i$$

Elemento neutro:

Lo cumple el complejo 0+0.i, que escribiremos 0 simplemente.

Opuesto:
Para cada a+bi, la condición de opuesto la cumple el complejo –a+(-b)i = -(a+bi), y es único.

NO COPIAR

Las propiedades de la suma: Asociativa y Conmutativa se cumplen, evidentemente, y es muy fácil de comprobar.

PRODUCTO:

(a+bi)*(a'+b'i) = aplicando la propiedad distributiva en R, y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Tenemos:

$a.a' + a.b'i + a'.bi + b.b'.i^2 =$

$= (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b)i$

Es decir:
$(a+bi).(a'+b'i) = (a.a' - b.b') + (a.b' + a'.b).i$

Elemento Unidad:
Lo cumple el complejo 1+0.i, o simplemente 1.

CONJUGADO de a+bi:

Desempeña un papel importante el hecho de que

$(a+bi).(a-bi) = a^2 + b^2$, que es un valor real.

Diremos que a-bi es el ‘Conjugado’ de a+bi.
Elemento Inverso:

Dado a+bi, su inverso c+di ha de cumplir que (a+bi).(c+di) = 1

Teniendo en cuenta que $(a+bi).(a-bi) = a^2 + b^2$, podemos comprobar que el inverso es

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \; .i$$

En efecto, aplicando las propiedades y pautas que nos marcan en R, debe ser

$$c + di = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi).(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

como acabamos de afirmar.

RESTA y DIVISIÓN:

Resta:

(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i

Equivale a sumar el opuesto:

(a+bi)-(c+di) = (a+bi)+(-c-di)

División:

Como en R, debe ser equivalente a multiplicar por el inverso del divisor.

Por tanto:

$$(a+bi):(c+di) = a+bi).\frac{1}{c+di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{E}{G} + \frac{F}{G}.i$$

donde E, F y G representan lo evidente:

E = a.c + b.d, F = b.c – a.d, G = $c^2 + d^2$

Estructura de Cuerpo:

NO COPIAR

Prescindiendo de demostraciones (por evidentes), tenemos lo necesario para afirmar que C(+,*) es una nueva estructura de Cuerpo.

5.3.- Formatos para un número complejo: Intercambio de formatos

Forma Binómica:

Es la expresión z = a+bi, donde a es la parte real, b la parte imaginaria, i es la unidad imaginaria.

Forma Cartesiana:

Es la expresión (a;b), donde a es la parte real, b parte imaginaria.

Su representación gráfica en un plano (plano complejo), coincide con la representación del punto del plano de coordenadas (a,b): a es la abscisa, b es la ordenada.

Forma Polar:

Módulo y argumento de z = a + bi

En la representación cartesiana del punto (a,b) podemos aplicar Pitágoras para obtener la distancia r desde el origen O hasta el punto (a,b) (ver gráfico):

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

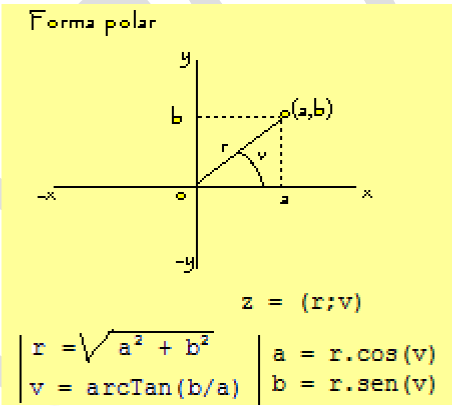
Al vector que lleva desde el origen O hasta el punto (a,b) lo llamamos 'radio vector', y a la distancia r, 'módulo de este vector', lo llamamos 'MÓDULO' del número complejo z = a+bi

Por otro lado tenemos el ángulo 'v' que forman el radio vector con el semieje positivo ox, recorrido desde el semieje ox hasta el radio vector en sentido contrario a las agujas del reloj (convenio establecido). A este ángulo v lo llamamos 'argumento' de z.

Observa la figura

El número complejo z queda determinado por el par (r ; v), y a esta expresión la llamamos "forma polar" de z.

El paso de forma binómica a forma cartesiana y de cartesiana a binómica es inmediata.



Intercambio entre formatos

A)De forma Binómica o Cartesiana a forma polar:

De z=(a;b), obtenemos

Módulo: r = $\sqrt{a^2 + b^2}$
Argumento: v = arcTan(b/a), si a<>0

Observa que:
-Si a>0, b>0: Entonces v está entre 0º y 90º (primer cuadrante)
-Si a<0, b>0: Entonces v está entre 90º y 180º (segundo cuadrante)
-Si a<0, b<0: Entonces v está entre 180º y 270º (tercer cuadrante)
-Si a>0, b<0: Entonces v está entre 270º y 360º (cuarto cuadrante)

Si a = 0, b>0: Entonces v = 90º
Si a = 0, b<0: Entonces v = 270º

Si a>0, b = 0: Entonces v = 0º
Si a<0, b = 0: Entonces v = 180º

B)De forma Polar a forma Binómica y Cartesiana:

Es posible que el alumno no tenga todavía los conocimientos básicos de Trigonometría, pero de todos modos continuamos.

Para lo que sigue recomendamos observar la representación de (a;b) y de (r;v) en el plano.

De (r;v) obtengo:

a = r.cos(v), parte real

b = r.sen(v), parte imaginaria

Entonces: Forma cartesiana (a;b)
Forma binómica: a + bi

5.4.- Operaciones en forma Polar

La Suma y Resta no son posibles en formato polar.

Damos sin demostración los resultados del producto y división de complejos expresados en forma polar. Resulta muy práctico utilizar este formato tanto para el producto como para la división.

Producto y División en forma polar:

a) $(r;v).(s;u) = (r.s;v+u)$
b) $(r;v):(s;u) = (\frac{r}{s};v-u)$, si $s<>0$

Potencia:

El alumno ya sabe que la potencia no es otra cosa que multiplicar por sí mismo.

$(r;v)^n = (r;v). \dots .(r;v) = (r^n;n.v)$

Radicación:

El valor $(r';v') = \sqrt[n]{(r;v)}$ ha de ser tal que $(r';v')^n = (r;v)$

Aplicando las reglas de cálculo conocidas nos lleva al siguiente resultado:
$(r';v')^n = (r'^n;n.v') = (r;v)$, de donde

$r'^n = r$, $n.v' = v$, de donde $r' = \sqrt[n]{r}$, $v' = \frac{v}{n}$

NO COPIAR

Este resultado lo llamamos 'raíz principal', ya que también lo cumplen los siguientes valores:

$$r' = \sqrt[n]{r}$$
$$vk = \frac{v}{n} + k.\frac{2pi}{n}, \quad k = 0,1,2,...,n-1$$

donde queda incluida la 'raíz principal', que la tenemos cuando k = 0.

Es costumbre representar los resultados anteriores mediante: z0, z1, z2, ..., z_{n-1}

Observa que son n valores con el mismo módulo r' y sus argumentos distribuidos regularmente entre 0º y 360º, separados por el ángulo $\frac{2pi}{n}$.

5.5.- Números Complejos y Polígonos Regulares

Por lo que acabamos de hacer notar, si representamos en el plano complejo los valores z0, z1, ..., z_{n-1}, quedan en la circunferencia de radio r' y regularmente separados por el ángulo $\frac{2pi}{n}$.

Si unimos estos puntos obtenemos un polígono regular con n lados cuyos vértices son los citados puntos, siendo estos puntos la representación de los números complejos zi obtenidos.

Conclusión:

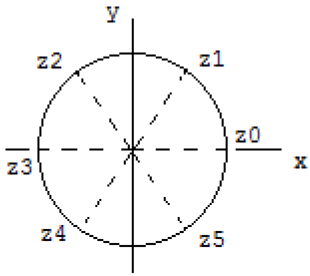
Dado z = (r;v), sus raíces n-ésimas z0, z1, z2, ..., z_{n-1}, son los vértices del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio r'.

Ejemplo: En general tenemos en resumen lo siguiente:

$z = (R;G)$, $r = \sqrt[n]{R}$, $g0 = G/n$

$z_k = (r; g_k)$, donde $g_k = g0 + k.\frac{360º}{n}$

En este ejemplo G = 0º y n = 6 (hexágono regular)



$z = (R;G)$, $G = 0°$

$r = \sqrt[6]{R}$

$gk = G/6 + k.360°/6$

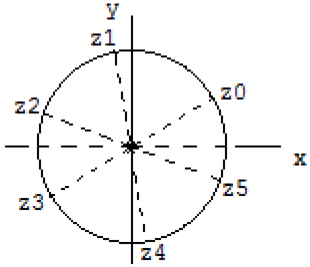
$k = 0,1,2,3,4,5$

$z1 = (r;g1)$ $z2 = (r;g2)$ $z3 = (r;g3)$

$z4 = (r;g4)$ $z5 = (r;g5)$ $z6 = (r;g6)$

Del mismo modo en cualquier otro caso, resultando siempre un polígono regular

Otro Ejemplo: Caso de que G <> 0º



z = (R;G)

$r = \sqrt[6]{R}$

gk = G/6 + k.360°/6

k = 0,1,2,3,4,5

z1 = (r;g1) z2 = (r;g2) z3 = (r;g3)

z4 = (r;g4) z5 = (r;g5) z6 = (r;g6)

ACTIVIDADES resueltas: Radicales y Complejos

1.- Realiza los siguientes cálculos:

a) (3 + 2.i) + 3.(-2 + 3.i) – 2.(3 – 5.i)
b) (3+2i).(-2+3i)
c) (3+2i):(-2+3i)

Sol.: a) (3-6-6) + (2+9+10).i = -9 + 21.i
b) (-6-6) + (9-4).i = -12 + 5.i
c) $\dfrac{(3+2i).(-2-3i)}{(-2)^2+3^2}=\dfrac{-13.i}{13}=-i$

2.- a) Pasa a forma polar: z = 3 + 2.i
b) Pasa a forma binómica y cartesiana:
z = (5;0'57735)

Sol.: a) mód.: r = $\sqrt{13}$,
arg.: a = arcTan(2/3) = 33'69 grados

z = ($\sqrt{13}$;33'69 gra.)

b) parte real: a = $\sqrt{13}$.cos(33,69) = 3,
parte imag: b = $\sqrt{13}$.sen(33,69) = 2,

Forma binómica: z = 3 + 2.i
Forma cartesiana: (3 ; 2)

3.- Realiza las operaciones en forma polar:

a) (3;34 gra.).(5;72 gra.)
b) (5;72 gra.):(3;34 gra.)
c) $(3;34\ \text{gra.})^3$
d) $(3 + 2.i)^5$

NO COPIAR

Sol.: a) Multiplica los módulos, suma los argumentos: (15;106 gra.)

b) Divido los módulos, resta los argumentos: (5/3;38 gra.)

c) Equivale a multiplicar ...: (27;102 gra.)

d) Paso a forma polar y después operamos:

$$(\sqrt{13};33'69)^5 = ((\sqrt{13})^5;168'45)$$

4.- a) Halla las raíces de $\sqrt[5]{(32;120gra.)}$

b) Determina las coordenadas de los vértices del hexágono regular inscrito en la circunferencia de radio R = 5

c) Lo mismo que en b) pero haciendo que uno de los vértices esté en z(0)= (5;4º)

Sol.: a) z = (32;120 gra.), $\sqrt[5]{z}$ = (5;g(i)), donde

g(i)= 120/5 + i.360/5 = 24º + i.72º,

i= 0,1,2,3,4

b) Tomo z = (5^6;0 gra) = (15625;0 gra), y obtengo las raíces $\sqrt[6]{z}$:

$\sqrt[6]{z}$ = z(i) = (5;g(i)), donde:

g(i)= i.360/6 = i.60º, i= 0,1,2,3,4,5

Las coordenadas de los vértices son:

x(i)= 5.cos(g(i)),

y(i)= 5.sen(g(i)), i= 0,1,2,3,4,5

c) Tomo z = (5^6;24º) y hacer $\sqrt[6]{z}$

$\sqrt[6]{z}$ = (5;g(i)), donde: g(i)= 24/6 + i.60, i = 0,1,2,3,4,5

Los vértices están en:

x(i)= 5.cos(4+i.60)

y(i)= 5.sen(4+i.60),

i = 0,1,2,3,4,5

5.- Realiza las operaciones

a) $3.\sqrt{2} - 3.\sqrt{8} + 3.\sqrt{18}$, 2a.$\sqrt{3} - \sqrt{27a^2} + a.\sqrt{12}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\sqrt[4]{4 + \sqrt[6]{8} + \sqrt[4]{64}}$,

$$3.\sqrt{x} - \sqrt{4x} + 2.\sqrt{36x} - 5.\sqrt{x - \frac{9x}{25}}$$

(Res.:a) 6.$\sqrt{2}$, $a.\sqrt{3}$, b) $\frac{11}{2}.\sqrt{2}$, 9.$\sqrt{x}$)

6.- Realiza las operaciones

a) a.$\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{4}$, $\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{4}$, $2.\sqrt{3}.\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}\right)$

b) $[\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt{a}] : [\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} : \sqrt{a}]$, $\sqrt[3]{(x-1)^2}.\sqrt{\frac{1}{x-1}}$

