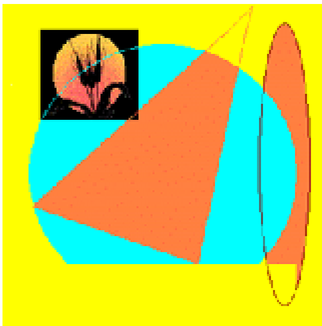
TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 3

Todo Proporcionalidad y Temas Afines

Combinatoria. Teoría de Conjuntos



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado

Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Obra completa:
Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

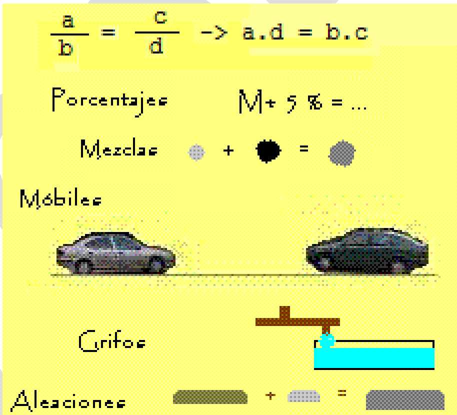
Primera edición Mayo 2017
Editado en España

ISBN:
Depósito Legal:

VOLUMEN 3

Parte I:

Proporcionalidad y Temas afines
Combinatoria



Parte II:

Teoría de Conjuntos. Operadores, Estructuras.
Álgebra Proposicional. Álgebra de Boole

ÍNDICE

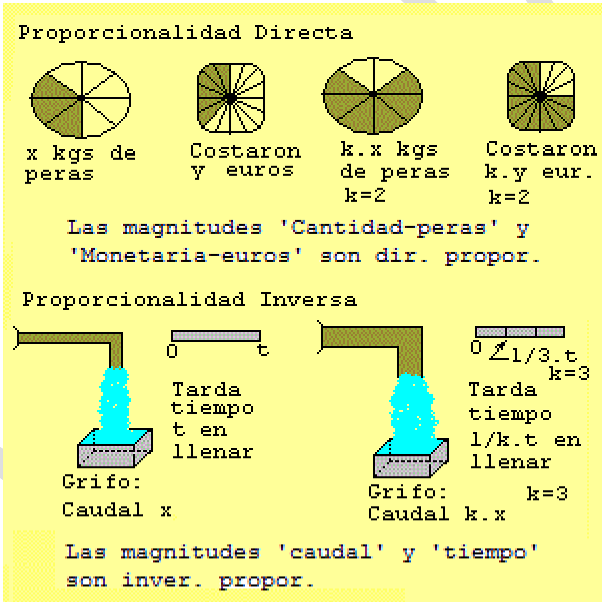
Pág.

PARTE I

PARTE II

Tema 1

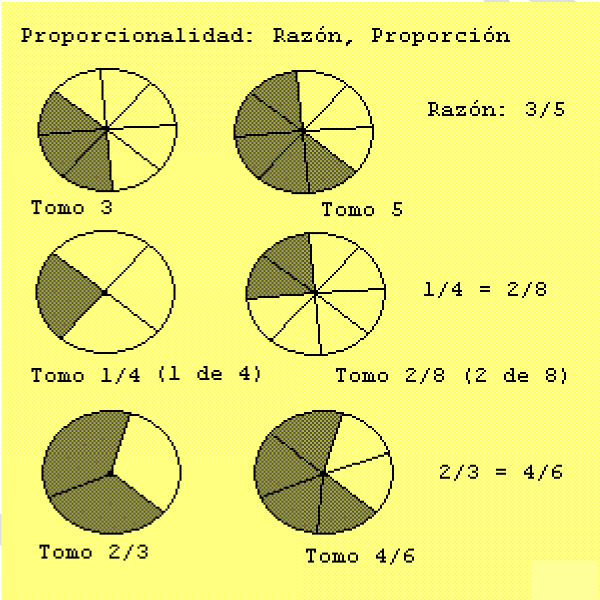
Proporcionalidad numérica



1.1.- Proporcionalidad Numérica. Conceptos básicos.

Razón entre dos números

Es el cociente a/b.



En la vida real estos dos valores a y b representan una 'cantidad' de algo: Cantidad de dinero, cantidad (en peso) de lentejas, cantidad (en peso) de manzana, etc. La razón a/b representa el precio

Cuando decimos que dos cantidades A y B (o dos números) 'están en razón 2 a 3 ' queremos decir, con precisión, que la razón A/B es igual a la razón 2/3. Esto es:

$\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$. También podemos decir que A y B están en la misma razón que 2 y 3.

Proporción numérica

Llamamos ‘proporción’ a la igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

En la vida real las encontramos continuamente: Compro 2 kgs de naranjas y he pagado 1,38 e.; mi vecina compró 3 kgs y ha pagado 2,07. Hemos abonado proporcionalmente la cantidad comprada, ya que 1,38:2 = 2,07:3 (= 0,69 precio de 1 kg.).

Expresado como una proporción sería: $\frac{138}{200} = \frac{207}{300}$

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, llamamos ‘extremos’ a los términos a y d, y llamamos ‘medios’ a los términos b y c.

Propiedades:

a) Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, entonces: b.x = a.y.

Esto es: ‘Producto de extremos = producto de medios’

b) Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, entonces: $\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, $\frac{y}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, y

por tanto $\frac{x}{a} = \frac{x}{b} = \frac{x+y}{a+b}$

En efecto, de a.y = b.x obtengo a.y+a.x = a.x+b.x, de donde a.(x+y)=x.(a+b), de donde

$$\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$$

Por el mismo razonamiento será: $\frac{y}{a} = \frac{x+y}{a+b}$

c) Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, entonces también se cumplen:

$\frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$, $\frac{y}{b} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$, $\frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$

En efecto, tenemos (según b)): $\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, y
a.z = c.x, de donde

a.(x+y) = x.(a+b), y a.(x+y)+a.z = x.(a+b)+ c.x, de donde:

a.(x+y+z) = x.(a+b+c), de donde:

$$\frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

Del mismo modo se demuestran las otras dos.

1.2.- Concepto de Magnitud
Aplicaciones del concepto de Proporcionalidad

El concepto 'magnitud' es difícil de definir; lo veremos con unos ejemplos. El concepto magnitud lleva consigo necesariamente la 'unidad de medida' asociada a dicha magnitud.

Ejemplos de magnitudes son:

Magnitudes	**Unidad de medida**
Peso	El gramo (gr.)
Capacidad/Volumen	El litro (l.)

Distancia	El metro (m.)
Moneda	El euro (e.)
Tiempo	La hora (h.)
Velocidad	km/h (relaciona distancia y tiempo)
“”	“”

Dos magnitudes pueden estar relacionadas entre sí por alguna circunstancia real, como ocurre cuando:

a)Compramos en el mercado y abonamos su importe
en euros ; están relacionadas “peso” y “moneda”, o “volumen” y “moneda”.

b) Si hacemos un viaje quedan relacionadas “distancia”, “tiempo” y “velocidad”; también “distancia” y “volumen” de combustible consumido. Podríamos considerar muchos más ejemplos.

Podríamos hablar de ‘relaciones comerciales’, ‘relaciones domésticas’, o de alguna característica que relaciona entre dos o más magnitudes. En general diremos que están relacionadas mediante alguna ‘ley’ concreta.

1.3.- Proporcionalidad Directa Proporcionalidad Inversa

Directa

Magnitudes relacionadas en Proporcionalidad directa:

Decimos que dos magnitudes A y B, relacionadas entre sí de algún modo, son ‘directamente proporcionales’ cuando, dadas una cantidad a1 de A y una cantidad b1 de B, y, sin modificar la ley que las relaciona, tomada otra cantidad cualquiera a2 de A y la cantidad b2 de B determinada por la citada ley, se cumple que:

$$\frac{b1}{a1} = \frac{b2}{a2}$$

Ejemplo:

Compro 2 kg de carne por 10 e , y mi vecino compra 4 kg de la misma carne (en el mismo puesto y antes de modificar el precio/kg). El pagará 20 e. Se cumple: 10/2 = 20/4 = 5 e/kg. Son directamente proporcionales.

Observa que la razón de proporcionalidad entre coste y peso es precisamente el precio por kg.
Sería fácil presentar otros ejemplos.

Inversa
Magnitudes relacionadas en Proporcionalidad inversa:

Decimos que dos magnitudes A y B, relacionadas entre sí de algún modo, son ‘inversamente proporcionales’ cuando, dadas una cantidad a1 de A y una cantidad b1 de B, y, sin modificar la ley que las relaciona, tomada otra cantidad cualquiera a2 de A y la cantidad b2 de B determinada por la citada ley, se cumple que:

$$\frac{b1}{a1} = \frac{1}{\frac{b2}{a2}} = \frac{a2}{b2}, \quad \text{o bien } b1.b2 = a1.a2$$

Ejemplo:

Salimos de viaje y hemos de recorrer la distancia D kms con velocidad media V kms/h.
Tardaremos por tanto t = D/V horas. El día está espléndido e incrementamos la velocidad media hasta V’ kms/h, de modo que tardamos sólo t’ = D/V’ horas. Se cumple: D = V*t = V’*t’, y por tanto las magnitudes “velocidad” y “tiempo” están en proporcionalidad inversa, son inversamente proporcionales.

1.4.- Porcentajes: Incrementos y Descuentos

El Problema:

Si compro una camisa cuyo precio marca 45 euros, pero en el momento de pasar por caja me cobran 35 euros, me han hecho un descuento de 10 e.

De 45 euros me han descontado 10. Si aplican el mismo ‘criterio’ (la misma ‘proporción’ entre coste y descuento), ¿Cuánto me cobrarán si el precio de la camisa es 100 euros?

Sol.: Aplicar el mismo criterio significa aquí ‘aplicar la misma proporción en el descuento’. Es decir, entendemos que al aplicar el descuento lo hacen en ‘proporción directa’ al coste. Aceptado esto
tenemos:

$\frac{x}{100} = \frac{10}{45}$, de donde: x= 22,22 e.

Esto nos dice que ‘por cada 100 euros me descuentan 22,22’.

Decimos que me aplican un descuento del 22,22 por ciento, que anotamos así: 22,22 %

También es útil el ‘tanto por uno’.

Si de 45 me descontaron 10, de un euro me descontarían 10:45 = 0,222 euros (tanto por uno).

INCREMENTO:

Cuando nos aplican el 18 % de IVA, estamos pagando un incremento del 0,18 por uno.

Si un artículo (o producto) marca el precio N (llamado nominal), pagaremos el montante:

$M = N + i.N = (1+i).N$, donde 'i' es el tanto por uno (observa la importancia de este concepto)

Si N= 120 e., entonces: M= (1+0,18).120 = 1,18.120 = 141,60 euros, que abonaremos.

DESCUENTO:
En el ejemplo de la camisa se ha producido un descuento. Interesa observar lo siguiente.

Si N es el precio inicial (lo llamamos 'nominal') y el descuento es D, lo que abonamos es:

$M = N\text{-}D$ (M se llama 'montante')

Tenemos que D= i.N, donde i es el tanto por uno. Entonces: M= N-i.N= N.(1-i), de modo que:

$$M = (1-i).N$$

En el ejemplo anterior: M=(1-0,222).45= 0,778.45 = 35,01 euros pagamos.

Ejemplos:

1.- Tengo que abonar una factura de 52'50 euros, a la que nos aplicarán el 18 % por el impuesto del IVA. Cuánto he de abonar.

Sol.:

Montante = 52'50 + (18x52'50) : 100 =
= 52'50 + 52'50.0'18 =
= 52'50.(1+0'18) = 52'50.(1'18) = 61'95 euros

El impuesto supone: 0,18 x 52'50 = 9'45 eur

2.- Me han ingresado en la cuenta la cantidad de 384 euros por intereses de un plazo fijo, y sé que la rentabilidad es del 3’20 % anual. ¿Qué cantidad deposité (nominal del plazo fijo)?

Sol.: $I = \frac{C.r}{100}$,

384 = C.0’032, de donde C = 384 : 0’032 = 12000

3.- a) Compro un abrigo que marca PVP = 349’95, y por ser cliente habitual me descuentan el 8 %. ¿Cuánto he de abonar?

Descuento = 349’95 x 8/100 = 349’95 x 0’08 = 27’996 --> D = 28 euros

Abonar = M – D = 321’954 --> 322 euros

b) He comprado un traje por el que he pagado 446’20 euros, después de hacerme el 8 % de descuento. ¿Cuánto marcaba el PVP?

M = PVP – D, hago X = PVP

446’20 = X – X.0’08 = X.(1-0’08) = 0’92.X, de donde
X = 446’20 : 0’92 = 485 euros

4.- a) He comprado un traje que marcaba PVP = 485 euros, pero por ser cliente, y sin hacer otros cálculos, me han cobrado 440 euros. ¿Qué porcentaje de descuento resulta?

D = PVP - M, hago X = PVP
D = 45 euros

Tanto por uno = 45/485
Porcentaje = (45/485) x 100 = 9’28 %

ACTIVIDADES y problemas

0.- Tomando las tres fracciones: 3/5, 6/10, 9/15, comprueba que se cumplen las propiedades:

$$\frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c}\ ,\ \frac{y}{b} = \frac{x+y+z}{a+b+c}\ ,\ \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

De Porcentajes:

1.- ¿Cuánto mide una ‘goma’ en su estado normal sabiendo que al ‘estirarla’ incrementando su estado normal en el 30% ha alcanzado los 104 cms?