(Res.: a) $a^2.\sqrt[12]{a}$, $2.\sqrt[3]{3}$, $2.\sqrt[6]{432} - 2.\sqrt[4]{27}$

b) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}} : \sqrt{a} = \frac{a^{3/12}}{a^{4/12}} : 6^{6/12} = \frac{a^{\frac{3}{12}}}{a^{\frac{10}{12}}} = \frac{1}{a^{7/12}}$,

$$\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} : \sqrt{a} = \frac{a^{4/24}}{a^{3/24}} : a^{12/24} = \frac{a^{4/24}}{a^{15/24}} = \frac{1}{a^{11/24}},$$

$$\frac{1}{a^{7/12}} : \frac{1}{a^{11/24}} = \frac{a^{11/24}}{a^{7/12}} = \frac{a^{11/24}}{a^{14/24}} = \frac{1}{a^{3/24}} = \frac{1}{a^{1/8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{a}}$$

NO COPIAR

$$\sqrt[3]{(x-1)^2}\,.\sqrt{\frac{1}{x-1}} = \sqrt[6]{x-1}$$

7.- Realiza las operaciones

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{5}-2}{3-2.\sqrt{5}}$, $\frac{3.\sqrt{5}-2.\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}+3.\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}}$, $3.\sqrt{3.\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{3^3}}$, $\sqrt[4]{b.\sqrt[3]{\frac{1}{b}.\sqrt[3]{b.\sqrt[4]{\frac{1}{b}}}}}$

(Res.: a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}-4}{11}$, $\frac{19-4.\sqrt{15}}{11}$,
b) $\sqrt[8]{576}$, $3.\sqrt[8]{3^5}$, $\sqrt[12]{b^5}$)

8.- Realiza lo siguiente
a)Exprésalos sin radical
$\sqrt[4]{a.b^2}$, $\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}}$, $\frac{3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{2x}}{3.\sqrt{3x^3}}$
b)Exprésalos en forma de radical
$3.2^{5/2}$, $3^{-1/2}$ - $4^{2/3}$, $\frac{3+2^{-1}}{3-4^{-\frac{1}{5}}}$
(Res.: a) $(a.b^2)^{1/4}$, $(2/3)^{1/3}$, $\frac{2^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}$
b) $12.\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}-2.\sqrt[3]{2}$, $\frac{3+\frac{1}{2}}{3-\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}$)

NÚMEROS COMPLEJOS

9.- Realiza lo siguiente

a)Exprésalo como número complejo

$\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{2}.\sqrt{-8}$, $(-36)^{\frac{1}{2}}$

b)Calcula las potencias

i^{31} , i^{247} , i^{2345}

c)Exprésalo en forma cartesiana

$\sqrt{2}\,.\,i - 3$, $\sqrt{3}$, -i , -2 -3.i

(Res.: a) x.i, 4.i, 6.i , b) –i, -i, i

c) (-3;$\sqrt{2}$), ($\sqrt{3}$; 0), (0;-1) , (-2;-3))

10.- Realiza lo siguiente

a)Exprésalo en forma binómica

(-1;2/3), (1/2;-$\sqrt{3}$) , (2$\sqrt{3}$; 3. $\sqrt{2}$)

b)Calcula el modulo

(-2;2$\sqrt{3}$), 2 +3.i, -2-2$\sqrt{3}.i$

c)Escribe el conjugado

$3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.i$, (x+y)+(2x-y).i, 6-$\sqrt{-16}$

(Res.: a) -1 +2/3.i, 1/2-$\sqrt{3}\,.\,i$, $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}.i$,

b) 4, 4, 4,

c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.i$, (x+y)-(2x-y).i, 6+4.i

11.- Resuelve

a) $2x^2 -12x +21 = 0$, $y^2 +14y +60 = 0$

b) $x^4 +5x^2 -36 = 0$, $7x^2 +12x +8 = 0$

c) $x^4 -5x^2 -36 = 0$, $x^2-2ax + (a^2+b^2)=0$

(Res.: a) x1 = 3-$\frac{\sqrt{6}}{2}.i$, x2 = 3+$\frac{\sqrt{6}}{2}.i$,

y1 = -7-$\sqrt{11}.i$, y2 = -7+$\sqrt{11}.i$

b) , x1 = -6/7--$\frac{3\sqrt{3}}{7}.i$, x2 = -6/7+-$\frac{3\sqrt{3}}{7}.i$

c) , x1 = a - $\sqrt{b}.i$, x2 = a + $\sqrt{b}.i$)

NO COPIAR

12.- Realiza lo que se indica

a)(2;5) +(-2;1) +(-3;1),
(3-i)-(4-2i)+(4+3i)

b)$(5+\sqrt{3}).(1-2\sqrt{-3})$, $(2\sqrt{3}-i).(3-2\sqrt{3}.i)$
c) (-3-2i): (-2-i) , $(2\sqrt{3}.i-\sqrt{3})^2$

(Res.: a) (-3;7), 3 +4.i
b) $11-9\sqrt{3}.i$, $4\sqrt{3}-15.i$
c) 8/5 +1/5.i , -9-12.i

13.- Realiza lo que se indica

a)Pasa a forma polar
z1 = -3.i , z2 = -1 –i, z3 = $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.i$
b)Realiza la operación
$3_{20}.2_{70}$, $(2\sqrt{2})_{85}.(\sqrt{6})_{50}$, $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i).(3+\sqrt{3}.i)$
c) $\frac{(2-3i).(3-2i)}{(1+i)^2}$, $\frac{i^5-i^{-5}}{2i^3}$, $\frac{3i^{24}-i^{89}}{3i^{41}}$

(Res.: a) z1 = 3_{270}, z2 = $(\sqrt{2})_{225}$, z3= $(\frac{\sqrt{6}}{2})_{315}$

b) 6_{90} = 6.i, $(4.\sqrt{3})_{135}$, $2\sqrt{3}.i$ = $(2\sqrt{3})_{90}$

c) -13/2 , -1 , -1/3 –i)

14.- Realiza

a)Halla el opuesto y el conjugado, y represéntalos

$z1 = 2\text{-}3i$, $z2 = (\sqrt{2}\,; 4)$, $z3 = 3_{420}$

b)Calcula el inverso

$z1 = 4+2i$, $z2 = (1/2;2)$, $z3 = 32_{270}$

c)Calcula las potencias

$z1 = (4+2i)^5$, $z2 = (\frac{1}{2}; 2)^3$, $z3 =(3_{180})^6$

(Res.: a) , b) $z1' = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}.i$,

$z2' = \frac{2}{9} - \frac{8}{9}.i$, $z3 = (\frac{1}{32})_{-270} = (\frac{1}{32})_{90}$

c) ,

$$$o0o$$$

NO COPIAR

TEMA 6

Sistemas de Numeración

NO COPIAR

6.1.- El Sistema decimal (base = 10)

El sistema de numeración habitual que utilizamos es el 'decimal', que significa lo siguiente:

2365 (dos mil trescientos sesenta y cinco)

$2000 + 300 + 60 + 5$

$$2.10^3 + 3.10^2 + 6.10 + 5.10^0 \qquad (1)$$

5 unidades simples (o de orden 0)
6 decenas (unidades de orden 1)
3 centenas (unidades de orden 2)
2 millares (unidades de orden 3)(unidades de millar)

Llamamos 'expresión polinómica ' a la expresión (1)

En general:

Si n= hgfedcba, su expresión polinómica es

$$a.10^0 + b.10^1 + c.10^2 + d.10^3 + e.10^4 + f.10^5 + g.10^6 + h.10^7 \qquad (2)$$

Es un polinomio P(x) donde x toma el valor 10.

Ejemplo:

Supongamos que deseamos expresar el mismo número 2365 (que está expresado en base 10) tomando como base el valor 5, en lugar de 10. Tengo que obtener su expresión polinómica tomando x= 5, en lugar de x = 10.

Formo grupos de 5 unidades cada uno: 2365: 5, y el resto es el valor de 'a' (unidades simples, o 'unidades' de orden 0).

Queda a= 0, y obtengo 473 grupos (decenas) de 5 unidades cada uno.

Tomamos las 473 decenas y formamos otra vez grupos de 5 cada uno. El resto de 473:5 es el valor de ‘b’ (cifra de las decenas).

Queda b = 3, y obtengo 94 grupos (centenas) de 5 decenas cada uno.

Tomamos las 94 centenas y formamos otra vez grupos de 5 cada uno. El resto de 94:5 es el valor de ‘c’ (cifra de las centenas).

Queda c = 4, y obtengo 18 grupos (unidades de mil o millar) de 5 centenas cada uno.

Tomamos los 18 grupos (unidades de millar) y formamos otra vez grupos de 5 cada uno. El resto de 18:5 es el valor de ‘d’ (cifra de los miles, o millares).

Queda d = 3, y obtengo 3 grupos (decenas de millar) de 5 millares cada uno.

Finalmente, si hago 3:5 obtengo 0 grupos, y me queda resto e = 3 (decenas de millar); hemos terminado.

La expresión polinómica obtenida es: $33430_{(5}$, donde indicamos que está expresado en base 5.

Comprobación:

$N = 0.5^0 + 3.5^1 + 4.5^2 + 3.5^3 + 3.5^4$
$N = 0 + 15 + 100 + 3.125 + 3.625 = 115 + 375 +$
$+ 1875 = 2365_{(10}$, en base 10, que es el valor de partida.

Comprueba que hemos tomado los restos de arriba a bajo y anotándolos de derecha a izquierda

6.2.- El Sistema binario (base b = 2)

Tomamos el mismo número natural 2365, en base 10. Deseamos obtener su expresión en base 2.

Regla práctica:
Siguiendo el esquema operativo descrito antes hacemos divisiones sucesivas por 2, y obtenemos la siguiente lista de restos, tomándolos de arriba a bajo (en el orden que se presentan):
1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1

La expresión polinómica la obtenemos así:

'Tomamos los restos de arriba a bajo y los anotamos de derecha a izquierda':

$$100100111101_{(2}$$

Comprobación:

$N = 1.2^0+0.2^1+1.2^2+1.2^3+1.2^4+1.2^5+0.2^6+0.2^7+1.2^8+0.2^9 + 0.2^2+1.2^{11} = 1+0+0+4+8+16+32+0+0+256+0+0+2048 =$

$= 2365_{(10}$

6.3.- Sistema de numeración en base b cualquiera

En cualquier base b < 10 seguiríamos el mismo esquema operativo.
Si la base es igual o superior a 10 actuamos como sigue.
Comenzamos por añadir símbolos que representen los posibles restos superiores a 9. Es habitual hacerlo tomando los caracteres

del alfabeto: a, b, c, ..., o en mayúsculas: A, B, C, ..., pero se podrían tomar los que convenga con la condición de establecer claramente la equivalencia, como por ejemplo: a representa el 10, b representa el 11, c el 12, ...

Ejemplo:

Supongamos base b = 16.
Entonces necesitamos: A equivalente a 10, B equivalente a 11, C a 12, D a 13, E a 14, F a 15, ya que los posibles restos al dividir por 16 van del 0 al 15.

Tomo el mismo número natural N = 2365, y hacemos divisiones sucesivas por 16. La lista de restos es: 13, 3, 9 ;

La expresión polinómica es: $93D_{(16}$

Comprobación: $N = D.16^0 + 3.16 + 9.16^2 =$

$= D + 48 + 2304 = 2365_{(10}$

NO COPIAR

ACTIVIDADES:

1.- a) Dado N = 3257, obtener su expresión en base 2
b) Dado $110010111001_{(2}$, en base 2, obtener su expresión en base 10

Sol.: a) Divido sucesivamente por 2 y enmarco los resto, hasta que el cociente sea menor que 2. Tomo y escribo de izquierda a derecha el último cociente y los restos obtenidos (que habré enmarcado) tomándolos de abajo a arriba (del último al primero). Obtengo:

$$N = 110010111001_{(2}$$

b) La descomposición factorial es

$$N = 1.2^0+0.2^1+0.2^2+1.2^3+1.2^4+1.2^5+0.2^6+1.2^7+0.2^8+0.2^9+1.2^{10}+1.2^{12} = ... = 3257$$

2.- a) Dado N = 3257, obtener su expresión en base 5.
b) Dado $1010112_{(5}$, en base 5, obtener su expresión en base 10

Sol.: a) Divido sucesivamente por 5 y enmarco los resto, hasta que el cociente sea menor que 5. Tomo y escribo de izquierda a derecha el último cociente y los restos obtenidos (que habré enmarcado) tomándolos de abajo a arriba (del último al primero). Obtengo:

$$N = 101012_{(5}$$

b) La descomposición factorial es

$$N= 2.5^0+1.5^1+0.5^2+1.5^3+0.5^4+1.5^5 = ... = 3257$$

$$$oOo$$$

NO COPIAR

Tema 7

Clases de restos módulo m

NO COPIAR

7.1.- CLASES de Restos módulo m:

Estamos en los Números naturales y comienzo con un ejemplo.