2.- Hemos pagado 45 euros por la entrada a un espectáculo, y sabemos que el revendedor nos ha cobrado el 180% del precio normal. ¿Cuál era el precio normal de la entrada?

3.- Al comprar un objeto de hogar me han hecho el 8% de descuento sobre el precio que marca, por lo cual he abonado sólo 409,40 euros. ¿Qué precio marcaba?

4.- Un electrodoméstico cuesta 514 euros. Nos hacen el 15 % de descuento pero nos cargan el 16 % por el IVA.

a)¿Qué nos resultará mejor ‘primero hacer el descuento y después cargar el IVA, o primero cargar el IVA y después hacer el descuento?

b)¿Cuánto abonaremos en cada uno de los supuestos?

5.- Un artículo marca el precio P. Supongamos que nos hacen un descuento del r % y nos cargan un impuesto del s %.

a)Analiza qué interesa 'primero el descuento y después el impuesto' o 'primero el impuesto y después el descuento'

b) Aplicarlo al caso de que r = 15 %, s = 12 %
c) Aplicarlo al caso P = 200, r = 12 %, s = 12 %, realizando los cálculos por separado. Repítelo haciendo r = 15 %, s = 12 %

Sol.: a) P (descuento) -> $(1-\frac{r}{100})$.P (impuesto)

$$\rightarrow P' = (1+\frac{s}{100}).(1-\frac{r}{100}).P$$

P (impuesto) -> $(1+\frac{s}{100})$.P (descuento) ->

$$P' = (1-\frac{r}{100}).(1+\frac{s}{100}).P$$

Puesto que el producto es conmutativo, el resultado es el mismo.

b) P' = (1+0,12).(1-0,15).P = (1,12 . 0,85).P

c)P'= 0,88.200 = 176 e.; le aplico el impuesto

P'' = 1,12.176 = 197,12 euros

De la otra forma: P' = 1,12.200 = 224 e., y le aplico el descuento:

P'' = 0,88.224 = 197,12 euros

Repetición: P' = 0,85.200 = 170, y aplicando el impuesto P'' = 1,12.170 = 190,40

P' = 1,12.200 = 224, y le aplico el descuento

P’’ = 0,85.224 = 190,40

Hemos probado y comprobado que el resultado es el mismo, como indican las igualdades

$$P' = (1+ \frac{s}{100}).(1- \frac{r}{100}).P$$

$$P' = (1- \frac{r}{100}).(1+ \frac{s}{100}).P$$

Índice de variación global:

$$\mathbf{IVG = (1- \frac{r}{100}).(1+ \frac{s}{100}), \text{(tanto por uno)}}$$

$$\mathbf{IVG = (1- \frac{r}{100}).(1+ \frac{s}{100}).100\ \%,}$$

(en tanto por 100)

6.- Un capital C colocado al 8 % de interés simple. Capital más intereses ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse, es decir, conseguir 3.C?

7.- Un comerciante subió el precio de un artículo el 5 %. Llegaron las rebajas y lo bajó el 10 %. Contestar a lo siguiente

a)Porcentaje de subida o bajada respecto del precio P inicial.

b)Si P = 540 euros, halla el precio final

c)Si el precio final es 620 euros, ¿Cuál era el precio inicial?

Sol.: a)P -> P’ = (1,05 . 0,90).P = 0,945.P =

= (1-(1-0,945)).P = (1-0,055).P ->I = 5,5 % de descuento.

b) P’ = 0,945.540 = 510,30 euros a pagar

c)620 = 0,945.P -> P = 620:0,945 = 656,0847 e.

precio inicial

8.- En una finca de 20 has (1 ha = 10000 m^2) el terreno cultivable representa 4/5 del total, y de esta parte cultivable 3/4 va para cereales y el resto a regadío.

a)¿Qué porcentaje del total representa la parte dedicada al regadío?

b) ¿Qué porcentaje de la parte cultivable representa el regadío?

c)Si el precio de la parte dedicada a cereal es 2000 e./ha, ¿Cuánto vale la parte dedicada a cereal?

9.- Un capital de 5000 euros ha sido colocado al 6 % dde interés anual compuesto.

a) ¿Qué capital acumulado tendremos al final de 3 años?. ¿Qué cantidad suman los intereses?.

b) Deduce la fórmula adecuada que nos da el Capital final C_f

c) Aplica la fórmula obtenida al caso: C_i = 10000 euros, r = 3 % anual, n = 12 años.

(Indicación: $C_f = (1+ \frac{r}{100})^n \cdot C_i$)

10.- Una factura indica un importe de 30 e. Me descuentan el 10 % por ser cliente habitual, y después la incrementan el 12 % por impuestos.

a) Calcula el índice de variación global (IVG)
b) El importe a pagar utilizando el IVG

(Indicación: IVG = $(1-\frac{r}{100}).(1+\frac{s}{100})$)

De Regla de tres (Simple o compuesta):

11.- Compro 2 kg de carne por 10 e , y mi vecino compra 4 kg de la misma, en el mismo punto y antes de modificar el precio/kg, él pagará 20 e. Se cumple: 10/2 = 20/4 = 5 e/kg. Son directamente proporcionales.

Observa que la ley que relaciona peso y coste es precisamente el precio por kg.

Es muy fácil pensar en otros ejemplos.

12.- Cuatro mineros realizan una galería de 72 m en 9 días trabajando 8 h/día. El capataz se propone realizar los 120 m restantes en 6 días trabajando 10 h/día. ¿Cuántos operarios debe dedicar a ese trabajo?

13.- Cinco obreros realizan un trabajo en 12 días trabajando 6 h/día. Si cambian a trabajar 1 h. más al día, y un trabajo idéntico desean realizarlo en 9 días, ¿Cuánto trabajadores necesita?

14.- Cinco trabajadores realizar 50 m de valla en 3 días trabajando 6 h/día. Tienen que realizar otros 120 m del mismo tipo de valla, pero ahora pueden trabajar 8 h/día. ¿Cuántos días tardarán los mismos 3 trabajadores?

15.- Tres obreros realizan en 5 días una zanja de 50 m largo, 2 m ancho y 1 m de profundidad.

¿Cuánto días tardarán los mismos tres obreros en realizar el mismo tipo de zanja, pero 60 m largo, 1,5 ancho, 1,5 m de profundidad?

(Indicación:

obreros	días	largo	ancho	prof.
3	x	60	1,5	1,5
3	5	50	2	1

$\frac{x}{5}$ = 3/3 . 60/50 . (1,5:1,5), despeja x

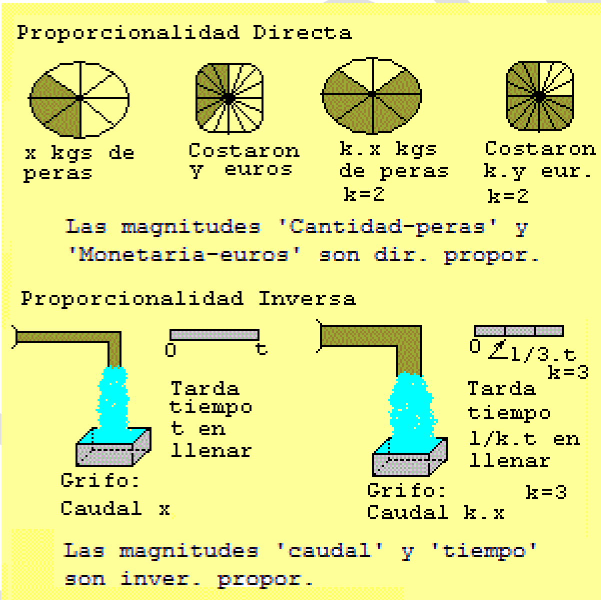
16.- Tres obreros realizan en 5 días una valla de 50 m largo, 1 m ancho y 2 m de alto.

¿Cuánto días tardarán los mismos tres obreros en realizar el mismo tipo de valla, pero 60 m largo, 1,5 ancho, 2 m de alto?

$$$$oOo$$$$

Tema 2

Temas afines



2.1.- Temas Afines

- -Mezclas
- -Aleaciones
- -Fuentes y Grifos
- -Móviles
- -Repartos proporcionales

2.1.1.- Mezclas

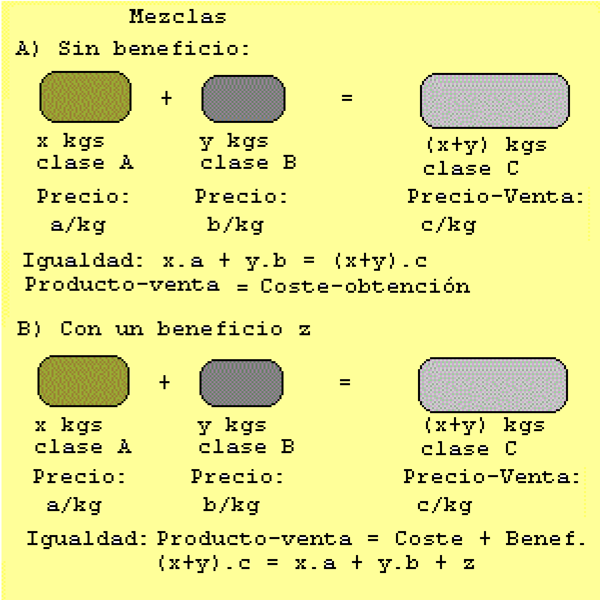
Tenemos arroz de dos calidades, de 1ª y de 2ª, y deseamos mezclar la cantidad A de la primera con la cantidad B de la segunda, de modo que resulte la cantidad A+B de calidad 'intermedia', y que por tanto será ofrecida al cliente por un precio también intermedio: Más barato que la de 1ª y más caro que la de 2ª.

El interés del Comerciante puede estar motivado por tácticas comerciales o marketing.

En el primer caso se cumplirá: $A.x + B.y = (A+B).z$, donde x, y son los precios de 'compra' por parte del comerciante (precios de coste), mientras que z es el precio de venta de la mezcla al cliente. La igualdad significa:

Coste para obtener la mezcla = producto obtenido en su venta

Conociendo ciertos datos (suficientes) podremos determinar el valor de la incógnita.



En el segundo caso, si G es el beneficio o ganancia añadida que desea obtener, tenemos la igualdad:

$$(A.x + B.y) + G = (A+B).z$$

La igualdad significa:

Coste para obtener la mezcla + el beneficio que desea obtener (al venderla) = producto obtenido al vender la mezcla

Evidentemente, cuando vende la mezcla querrá obtener lo que le ha costado formarla más el beneficio que desea obtener.

Ejemplo:

A) Mezclamos azucar de 0,95 e/kg con azucar más refinada de 1,45 e/kg. ¿Qué cantidad hemos de tomar de cada clase para obtener 20 kgs que deseamos vender a 1,10 e/kg, sin ánimo de beneficio alguno?

B) Lo mismo del anterior pero deseamos obtener un beneficio de 10 euros en la venta de los 20 kgs.

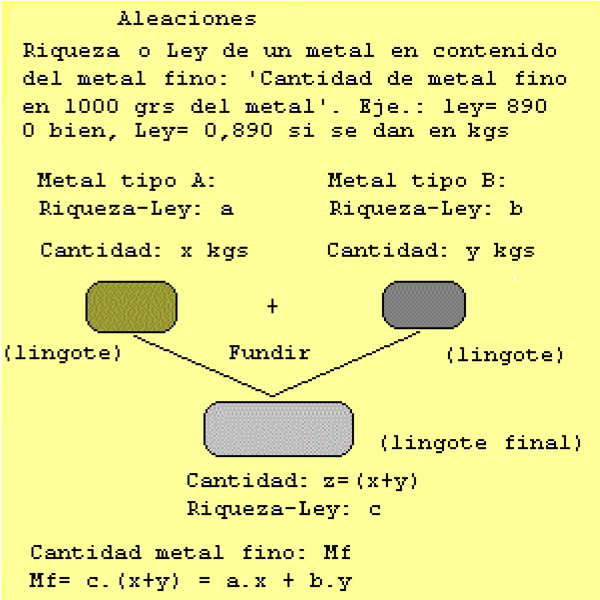
2.1.2.- Aleaciones

Las aleaciones son en realidad 'mezclas' de metales. Lo que ocurre es que para mezclar metales hemos de fundirlos previamente y mezclar los fluidos obtenidos. Al pasar de nuevo al estado sólido tenemos un metal distinto, una 'aleación'.

Cuando hablamos de metales debemos distinguir:
a) Metal puros
b) Metales en aleación

Habitualmente decimos 'este objeto es de metal', cuando realmente suele ser una aleación de dos o más metales (puros). Un caso muy frecuente lo tenemos en joyería, donde salvo en casos excepcionales, un objeto no será de oro (puro) sino de una aleación de oro con otro metal como el cobre, el platino, ..., con una determinada riqueza (proporción) en oro (puro).

Si un anillo de oro, por ejemplo, está elaborado partiendo de una aleación en la que el 890 por 1000 es oro puro, decimos que el oro del anillo es de ley 0,890 (en realidad esta es la ley del lingote). Llamamos 'lingote' a un bloque del metal, sea puro o una aleación de metales.



Ley de un metal M en una aleación A:

‘Es la cantidad, en gramos, del metal M por cada 1000 gramos de la aleación’.

O también, ‘la cantidad de M, en kgs, en un kg de aleación’.

Así, es lo mismo decir ‘de ley 890’ o decir ‘de ley 0,890’ . En el primer caso hemos de entender 890 grs del metal M por cada 1000 gramos de aleación, y en el segundo hemos de entender 0,890 kgs en 1 kg de aleación.