Sea un número m que mantengo fijo. Para cualquier otro valor natural X hago la división por m, y sabemos que

$$X = m.c + r$$

donde c es el cociente entero y r es el resto.

Es evidente que los posibles restos son:

$0,1,2,\ldots,m-1$

con los que formamos un conjunto

$$M = \{0,1,2,\ldots,m-1\}$$

que, en virtud de lo que veremos después, llamaremos 'clase de restos'.

Ejemplo: Tomo m = 6

Los posibles restos de la división de un número M cualquiera entre 6 son: 0, 1, 2, 3, 4, 5

Los llamamos 'clases de restos módulo 6', y con ellos formamos un conjunto

$$M = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Clases:
Continuando con el mismo ejemplo y considerando el total de los números naturales, es decir el conjunto N, observa que n1 = 1 y n2 = k.6 + 1 dan el mismo resto 1, y lo mismo n1 = k1.6 + 3 y n2 = k2.6 + 3 dan el mismo resto 3.

Lo anterior nos lleva a que dentro del conjunto N tenemos sobconjuntos, que llamamos ‘clases de equivalencia’, cuyos elementos dan la misma clase de resto al dividir por 6. Para dos números n, m que den el mismo resto decimos que son ‘equivalentes’ entre sí.

Aunque no las demostraremos, pero son triviales, se cumple lo siguiente:

a) Cada número natural n pertenece a una y sólo una clase.

b) Si dos clases tienen algún elemento común, entonces son la misma clase. Esto significa que dos clases distintas ‘a’ y ‘b’ son disjuntas (Su intersección como conjuntos es el vacío)

Una clase cualquiera puede ser representada por cualquiera de sus componentes. Lo más cómodo es tomar el primero dentro de la clase ordenada crecientemente.

Consecuencia:
N es la reunión de todas las clases de equivalencia.

Esto es así para cualquier número natural m, obteniendo el conjunto M = {0,1,2,…,m-1} de las clases de equivalencia. 0,1,2, …, m-1 son los representantes de cada clase que se toman habitualmente, por ser el primero dentro de cada clase.

NO COPIAR

7.2.- Operaciones definidas en M: Tablas. Propiedades y Estructuras en M(+,*)

Definimos en M dos operaciones, suma y producto, como sigue.

Suma:

Para dos clase 'a' y 'b' cualesquiera

a + b = (a+b) mód.m

donde (a+b) es la suma como números naturales, y a continuación tomar el 'resto módulo m'.

La expresión 'resto módulo m' significa dividir entre m y tomar el resto de esta división.

Producto: Definido en $M^* = M-\{0\}$

Para dos clases 'a', 'b', distintas de 0,

a*b = (a.b) mód.m

donde (a.b) es el producto como números naturales, y a continuación tomar el 'resto módulo m'.

Ejemplo:

Suma módulo 6:

Para dos clase 'a' y 'b' cualesquiera

a + b = (a+b) mód.6

donde (a+b) es la suma como números naturales, y a continuación tomar el 'resto módulo 6'.

La expresión 'resto módulo 6' significa dividir entre 6 y tomar el resto de esta división.

Producto módulo 6:

Para todo par de clases, distintas de 0,

$$a*b = (a.b) \text{ mód.}6$$

donde (a.b) es el producto como números naturales, y a continuación tomar el 'resto módulo 6'.

Obtenemos las siguientes tablas:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	3	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Observa que M^* no es cerrado respecto de la operación producto: $(M^*,*)$ no es una estructura cerrada. En cambio (M,+) siempre es una estructura cerrada.

Otro Ejemplo:
Para m = 5 obtenemos las siguientes tablas.

NO COPIAR

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Observa que en este caso $M^* = M - \{0\}$ sí es cerrado respecto del producto.

De hecho se puede demostrar (aquí no lo haremos) lo siguiente:

-Si m es primo, (M^*,*) sí es estructura cerrada.

-Si m no es primo, aquella no es cerrada, basta observar la tabla y comprobar que existen pares de elementos a, b tales que a*b = 0. (Observa la tabla del * para mód(6))

NOTA: Definida una operación cualquiera * en M cualquiera, decimos que (M,*) es una estructura cerrada cuando se cumple:

Para todo par a, b de M, el resultado a*b también está dentro de M

Lo que hemos visto en los dos ejemplos anteriores se repite exactamente igual para cualquier otro valor de m, dentro de los números naturales N.

Propiedades y Estructuras en (M,+,*):

Designamos por a, b, c, … las clases mód(m)

Suma: $a + b = (a+b)$ mód(m)
Producto: $a * b = (a.b)$ mód(m)

La Suma cumple: (la demostración es trivial)

Es cerrada: Para todo par a,b, ocurre que a+b está en M

Conmutativa: $a+b = b+a$

Asociativa: $a+(b+c) = (a+b)+c$

Tiene elemento neutro: Lo es el cero, 0
Significa: $a+0 = a$

Cada elemento a tiene asociado el opuesto:

El opuesto de ‘a’ es ‘b’ tal que $a+b = 0$

Estructura de grupo:

Con estas propiedades, DECIMOS que (M,+) tiene estructura de ‘grupo aditivo’

Si m es primo:

El Producto en $(M^*,*)$ cumple:

Es cerrada: Para todo par a,b, ocurre que a*b está en M

NO COPIAR

Conmutativa: a*b = b*a

Asociativa: a*(b*c) = (a*b)*c
Tiene elemento unidad: Lo es el 1,
Significa: a*1 = a

Si m es primo: Cada 'a' tiene asociado elemento inverso 'b' tal que a*b = 1

Estructura de grupo:

Con estas propiedades, DECIMOS que $(M^*,*)$ tiene estructura de 'grupo multiplicativo'

No ocurre así cuando m no es primo.

Si m no es primo, el producto * en M^* no es 'operación cerrada', y por tanto no puede tener estructura bien definida.

Relación entre + y * :

Distributiva de * respecto de +:

a*(b+c) = (a*b) + (a*c), para una terna cualquiera.

Estructura:
Con estas propiedades, DECIMOS que (M,+,*) es una estructura de Anillo.

Ejemplos:

1.- Caso de m = 7. Designo las clases del mismo modo que los números naturales.

Tengo M = {0,1,2,3,4,5,6}
Defino en M la suma +, y en M-{0} el producto *, en los dos casos módulo 5. Esto significa que para las clase a y b:

Suma: a + b = (a+b) mód(7) =

= ‘Sumar, dividir entre 7 y tomar el resto’

Producto: a*b = (a.b) mód(7) = = ‘Multiplicar, dividir entre 7 y tomar el resto’

Sus tablas de Sumar y Multiplicar son las siguientes:

Suma: a + b mód(7)

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Producto: a*b mód(7)

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(M,+,*) es un anillo, donde M está formado por las clases de restos módulo 7.

$$$$oOo$$$$

Tema 8

Progresiones Aritméticas

Progresiones Geométricas

NO COPIAR

8.1.- Progresiones Aritméticas

Sea una sucesión de valores racionales

a1,a2,a3,...,an,... (1)

Defi.:

Diremos que (1) es una progresión aritmética si existe una constante 'd' tal que

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (2)$$

para todo n.

Es equivalente a que an – a_{n-1} = constante, cualquiera que sea n.

El valor 'd' lo llamamos 'diferencia'.

Término general:

Evidentemente se cumple que:

an = a1 +(n-1).d

Más general:

an = ak +(n-k).d

Términos equidistantes:

Supongamos que es una g.a. finita:
a1, a2, ..., a_{n-1}, an

Dos términos tales como ak y $a_{n-(k-1)}$ son 'equidistantes' de los extremos:

a1,a2,...,ak,...,$a_{n-(k-1)}$,...,an

Tenemos: $ak = a1+(k-1).d$

$a_{n-k+1} = a1+(n-k+1-1).d = a1+(n-k).d$, y su suma
$ak + a_{n-(k-1)} = [a1+(k-1).d] +[a1+(n-k).d] =$
$= [a1 +k.d - d] +[a1+n.d-k.d] =$
$= a1 + [a1 +(n-1).d] =$
$= a1 + an$

La suma de dos términos equidistantes es igual a la suma de sus extremos.

8.2.- Suma de los n primeros términos de una p.a:

Sea
$a1, a2, a3, ..., a_{n-1}, an$

o bien $an, a_{n-1}, ..., a3, a2, a1$

Sumándolas y agrupando de dos en dos, tengo

$2.S = (a1+an) +(a2+a_{n-1}) +...+ (ak+a_{n-(k-1)}) +...+ (a_{n-1} +a2) +(an+a1)$

Cada (...) es la suma de términos equidistantes, y por tanto queda

2.S = (a1+an) +(a1+an) +...+(a1+an), donde tenemos n términos, y por tanto

$$S = \frac{(a1+an).n}{2} \qquad (4)$$

Ejemplo:

a) Suma de los n primeros números naturales.

Comprueba que $S = \frac{(1+n).n}{2}$

a)Suma de los n primeros números impares

Comprueba que $S = \frac{(1+(2k-1)).k}{2}$

b)Suma de los n primeros números pares

Comprueba que $S = \frac{(1+2k).k}{2}$

8.3.- PROGRESIONES Geométricas

Sea una sucesión de valores racionales

a1, a2, a3, ..., an, ... (6)

Defi.:

Diremos que (6) es una progresión geométrica si existe una constante ‘r’ tal que

$an = r.a_{n-1}$, para todo n (7)

Es equivalente a que $\frac{an}{a_{n-1}}$ = constante, cualquiera que sea n.

El valor r lo llamamos ‘razón’ de la progresión.

Término general:

Evidentemente se cumple que:

$an = a1.r^{n-1}$ (8)

Más general:

$an = ak.r^{n-k}$ (8)’

Términos equidistantes:

Del mismo modo que en p.a., si tengo una g.a. finita:

$a1, a2, ..., a_{n-1}, an$

dos términos tales como ak y $a_{n-(k-1)}$ son 'equidistantes' de los extremos:

$a1,a2,...,ak,..., a_{n-(k-1)},...,an$

Tenemos:

$ak= a1.r^{k-1}$

$a_{n-k+1} = a1.r^{n-k+1-1} = a1.r^{n-k}$, y su producto

$ak. a_{n-(k-1)} = [a1.r^{k-1}].[a1.r^{n-k}] =$
$= a1.[a1.r^{n-1}] =$
$= a1.an$

El producto de dos términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

8.4.- Suma de los n primeros términos de una p.g:

Sea la suma

$S = a1 + a2 + a3 + ... + a_{n-1} + an$

Multiplicamos cada término por r, y tengo

$r.S = a2 + a3 + ... + a_{n-1} + an + an.r$

De la segunda resto la primera; después de simplificar tengo

$r.S – S = an.r – a1$
$S.(r-1) = an.r –a1$, de donde

$$S = \frac{a_n.r - a1}{r-1} \qquad (10)$$

Producto de los n primeros términos de una p.g.:

Sea el producto

$P = a1.a2.a3...a_{n-1}.an$

O bien

$P = an.a_{n-1}.a_{n-2}...a3.a2.a1$

Multiplicamos miembro a miembro, y agrupando factores tenemos

$P^2 = (a1.an).(a2.a_{n-1})...(a_{n-1}.a2).(an.a1)$

Cada par de factores lo es de términos equidistantes y por tanto cada uno es igual a a1.an.

Por tanto tenemos

$P^2 = (a1.an)^n$, de donde

$$P = \sqrt{(a1.an)^n} \qquad (11)$$

Ejemplo:

Suma de los n primeros términos de

1, 1/2, 1/4, ..., $\frac{1}{2^{n-1}}$

Comprueba que resulta $S = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2.(2^n-1)}{2^n}$

8.5.- Progresión geométrica ilimitada:

Es una p.g. con un número ilimitado de términos.

La suma de todos sus términos sólo es posible si la razón r cumple $0<|r|<1$. Veremos cómo obtener esta suma.

La suma de los n primeros términos viene dada por

$$S = \frac{an.r - a1}{r-1}$$

Teniendo en cuenta que $an = a1.r^{n-1}$, la anterior se convierte en

$$S = \frac{a1.r^{n} - a1}{r-1} = \frac{a1.(r^{n} - 1)}{r-1}$$

Teniendo en cuenta que $|r|<1$, la potencia r^n tiende a 0 cuando n se hace ‘muy grande’ (arbitrariamente grande, decimos en Matemáticas), de modo que r^n se hace ‘arbitrariamente pequeño’, y decimos que ‘en el límite’ se hace cero (tiene límite 0).

Queda por tanto

$$S = \frac{-a1}{r-1} = \frac{a1}{1-r} \qquad (12)$$

NOTA: Hemos entrado en el ‘terreno’ de las series. Veremos después una iniciación.

Ejemplo:

Suma de $1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots$.