En el caso anterior, si el anillo pesase 50 grs, ¿Cuántos gramos de oro puro contiene?. Muy fácil, si en 1000 gramos hay 890, en 50 habrá x:

$$\frac{x}{50} = \frac{890}{1000}$$, de donde:

$$x = \frac{50.890}{1000} = 44{,}5$$ gramos de oro puro.

Problema:

El problema que plantea la teoría de las aleaciones es que, dadas dos aleaciones A y B, cuyas leyes en el metal M sean ‘a’ y ‘b’, determinar que cantidades ‘x’ e ‘y’ debemos tomar de A y B para que la nueva aleación, cuyo peso es C=(x+y), resulte ser de ley ‘c’ en el metal M.

Decimos que M es el ‘metal fino’. Se cumple que la cantidad del metal fino M que tomamos de A más el que tomamos de B ha de coincidir con la cantidad del metal fino M que tenemos en C. Esto, traducido al lenguaje matemático nos lleva a lo siguiente.

Metal fino tomado de A: x.a
Metal fino tomado de B: y.b

Metal fino en (x+y) gramos de C: (x+y).c

Por tanto se ha de cumplir: x.a + y.b = (x+y).c

Conocidos ciertos valores (suficientes) podemos determinar el valor de la incógnita.

Ejemplos:

1.- Tomo x = 500 grs de una aleación de ley 780, y y = 800 grs de otra cuya ley es 850. Determina la ley de la aleación obtenida.

Sol.: Llamo X a la nueve ley

Tengo $500\ gr.\ \frac{780\text{ gr}}{1000\text{ gr}} + \ 800\ gr\ .\frac{850\text{ gr}}{1000\ gr}\ =\ (500 + 800)gr.\ X$

de donde, operando y despejando X resulta:

X = 0,823

Lo anterior podemos hacerlo como sigue, que será como se realice en la práctica:

0,5.0,780 + 0,8.0,850 = (0’5 + 0’8).X

de donde despejamos X.

Si la incógnita fuese cualquier otra de las variables que intervienen el razonamiento sería el mismo, pero despejaríamos la deseada.

2.- Tomo 2 kgs de una determinada aleación de ley 0,780 en el metal fino-base, y 1 kgs de otra aleación cuya ley en el mismo metal base es 0,850. Determina la ley del metal fino-base de la aleación obtenida.

Sol.: Designo por X la ley de la aleación resultante.

Tengo

2kg.0,780kg/kg + 1kg.0,850kg/kg = (2 + 1)kg.X ,

2kg.0,780 + 1kg.0,850 = (2 + 1)kg. X ,

2'41kg = 3kg . X --> X = 0'803

En la práctica:

2.0,780 + 1.0,850 = (2 + 1).X ,

2'41 = 3 . X --> X = 0'803

3.- Deseamos obtener 5 kgs de una aleación cuya riqueza en el metal fino M sea del 850 por mil. Disponemos de dos lingotes cuya riqueza en el metal M es: $\frac{780}{1000}$ y $\frac{900}{1000}$. ¿Qué cantidades debemos tomar de cada uno?

Sol.: x = kgs del primero, y = kgs del segundo

x + y = 5
x.0'780 + y.0'900 = 5.0'850

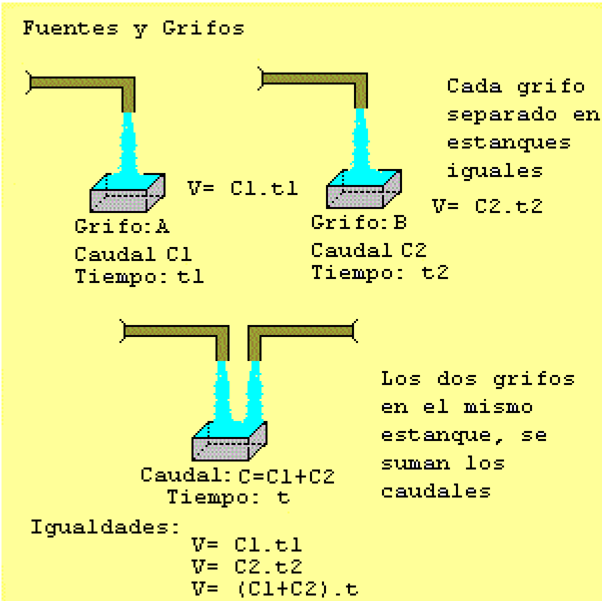
y = 5 – x, 0'78.x + 0'9.(5 –x) = 4'25

-0'12.x = -0'25,
x = 2'08 kgs, y = 2'92 kgs.

2.1.3.- Fuentes y Grifos

El Problema:

Tenemos dos o más grifos A y B y un estanque M. Supongamos que conocemos los tiempo x e y que tarda cada uno, por sí sólo, en llenar el estanque. ¿Cuánto tardarán los dos juntos?



El caudal de un grifo (o de un río):

Llamamos caudal de un grifo a ‘la cantidad de fluido que arroja por unidad de tiempo (el segundo, el minuto, o la hora. Se especificará cuando sea necesario)’

En el problema planteado, Los caudales son: cA = M/x, cB = M/y , y cuando operan los dos simultáneamente: cA + cB = M/t, donde t es el valor del tiempo que deseamos conocer. Pero el caudal cuando operan juntos evidentemente es la suma de los caudales individuales: cA + cB. Por tanto:

$\frac{M}{t} = \frac{M}{x} + \frac{M}{y}$, de donde: $\frac{1}{t} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, de donde

despejamos el valor de t

$$t = \frac{x.y}{x+y}$$

Si la incógnita fuese cualquier otra de las variables que intervienen el razonamiento sería el mismo, pero despejaríamos la deseada.

Ejemplo:

El grifo A llena el estanque en 2 h, y el B lo llena en 1,5 h. ¿Cuánto tardarán los dos juntos?

Sol.: 1/t = 1/ 2 + 1:1,5,   1/t = 0,5 + 0,66 = 1,16,   de donde t = 1:1,16 = 0,86 horas =
= 51,6 minutos = 0 h. 51’ 6 décimas de minuto.

Designo: cA el caudal y los mismo cB

Supongamos ahora que el estanque lleva un tubo C de desagüe, y que este tarda el tiempo z en vaciarlo (partiendo de estanque lleno).

Tenemos las siguientes igualdades:

M = cA.x
M = cB.y
M = cC.z

Los tres juntos: M = (cA+cB-cC).t

Despejando cA, cB y cC de las primeras y llevándolo a la última obtenemos:

$$M = (\frac{M}{x} + \frac{M}{y} - \frac{M}{z}).t$$

de donde: $\frac{1}{t} = [\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}]$, de donde despejamos t como antes.

Ejemplo:

El grifo A llena el estanque en 2 h, y el B lo llena en 1,5 h. El desagüe C tarda 3 h. en vaciarlo abriéndolo cuando está lleno. Partiendo de depósito vacío, ¿Cuánto tardará en llenarse con los tres abiertos?

Sol.: 1/t = 1/ 2 + 1:1,5 – 1/3, 1/t = 0,5 + 0,66 – 0,33 = 0,83,
de donde t = 1:0,83 = 1,20 horas = 1 h. 12’.

2.1.4.- Móviles

El Problema:

A las 8 h. salimos de Salamanca hacia Madrid con velocidad v km/h, y a las 8,5 h. sale mi amigo de Madrid hacia Salamanca con velocidad w km/h. ¿A qué hora y a qué distancia de Salamanca nos cruzaremos?

Sol.: Procuraremos generalizarlo todo lo posible. Supongamos D la distancia Salamanca-Madrid, y sea t el tiempo que tardan en cruzarse. Entre los dos han recorrido la distancia D, uno ha recorrido v.t en sentido Salamanca-Madrid; el otro ha recorrido w.t' en sentido Madrid-Salamanca, de modo que:

$$D = v.t + w.t',$$

pero $t = t' + \frac{1}{2}$, porque sale media hora antes.

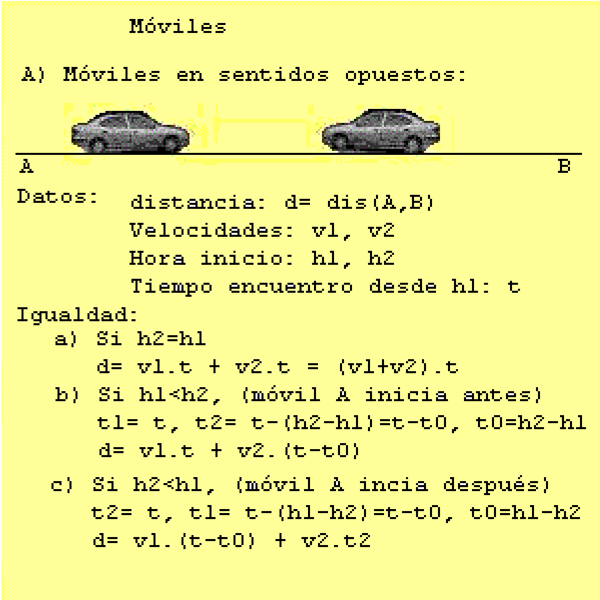
Tenemos por tanto

$$D = v.(t' + \tfrac{1}{2}) + w.t'$$

$$D - v.\tfrac{1}{2} = t'.(v+w), \text{ de donde despejo}$$

t', y después obtengo t.

Se cruzan cuando están a v.t kms de Salamanca.

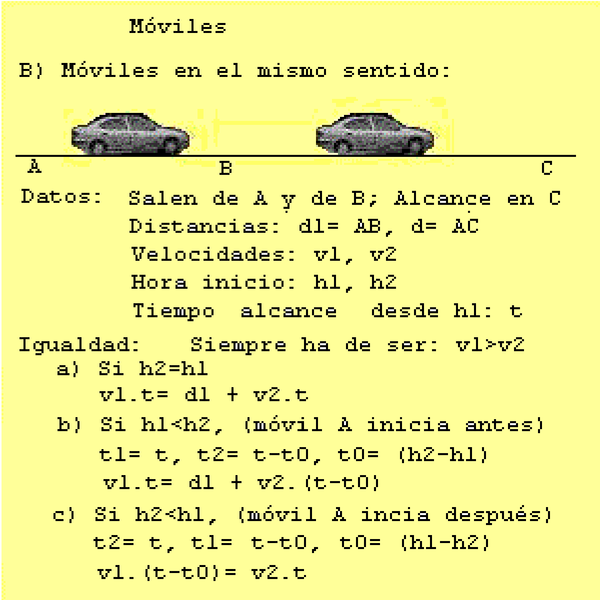


Otro problema es el que plantea el ‘alcance’ del primer móvil por un segundo móvil que inicia su marcha después que el primero, siendo la velocidad del segundo superior a la del primero, lógicamente.

Cuando lo alcanza los dos han recorrido la misma distancia (suponemos que salen desde el mismo lugar):

$$v.t1 = w.t2.$$

Esta es justamente la igualdad que nos dice que **‘la velocidad y el tiempo están en proporción inversa’**:



$$\frac{v}{w} = \frac{t2}{t1}$$

A mayor velocidad menor tiempo.

Pero aquí los datos son: v, w y el tiempo t' transcurrido desde que sale el primero hasta que sale el segundo. Entonces tenemos:

$$t1 = t2+t'$$

$$v.(t2+t') = w.t2, \text{ de donde}$$
$$v.t' = t2.(w-v), \text{ de donde despejo}$$

el valor de t2.

Si la incógnita fuese cualquier otra de las variables que intervienen el razonamiento sería el mismo, pero despejaríamos la deseada.

Ejemplos:

1.- Dos Ciudades A y B distan entre sí 315 kms. De A sale un móvil hacia B con v = 105 kms/h, y en el mismo instante de B sale otro hacia A. Se cruzan al cabo de 1 h 45'. ¿Cuál es la velocidad del segundo? (Se suponen velocidades uniformes)

2.- Un ciclista sale del punto A con v = 15 kms/h. Media hora después sale otro en su persecución con v = 20 kms/h.
a) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo?
b) Si el primero inició la marcha a las 8h 15', ¿A qué hora lo alcanzó? (en sexagesimal).

3.- De Salamanca salimos a las 8 h. con v = 110 km/h. A las 8 h. 45' sale mi hijo desde Peñaranda con intención de acompañarnos en Madrid. (Distancias: Sal.-Madid = 210 km, Sal.-Peñaranda = 40 km.)
Se pide:
¿Qué velocidad debe llevar mi hijo, como mínimo, para llegar a Madrid antes que nosotros?

2.1.5.- Repartos proporcionales

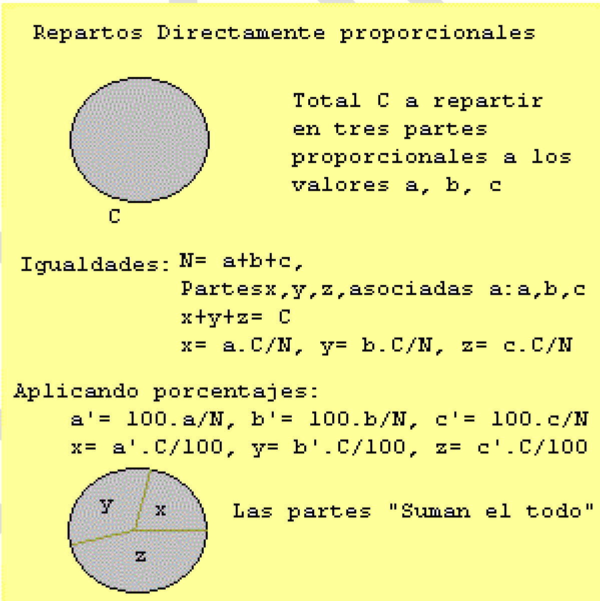
Repartos directamente proporcionales:

Deseamos repartir la cantidad C en tres partes iguales y de modo que esas partes sean directamente proporcionales a los valores a, b y c.