Comprueba que $S = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

NO COPIAR

ACTIVIDADES/ Problemas resueltos:

1.- Suma de los 500 primeros números naturales

Recuerda que $S_n = \frac{(1+n).n}{2}$

Sol.:

$$S_{500} = 125250$$

2.- Suma de los 500 primeros números impares

Recuerda, un número impar es de la forma 2.k-1

$$S_{500} = \frac{\left(1+(2k-1)\right).k}{2}$$

Sol:

$$S_{500} = 250000$$

3.- Suma de los 500 primeros números pares

Recuerda, un número par es de la forma 2.k

$$S_{500} = \frac{(1+2k).k}{2}$$

Sol.:

$$S_{500} = 250250$$

4.- Suma de los 500 primeros términos de

$1,1/2,1/4,...,1/2^{n-1}$

Sol: a1 = 1

$$S_{500} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2.(1-2^n)}{-2^n} = \frac{2.(2^n-1)}{2^n} = \text{Aprox.} = 2$$

5.- El abuelo promete a su nieto que si se comporta bien en días consecutivos le dará 1 e. el primer día, 1,5 e. el segundo, 2 el tercero, y así incrementando 50 céntimos cada día. Si un día no cumple se interrumpirá y lo pierde todo. ¿Cuánto le entregará al transcurrir los 30 días del mes actual?.

Sol: $\frac{527}{2}$ = 263,5 euros

6.- Un mendigo le propuso a un avaro lo siguiente: "Yo pagaré por permitirme dormir en tu casa, 5 e. el primer día, 6 el segundo, 7 el tercero, y así incrementado 1 e cada día. En cambio tú me abonarás, 5 céntimos el primer día, 10 el segundo, 20 el tercero, y así duplicado cada día. El avaro lo consideró un negocio y aceptó por 30 días".

¿Cuánto tiene que pagar cada uno?

Sol: El mendigo entrega según p.a.,
Total 585 euros

El avaro entrega según p.g.:

$S_{30} = 0{,}05.\ \frac{2^{30}-1}{2-1}$ = 53687091 euros

7.- Un determinado producto químico, pastilla de 5 gr., con el paso del tiempo se reduce a sus 2/3 cada 30 días.
a) ¿Qué cantidad queda cuando han transcurrido 180 días?
b) ¿Llegará a eliminarse por completo?. En caso negativo, ¿Qué cantidad queda al cabo de 50 meses?

Sol: a) $a6 = a1.r^5 = 5.(2/3)^5 = 0{,}658436$ grs.

b)No llega a eliminarse por completo.

$a50 = 5.(\frac{2}{3})^{49} = 1{,}176246.10^{-8}$ grs.

8.- Una rana se encuentra en el borde de la charca y salta hacia el centro que se encuentra a 4 m. En el primer salto avanza 2 m y en cada salto posterior avanza 1/2 de lo que avanza en el precedente.

a) ¿A qué distancia del centro se encuentra cuando ha dado 5 saltos.
b) ¿Conseguirá alcanzar el centro?. ¿Y si aguanta indefinidamente dando saltos?
c) ¿Cuántos saltos tiene que dar para situarse a 20 cm ó menos del centro?

Sol: a) $S_5 = 2.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}} = 4.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) =$
$= 3{,}875$ m ha avanzado

b)No en un número finito de saltos. Si permanece indefinidamente

$S_n = 2.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \rightarrow 2.\frac{1}{\frac{1}{2}} = 4\ m,$ justo en el centro.

c)$S_n = 2.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 4.(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)$, de donde

$3{,}80 : 4 = 1 - \frac{1}{2^n}$, $1 - 3{,}80:4 = \frac{1}{2^n}$,

$0{,}05 . 2^n = 1$,

Tomo logaritmos: ln(0,05) + n.ln(2) = 0, (recuerda que ln(1)=0) n = $-\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(2)}$ = -(-2,9957323) : 0,6931471 = 4,3219.. Necesita dar 5 saltos.

9.- A)Del Interés simple:

Pongo en el Banco un capital C, al 5%, cobrando los intereses mensualmente.
Incluyendo C = 5000 e. y los intereses I cobrados, ¿Qué cantidad consigo al cabo de 60 meses?

B)Del Interés Compuesto:
Los mismos datos pero a interés compuesto (No retiro los intereses).

Sol:
a) Al final del primer mes tengo C+i.C = C.(1+i)
Al final del segundo tengo C.(1+2.i), ... , es p.a. con d = 1. i = $\frac{5}{1200}$ = 0,0042

Al final a_{60} = 5000.(1 + 60.0,0042) = 6260 euros
I = 1260 e.

b)$M_n = C.(1+i)^n$, $M_{60} = 5000.(1{,}0042)^{60}$ = 6429,5863 euros; I = 1429,5863 e.

10.- Capitalización:

El día 1 de cada mes ingreso 200 e., que devengarán a mi favor interés compuesto al 5% anual. ¿Qué capital habré acumulado al final de 5 años? (Retirarlo al final del último mes)

Sol: i = $\frac{r}{1200}$ = 0,0042, n = 5.12 = 60 meses

Es p.g. con a1 = c.(1+i), r = (1+i), an = a1.$(1+i)^{n-1}$ = c.$(1+i)^n$

NO COPIAR

Suma $S_{60} = c.(1+i). \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$

S_{60} = 200.1,0042.(1,0042^{60} -1): 0,0042 = 13672,291 euros; I = 1672,2906 eur.

11.- Amortización:

Al final de cada mes ingreso c = 200 euros que generan intereses a mi favor, al 5% anual. El objetivo es conseguir un capital para amortizar durante 5 años una deuda (No entramos en otros detalles técnicos). Al final de los 5 años, ¿Qué capital habré acumulado? (final del último mes).

Sol: i = 0,0042, n = 60 meses

Es p.g. con a1 = c, r = (1+i), an = a1.r^{n-1} = c.$(1+i)^{n-1}$

$S_{60} = c. \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 200.[(1,0042)^{60} -1]: 0,0042 =$

= 13615,107 euros; I = 1615,1072 eur.

12.- La rana:

Una rana está situada en el borde de una charca circular de radio 4 m. Salta en dirección al centro de forma que en cada salto avanza 2/3 de lo avanzado en el anterior. El primer salto avanza 1 m.

a)¿Conserá alcanzar el centro?

b)¿Cuántos metros ha avanzado después de 5 saltos?

$$$oOo$$$

NO COPIAR

Tema 9

Introducción a las Series

NO COPIAR

9.1.- Introducción a las Series

NOTA:
En lo que sigue n -> ∞ indica ‘n arbitrariamente grande’. El símbolo ∞ lo llamamos ‘infinito’. El símbolo lím lo llamamos ‘límite’ e indica precisamente el valor que tomará su argumento cuando n se hace arbitrariamente grande.

Definiciones

Tenemos una sucesión ilimitada a1, a2, ..., an, ...

donde $a_i > 0$.

Llamamos serie de términos positivos a la expresión

a1 + a2 +... + an +... (1)

Formamos la sucesión de las sumas parciales

S1 = a1
S2 = a1+a2
S3 = a1+a2+a3
....
Sn = a1+a2+...+an

Pueden suceder tres casos:

a) La sucesión Sn tiene límite valor real:

   S = $\lim_{n\to\infty}(S_n)$, y decimos que la serie (1)

es ‘convergente’.

b) El término Sn se hace arbitrariamente grande cuando n→∞, positivo. Decimos que (1) es ‘divergente’, y que su límite es 'infinito': $\lim_{n\to\infty}(S_n) = \infty$. Si los términos Sn fuesen todos negativos (Serie de términos negativos) cambiaríamos el signo de cada término y después el signo del resultado.

c) No se cumple a) ni b) porque, cuando $n \rightarrow \infty$, los términos Sn oscilan sin 'marcar' una tendencia definida. Decimos que la serie es 'oscilante'. Esto puede ocurrir cuando en la serie figuran términos positivos y negativos.

9.2.- Series geométricas

Cuando los términos de la serie cumplen que a2 = = a1.k, a3 = a2.k, ..., an = a_{n-1}.k, ... la llamamos 'Serie geométrica' (análogo al caso de las p.g.)

En este caso Sn = a.$(1+k+k^2+...+k^{n-1})$)

$$k.Sn = a.(k+k^2+...+k^{n-1}+k^n)$$

$$Sn.(1-k) = a - a.k^n ,$$

$$Sn = \frac{a.(1-k^n)}{1-k} = \frac{a}{1-k} - \frac{a.k^n}{1-k}$$

Puede ocurrir:

a) Si /k/<1, entonces $k^n \rightarrow 0$, Sn $\rightarrow \frac{a}{1-k}$

b) Si k > 1, entonces $k^n \rightarrow$ oo, Sn $\rightarrow \infty$

c) Si /k/>1 y k<0, entonces $/k^n/ \rightarrow \infty$, y Sn $\rightarrow +\infty$, ó $-\infty$, de forma oscilante.

NO COPIAR

9.3.- Condición necesaria para la convergencia

Si Sn es convergente:

$S = \lim_{n\to+\infty}(S_n)$,

y también $S = \lim_{n\to+\infty}(S_{n-1})$,

Restando tengo $0 = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}(a_n)$,

y por tanto $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$

Condición necesaria para que la serie sea convergente es que su término general a_n tenga límite 0, cuando n → ∞

El siguiente caso muestra que puede cumplir la condición necesaria y ser 'divergente'.

9.4.- La Serie armónica $\sum_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

Llamamos Serie armónica, por antonomasia, a la serie

1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... + 1/n + ...

La llamamos así porque cada término es el inverso de la media aritmética de los inversos de los dos términos contiguos. Por ejemplo, los inversos de términos 1/3, 1/5, son 3, 5, su media aritmética es $\frac{3+5}{2}$ = = 4, y el inverso de éste es 1/4.

Esta serie es divergente, como demostramos a continuación.

De la serie dada paso a la siguiente sustituyendo 1/3 por 1/4, sustituyendo 1/5, 1/6, 1/7 por 1/8, y de la misma forma sustituyendo los términos desde $1/2^{j-1}$ hasta $1/2^j$ por $1/2^j$. Resulta

1+ 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 +
+ 1/8 + 1/8 + 1/16 + ...

Designo por a_n el término general de aquella, y por b_n el de ésta.

Evidentemente $b_n <= a_n$, y por tanto la suma de aquella será >= que la suma de ésta.

La suma de ésta la obtenemos agrupando términos como sigue:

1 + 1/2 + (1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8) +

+ (1/16+...+1/16) + (...) + ...

Cada (...) nos da 1/2, de modo que tengo una nueva serie

1 + 1/2 + 1/2 +...+ 1/2 +...

La suma parcial Tn de ésta toma el valor
Tn = 1 + n/2, que se hace arbitrariamente grande cuando n → ∞.
Es divergente, y por tanto también lo es aquella.

NOTA: Recordamos para 'refrescar' los siguientes conceptos.

Media aritmética (o simplemente 'la media'):

$$me = \frac{a1+a2+\ldots+an}{n}$$

Media geométrica:

$$mg = \sqrt[n]{a1.\, a2.\ldots.\, an}$$, radical de

NO COPIAR

índice n del producto.

Media armónica:

Es la inversa de la media aritmética de los inversos $ma = \frac{1}{me'}$, donde me' es la media aritmética de los inversos $1/a^j$

$$me' = \frac{1/a1+1/a2+\ldots+1/an}{n}$$

Queda $ma = \frac{n}{1/a1+1/a2+\ldots+1/an}$

9.5.- Serie armónica generalizada

Llamamos así a las series de la forma

$$1 + 1/2^a + 1/3^a + ... + 1/n^a + ... \text{, donde}$$

'a' es un valor real fijo > 0.

Se ha podido demostrar (aunque aquí no lo hagamos) que su comportamiento, dependiendo del valor a, es el siguiente:

- Si a>1, converge
- Si a<=1, diverge

Esta serie será útil como criterio de convergencia de otras series.

9.6.- Series con todos sus términos positivos

En este caso será 'convergente' o 'divergente', nunca oscilante.

Sea la serie de términos positivos

a1 + a2 +... + an +... (1)

Formamos la sucesión de las sumas parciales

S1 = a1
S2 = a1+a2
S3 = a1+a2+a3
....
Sn = a1+a2+...+an

Evidentemente se cumple $S_n > 0$, y además

S1 < S2 < S3 < ... < Sn

Supongamos que es convergente, entonces

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_n S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n+1} S_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n+1} S_{n+1} - \sum_n S_n \right) = 0$$

Además, puesto que la sucesión
S1 < S2 < S3 < ... < Sn …
es creciente, para que la suma S sea un valor real (finito) esta sucesión ha de estar acotada.

Conclusión:

La condición necesaria para que la serie (1) converja es que:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
b) S_n está acotada: Existe M tal que

$S_n < M$, para todo n → ∞

9.7.- Criterios de convergencia para series de términos positivos

a) **Criterio general de comparación:**
Si desde un lugar k en adelante es $a_n <= b_n$, y b_n converge, también an es convergente.

b) **Criterio de D'Alambert:**
Si desde un k en adelante es $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ < r, con r < 1, entonces {an} es convergente.

Si desde un lugar k es $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ >= 1, entonces es divergente.

c) **Criterio de Cauchy:**

Si desde un k en adelante es $\sqrt[n]{a_n}$ < r, r<1, entonces a_n es convergente.

Si desde un lugar k en adelante (o para infinitos términos) es $\sqrt[n]{a_n}$ >=1, entonces es divergente.

No es prudente continuar con este tema, ya que queda fuera del objetivo de este trabajo. Hemos pretendido sólo una introducción.

$$$$oOo$$$$

NO COPIAR

PROBLEMAS Resueltos ó Semi-resueltos

De Números

1.- De las siguientes afirmaciones ¿Cuáles son ciertas y cuáles no? (P = {primos}). El conjunto universo de trabajo es el conjunto C de los Complejos.

-7∈ N, -6∈ Q, 11∈ P, $\frac{1}{2} \in Z$, $\sqrt{2} \in Q$, $\sqrt{2} \in Q'$,
$\sqrt[3]{8} \in N$, $\sqrt{\frac{9}{4}} \in Q$, $\sqrt{-5} \in R$, $\sqrt{-4} \in R$, 3.pi ∈ Q'

Sol.: En el orden dado:
Falsa, cierta, cierta, false, falsa, cierta, cierta, cierta, falsa, false, cierta.

2.- De las siguientes afirmaciones ¿Cuáles son ciertas y cuáles no? (P = {primos}). El conjunto universo de trabajo es el conjunto C de los Complejos.
$-5 \in Z$, pi∈ Q, 15∈ P, $\frac{1}{2} \in Z$, $\frac{1}{2} \in Q$, $\sqrt{2} \in Q'$,
3.pi∈ R, $\sqrt[3]{27} \in N$, $\sqrt[3]{-27} \in N$, $\sqrt{\frac{9}{4}} \in Q$, $\sqrt{-4} \in R$, $\sqrt{-1} \in C$,
3.pi ∈ Q' , $\sqrt[3]{-27} \in Z$

Sol.: En el orden dado:
Verdad, Falsa, Falsa, Falsa, Verdad, Verdad, Verdad, Verdad, Falsa, Verdad, Falsa, Verdad, Verdad, Verdad

3.- Expresa mediante desigualdades las siguientes afirmaciones:

a)
‘x está a la derecha de 8’
‘x está a la izquierda de 0’
‘x está entre -3 y 7’
‘x está entre 5 y 1’

b)Resuelve $|x| <= 0$

Sol.: En el orden dado:
$8 < x$, $x < 0$, $-3 < x < 7$, $1 < x < 5$
Necesariamente ha de ser $x = 0$, ya que
$|a| >= 0$ siempre

4.- Calcula los siguientes:
$|-3+5|$, $|3-5|$, $|-2|+|-4|$, $|-5|-|-2|$,
$||3|-|-7||$

Sol.: En el orden dado:
2, 2, 6, 3, 4

5.- Expresar las siguientes de modo que quede x despejada pero situada en el centro de una desigualdad:
$3<x-4<8$, $-1<x+3<2$, $-9<3x<12$, $-6<-2x<4$,
$3<2x-5<7$, $-7<-2x+3<5$

Sol.: En el orden dado:
$3<x<12$, $-4<x<2$, $-3<x<4$, $-3<-x<2$ -> $3>x>2$ ->
-->$2<x<3$, $3<2x<12$ -> $3/2 < x < 6$, $-10<-2x<5$ ->
--> $-5 < -x < 5/2$ --> $-5/2 < x < 5$

NO COPIAR

6.- Expresarlas de modo que no lleve el operador |.| :

$|x|<3$, $|x-2|<5$, $|2x+3|<7$

Sol.: En el orden dado

$-3<x<3$, $-5<x-2<5$ -> $-5<x<7$, $-7<2x+3<7$ ->
--> $-7<2x<4$ -> $-7/2 < x < 2$

7.- Exprésalas utilizando el operador |.| :

$-2<x<6$, $4<x<10$

Sol.: $-2<x<6$ -> $-4<x-2<4$ -> $|x-2|<4$
$4<x<10$ -> $-3<x-7<3$ -> $|x-7|<3$

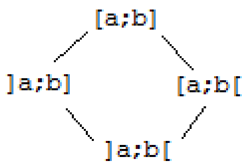
15.- Expresar los siguientes intervalos en formato explícito:
A = [-3;5[, B =]3;8[, C = [0;4], D =]-7;-2]

Sol.: En el orden dado
A = {x; $-3 <= x < 5$}, B = {x; $3 < x < 8$}
C = {x; $0 <= x <= 4$], D = {x; $-7 < x <= -2$}

8.- Dados los valores reales a, b tales que a < b, Construye el diagrama para los intervalos

]a;b[, [a;b],]a;b], [a;b[

Sol.:



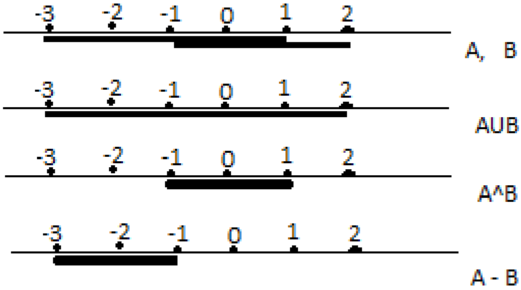
9.- Sean los intervalos

A = [-3;1[, B = [-1;2]

1) Representa A y B sobre la misma recta real
2) Representa AUB, A^B, A-B sobre rectas reales

3) Expresa AUB, A^B, A-B en forma de intervalo

Sol.: En el orden dados



De Sucesiones:

1.- Determina:

a) a6, a6 – a5 , en la sucesión $a_n = \frac{1-n}{2+n}$

b) a10, a10 –a9, en la sucesión $a_n = \frac{n^2-2}{1+2n^2}$

c) a15, a15 – a14, en la sucesión $a_n = \frac{3n+5}{5n-2}$

Sol.: a) a6 = -5/8, $\frac{-5}{8} - \frac{-4}{7} = \cdots . = \frac{-3}{56}$

b) a10 = 98/201, $\frac{98}{201} - \frac{79}{163} = \frac{95}{32763}$

c) a15 = 50/73, $\frac{50}{73} - \frac{47}{68} = \frac{-31}{4964}$

2.- Determina su carácter:

a) $a_n = \frac{n-3}{n+4}$, b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

c) $a_n = 2n^2 - 5$, d) $a_n = \frac{(-1)^n.(4n+3)}{2n-5}$

Sol.: a) $a_n \to 1$; b) $a_n \to 0$ (oscilando)

c) $a_n \to \infty$; d) $a_n \to \pm 2$

3.- Determina a partir de qué valor de n los valores quedan dentro del interval (1-0,001; 1+0,001), en las siguientes:

a) $a_n = \frac{n}{n-3}$; b) $a_n = \frac{2n}{2n+5}$ c) $a_n = \frac{3-n}{5-n}$

Sol.: a) $\left|\frac{n}{n-3} - 1\right| < 0{,}001 \to \left|\frac{3}{n-3} < \frac{1}{1000}\right| \to 3003 < n$

$$b) \left|\frac{2n}{2n+5} - 1\right| < 0{,}001 \to \begin{cases} \frac{2n}{2n+5} - 1 < 0{,}001 \\ \text{ó} \\ 1 - \frac{2n}{2n+5} < 0{,}001 \end{cases} \to$$

$0 < \frac{5}{2n+5} < \frac{1}{1000} \to 4995 < 2n$, $n > 2497{,}5$, $n > 2497$

c) $\to \frac{-2}{5-n} < \frac{1}{1000} \to \frac{n-5}{2} > 1000$, $n > 2005$

4.- Calcula el límite cuando $n \to \infty$

a) $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$; b) $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+4}$

c) $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+4}$; d) $a_n = \frac{n^2-3}{5n+4}$

Sol.: Observa que en todos los casos dividimos por la mayor potencia de n.

a) Divido entre n: $\frac{2n-1}{3n+2} \to \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3}$, ya que $1/n$ y $2/n \to 0$

b) Divido entre n^2: $\frac{3n+1}{2n^2+4} \to \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}} \to \frac{0}{2} = 0$

c) Divido por n^2: $\frac{2n^2-3}{n^2+4} \to \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \to \frac{2}{1} = 2$

d) Divido por n^2: $\frac{n^2-3}{5n+4} \to \frac{1-\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{0}$ no real

(es el ∞)

PROGRESIONES aritméticas

1.- Resuelve:

a) Interpola 5 medios diferenciales entre
a = 10 y b = 40,
Entre a = 3/5 y b = 23/5

Sol.: $a_1 = 10$, $a_7 = 40$

Fórmula de la interpolación: $d = \frac{b-a}{m+1}$

d = (40-10)/(5+1) = 5 -> a2=15, a3=20,

a4=25, a5=30, a6=35

d = (23/5 -3/5)/(5+1) = $\frac{20/5}{6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) Halla el valor de la diferencia 'd':
a1 = 23, a17 = 31,
a19 = -14, a24 = 16,

Sol.: Fórmula: $a_n = a1 + (n-1).d$
$a_n = ak + (n-k).d$

a17 = a1 +16.d -> d = $\frac{31-23}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

a24 = a19 +(24-19).d -> d = $\frac{16-(-14)}{5} = \frac{30}{5} = 6$

2.- Calcula la suma de:

a) Los 40 primeros múltiplos de tres
b) Los 120 primeros impares

NO COPIAR

c) Los múltiplos de seis comprendidos entre 100 y 1000

Sol.: a) a1 = 3, a40 = a1 +39.3 = 120

$S_{40} = \frac{3+120}{2} .40 = 123.20 = 2460$

b) a1 = 1, a_n = a1 + 119.2 = 239

$S_{120} = \frac{1+239}{2} .120 = 240.60 = 14400$

b) 100/6 = 16,..; a1 = 17.6 = 102

1000/6 = 166,..; a_n = 166.6 = 996

996 = 102 +(n-1).6 -> n-1 = $\frac{894}{6} = 149$ -> n = 150

$S = \frac{102+996}{2} .150 = \frac{1098}{2} .150 = 549.150 = 82350$

3.- Resuelve

a) $a_1 = 3$, $a_n = 21$, S = 120; Calcula: d y n

b) $a_1 = 20$, d = 2, S = 780; Calcula: a_n y n

Sol.: a) 21 = 3 +(n-1).d

120 = (3+21).n/2 = 12.n -> n = 10

21 = 3 + 9.d -> d = 18/9 = 2

c) a_n = 20 + (n-1).2 = 18 +2.n

780 = $(20+a_n)$.n/2 = $\frac{20+18+2.n}{2} .n = \frac{38+2n}{2} .n$

780 = 19.n + n^2 -> n^2 +19n -780 = 0

Resulta: n = 20, a_{20} = 58

PROGRESIONES geométricas

4.- Resuelve

a) Calcula el valor de r (la razón) sabiendo que

$a_1 = 2/9$, $a_6 = 54$

b)Interpola 5 ‘medios proporcionales’ entre 81/4

y 16/9

c)Calcula el medio proporcional entre

1/8 y 1/2 ; m/n y n/m

Res.: a) Fórmulas: $an = a1.r^{n-1}$, $an = ak.r^{k-1}$

$$54 = \frac{2}{9}.r^5 \rightarrow 486 = 2.r^5 \rightarrow r^5 = 243, \quad r = 3$$

b)Fórmula: Entre a1 y an tenemos intercalados n-2 términos. Para ‘llegar’ desde a1 hasta an ‘multiplico (n-2)+1 = n -1 veces’ por r, de modo que $an = a1.r^{n-1}$. Si intercalo m entre ‘a’ y ‘b’, para llagar desde a hasta b he de multiplicar m+1 veces por r, y por tanto

$$b = a.r^{m+1}, \quad \frac{16}{9} = \frac{81}{4}.r^6 \rightarrow r^6 = \frac{64}{729} = \frac{4^3}{9^3},$$

$$r^2 = 4/9 \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

c) Fórmula-Definición: $mp = \sqrt{a.b}$

$$mp = \sqrt{\frac{1}{8}.\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$mp = \sqrt{\frac{m}{n}.\frac{n}{m}} = 1$$

5.- Resuelve

a) Calcula la suma de los nueve primeros de

9/2, 3/2, 1/2, …

b)Calcula el producto de los seis primeros de

$\sqrt{3}$, $3.\sqrt{3}$, $9.\sqrt{3}$, ...

c)Calcula la suma de la p.g. ilimitada

3, 3/2, 3/4, 3/8, ….

Res.: a) a1 = 9/2, r = 1/3, a9 =
= $9/2.(1/3)^8$ = $1/2.(1/3)^6$

Suma: Sn = $\frac{an.r-a1}{r-1} = \frac{a1.(r^n-1)}{r-1}$;

$S_9 = \frac{\frac{9}{2}.(\frac{1}{3^9}-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3.(1-3^9)}{2.3^9.(-2)} = \frac{(1-3^9)}{-4.3^8} = \frac{3^9-1}{4.3^8} = \cdots.. =$
$6.\frac{1093}{1458}$

b) a1 = $\sqrt{3}$, r = 3, a6 = $\sqrt{3}.3^5$

Fórmula: $P_k = \sqrt{(a1.ak)^k}$

$P_6 = \sqrt{\left(\sqrt{3}.3^5.\sqrt{3}\right)^6} = (3^6)^3 = 3^{18}$

c) a1 = 3, r = 1/2,

Fórmula: S = $\frac{-a1}{r-1} = \frac{a1}{1-r}$; S = $\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$

6.- Resuelve

a) De una p.g. conocemos:

$r = 2$, $n = 7$, $S_7 = 635$; halla a1 y an

b) Calcula la fracción generatriz de la expresión decimal: 0,189189189…

c) Calcula la fracción generatriz de

0,84515151….