Si x, y, z son las cantidades que les corresponde, se tiene que cumplir:

$$x + y + z = C$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$



Por una propiedad de las proporciones sabemos que, si se cumple:

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, entonces también se

cumple:

$$\frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c} , \frac{y}{b} = \frac{x+y+z}{a+b+c} , \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

y por tanto tenemos:

$$x = \frac{a.C}{a+b+c} , \; y = \frac{b.C}{a+b+c} , \; z = \frac{c.C}{a+b+c}$$

Análogamente si el reparto lo hacemos en dos, cuatro o más partes.

Repartos inversamente proporcionales:

Deseamos repartir la cantidad C en tres partes iguales y de modo que esas partes sean inversamente proporcionales a los valores a, b y c.

Si x, y, z son las cantidades que les corresponde, se tiene que cumplir:

$$x + y + z = C$$

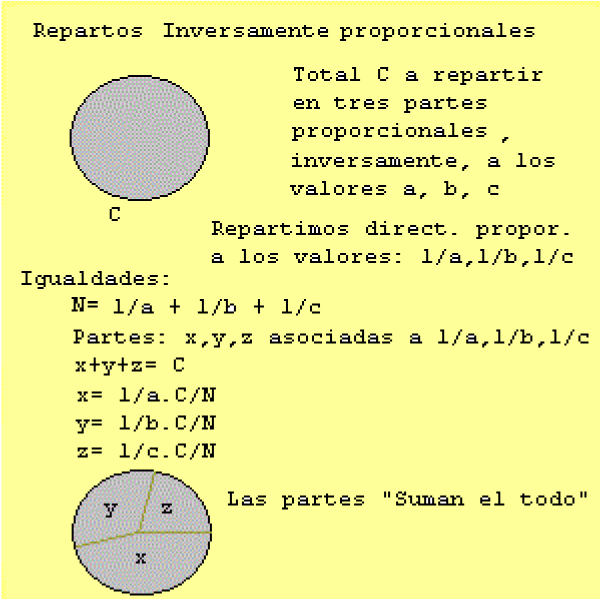
$\frac{x}{y} = b/a$, de donde $x.a = y.b$

$\frac{x}{z} = c/a$, de donde $x.a = z.c$

$\frac{y}{z} = c/b$, de donde $y.b = z.c$

Pero podemos escribir también:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$



y por la misma propiedad citada más arriba:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\,,\ \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\,,\ \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

de donde:

$$x = \frac{1}{a}\cdot\frac{C}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\,,\ y = \frac{1}{b}\cdot\frac{C}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\,,\ z = \frac{1}{c}\cdot\frac{C}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Conclusión:

Repartir inversamente proporcional a los valores a, b, c, es equivalente a repartir directamente proporcional a los valores

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$$

Ejemplos:

1.- Repartimos 5000 euros entre tres hermanos proporcionalmente a sus edades, que son: 5, 8, 10 años.

Sol: x= 5.5000/(5+8+10) = 5. 217,3913 = 1086,957
y= 8.217,3913 = 1739,1304
z = 10.217,3913 = 2173,913
total: 5000,0004

2.- Repartimos 5000 euros entre tres hermanos de modo que las partes sean inversamente proporcionales a sus edades, que son: 5, 8, 10 años.

Sol:

$$x = \frac{1}{5} \cdot \frac{5000}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = (1/5).5000.40/17 =$$

= (1/5).11764.706 = 2352,941

$$y = \frac{1}{8} \cdot \frac{5000}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = 1470,588$$

$$z = \frac{1}{10} \cdot \frac{5000}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = 1176,471$$

total: x+y+z= 5000,000

Si la incógnita fuese cualquier otra de las variables que intervienen el razonamiento sería el mismo, pero despejaríamos la deseada.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS

De Mezclas:

1.- Mezclamos azúcar de 0,95 e/kg con azúcar más refinada de 1,45 e/kg. ¿Qué cantidad hemos de tomar de cada clase para obtener 100 kgs que deseamos vender a 1,10 e/kg, sin ánimo de lucro alguno?

Sol.: x = kgs de 0’95, y = kgs de 1’45

Ha de cumplirse: x + y = 100

0’95.x + 1’45.y = 1’10.100

y = 100 –x,

0’95.x +1’45.(100 –x) = 110,

(0’95 -1’45).x +145 = 110, -0’50.x = -35

x = 70 kgs, y = 30 kgs

2.- Mezclamos azúcar de 0,95 e/kg con azúcar más refinada de 1,45 e/kg. ¿Qué cantidad hemos de tomar de cada clase para obtener 200 kgs que deseamos vender a 1,10 e/kg, y obtener un beneficio de 30 euros?

Sol.: x = kgs de 0’95, y = kgs de 1’45

Ha de cumplirse: x + y = 200

Al vender he de obtener lo que cuesta obtener la mezcla más el beneficio:

$$200.1'10 = 0'95.x + 1'45.y + 30$$

$y = 200 - x$,

$$220 = 0'95.x + 1'45.(200 - x) + 20$$
$$220 = (0'95 - 1'45).x + 290 + 20$$

$0'50.x = 90$, $x = 180$, $y = 20$

3.- Mezclamos 40 kgs de arroz de 0,60 e/kg con 60 kgs de una calidad superior, y de forma que la mezcla resulta a 0,80 e/kg., sin pérdida ni beneficio. ¿Qué precio tenía la segunda clase de arroz?

4.- Mezclamos 40 l. de aceite de 1,60 e/l. con 60 l. de otro precio. el la venta de los 100 l. de mezcla deseamos obtener un beneficio de 20 euros. Comprobar si esto es posible y el precio que debe tener la segunda clase de aceite.

5.- Mezclamos café de 1,80 e./kg con café de 4 e/kg, hasta completar 100 kgs de mezcla. Deseamos vender la mezcla a 2,75 e/kg y obtener un beneficio de 30 euros. Comprobar si esto es posible y qué cantidad de cada clase hemos de tomar.

De Aleaciones:

6.- Tomamos 2kgs de oro cuya ley es 0,850, y tomamos también 1,50 kgs de otro lingote de oro cuya ley es 0,920. Lo fundimos todo y obtenemos un nuevo lingote.

a)¿Cuál es la ley de este último?

b) Si deseamos que el resultado tenga ley 0,900, ¿Qué peso debemos tomar del segundo lingote?

7.- Tenemos dos lingotes: Uno contiene 640 grs de oro y 160 grs de cobre; el segundo contiene 630 grs de oro y 270 grs de cobre.

Deseamos conseguir un tercer lingote con peso 800 grs y ley (en oro) de 0,763. ¿Qué cantidad (en peso) debemos tomar de cada uno de los dos primeros?

De Grifos:

8.- El grifo A llena el estanque en 2 h, y el B lo llena en 1,5 h. ¿Cuánto tardarán los dos juntos?

Sol.: $\frac{1}{t} = \frac{1}{2} + 1{:}1{,}5$, $\frac{1}{t} = 0{,}5 + 0{,}66 = 1{,}16$, de donde t = 1:1,16 = 0,86 horas.

9.- El grifo A llena el estanque en 2 h, y el B lo llena en 3 h. El estanque tiene un desagüe que lo vacía en 5 h. Partiendo de estanque vacío y abriendo los tres, ¿Cuánto tardará en llenarse?

Sol.: $\frac{1}{t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$,

$\frac{1}{t}$ = 0’50 + 0’33 – 0’20 = 0’63, de donde
t = 1:0’63 = 1’59 horas = 1:35’4 h.,

1 h, 35 min., 24 seg.

10.- Un grifo tarda 6 h. en llenar un depósito y otro grifo tarda 4 h. en llenar el mismo depósito. ¿Cuánto tardarán los dos juntos?. Dar el tiempo de dos formas: Expresión centesimal, Expresión sexagesimal.

11.- Un grifo tarda 6 h. en llenar un depósito y otro grifo tarda 4 h. en llenar el mismo depósito. El depósito lleva un tubo de desagüe que tarda 5 horas en vaciarlo. Cuando tenemos el depósito vacío abrimos los tres: Los dos grifos más el desagüe. ¿Cuánto tardará en llenarse?

12.- Dos grifos abiertos tardan 3 h. en llenar un depósito, y sabemos que abriendo sólo el grifo A tarda 5 h. en llenarse. ¿Cuánto tardará en llenarse abriendo sólo el grifo B?

De Móviles:

13.- A las 8 h. salimos de Salamanca hacia Madrid con velocidad media v = 120 km/h, y a las 8:30 h. sale mi amigo de Madrid hacia Salamanca con velocidad media w = 110 km/h. ¿A qué hora y a qué distancia de Salamanca nos cruzaremos?

Sol.: Aceptamos que Dist Salam – Madrid = 210 kms

D = 210, 30 min = 0'5 horas

$$210 = 120.t + 110.t',$$

pero t = t' + 0'5, porque sale media hora antes.

Tenemos entonces

$$210 = 120.(t' + 0'5) + 110.t'$$
$$210 - 60 = 230.t',$$

de donde t' = 0'652 horas , t = 1'152 horas tardan en encontrarse desde la salida del primero.

Se encuentran a las 9 h. 9'12 min.

Distancia: 120 km/h . 1'152 h = 138'24 kms de Salamanca.
71'76 kms de Madrid

14.- A las 8 de la mañana inicio viaje desde Salamanca hacia Madrid con velocidad media v = 110 km/h, y a las 8:30 h. sale mi amigo también desde Salamanca hacia Madrid con velocidad media w = 130 km/h. ¿A qué hora y a qué distancia de Salamanca me alcanzará mi amigo?

Sol.: D = 210 kms (dist. Salamanca – Madrid)

$210 = 110.t + 130.t'$, $t = t' + 0'5$

$$210 = 110.(t' + 0'5) + 130.t'$$

$$210 - 55 = 240.t',$$

$t' = 0'646$ horas, $t = 1'146$ horas

El alcance se produce a las 9 h. 8'76 min.

Distancia: 1'146 h . 110 km/h = 126'06 kms de Salamanca.

15.- A 300 kms de la frontera se ha producido un atraco. Los ladrones huyen hacia la frontera co v = 160 kms/h, y 15' después la policía inicia su persecución con v' = 180 kms/h.
a) ¿Conseguirán los ladrones cruzar la frontera?
b) ¿Cuánto tiempo tardará la policía en alcanzarles? (Suponiendo que pueden rebasar la frontera)

16.- a) Un móvil sale del punto A con v = 110 kms/h, y 30' después sale de A otro móvil en la misma dirección y sentido con v' = 125 kms/h. ¿Cuánto tardará éste en alcanzar al primero?

b) Suponiendo que el segundo lo hace en la misma dirección pero sentido opuesto, ¿Cuánto tiento habrá transcurrido cuando se encuentran a 150 kms de distancia?

17.- Un aficionado ciclista dedica los domingos 2h 30’ a este deporte. Su bici lleva cuenta kms y por tanto ha podido comprobar que el recorrido total es de 30 kms. Por la ciudad lo hace a 6 kms/h mientras fuera de ella lo hace a 16 kms/h. Calcula qué distancia recorre por Ciudad y qué distancia fuera de ella.

18.- Suponemos que las Ciudades A y B están alineadas con el punto C de la frontera.

a) Estando A más cerca de C que B, la distancia entre A y B es de 15 kms, y el punto C queda ‘muy lejano’. En A se ha producido un atraco y los ladrones huyen hacia C con v = 140 kms/h. Media hora después desde B sale la policía con v’ = 150 kms/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlos, y qué distancia ha recorrido la policía?

b) Suponiendo que B está más cerca de C, realizar los mismos cálculos.

De Repartos:

19.- Tres amigos participan en un juego de ‘ganar o perder dinero’. Pedro participa con 100 euros, Felipe con 150, Juan con 300 euros. Ganan un premio de 5000 euros. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?

Sol: S = 100 + 150 + 300 = 550
Coeficiente = 5000/550 = 9’091

x = 9’091.100 = 909’10 euros
y = 9’091.150 = 1363’65
z = 9’091.300 = 2727’30

Total: 5000’05 euros

Al z le restaremos 0’05 euros

20.- La Administración ha decidido distribuir una subvención de 500000 euros a tres empresas (mediana empresa) cuyos capitales son, en euros:

A: 2 millones
B: 1’5 millones
C: 0’8 millones

El reparto se hará en proporción inversa a sus capitales. ¿Cuánto entregará a cada una?

Sol.: Haremos el reparto directamente proporcional a los valores:

$$\frac{1}{2000000}, \frac{1}{1500000}, \frac{1}{800000}$$

Suma de estos valores:

$$\frac{1}{10^5}.\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{10^5}.(6+8+15)/120=$$

$$=\frac{29}{120.10^5}$$

Coeficiente: $\dfrac{5.10^5}{29/(120.10^5)}=\dfrac{5.10^5.120.10^5}{29}$

Corresponde a cada uno:

A: $x1=\dfrac{1}{20.10^5}.\dfrac{5.10^5.120.10^5}{29}=103448’28$

B: $x2 = \frac{1}{15.10^5} \cdot \frac{5.10^5.120.10^5}{29} = 137931'03$

C: $x3 = \frac{1}{8.10^5} \cdot \frac{5.10^5.120.10^5}{29} = 258620'69$

Comprobación: Si sumamos

$$x1 + x2 + x3 = 500000$$

21.- Tres socios deciden invertir sus ahorros en un negocio común. El socio A aportó 1/3 del capital, el socio B aportó 2/5 y el socio C aportó el resto. Al final del ejercicio deciden repartirse 30000 euros de parte de los beneficios. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

22.- El padre reparte 1420 euros entre tres hermanos en partes inversamente proporcionales a sus edades: 3, 5 y 7 años. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

23.- Tres socios se reparten 12900 euros proporcionalmente a los capitales aportados. El socio A aportó 2/3 de lo que aportó el socio B, y éste aportó 5/6 de lo que aportó el socio C. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?.