Res.: a) an = $a1.2^6$, $635 = \frac{a1.(2^7-1)}{2-1}$,

$a1 = \frac{635}{127} = 5$, $a_7 = 320$

b) Formo la p.g. ilimitada

a1 = 0,189, a2 = 0,000189, …. , r = 1/1000

$$S = \frac{0{,}189}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{189}{999}$$

c) Tengo en cuenta que 0,84515151…. = 0,84 +

+ 0,0051 + 0,000051 + …

Hago a1 = 0,0051, r = 1/10000,

$$S = 0{,}84 + \frac{0{,}0051}{1-\frac{1}{10000}} = \frac{84}{100} + \frac{51/10000}{9999/10000} = \frac{84.9999+5100}{999900}$$

$$\text{ó bien: } \frac{84}{100} + \frac{51}{9999} = \frac{84}{100} + \frac{17}{3333} = \cdots.$$

7.- En una p.g. a1 = 7, an = 448, Sn = 889. Determina el valor r y n

Sol.: $\begin{cases} 448 = 7.r^{n-1} \\ 889 = \frac{7.(r^n-1)}{r-1} \end{cases}$ -> $\begin{cases} r^{n-1} = 64 \\ 127 = \frac{64.r-1}{r-1} \end{cases}$ ->

127.r -127 = 64.r -1, 63.r = 126, r = 2

$2^{n-1} = 64 = 2^6$ -> n-1 = 6, n = 7

8.- La suma de una p.g. ilimitada es 2, y

a1 = 1/2. Determina el valor de r.

Sol.: S = $\frac{a1}{1-r}$, $2 = \frac{\frac{1}{2}}{1-r}$, 4.(1-r) = 1, -4.r = -3,

r = 3/4

9.- Determina el valor de x que hace que los términos: 2x+1, 4x+2, 7x+5, formen parte de una p.g.

Sol.: $\frac{4x+2}{2x+1} = \frac{7x+5}{4x+2}$ -> $(4x+2)^2 = (2x+1).(7x+5)$,

$16x^2 +16x +4 = 14x^2 +17x +5$,

$2x^2 -x -1 = 0$ -> x = 1, x = -1/2,

Tomamos x = 1, y tengo: 3, 6, 12

10.- Supongamos que sobre un tablero de ajedrez (64 casillas) colocamos: una avellana en el primero, dos en el segundo, 4 en el tercero, 8 en el cuarto, …., y así hasta completar el tablero.

¿Cuántas avellanas van en la casilla nº 64?. ¿Cuántas hemos colocado en total? (suponiendo que esto fuese posible).

Sol.: $a1 = 1$, $r = 2$, $an = a1.2^{n-1}$

$a_{64} = 1.2^{63} = \ldots.$; $S_{64} = \frac{1.(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} - 1 = \ldots$

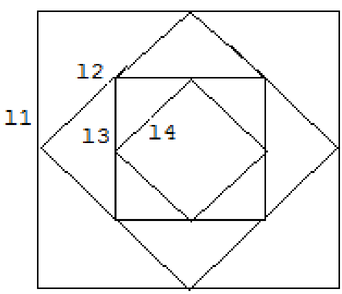
11.- Tengo un cuadrado C1 con l = 1 m. Uniendo los puntos medios obtengo el cuadrado C2. Uniendo los puntos medios de los lados de éste obtengo otro cuadrado C3, … , y así sucesivamente. Deseamos calcular: a) La suma de sus perímetros, y b) La suma de sus áreas.

Sol.: Observa la figura

Los lados nos llevan a la p.g. donde: a1 =1,

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para la suma de los perímetros la razón es mayor que uno, y por tanto la SUMA resulta ilimitadamente elevada (grande). Veamos las áreas.



$l1 = 1$

$l2 = \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/2 .1$

$l3 = 1/2 = \sqrt{2}/2.\sqrt{2}/2$

$l4 = \sqrt{2}/2.1/2$

....

$a1 = 1$, $r = \sqrt{2}/2$

NO COPIAR

Áreas:

A1 = 1, A2 = $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, A3 = $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.A2$,

A4 = $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ $.A3$, …. Podemos concluir que forman p.g. con

A1 = 1, r = 1/2 (< 1)

Esta p.g. sí es SUMABLE: S = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\ m^2$

12.- Tengo un triángulo equilátero con l = 1 m. Uniendo los puntos medios obtengo otro triángulo equilátero, y repitiendo esta operación obtengo una sucesión de triángulos rectángulos.

a) Comprueba que la razón r1 de la sucesión l_n de la longitud de sus lados es r1 = 1/2.

b) Comprueba que el área del primero es A1 = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) Comprueba que la razón r2 de la sucesión A_n de sus áreas es r2 = 1/4.

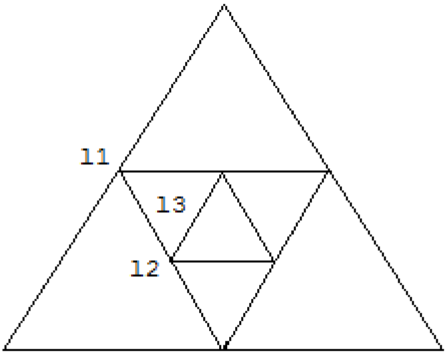
d) Calcula la suma de la sucesión ilimitada de las áreas.

e) Calcula el valor de la suma de todos los perímetros.

Sol.: Observa la figura

b) Valor A1: h = $\frac{1.\sqrt{3}}{2}$, A1 = $\frac{1}{2}$ .1.$\frac{1.\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) S = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



l1 = 1
l2 = 1/2
l3 = 1/4
....

r = 1/2

e) Para la suma de los perímetros: P1 = 3.1 = 3

$$S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$$

13.- De una cuba llena de vino cuya capacidad es 512 litro, sacamos el 1 de Noviembre la mitad de su contenido. El día 2 sacamos la mitad de lo que quedó, y el día 3 sacamos de nuevo la mitad del resto, y así continuamos sacando siempre la mitad de lo que queda.

¿Qué cantidad hemos sacado el día 20 de Noviembre?

Sol.: a1 = 512, r = 1/2, $a_n = a1.r^{n-1}$

$$a_{20} = 512.(\frac{1}{2})^{19} = \frac{512}{2^{19}} = \frac{2^9}{2^{19}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

14.- Un sirviente le propone a su amo lo siguiente: ‘Usted me abonará 0,01 céntimos el primer día, 0,02 céntimos el segundo

día, 0,04 el segundo, y así multiplicando por dos cada día. En cambio Yo, por el alojamiento, pagaré 1 euro el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero, y así sumando uno cada día. El amo aceptó por 30 días. Realiza el balance final.
Sol.: Lo que recibe el sirviente forma una p.g. con a1 = 0,01 cént. de euro, siendo la razón r = 2.
$a_{30} = 0,01/100.2^{29} = 5368709,1$ euros

Suma = $\frac{a_{30}.r-a1}{r-1} = \frac{10737418-0,0001}{1} = 10737417,9999\ euros$

Lo que pagará el sirviente forma p.a. con b1 = 1,
d = 1, $b_{30} = 1 + 29.1 = 30$
Su Suma = $\frac{b1+b30}{2}.30 = \frac{31}{2}.30 = 31.15 = 465\ euros$

¡Saca conclusión!

MATEMÁTICA MERCANTIL

15.- Un capital C colocado al 6 % de interés simple, ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?

Sol.: 3.C = C + $\frac{C.6.t}{100}$ -> 2.C = $\frac{6.C.t}{100}$, 100.C = 3.C.t,

100 = 3.t , t = 33,33 años

16.- Un capital C es colocado al 3 % de interés compuesto. ¿En qué se ha convertido al final de n años?. ¿Qué representan los interés?

Sol.: Haciendo i = r/100 = tanto por uno

$C1 = C.(1+i)$ al final del primer año

$C2 = C1.(1+i) = C.(1+i)^2$ al final del segundo

………..

$Cn = …. = C.(1+i)^n$ al final del año n

En nuestro caso: $M = C.(1,03)^n$; $I = M – C$

17.- .- Un capital C es colocado al 6 % de interés compuesto. ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?.

Sol.: $3.C = C.(1,06)^n$, $3 = (1,03)^n$

Necesitamos aplicar logaritmos (tomamos base 10): $\log(3) = n.\log(1,03)$, (Compruébelo el alumno)

$$n = \frac{\log(3)}{\log(1,06)} = \frac{0,477121}{0,025306} = 18,85 \text{ años}$$

(Compara con el resultado del nº 15)

CAPITALIZACIÓN

Notas de Teoría:

Deseo formar un capital M a lo largo de n años ingresando en el Banco una cantidad m el día 1 de cada mes, y de forma que genere intereses del r % anual, que se acumulan al montante ingresado (interés compuesto). Deseo saber qué cantidad m he de ingresar cada primero de mes. Razonamos como sigue:
Número de períodos: $np = 12.n$,

NO COPIAR

Tanto por uno mensual: $i = \frac{r}{1200}$

Nº ingreso:	Se convierte en:
1	$m.(1+i)^{np}$
2	$m.(1+i)^{np-1}$
3	$m.(1+i)^{np-2}$
…………………………………………..	
np-1	$m.(1+i)^{2}$
np	$m.(1+i)$

Las cantidades ingresadas más los intereses generados acumulan el siguiente montante (Observa que la suma lleva a p.g. con a1 = (1+i), razón = (1+i)):

$$M = m.\frac{(1+i)^{np+1}-(1+i)}{(1+i)-1} = m.\frac{(1+i).[(1+i)^{np}-1]}{i}$$

de donde: $m = \frac{M.i}{(1+i).[(1+i)^{np}-1]}$

Ejemplo: M = 500000 euros, r = 3 %, n = 20 años

Determina la mensualidad m y el importe de los intereses.

Sol.:

$i = 3/1200 = 0{,}0025$, $np = 240$
$M.i = 1250$, $(1+i)^{240} = 1{,}0025^{240} = 1{,}820755$

$(1+i)^{np} – 1 = 0{,}820755$

$(1+i).[(1+i)^{np} -1]=1{,}0025.0{,}820755=0{,}822807$

$m = \frac{1250}{0{,}822807}$ = 1519,1898 euros/mes

Intereses: Las cantidades ingresadas dan la cantidad final:

$$C = 240.1519{,}1898 = 364605{,}55 \text{ eur.}$$

el resto: 500000 – 364605,55 = 135394,45 eur.

son intereses acumulados.

AMORTIZACIÓN

Notas de Teoría:

He recibido la cantidad C como préstamo al r’ % anual y que he de devolver en n años, más los intereses que pueda generar a favor del prestamista. Llamaré M al montante de la deuda: $M = C.(1+i')^n$. Pactamos amortizar esta deuda ingresando la cantidad m el último día de cada mes, y de forma que estas cantidades generan intereses a mi favor del r % anual, que se van acumulando a la cantidad total ingresada.

Razonamos como sigue:
Número de períodos: np = 12.n ,
Tanto por uno mensual: $i = \frac{r}{1200}$, $i' = \frac{r'}{100}$

Nº ingreso:	Se convierte en:
1	$m.(1+i)^{np-1}$
2	$m.(1+i)^{np-2}$
3	$m.(1+i)^{np-3}$
………………………………	………………..
np-1	$m.(1+i)$

Las cantidades ingresadas más los intereses generados han de dar un montante igual a la deuda M (Observa que la suma lleva a p.g. con a1 = (1+i), razón = (1+i)):

$$M = m.\frac{(1+i)^{np}-1}{(1+i)-1} = m.\frac{(1+i)^{np}-1}{i}$$

de donde: $m = \frac{M.i}{(1+i)^{np}-1}$

Ejemplo: C = 500000, r' = 5 %, n = 20, r = 3 %

Determina la mensualidad m, y los intereses abonados por un lado, y los generados a mi favor.

Sol.: np = 240, i' = 0,05, $i = \frac{3}{1200} = 0{,}0025$

$M = C.(1+i')^{20} = 500.000.(1{,}05)^{20} = 1326648{,}90$ eur.

$M.i = 1326648{,}90.0{,}0025 = 3316{,}6221$

$(1+i)^{np} = 1{,}0025^{240} = 1{,}820755$

$m = \frac{3316{,}6221}{0{,}820755} = 4040{,}9405$ eur.

Análisis de los intereses:

A favor del Prestamista: $I' = C.(1+i')^{20} - C =$

$= 1326648{,}90 - 500000 = 826648{,}90$ eur.

A mi favor: I = M -240.4040,9405 = 1326648,90 – 969825,72 = 356823,18 eur.

Ejemplo práctico: Compra de un piso

C = 180000 eur., r' = 4 %, r = 2 %, n = 20

Determina la mensualidad y analiza los intereses.