(Indicación: $x + \frac{5}{6}.x + \frac{2}{3}.(\frac{5}{6}.x) = 1$)

24.- Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1400 euros por un trabajo. ¿Cuánto corresponde a cada uno si A trabajó 2/5 de lo que trabajó B?

25.- A ti y a tus dos hermanos os han tocado 120 euros en una lotería. El boleto os costó 6 e. Tú pusiste 3 e., tu hermano mediano 1,80 e. y tu hermano menor 1,20 e. ¿Cuánto corresponde (en buena ley) a cada uno?

De Edades:

26.- Hace 18 años la edad de Pedro era doble que la que tenía Juan, y dentro de 9 años será sólo los 5/4 de la de Juan. Determina la edad actual de Pedro y Juan.

27.- El padre de Luis tiene ahora 3 veces la edad de Luis. Hace 5 años la edad de Luis era la cuarta parte de la de su padre. Determina sus edades.

28.- Ana tiene 5 años más que su hermano Carlos, y su padre tiene ahora 41 años. Además podemos afirmar que dentro de 6 años la edad del padre
coincidirá con la suma de Ana y Carlos. Determina la edad actual de cada uno.

29.- Ana tiene 3 años más que su hermano Carlos, y la de su padre es ahora el triple de la suma de Ana y Carlos. Además podemos afirmar que dentro de 5 años la edad del padre será el doble de la que tendrán Ana y Carlos. Determina sus edades actuales.

30.- Hace un año la edad del padre era triple de la de su hijo Luis, y dentro de 13 será el doble. Determina sus edades actuales.

$$$oOo$$$

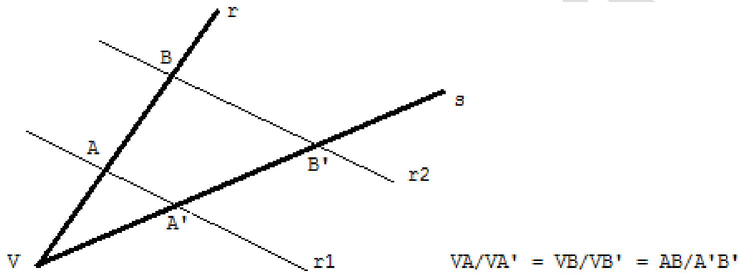
Tema 3

Proporcionalidad geométrica

3.1.- En el Plano: Teorema de Thales

Suponemos que tenemos la longitud de los segmentos que intervienen.

Teorema (de Thales):

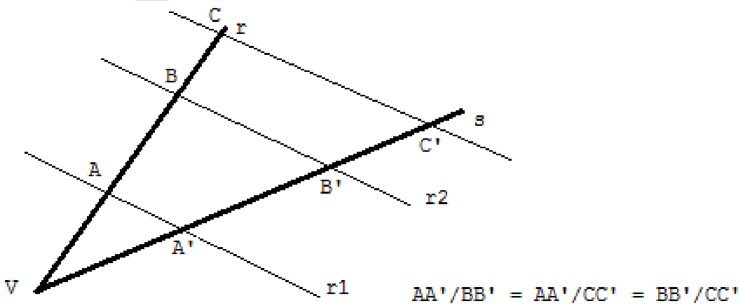


Como muestra la figura:

Dadas dos semirectas r y s con el punto V común. Dos rectas r1, r2 paralelas entre sí las cortan produciendo segmentos proporcionales:

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

También



$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AA'}{CC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

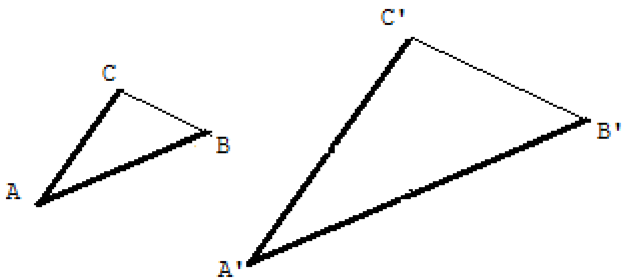
3.2.- Semejanza de Triángulos

En la figura se vislumbra la semejanza de los triángulo
AVA’ y BVB’

Defi.:

En general se define la semejanza de dos triángulos ABC, A’B’C’ si sus lados homólogos satisfacen la igualdad

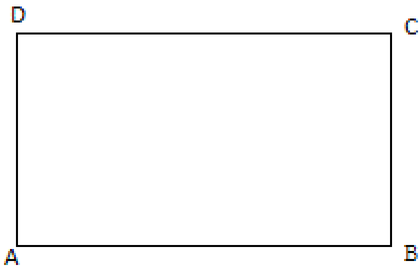
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



3.3.- El Rectángulo áureo y el número de oro

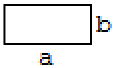
Defi.:

Decimos que el rectángulo ABCD cumple las ‘Proporciones áureas’ si es cierta la siguiente proporción $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número de oro)



AB / AD = $(1+\sqrt{5})/2$

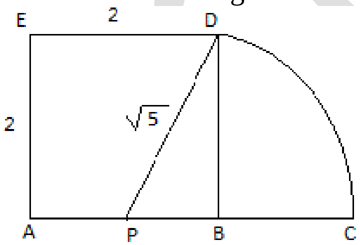
Resumen:

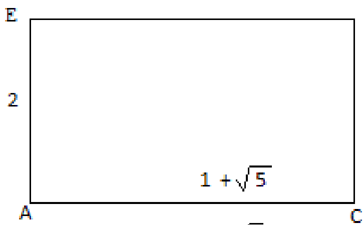


Para el Rectángulo áureo: $a = b.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$

Construcción:

El cuadrado de la figura tiene lado AB = 2





AC/AE = $(1+\sqrt{5})/2$

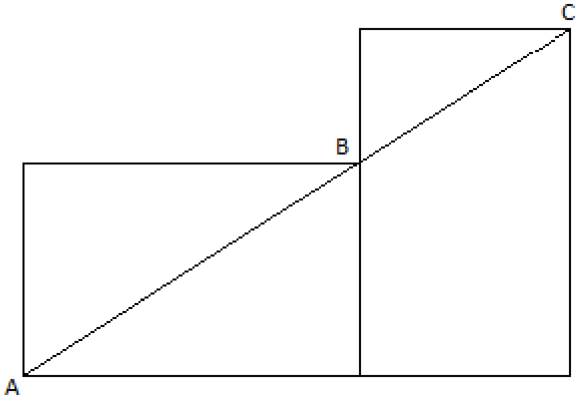
El punto P es el punto medio del segmento AB, por lo que PB = 1. Entonces el segmento PD = $\sqrt{5}$

Tomando PD como radio trazo un arco hasta cortar en C. Entonces el segmento AC = $1 + \sqrt{5}$

3.4.- Corolarios del Número de oro

A) Curiosidades-Consecuencias:

Sitúo dos rectángulos áureos como muestra la figura.



Vamos a demostrar que los puntos A, B, C están alineados.
Probamos que los vectores AB y AC son proporcionales:

A(0,0), B($1+\sqrt{5}$,2), C($3+\sqrt{5}$,$1+\sqrt{5}$)

AB = ($1+\sqrt{5}$,2), AC($3+\sqrt{5}$,$1+\sqrt{5}$)

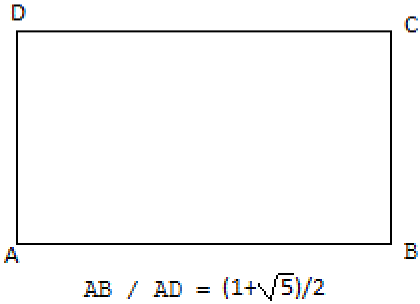
$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \ldots = \ldots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

Por tanto AC = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .AB

(Comprobación: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.($1+\sqrt{5}$,2) = ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}.(1+\sqrt{5})$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}.2) =$ ($\frac{6+2.\sqrt{5}}{2}$, $1+\sqrt{5}$) = ($3+\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$))

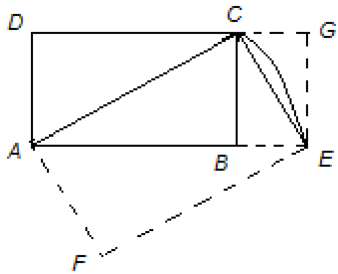
B) Generar un Rectángulo áureo partiendo de otro que lo sea

Supongamos que el siguiente rectángulo es áureo:

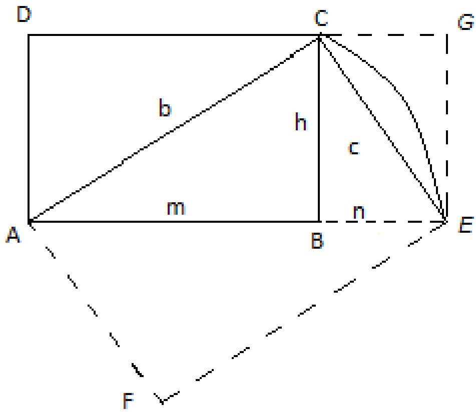


AB : AD = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Tomando la diagonal AC como radio trazamos un arco hasta cortar la prolongación del lado AB.



Demostraremos que el rectángulo AFEC también cumple la proporción áurea. Es importante hacer notar que el arco CE es arco de circunferencia con radio AC. Aplicaremos las propiedades en el triángulo rectángulo AEC,



Tenemos la hipótesis : $\frac{AB}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ó con la nuea notación $\frac{m}{h} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Utilizaremos m = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .h$

Por las referidas propiedades tengo $h^2 = m.n$, y entonces

$$\frac{h^2}{n^2} = \frac{m.n}{n^2} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}.h}{2}}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\frac{h}{n} \text{ -> } \frac{h}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$ lo

cual nos dice que el rectángulo BEGC es áureo.

Por otro lado

$b^2 = m^2 + h^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2.h^2 + h^2 = h^2.(1 + \frac{6+2.\sqrt{5}}{4}) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2$

$c^2 = h^2 + n^2 =$

$= h^2 + (\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2.h^2 = h^2.\left(1 + \frac{4}{6+2.\sqrt{5}}\right) = \cdots = h^2.\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

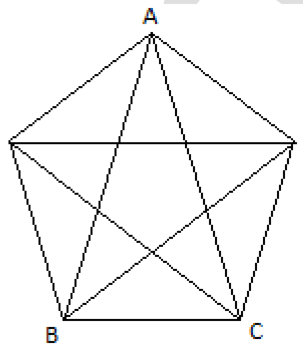
Entonces

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{2}.h^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.h^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad -> \frac{b}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ y por tanto}$$

el rectángulo AFEC es áureo.

C) El Pentágono regular:

El Pentágono, y más concretamente el pentágono estrellado fue el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Veamos algunas de sus características más destacadas.



Demostraremos que: La razón entre la diagonal AB y el lado BC es el número de oro:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Esta igualdad se deduce del Teorema de Ptolomeo (Claudio Ptolomeo).

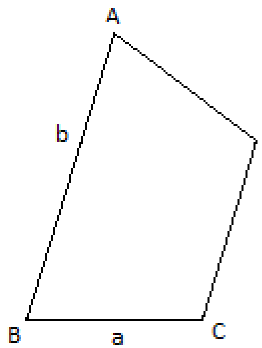
Suprimiendo un vértice del pentágono resulta un cuadrilátero (trapecio) como muestra la figura.

Se cumple: $b^2 = a^2 + b.a$

De esta obtenemos: $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}$, y si hago x = b/a obtengo la ecuación

$x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son, como ya sabemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

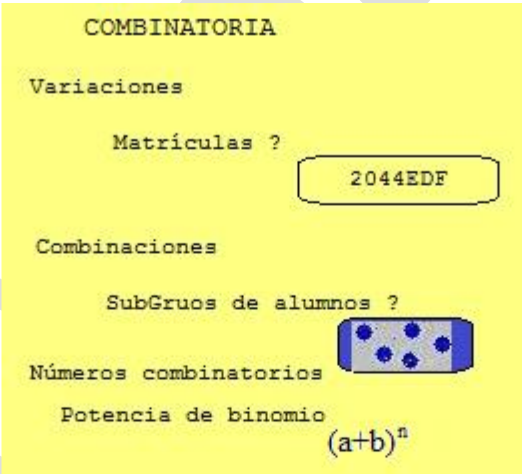
La solución positiva me dice que: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



$$$$oOo$$$$

Tema 4

COMBINATORIA



4.1.- Variaciones Ordinarias

El Problema:

Tenemos un conjunto M con m elementos (u objetos) distintos, y deseamos tomar un subconjunto con n elementos, tomándolos al azar uno a uno y ordenándolos en el orden de salida.

Habremos obtenido un subconjunto concreto pero podría haber resultado otro distinto.

Consideramos ahora la 'familia' de todos los 'posibles' subconjuntos candidatos al resultado, y fijamos este criterio:

Defi.:

Dos posibles subconjuntos A y B se diferenciarán por alguna de estas dos razones:

a) Se diferencian en alguno de sus elementos: x está en A y no está en B, ó x está en B pero no está en A.
b) Tienen los mismos elementos pero han resultado elegidos en distinto orden.