Sol.: i' = 0,04, i = 2/1200 = 0,001666,

np =240

$M = 180000.(1{,}04)^{20} = 180000.2{,}191123 = 394402{,}17$

M.i = 657,074010,

$(1+i)^{np} = 1{,}001666^{240} = 1{,}491090$

$m = \frac{657{,}074010}{0{,}491090} = 1337{,}9910$ eur.

Análisis de los intereses:

I' = M-C = 214402,17 eur., para prestamista

np.m = 240.1337,9910 = 321117,84 eur.

I = M – np.m = 394402,17 – 240.1337,9910 =

= 73284,33 eur., a mi favor.

Otro ejemplo: Compro piso e hipoteco una parte

C = 100.000, i' = 4 %, i = 2 % , n = 20

Se pide lo mismo de antes

NO COPIAR

Sol.: i' = 0,04, i = 2/1200 = 0,001666,

np = 240

M = 100000.$(1{,}04)^{20}$ = 100000.2,191123 = 219112,30

M.i = 365,0411,

$(1+i)^{np} = 1{,}001666^{240} = 1{,}491090$

m = $\frac{365{,}0411}{0{,}491090}$ = 743,3283 eur.

Análisis de los intereses:

I' = M-C = 119112,30 eur., beneficio del Banco

np.m = 240.743,3283 = 178398,79 eur.

I = M – np.m = 219112,30 – 240.743,3283 =

= 40713,5080 eur., a mi favor

Beneficio neto del Banco: B = I'-I = 137685,28 eur

% : B/C . 100/n = 6,8843 % interés anual simple

NO COPIAR

APÉNDICE 1: COSAS curiosas sobre números
Fracciones continuas

1.- Cosas curiosas sobre Números

0) El extraño $\sqrt{-1}$

El cero: “El cero es el ‘no ser’”. Hace ‘existir la no existencia’. En el sistema decimal es esencial para diferenciar entre 38 y 308.

1) El número de números primos menores que 100.000.000 es 5.671.455

2) 220 y 284: “La suma de los divisores de 220 es 284 y la suma de los divisores de 284 es 220”. Son números amigos. También lo son: 1184 y 1210

3) El número 28: “La suma de sus divisores coincide con él mismo”. Es un número perfecto.
Son números perfectos: 6, 496, 8128, 33550336, 8589869056.

4) El número 14: “La suma de sus divisores es 1+2+7=10 < 14”. Es un número deficiente.

El número 18: “La suma de sus divisores es 1+2+3+6+9=21 > 18. Es un número abundante.

5) 1+2+3+ ... + n = $\frac{n.(n-1)}{2} + n$

6) “El par de números 17, 19 son gemelos”. También lo son: 41 y 43.

El Cuadro de Durero

Cuadro de Durero

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Siguiend cualquier linea la
suma nos da 34.
Consigue otra distribución.

2.- Fracciones continuas:

Hoy día carecen de utilidad debido a las nuevas técnicas de cálculo.

Cociente $8/5 = 1 + 3/5 = 1 + \frac{1}{5/3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{2}{3}} =$

$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \ ,$$

A esta última expresión la llamamos ‘fracción continua’.

Tomamos esta última expresión, retrocedemos por el camino anterior y veremos lo que ocurre:

NO COPIAR

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{2}{5} = \frac{(5+2)}{5} = 7/5\ ,$$ ¿Qué ha pasado?

Seguro que el alumno encuentra el error cometido, y volverá a realizar los cálculos correctamente para obtener el resultado correcto: 8/5.

$7/5 = 1 + 2/5 = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$, y aquí finaliza.

El alumno realizará el proceso inverso para llegar a 7/5.

Del mismo modo podemos obtener la expresión continua de cualquier fracción irreducible a/b.

También es posible aplicar lo anterior al caso de los radicales obteniendo una aproximación de dicho radical mediante una expresión 'fracción continua'. Pero este asunto carece de interés en el contexto actual de las Matemáticas, y sólo nos llevaría a 'martirizarnos' inútilmente.

NO COPIAR

APÉNDICE 2: NOTACIÓN exponencial

Cuando tenemos una expresión decimal, que representa un valor real
'pequeño', por ejemplo: 0,000341245, resultar más cómodo expresarlo
de la siguiente forma:

$$0{,}000341245 = 3{,}41245.10^{-4}$$

tomando la expresión

$$3{,}41245.10^{-4}$$

El criterio consiste en hacer que la parte entera contenga un dígito y el exponente tomará el valor necesario para que las dos expresiones
sean equivalentes.

También puede interesar cuando tenemos catidades 'muy elevadaas', por ejemplo:

$$25000000000 = 25.10^{9} = 2{,}5.10^{10}$$

OPERACIONES con estas expresiones:

SUMA/Resta: Sólo son posible si tienen el mismo exponente

$$2{,}34.10^{-2} + 4{,}238.10^{-3} = 23{,}4.10^{-3} + 4{,}238.10^{-3} =$$

$$= (23{,}4 + 4{,}238).10^{-3} = 27{,}638.10^{-3}$$

que representa el valor: 0,027638

PRODUCTO: Cualesquiera

$2,34.10^{-2} * 4,238.10^{-3} = (2,34 * 4,238).10^{-2}.10^{-3} =$
$= (2,34 * 4,238).10^{-5} = 9,91692.10^{-5}$

que representa el valor: 0,0000991692

Recuerda que $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$

DIVISIÓN: Cualesquiera

$2,34.10^{-2} : 4,238.10^{-3} = (2,34 : 4,238).(10^{-2} : 10^{-3}) =$

$= (2,34 : 4,238).10^{1} = 0,5521472.10 = 5,521472$

que representa el valor: 5,521472

Recuerda estas dos cosas
$(a.b):(c.d) = (a:b).(b:d)$
$a^n : a^m = a^{n-m}$

POTENCIA: Cualesquiera

$(2,34.10^{-2})^{-3} = 2,34^3 \,.\, 10^{-6} =$

$= 12,812904.10^{-6} = 1,2812904.10^{-5}$

que representa el valor: 0,000012812904

Recuerda que $(a.b)^n = a^n \,.\, b^n$
$(a^n)^m = a^{n.m}$

RADICAL: Cualesquiera

$rad(2,34.10^{-2} ;5) = rad(2,34;5).rad(10^{-2} ;5) =$

NO COPIAR

$= (2{,}34)^{\frac{1}{5}}\ .\ (10^{-2})^{\frac{1}{5}}) = (2{,}34)^{\frac{1}{5}}\ .\ 10^{-\frac{2}{5}} =$

$= (2{,}34)^{\frac{1}{5}} : 10^{\frac{2}{5}} = 1{,}1853406 : 2{,}5118864 =$

$= 0{,}4718926$

¡Suficiente!

NO COPIAR

APÉNDICE 3: Sobre el Número de oro

Defi.:

Sea la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que nos da las soluciones $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Llamamos 'Número de oro' a la solución positiva $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es habitual representarlo por $\emptyset$

Otra forma de introducirlo es la siguiente:

Tomo un segmento de longitud L = 1, y lo divido en dos partes: Una de longitud x, $x > \frac{1}{2}$, la otra de longitud 1-x.

Estudiamos ahora la proporción $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$

Operando $1 - x = x^2$, $x^2 + x - 1 = 0$, cuyas soluciones son $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Tomando la solución positiva, al hacer el cociente $\frac{x}{1-x}$ vamos a obtener el número de oro:

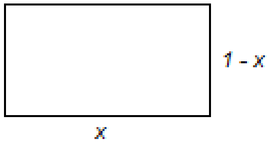
$$\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \ldots = \frac{-3-\sqrt{5}+3.\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{2+2.\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si hacemos el cociente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1'618...

Conclusión:

La razón entre la parte mayor y la parte menor nos da el número de oro.

Llamamos Rectángulo áureo (de oro) a cualquier rectángulo cuyos lados guarden la misma proporción que los del rectángulo



Otra aparición del Número de oro:

La Sucesión de Fibonacci

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

En esta sucesión, a partir del segundo término, cada término es la suma de los dos términos precedentes.

Por cálculo directo podemos comprobar que el cociente a_n/a_{n-1} se aproxima tanto como deseemos al valor 1'6181818...

Puesto que éste es al resultado del cociente

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'6181818...$$

podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Demostración: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{L}$

Tengo así: $L = 1 + \frac{1}{L}$, de donde $L^2 - L - 1 = 0$, cuyas soluciones son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de las que la positiva es el número de oro.

NO COPIAR

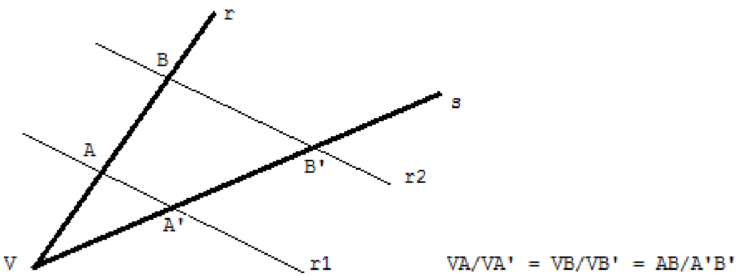
APÉNDICE 4

Teorema de Thales. El Rectángulo áureo y Corolarios del Número de oro

En el Plano: Teorema de Thales

Suponemos que tenemos la longitud de los segmentos que intervienen.

Teorema (de Thales):



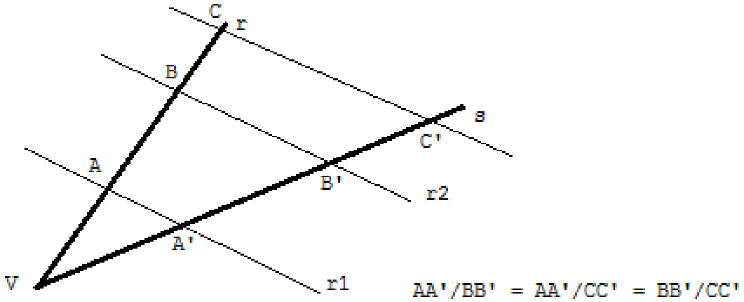
Como muestra la figura:

Dadas dos semirectas r y s con el punto V común. Dos rectas r1, r2 paralelas entre sí las cortan produciendo segmentos proporcionales:

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

También

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AA'}{CC'} = \frac{BB'}{CC'}$$



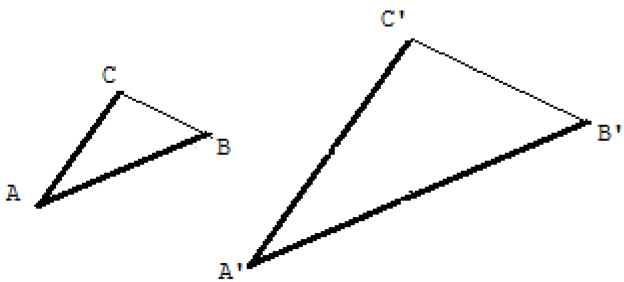
Triángulos semejantes:

En la figura se vislumbra la semejanza de los triángulo
AVA’ y BVB’

Defi.:

En general se define la semejanza de dos triángulos ABC, A’B’C’ si sus lados homólogos satisfacen la igualdad

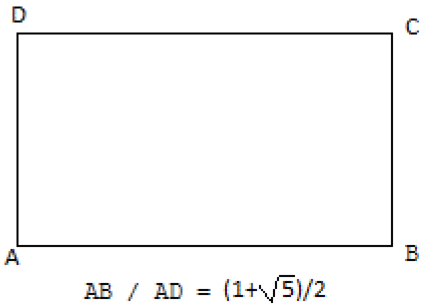
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



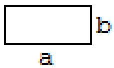
Rectángulo áureo

Defi.:

Decimos que el rectángulo ABCD cumple las 'Proporciones áureas' si es cierta la siguiente proporción $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de oro)



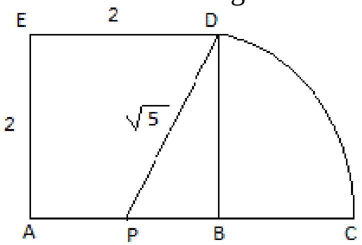
Resumen:

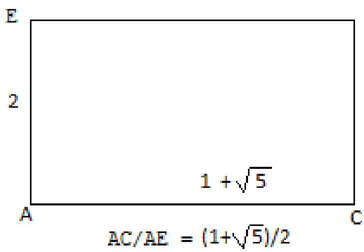


Para el Rectángulo áureo: $a = b.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

Construcción:

El cuadrado de la figura tiene lado AB = 2





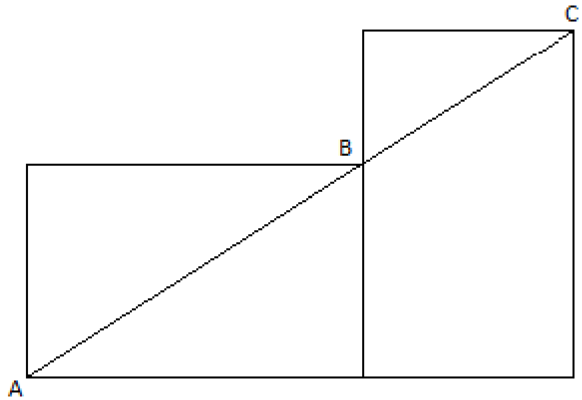
El punto P es el punto medio del segmento AB, por lo que PB = 1. Entonces el segmento PD = $\sqrt{5}$

Tomando PD como radio trazo un arco hasta cortar en C. Entonces el segmento AC = 1 + $\sqrt{5}$

Corolarios del Número de oro

A) Curiosidades-Consecuencias:

Sitúo dos rectángulos áureos como muestra la figura.