Llamamos '**Variación ordinaria**', de orden n, formada con elementos de M, a cada uno de los posibles subconjuntos así obtenidos.

Formación y Número:

¿Cuántas variaciones distintas es posible obtener? Razonamos como sigue:

Para seleccionar el primer elemento tenemos: m posibilidades

Para elegir el segundo tenemos: (m-1) posibilidades

Para elegir el tercero tenemos: (m-2) posibilidades

....

Para elegir el n-ésimo tenemos: (m-(n-1) posibilidades

Por tanto, los posibles subconjuntos ordenados son:

m.(m-1).(m-2)...(m-(n-1))

o bien: m.(m-1).(m-2)...(m-n+1)

Este valor lo representaremos por Vm,n

FORMACIÓN de las variaciones de orden n, formadas con los m elementos de M:

Sean m objetos identificados por un código, por ejemplo numerados del 1 al m, y por tanto identificados y ordenados del 1 al m.

Posibles:
Variaciones de orden 1 (monarias):
1 2 3 .... m-1 m

Tengo m monarias

Posibles:
Variaciones de orden 2 (binarias):

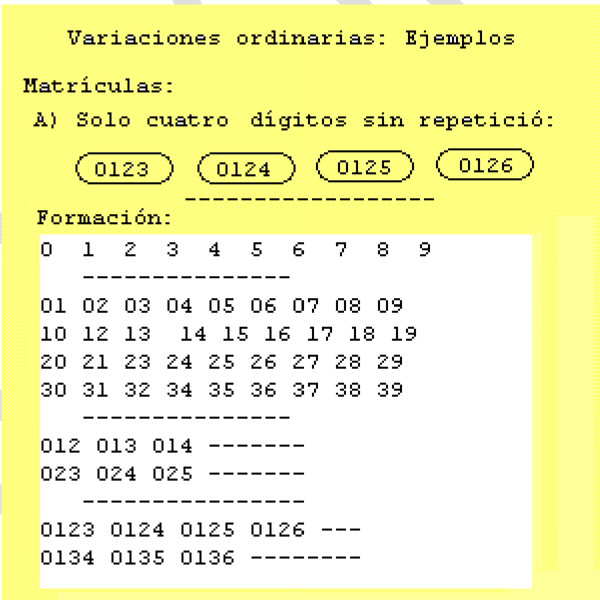
A cada monaria le hemos adjuntado por la derecha los elementos que no figuran en ella, tomados de M de uno en uno y de izquierda a derecha según orden en M.

12	21	31	...	(m-1)1	m1
13	23	32	...	(m-1)2	m2
14	24	34	...	(m-1)3	m3
....					

De cada monaria he obtenido m-1 binarias,

m-1 m-1 m-1 ... m-1 m-1

Total binarias: m.(m-1)



```
Variaciones ordinarias: Ejemplos

Matrículas:
 A) Solo cuatro dígitos sin repetició:

   0123   0124   0125   0126
            -----------------
 Formación:
 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
    ---------------
 01 02 03 04 05 06 07 08 09
 10 12 13  14 15 16 17 18 19
 20 21 23 24 25 26 27 28 29
 30 31 32 34 35 36 37 38 39
    ---------------
 012 013 014 -------
 023 024 025 -------
    ----------------
 0123 0124 0125 0126 ---
 0134 0135 0136 --------
```

Posibles:

Variaciones de orden 3 (ternarias):

123	132	142	152	...	(m-2)(m-1)m
124	134	143	153	...	
125	135	145	154	...	
....					

213	231	241	251	...	(m-2)(m-1)m
214	234	243	253	...	
215	235	245	254	...	
....					

A cada binaria le hemos adjuntado por la derecha los elementos que no figuran en ella, tomados de M de uno en uno y de izquierda a derecha.

Con cada binaria obtengo m-2 de orden 3 (ternarias). Total ternarias: m.(m-1).(m-2)

Posibles:
Variaciones de orden n (n-árias): De orden n-1 hemos obtenido m.(m-1)...(m-(m-(n-2)))

con cada una de estas de orden n-1 podemos formar m-(n-1) de orden n, y por tanto, de orden n obtendremos

$$m.(m-1).(m-2)...(m-(m-(n-2))).(m-(n-1))$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de 4 cifras distintas puedo formar con los 10 dígitos del 0 al 9?. Formarlos

Sol.: 10.(10-1).(10-2).(10-3) = 10.9.8.7 = 5040

El alumno será capaz de formarlos todos.

4.2.- Permutaciones Ordinarias de m elementos. Factorial de m

Si formamos las variaciones ordinarias de orden m, con m elementos, (tomando n=m), en cada posible variación intervienen todos los elementos de M. Entonces dos posibles variaciones se diferencian solamente por el orden en que resultaron elegidos sus elementos.

En este caso decimos que es una ‘permutación’ de los m elementos.

Definición, número y formación:

Llamamos ‘permutación’ de m elementos a cada una de las posibles ordenaciones de los m elementos de M.

Coincide con ‘variación’ de orden m de los m elementos de M. Por tanto su número es:

$$m.(m-1).(m-2)...2.1$$

Observa que (m-(m-1)) = 1

Lo representamos por Pm, en lugar de Vm,m

Factorial de m:

Al valor Pm = m(m-1)(m-2)...3.2.1
lo llamamos 'factorial de m' y lo representamos también por m! (Pm = m!)

FORMACIÓN de las permutaciones:

Basta seguir los mismos pasos que en la formación de las variaciones ordinarias.

4.3.- Combinaciones Ordinarias

El Problema:

Tenemos un conjunto M con m elementos (u objetos) codificados de alguna manera, por ejemplo como se dijo en el caso de las variaciones. Deseamos formar un subconjunto con n elementos, tomándolos al azar de uno en uno y colocándolos en una bolsa o una cesta (es decir sin ordenar).

Consideramos ahora la 'familia' de todos los 'posibles' subconjuntos (sin orden) que pudieran haber resultado, distinguiéndolos entre sí por el siguiente criterio:

Defi./Criterio:

Dos posibles subconjuntos A y B se diferencian por tener algún elemento distinto: Existe algún elemento p que está en A y no está en B.

Llamamos 'Combinación ordinaria', de orden n, formada con elementos de M, a cada uno de los posibles subconjuntos obtenidos aplicando el criterio descrito.

Número y Formación:

¿Cuántas combinaciones distintas es posible obtener?. Razonamos como sigue.

Designaremos por Cm,n este número que calculamos a continuación.

Si tomamos una de estas combinaciones, de orden n, y con sus elementos formamos todas las permutaciones posibles, cada una de estas nos da n! Variaciones de orden n. Seguimos y hacemos lo mismo con cada una de las combinaciones y obtenemos el total de las posibles variaciones de orden n, con los m elementos de M. Esto nos lleva a que se cumple la siguiente igualdad:

$$Vm,n = Cm,n * n!$$

De donde:

$$Cm,n = \frac{Vm,n}{n!} = \frac{m.(m-1)...(m-n+1)}{n!}$$

Otra expresión para Cm,n que puede resultar más fácil para memorizar es la siguiente:

Tengo: $\frac{Vm,n}{n!} = \frac{m.(m-1)...(m-n+1)}{n!} = \ldots = \frac{m!}{n!.(m-n)!}$

(observa que al numerador le faltaban los factores (m-n).(m-n-1). ... .2.1 para coincidir con m!)

He multiplicado numerador y denominador por (m-n).(m-n-1).(m-n-2)...2.1, que es (m-n)!, y en el numerador queda m!.

Por tanto: $Cm,n = \frac{m!}{n!.(m-n)!}$

FORMACIÓN de las combinaciones:

Sean m objetos identificados por los números: 1,2,3, ..., m, ordenados por este código.

Posibles:

Combinaciones de orden 1 (monarias):
1 2 3 ... m-1 m

Posibles:
Combinaciones de orden 2 (binarias):
12 23 34 ... (m-2)(m-1) (m-1)m
13 24 35 ... (m-2)m
14 25 36 ...
....

En cada columna tengo
m-1 m-2 m-3 ... 2 1

A cada monaria le hemos agregado por la derecha, los elementos que siguen al último agregado, tomados de M, de uno en uno, y de izquierda a derecha según orden en M.

Posibles:
Combinaciones de orden 3 (ternarias):
123 234 345 ... (m-2)(m-1)m
124 235 346 ...

A cada binaria le hemos adjuntado por la derecha, los elementos que siguen al último adjuntado, tomados de M, de uno en uno, y de izquierda a derecha.

Continuando llegamos a las de orden n.

En la siguiente figura las hemos anotado horizontalmente en lugar de en vertical.

```
   Combinaciones ordinarias: Ejemplos

 Formación de grupos:
  (Subconjuntos sin ordenar)
Datos: Conjunto de personas identificadas
 por un número del 1 al 20
  1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... 18 19 20
Formación:
   1  2  3  4  5  6  7  8 ... 18  19  20

    12 13 14 15 ... 1(18) 1(19) 1(20)
    23 24 25 ... 2(18) 2(19 2(20)
    34 35 ... 3(18) 3(19) 3(20)
         ----------------
    123 124 125 ... 12(18) 12(19) 12(20)
    134 135 ... 13(18) 13(19) 13(20)
         ----------------
    1234 1235 ... 123(18) 123(19) 123(20)
    1245 ... 124(18) 124(19) 124(20)
          -----------------
```

4.4.- Números combinatorios de m

Definición

Llamamos ‘Números combinatorios’ a las siguientes expresiones, y cuyo valor indicamos:

Expresión: (m;n)

Valor : $C_{m,n} = \frac{m!}{n!.(m-n)!}$

donde m y n son enteros positivos, m>0, n tomando valores desde 0 hasta m (Veremos más abajo que 0! = 1). m es el número de elemento (u objetos), n es el número de ellos que tomamos cada vez. Diremos que es el número combinatorio de orden n.

Es frecuente también la notación (n;k), n y k con el mismo significado de m y n, respectivamente.

Convenio importante:

Con el fin de que la fórmula (m;n) = $\frac{m!}{n!.(m-n)!}$ tenga validez cuando m-n = 0, hemos de tomar por definición 0! = 1

Para clarificar el 'lenguaje', fijado n, diremos que los (n;k) son los números combinatorios de n de orden k, para k = 0,1,2,...,n.

4.5.- Triángulo de Pascal (y/o de Tartaglia)

Se refiere al triángulo formado por los números combinatorios (n;k), donde n toma los valores: 0,1,2,...,m, y k toma los valores: 0,1,2,...,n,

Tengo, para n desde 0 hasta m
(0;0)
(1;0) (1;1)
(2;0) (2;1) (2;2)
(3;0) (3;1) (3;2) (3;3)
(4;0) (4;1) (4;2) (4;3) (4;4)
(5;0) (5;1) (5;2) (5;3) (5;4) (5;5)
....
(m;0) (m;1) (m;2) .... (m;m)

Anotando sus valores obtenemos:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
....

Observa cómo cada valor (n;k), salvo las dos líneas de unos, coincide con la suma de los dos valores que tiene sobre él.

Este triángulo es útil, por ejemplo, cuando hacemos el desarrollo del 'Binomio de Newton': (a+b)^n

NOTA: Conviene resaltar algunos valores

(n;n) = $\frac{n!}{n!.0!}$ = 1, que nos da la línea en

diagonal de unos.

(n;0) = $\frac{n!}{0!.(n-0)!}$ = 1, que nos da la columna

de unos.

(n;1) = $\frac{n!}{1!.(n-1)!}$ = $\frac{n!}{(n-1)!}$ = n

que nos da la segunda columna.

4.6.- Binomio de Newton. Potencias del trinomio

Sea la potencia $(a+b)^n$

Su desarrollo es el siguiente:

$(a+b)^n$ =

$= (n;0).a^n.b^0 +(n;1).a^{n-1}.b^1 + (n;2).a^{n-2}.b^2 + ... + (n;k).a^{n-k}.b^k + ... + (n;(n-2)).a^2.b^{n-2} + (n;(n-1)).a^1.b^{n-1} + (n;n).a^0.b^n$

El alumno comprobará los siguientes resultados para n = 2 y n = 3:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

Del Trinomio:

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 +2ab +2ac +2bc$

$(a+b+c)^3 =$
$a^3+b^3+c^3 +3a^2b +3a^2c +3b^2a +3b^2c +3c^2a +3c^2b + 6abc$

4.7.- Variaciones con repetición

Si al formar las posibles variaciones ordinarias, de orden n, con m elementos, no retiramos del conjunto M los elementos antes seleccionados, estos pueden volver a ser tomados, y por tanto se pueden repetir. Por eso tenemos que:

Posibilidades para elegir el primero: m
" el segundo: m
....
Posibilidades para elegir el n-ésimo: m

de donde se deduce que el número de posibles variaciones con repetición, de orden n, con m elementos, son:

$$m.m...m = m^n$$

Escribimos: $VRm,n = m^n$

FORMACIÓN de las variaciones con repetición:

Variaciones de orden 1 (monarias):

1 2 3 ... m-1 m

Variaciones de orden 2 (binarias):

11	21	31	...	(m-1)1	m1
12	22	32	...	(m-1)2	m2
13	23	33	...	(m-1)3	m3

....

Con cada monaria obtenemos m binarias. Del mismo modo con cada binaria obtenemos m ternarias, y así continuamos hasta el final.

4.8.- Permutaciones con repetición

Consiste en lo siguiente

Problema:

Tenemos m elementos entre los cuales hay ‘a’ elementos iguales por un lado, ‘b’ elementos iguales por otro, c iguales por otro, ...

Lógicamente: a+b+c+... = m

Codificamos los elementos (u objetos) mediante 1,2,3,...,m, y formamos las permutaciones con los m elementos como hicimos en el caso de las permutaciones ordinarias.

Cuántas permutaciones distintas tenemos?.

Tomamos una permutación concreta de los m elementos, y en ella aparecerán ‘a’ iguales, ‘b’ iguales, ... Al permutar entre sí los ‘a’ elementos iguales no se modifica la permutación actual, y por tanto hay a! permutaciones iguales dentro del total m!. Por tanto, el número de permutaciones distintas es m!:a!.

Hacemos ahora lo mismo con los ‘b’ elementos iguales, y llegamos a que el número de permutaciones distintas es (m!:a!):b!.

Repitiendo el proceso con los ‘c’ iguales llegamos a ((m!:a!):b!):c!

Si suponemos que este es el caso concreto, y representamos por $PR_{m(a,b,c)}$ el número de permutaciones distintas con m elementos, donde hay ‘a’ iguales, ‘b’ iguales, y ‘c’ iguales, se cumple

$$m! = PR_{m(a,b,c)} * (a!.b!.c!)$$

de donde: $PR_{m(a,b,c)} = \frac{m!}{a!.b!.c!}$

Ejemplo:

Tomo el conjunto M = {1,2,3,4}. Como vemos el 2 está repetido dos veces, el 3 lo está tres veces.

Al formar las permutaciones de los 7 elementos (igual que en las Variaciones), cuando 'toque' colocar las del 2, así como las del 3, observaremos que resultan las mismas repetidas.

El alumno debe construirlas y comprobar que distintas resultan
$\frac{7!}{2!.3!} = 420$

4.9.- Combinaciones con repetición

Sea un conjunto M con m elementos (distintos) numerados del 1 al m: M = {1,2,3,…,m}

Formación de Combinaciones con repetición:

Posibles
Combinaciones de orden 1 (monarias):
1 2 3 ... m-1 m

Posibles
Combinaciones de orden 2 (binarias):

11			
12	22..		
13	23	33	
.	.	.	...
.	.	. ...	
.	.	. ...	(m-1)(m-1)

1m 2m 3m (m-1)m mm

Observa que de la lista de monarias obtenemos

m + (m-1) + (m-2) + ... +2 + 1 =
(Suma de los m números naturales del 1 al m, p.a.)
$= \frac{m.(m+1)}{2} = \frac{(m+1).m}{2}$ = Cm+1,2

Fórmula de las combinaciones ordinarias de m+1 elementos.
(Recuerda que Cm,2 = $\frac{m.(m-1)}{2}$)

Posibles
Combinaciones de orden 3 (ternarias):

111
112 122
113 123 133
. . .
. . .
. . . ... 1(m-1)(m-1)
11m 12m 13m ... 1(m-1)m 1mm

De la lista de binarias que comienzan por 1 hemos obtenido ternarias

m + (m-1) + (m-2) + ... + 2 + 1 = $\frac{m.(m+1)}{2}$ =

$= \frac{(m+1).m}{2} = C_{m+1,2}$

De las binarias que comienzan por 2 obtendremos

$$(m-1) + (m-2) + ... + 2 + 1 = \frac{(m-1).((m-1)+1)}{2} =$$

$$= \frac{m.(m-1)}{2} = C_{m,2}$$

DEDUCIMOS LA fórmula para m elementos tomados de n en n

(El lector puede consultar Elementos de Matemáticas de Julio Rey Pastor y A. de Castro)

En lo que sigue intentaremos justificar que su número total viene dado por esta fórmula:

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}$$

Sea M = {a,b,c,d} con elementos distintos,
m = 4. Formamos las de orden 5.

Enumero los elementos de M así: a1,a2,a3,a4.

Dada una combinación con repetición aabbc, que con los elementos enumerados es a1a1a2a2a3, incremento el subíndice de cada elemento en tantas unidades como lugares le preceden, de forma que pasamos a escribir

c1c2c4c5c7

Esta es una combinación ordinaria de orden 5 tomados de un conjunto con 7 o más elementos.

Otro caso: abccd -> a1a2a3a3a4 -> c1c3c5c6c7

y volvemos a obtener una combinación ordinaria de orden 5 tomados de entre 7 o más elementos.

Caso extremo: ddddd -> a4a4a4a4a4 -> c4c5c6c7c8

y vemos que se necesitan 8 o más elementos.

Ahora bien, siendo este el caso extremo de repetición 5 veces del último elemento de M, parece seguro que es suficiente el conjunto

M’ = {c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8}

para convertir todas las combinaciones posibles con repetición de los elementos de M con m = 5, en combinaciones ordinaria de los elementos de M’ con m’ = m + 5 -1, es decir: m’ = m+n-1.

Conclusión: $\mathbf{CR_{m,n} = C_{m+n-1,n}}$

Ejemplos/Actividades:

1.- a) ¿Cuántos números con 8 dígitos distintos podemos formar?

b) De los anteriores, ¿Cuántos llevan el 3 en las centenas?

Sol.:
a) Son variaciones ordinarias: $V_{10,8} = 10.9.8.7.6.5.4.3 = 1814400$

b) Fijamos el 3 en las centenas y quedan 7 lugares a ocupar de todas las formas posibles por los 9 dígitos restantes:

$$V_{9,7} = 9.8.7.6.5.4.3 = 181440$$

2.- a) ¿Cuántos números de 5 dígitos, que se pueden repetir, podemos formar.

b) De los anteriores, ¿Cuánto son mayores o iguales que 30000?

Sol.:
a) Son variaciones con repetición: $VR_{10,5} = 10^5$

b) Son mayores o iguales que 30000 los que comiencen por 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. También puedo pensar que son todos menos los que comiencen por 0, 1, y 2.

Comienzan por: 0 --> $VR_{10,4} = 10^4$
1 --> $VR_{10,4} = 10^4$
2 --> $VR_{10,4} = 10^4$
La suma de estos nos da el resultado: $3.10^4 = 30000$

3.- ¿Cuántas matrículas puedo formar compuestas por 4 dígitos, que se pueden repetir, y 3 letras distintas(alfabeto con 27)?

Sol.: Con los números formamos $VR_{10,4}$, y con las letras formamos $V_{27,3}$.

El resultado es: $VR_{10,4} . V_{27,3} = 10^4.(27.26.25) = 17550.10^4 =$ 175.500.000.-

4.- ¿Cuántas fichas contiene el juego del dominó?

Sol.: Van de dos en dos y se pueden repetir. La blanca equivale al cero, por lo que los dígitos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Son combinaciones con repetición:

$$CR_{7,2} = C_{7+2-1,2} = C_{8,2} = \frac{8.7}{2.1} = 28$$

5.- Formados todos los números con 5 cifras distintas, se pide:

a) ¿Cuántos son menores que 40000?
b) ¿Cuántos son mayores que 30000?

Sol.: El total son $V_{10,5} = 10.9.8.7.6 = 30240$

a) Son menores los que comienzan por

0: $V_{9,4} = 9.8.7.6 = 3024$
1: .... = 3024
2: .... = 3024
3: .... = 3024

Sumando: 4.3024 = 12096
b) Son los que comienzan por

3: $V_{9,4} = 9.8.7.6 = 3024$
4:

Mejor pensar que son todos menos los que comienzan por
0, 1, 2, que en número son: 3.3024 = 9072

6.- Tengo 3 libros distintos de Matemáticas, 2 distintos de Física, 4 distintos de C. Naturales. ¿De cuántas formas es posible colocarlos en una estantería de modo que vayan juntos los de la misma asignatura?

7.- a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de 10 lados.
(Diagonal es la unión de dos vértices no consecutivos)

b)Repetirlo para un polígono de n lados dejando el resultado en función de n.

8.- Tres atletas participan en competición. Se acepta que puedan coincidir en la meta dos o tres al mismo tiempo. ¿De cuántas formas es posible la llegada a meta?

$$$$oOo$$$$

TEMA 5

Teoría de Conjuntos

Conjuntos bien ordenados

Principios de inducción

5.1.- Conceptos básicos en Teoría de conjuntos

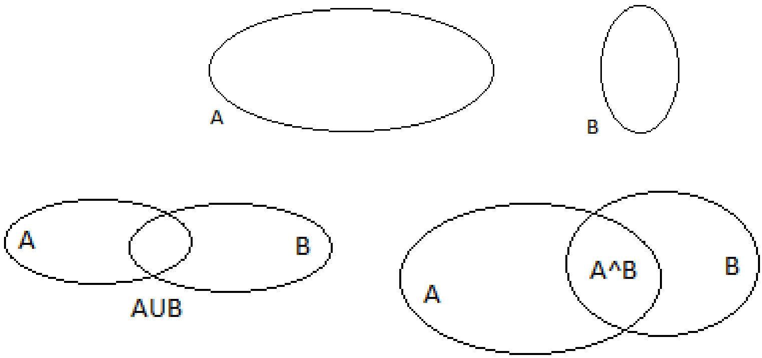
Introducción:

CONJUNTOS

El concepto de 'CONJUNTO' es un concepto primario en el que no es necesario, ni posible, insistir en su significado. Estamos rodeados de 'objetos' y éstos se presentan en 'asociación' dando lugar a 'conjuntos'. En este contexto a los objetos los llamaremos 'elementos'. Un conjunto puede ser 'unitario' (con un solo 'elemento'), o puede contener muchos elementos.

Evidentemente, en la vida real un conjunto se presenta con 'al menos un elemento'. Más adelante, en Matemáticas se introduce el 'imaginario' conjunto vacío, y, como siempre se hace en matemática, para dar 'vida propia' a una estructura algebraica.

Diagramas Venn (o de Leibniz, Euler)
Son formas gráficas usadas para representar conjuntos y relaciones entre ellos. Por ejemplo



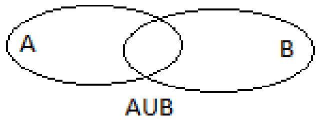
Tenemos por tanto el concepto de ‘conjunto’.

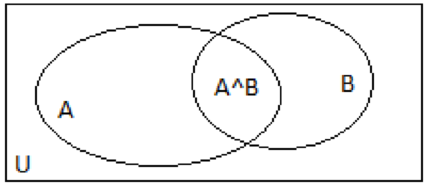
Siempre decimos que no está bien mezclar peras con manzanas, ni con naranjas, en lo que sigue, cuando definimos las operaciones entre conjuntos debemos dar por sentado que se realizan dentro de una colección de conjuntos del mismo tipo: De manzanas, de peras, o de naranjas, etc., etc.

Por lo que acabo de decir, conviene definir desde el principio lo que en Matemáticas llamamos ‘CONJUNTO UNIVERSO’ (o conjunto UNIDAD, que no es lo mismo que conjunto ‘unitario’) dentro del cual están ‘todos’ los conjuntos constituidos por elementos del mismo tipo. A éstos los llamaremos, cuando llegue el caso, ‘Subconjuntos de aquel’.

Por ejemplo, todos los conjuntos de manzanas que podemos imaginar (o que existan realmente) estarán dentro del ‘UNIVERSO’ de las manzanas, y lo mismo para otro tipo de objetos o elementos.

Al conjunto universo lo designaremos siempre por U, la ‘u’ en mayúscula (lo advierto para no confundirlo con el símbolo que representará la unión de conjuntos). Ya que hemos introducido la idea de este conjunto universo, es justo introducir también el concepto de ‘conjunto vacío’ y su representación.





Conjunto vacío es aquel que ‘no contiene’ elementos, es ‘la nada’, concepto análogo al cero introducido en la estructura de los números enteros. Lo representamos por ∅. Más adelante veremos para qué sirve.

Otro aspecto que debemos hacer notar antes de definir las operaciones con conjuntos es el siguiente. Evidentemente, si tenemos dos cestos con manzanas una manzana concreta no puede estar simultáneamente en los dos cestos. Lo mismo ocurrirá cuando se trate de conjuntos de un tipo de ‘objetos reales’ cualesquiera.

Pero en Matemáticas se trabaja fundamentalmente, no con peras ni manzanas, sino con ‘conjuntos numéricos’:

Subconjuntos del conjunto N de los números naturales, o del conjunto Z de los enteros, o del conjunto R de los reales, o del conjunto C de los complejos.

En estos casos, dados los conjuntos A y B, SÍ PUEDEN contener elementos comunes, por ejemplo:

$$A = \{0, 1,2,3,4\} ,\ \ B = \{2,4,6,8\}$$

o los intervalos en R

$$A = (-2;5],\ \ B = [0;6)$$

que tienen en común el intervalo [0;5]
Por tanto en general suponemos que SÍ PUEDEN contener elementos iguales.

Para no tener que repetirlo constantemente, debemos dejar claro que cuando ‘reunamos’ los elementos de A con los de B (lo que llamaremos ‘unión de estos conjuntos’), obteniendo un nuevo conjunto C, los elementos que están en A y están en B, al formar el conjunto C serán tenidos en cuenta ‘sólo una vez’.

CARDINAL de un conjunto:

Dado un conjunto A llamamos ‘Cardinal de A’ al número de elementos (los objetos que constituyen A) que contiene A.

La notación precisa en Matemáticas es #A, si bien en ocasiones para hacerlo más inteligible escribiremos
card(A), también usada en matemáticas, o simplemente c(A) cuando no induzca a error de interpretación.

Tenemos por tanto los conceptos básicos de CONJUNTO y su cardinal, y algunas ideas y consideraciones básicas para comprender mejor lo que sigue.