Vamos a demostrar que los puntos A, B, C están alineados. Probamos que los vectores AB y AC son proporcionales:

A(0,0), B(1+$\sqrt{5}$,2), C(3+$\sqrt{5}$,1+$\sqrt{5}$)

AB = (1+$\sqrt{5}$,2), AC(3+$\sqrt{5}$,1+$\sqrt{5}$)

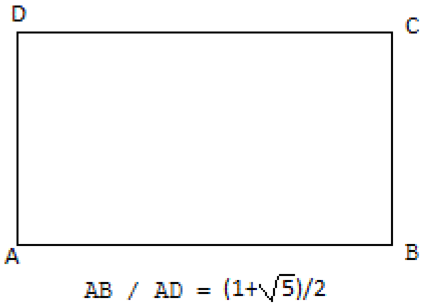
$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \ldots = \ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

Por tanto AC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .AB

(Comprobación: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.(1+$\sqrt{5}$,2) = ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}.(1+\sqrt{5}), \frac{1+\sqrt{5}}{2}.2) =$ ($\frac{6+2.\sqrt{5}}{2}$, 1+$\sqrt{5}$) = (3+$\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$))

B) Generar un Rectángulo áureo partiendo de otro que lo sea

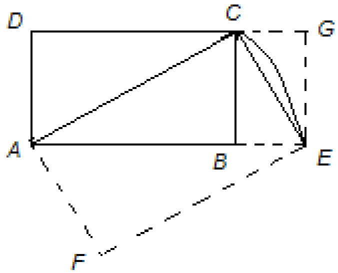
Supongamos que el siguiente rectángulo es áureo:

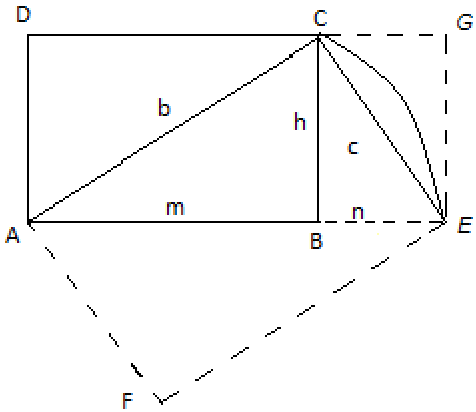


AB : AD = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Tomando la diagonal AC como radio trazamos un arco hasta cortar la prolongación del lado AB.

Demostraremos que el rectángulo AFEC también cumple la proporción áurea. Es importante hacer notar que el arco CE es arco de circunferencia con radio AC. Aplicaremos las propiedades en el triángulo rectángulo AEC,





Tenemos la hipótesis : $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ó con la nuea notación $\frac{m}{h} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Utilizaremos m = ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. h

Por las referidas propiedades tengo h^2 = m.n, y entonces

$$\frac{h^2}{n^2} = \frac{m.n}{n^2} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}.h}{2}}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{h}{n} \text{ -> } \frac{h}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \text{lo}$$

cual nos dice que el rectángulo BEGC es áureo.

Por otro lado

$b^2 = m^2 + h^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2.h^2 + h^2 = h^2.(1 + \frac{6+2.\sqrt{5}}{4}) =$

$= \frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2$

$c^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2.h^2 = h^2.\left(1 + \frac{2}{6+2.\sqrt{5}}\right) = \cdots =$

$= h^2.\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

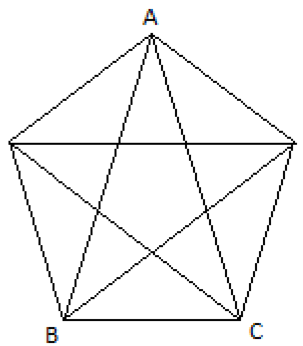
Entonces

$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.h^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ -> $\frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y por tanto

el rectángulo AFEC es áureo.

C) El Pentágono regular:

El Pentágono, y más concretamente el pentágono estrellado fue el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Veamos algunas de sus características más destacadas.



Demostraremos que: La razón entre la diagonal AB y el lado BC es el número de oro:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esta igualdad se deduce del Teorema de Ptolomeo (Claudio Ptolomeo).

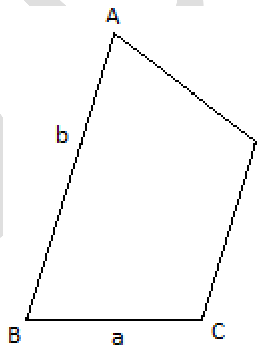
Suprimiendo un vértice del pentágono resulta un cuadrilátero (trapecio) como muestra la figura.

Se cumple: $b^2 = a^2 + b.a$

De esta obtenemos: $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}$, y si hago x = b/a obtengo la ecuación

$x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son, como ya sabemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

La solución positiva me dice que: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



NO COPIAR

ANEXO:

Lema de Bezout:

Sean a, b enteros con a > b, y sea d = mcd(a, b).

Afirmamos que existen valores enteros $\propto$, β que satisfacen la igualdad

$$a. \propto + b. \beta = d \quad (1)$$

Haciendo divisiones sucesivas tenemos lo siguiente (Es el llamado algoritmo de Euclides)

a = b.q1 + r1 , r1 < b, entero no negativo
b = r1.q2 + r2 , r2 < r1, entero no negativo
r1 = r2.q3 + r3 , r3 < r2, entero no negativo

Llegará un momento en el que $r_k = 0$. Supongamos es el siguiente

r2 = r3.q4 + r4 , r4 = 0 (r3 es último resto no nulo)

Llegado a este punto consideramos el último resto no nulo, r_{k-1}, por ejemplo r3.

Despejo r3 y avanzo de abajo hacia arriba.

r3 = r1 – r2.q3 = r1 – q3.(b – r1.q2) =
= (a – b.q1) – q3.(b – q2.(a – b.q1)) =
= (a + q3.q2.a) + (- b.q1 – q3.b – q3.q2.q1.b) =
= a.(1 + q2.q3) + b.(- q1 – q3 - q3.q2.q1)

Haciendo $\propto = 1 + q2.q3$, $\beta = - q1 - q3 - q3.q2.q1$, tengo

$$r3 = a. \propto + b. \beta \qquad (2)$$

Afirmamos: El valor r3, último resto no nulo, es divisor de a y de b.

a = b.q1 + r1 , r1 < b, entero no negativo
b = r1.q2 + r2 , r2 < r1, entero no negativo

r1 = r2.q3 + r3 , r3 < r2, entero no negativo
r2 = r3.q4

Subiendo al tiempo que sustituimos ….

r1 = r3.(q4.q3) + r3 = r3.(1 + q3.q4)
b = r3.(1 + q3.q4) .q2 + r3.q4 = r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4] ,

y por tanto r3 es divisor de b.

a = r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4].q1 + r3.(1 + q3.q4) =
= r3.[(1 + q3.q4).q2 + q4].q1 + r3.(1 + q3.q4) =
= r3. […………………………….] , y por tanto r3 es

divisor de a.
Por lo tanto r3 divide a d = mcd(a, b)
Por otro lado, la igualdad (2) podemos expresarla así

r3 = a. $\propto$ + b. β = d. (a'. $\propto$ + b'. β), donde a' = a/d,

b' = b/d
donde vemos que d divide a r3. Por tanto d = r3.

Conclusión: Al aplicar el algoritmo de Euclides el último resto no nulo nos da el MCD(a, b).

Cuestiones de interés:

1.- Si d divide a a y a b, entonces d divide a (a + b)
En efecto, a = a'.d, b = b'.d -- > a + b = d. (a' + b') -- > d divide a (a + b).

2.- Si tengo a = b.q + r, entonces mcd(a, b) = mcd(b, r)
En efecto, sea d = mcd(a, b), entonces a = a'.d, b = b'.d -- >

d.a' = (d.b').q + r , d.(a' – b'.q) = r, y como el valor

(a' – b'.q) es entero, necesariamente de es divisor de r, y por

NO COPIAR

tanto d divide a mcd(b, r). Sea c = mcd(b, r) -- > b = b'.c, r = r'.c -- > a = c.(b'.q + r') -- > c divide a a, y por tanto c divide a d = mcd(a, b) . Por tanto c = d.

3.- Si m divide al producto a.b y es primo con a, entonces divide a b.

En efecto: Si m divide al producto a.b, entonces, tomando la descomposición factorial de m, todos los factores de m lo son de a.b. Pero m es primo con a, ningún factor de m está en a, por lo cual todos los factores de m están en b.

4.- Si d^2 divide a $(a + b)^2$, entonces d divide a (a + b)

En efecto, $m = \frac{(a+b)^2}{d^2} = \frac{(a+b)}{d} . \frac{(a+b)}{d} = k.k = entero$, por lo tanto k = $\frac{(a+b)}{d}$ es entero, y d es divisor de (a + b).

5.- Se cumple $mcd(a^2, b^2, a.b) = (mcd(a, b))^2$

Si d = mcd(a, b) entonces d^2 divide a a^2, b^2 , a.b, y por tanto d^2 divide a su $D = mcd(a^2, b^2, a.b)$

Razonamiento: Sea d = mcd(a,b). Sabemos que d = "producto de los factores primos comunes de a y b". Entonces d^2 = "producto del cuadrado de los factores primos comunes de a y b", mientras que, por otro lado, $mcd(a^2, b^2)$ = "producto de los factores primos comunes de a^2 y b^2" = "producto del cuadrado de los factores primos comunes de a y b" = d^2.

Por tanto: $mcd(a^2, b^2) = [mcd(a, b)]^2$

Además, si c es un factor común de a y b, entonces c^2 es factor de a.b, y por tanto c^2 figura en $mcd(a^2, b^2, a.b)$, y podemos concluir que $mcd(a^2, b^2, a.b) = mcd(a^2, b^2)$. Final: $mcd(a^2, b^2, a.b) = [mcd(a, b)]^2$

NO COPIAR

BIBLIOGRAFÍA

Análisis Matemático, Volúmenes I
Octava Edición 1969
Autores: Julio Rey Pastor
Pedro Pi Calleja
César A. Castro
Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires (Argentina)

Lecciones de Álgebra
5ª Edición, Madrid 1960
Julio Rey Pastor

Elementos de Matemáticas
4ª Edición
Julio Rey Pasto y A. de Castro
S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)
Madrid 1967

Cálculo Numérico Fundamental
Autor: B.P. Demidovich
I.A. Maron
Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid

Introducción a la Teoría Analítica de Números
(Introduction to Analytic Number Theory)
Autor: Tom M. Apostol
Traducción: José Plá Carrera
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1980

Teoría Algebraica de Números
Autor: Pierre Samuel
Traducción: Manuel Udina Abelló y Mª José Castello Esnal

Ediciones Omega, S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

La Sinfonía del Infinito (y ya en el paraíso de Euler)
(99 lecciones de Análisis Matemático)
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Edita: Ediciones Universidad de Salamanca y
Norberto Cuesta Dutari, Salamnca 1981

Topología
Autor: E.M. Patterson
Traducción: Lino Álvarez Valdés y Fernando Vicente
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1961

Topología general y algebraica
Autor: Wolfgang Franz
Traducido por: Juan Ochoa Mélida
Selecciones Científicas, Madrid, año: 1968

NO COPIAR

PROMOCIÓN
NO VENTA

NOTACIÓN y Nomenclatura. Valores:

Símbolo	Significado
*	Producto
.	Producto
^	Potencia
sqr(a)	Raíz cuadrada
rad(a)	Raíz cuadrada
rad(a;n)	Radical con índice n
rad(a;n/m)	Radical con índice n/m

∈ significa ‘pertenece a’

∞ infinito

exp(x)	Exponencial: exp(x) = e^x
exp(x;a)	Exponencial de base a>0: exp(x;a) = a^x
ln(x)	Logaritmo neperiano: y = ln(x) $<-->$ x = e^y
log(x;a)	Logaritmo base a>0: y = log(x;a) $<-->$ x = a^y

≅ aproximado

Δ incremento

$<$ menor que …, $>$ mayor que …, Ej: $x < y$, $x > y$

≤ menor que …, ≥ mayor que …, Ej: $x \leq y$, $x \geq y$

Valores:

π = 3,1415927... (número pi, en radianes)
pi = 3,1415927... (número pi, en radianes)

e = 2,7182818... (número e, base de ln(x))

sen(0) = 0 cos(0) = 1
sen(pi/6) = $\frac{1}{2}$ cos(pi/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
sen(pi/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(pi/3) = $\frac{1}{2}$
sen(pi/2) = 1, cos(pi/2) = 0

NO COPIAR