NOTACIÓN:

a) Los conjunto, o subconjuntos, serán designados siempre por mayúsculas: A, B, C, …

b) Cuando proceda hacerlo designaremos por minúscula: a, b, c, … , el ‘cardinal’ del conjunto designado por la misma letra mayúscula.

c) Designaremos por:

$\cup$ Unión de conjuntos. En ocasiones, cuando no haya lugar a falsa interpretación, la representaremos por +

$\cap$ Intersección de conjuntos. En ocasiones, cuando no haya lugar a errores podremos indicarla mediante ^

A falta de otra notación mejor:

$<$ La inclusión: $A < B$, ‘A incluido en B’

$>$ $A > B$, ‘A incluye a B’

$\leq$ Incluido o igual

$\geq$ Incluye o igual

$\equiv$ Equivalencia: $A \equiv B$, (Escribiremos = en su lugar)

5.2.- OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

UNIÓN: Léase ‘A unión B’

A∪B nos da el conjunto C constituido por los elementos de A más los elementos de B.

También podemos expresarla mediante A+B

INTERSECCIÓN: Léase ‘A intersección B’

A∩B nos da el conjunto C constituido por los elementos que están en A y en B (elementos comunes de A y B).

También podemos expresarla mediante A^B , y también mediante A.B

Cuando representemos la ‘unión’ mediante A+B, entonces la intersección debe ser representada mediante A.B, teniendo en cuenta . tiene prioridad frente a +, salvo que mediante paréntesis o corchete se indique otra cosa:

En A+B.C+D se hace primero B.C, otra cosa es que indiquemos

(A+B).C+D, ó (A+B).(C+D)

Si utilizamos esta notación utilizaremos también 0 para el vacío, 1 para el conjunto unidad U (o universo)

DIFERENCIA: Lo designamos por A-B

A-B nos da el conjunto C constituido por los elementos de A que no están en B

Ejemplo: A = {2,3,4,5}, B = {3,5,7,9,11}
A-B = {2,4}

COMPLEMENTARIO: Lo designamos por A’

Dado A, considerado conjunto o subconjunto de un universo U, tenemos:

A’ = U-A, constituido por los elementos de U que no están en A, y de modo que

$$A \cup A' = U$$

Consecuencias:

$U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$, $U \cup \emptyset = U$, U^$\emptyset = \emptyset$

$\cup$

PROPIEDADES: (De las operaciones básicas)

Leyes del Álgebra de Conjuntos

Conmutativa: A+B = B+A, A.B = B.A

Asociatividad:
(A+B)+C = A+(B+C), (A.B).C = A.(B.C)

Neutros: Para la unión lo es el vacío $\emptyset$

$$A + \emptyset = A$$

Para la intersección lo es U (la unidad)

$A.U = A$ (Como $A.1 = A$)

Distributivas:

$A \wedge (B \cup C) = (A \wedge B) \cup (A \wedge C)$, ó bien:

$$A.(B+C) = A.B+A.C$$

$A \cup (B \wedge C) = (A \cup B) \wedge (A \cup C)$, ó bien:

$$A+(B.C)=(A+B).(A+C)$$

Otras:

Idempotencia: $A \cup A = A$, $A \wedge A = A$

Identidad:

$A \cup \emptyset = A$, $A \wedge U = A$

$A \cup U = U$, $A \wedge \emptyset = \emptyset$

Leyes de Complemento:

$A \cup A' = U$, $A \wedge A' = \emptyset$

$(A')' = A$ $U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$

Leyes de De Morgan:

$(A \cup B)' = A' \wedge B'$, $(A \wedge B)' = A' \cup B'$

Ejemplos:

1.- Dentro del conjunto U = N de los números naturales, sean los conjuntos:

$A = \{\text{múltiplos de 6 menores que 31}\}$

$B = \{\text{múltiplos de 4 menores que 33}\}$

Obtenemos: $A \cup B = \{4,8,12,16,20,24,28,32\} \cup \{6,12,18,24,30\} =$
$= \{4,6,8,12,16,18,20,24,28,30,32\} = \{\text{múltiplos de 4 ó de 6, tomados sólo una vez}\}$

$A \wedge B = \{\text{múltiplos comunes de 4 y de 6}\} =$
$= \{12,24\} \to mcm(6,4) = 12$

$A - B = \{4,8,16,20,28,32\} = A - (A \wedge B)$

$A' = N - A, \quad B' = N - B$

2.- Dentro del conjunto U = N de los números naturales, sean los conjuntos:

$A = \{\text{Divisores primos de } 2310\} =$
$= \{2,3,5,7,11\}$

$B = \{\text{Divisores primos de } 4641\} =$
$= \{3,7,13,17\}$

Obtenemos:

A U B = {2,3,5,7,11} U {3,7,13,17} =

= {2,3,5,7,11,13,17}

A ^ B = {Divisores primos comunes} =
= {3,7} -> MCD(2310,4641) = 21

A – B = {2,5,11} = A – (A^B)

A' = N – A,   B' = N – B

Generalización de las Operaciones básicas:

Indexación:

Si tenemos una colección de sucesos, del mismo tipo de elementos y designados por la misma letra, por ejemplo A, para diferenciarlos les asignamos un 'índice' (subíndice). Equivale a definir la aplicación

$$I=\{1,2,3,4,5,\ldots,n\} \to \text{Colección}$$
$$i \to A_i$$

de modo que ahora tenemos: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

Habitualmente la designaremos por $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$

La unión y la intersección de sucesos pueden generalizarse para más de un par de sucesos, como sigue.

$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, (i toma valor desde 1 hasta n)

$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

5.3.- Subconjuntos. Particiones. El conjunto 'Partes de A'

Dado el conjunto A = Z (de los enteros), por ejemplo, el conjunto B = N (de los naturales) están dentro de A. Decimos que B es un subconjunto de A.

Otro caso: A = {1,2,3,4,5}, B = {2,4}.
B es un subconjunto de A

Resumiendo: ' Si todo elemento de B está en A, entonces B es un subconjunto de A'

Partición de A:

Supongamos que $(A_i)_{i=1,..,n}$ es una colección (también llamada 'familia') de subconjuntos de A.
Decimos que es una 'PARTICIÓN de A' si cumple estas dos condiciones:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad , \ siempre\ que\ i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

EL CONJUNTO 'Partes de A':

Designaremos mediante P(A) el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A.

Es habitual referirnos a él como el conjunto 'Partes de A'

En particular, en P(A) figuran $\emptyset$ y el propio A como elementos (ten en cuenta que estos son subconjuntos de A).

Cardinal del conjunto P(A):

Mediante unos ejemplos veremos la forma que toma y después intentaremos demostrar la fórmula

$$\text{card}(P(A)) = 2^{\text{card}(A)}$$

Lo hago así porque, teniendo en cuenta la finalidad del presente trabajo, considero inoportuno tratar aquí el muy nombrado en Teoría de Conjuntos ‘Teorema de Cantor’, y otros del mismo nivel.

Ejemplos:

a) $A = \{1,2,3\} \to P(A) = \{\emptyset, \{1\},\{2\},\{3\},$

$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}, A\} \to c(P(A)) = 8 = 2^3$

b) $A = \{1,2,3,4\} \to P(A) = \{\emptyset$, {un elemento}, {dos elementos}, {tres elementos}, A} ->

$\to c(P(A)) = 1 + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + 1 = 2 + 4 + 6 + 4 = 16 = 2^4$

c) $A = \{1,2,3,4,5\} \to P(A) = \{\emptyset$, {un elemento}, {dos elementos}, {tres elementos}, {cuatro elementos}, A} ->

$$\to c(P(A)) = 1 + C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + 1 =$$
$$= 2 + 5 + 10 + 10 + 5 = 32 = 2^5$$

Aceptamos la igualdad expresada antes.

5.4.- Función característica asociada a A. Funciones de elección asociadas a una familia de subconjuntos de A

Sea A < U, (U es el universo o unidad)

Definición:

Llamamos 'función característica' de A a la función
$f_A : U \dashrightarrow \{0,1\}$,

tal que: $f_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ está\ en\ A \\ 0 & si\ x\ no\ está\ en\ A \end{cases}$

Definición:

Sea una familia $(A_i)_{i\,\in I}$, de subconjuntos de A.

Llamamos 'función de elección' a una función

f: $(A_i)_{i\,\in I}$ ----> A , tal que
A_i ----> a_i ,

donde a_i es un elemento de A_i

Esta función tiene importancia relevante cuando $(A_i)_{i\in I}$ es una partición de A, ya que entonces podemos asegurar que f es inyectiva.

5.5.- Conjuntos Equipotentes. Cardinal de A

Defi.:

Decimos que A y B son equipotentes si tienen el mismo número de elementos. Esto es así si exite una aplicación

f: A --> B , inyectiva y sobreyectiva
(biyectiva o biunívoca)

La colección de todos los conjuntos equipotentes entre sí constituyen una ‘Clase de equivalencia’:

Reflexiva: A es equi consigo mismo

Recíproca: Si A es equi con B, también B es equi con A.

Transitiva: Si A es equi con B, y B lo es con C, entonces A es equi con C.
Definición: Cardinal de A

A este ente común inherente a todos los conjuntos equipotentes lo llamamos ‘cardinal de A’, y todos los de la clase tienen el mismo cardinal. Lo designaremos mediante #A, y en ocasiones mediante c(A)

Todo conjunto A con un número finito de elementos pertenece a una de estas clases de equivalencia, y por tanto tiene su cardinal:

c(A)

5.6.- Conjuntos enumerables (ó Numerables)

Como base de partida para este apartado tengamos en cuenta lo siguiente: (En realidad son axiomas)

-La referencia para ‘Conjunto enumerable’ es el conjunto N de los números naturales.

-Cualquier subconjunto de N también es enumerable.

-Todo conjunto finito es enumerable.

Partiendo de estas premisas, sea A un conjunto cualquiera.

Definición:

Decimos que A es enumerable si existe una aplicación biyectiva de un subconjunto de N en A

f: D --> A , D < N

NOTA: En adelante, y en la práctica, nos referiremos a esta propiedad como ‘numerable’ en lugar de enumerable. En todo caso lo consideraremos como equivalentes.

Ejemplos:

a) A = {2,4,6,8,…,2.k, ….} es el subconjunto de N constituido por todos los números pares. Tenemos la aplicación

   f: N --> A
   k ---> 2.k

Por tanto A es numerable.

b) Si A = {1,3,5,7,…,2.k-1, ….} es el subconjunto de N constituido por todos los números impares. Tenemos la aplicación

f: N --> A
k ---> 2.k-1

Por tanto A es numerable.

c) Caso muy general es el siguiente. Tenemos el siguiente conjunto indexado

A = {a_i}, i recorriendo N

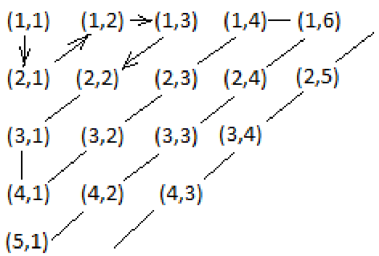
Es lo que hemos llamado 'sucesión' de números reales. Tenemos la aplicación

f: N ---> A, i ---> a_i

El conjunto A es numerable.

d) Sea A = NxN = {(n,m); n,m recorren N}

En A construimos la siguiente 'sucesión'



Nos movemos siguiendo el camino de aquellos pares que dan la misma suman.

Siguiendo la flecha asignamos 'índice' a cada par de modo que resulta una sucesión como la señalada en el ejemplo anterior. Por tanto es numerable.

e) Sea Q^+ el conjunto de los números racionales no nulos. Cada número racional tiene un representante irreducible p/q, que podemos expresar en la forma (p,q).

Construimos la aplicación f: Q^+ ---> NxN
p/q ---> (p,q)

Evidentemente f es inyectiva, y por tanto Im(f) es un subconjunto de NxN, y por ser éste enumerable también lo es Im(f), y en consecuencia lo es Q^+ .

Teneos algunos resultados importantes.

Teorema 1:

Todo conjunto infinito contiene al menos un subconjunto enumerable.

Dem.: Sean A infinito y el conjunto P(A) (partes de A)

Defino f: P(A) ----> A del siguiente modo:

f(A) = a1, a1 cualquiera de A
f(A-{a1}) = a2, a2 cualquiera de A-{a1}
f(A-{a1,a2}) = a3, a3 cualquiera de A-{a1,a2}

Continuando, como A es infinito el conjunto

An = A-{a1,a2,…,an} no es vacío, y

f(An) = $a_{(n+1)}$, donde $a_{(n+1)}$ es cualquiera de An.

……………

Por construcción la aplicación f es una 'aplicación de selección' y evidentemente es inyectiva.

Así obtengo un subconjunto B = {a1,a2,…,an,… } enumerable

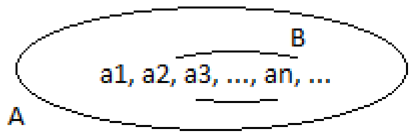
Teorema 2:

Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable (puede ser finito).

Dem.: Sea A numerable y por tanto puedo indexarlo obteniendo

A = {a1,a2,a3,…,an,…}

Sea B un subconjunto de A. Si B es finito es numerable. supongo que B no es finito.



Indexamos B del siguiente modo:

Llamo b1 al primer elemento de A que está en B.
Llamo b2 al siguiente primer elemento que esté en B
Llamo b3 al siguiente primer elemento que esté en B

y así, continuando, necesariamente todos los elementos de B quedan indexados, formando una sucesión

B = {b1,b2,b3,…,bn,…}

Teorma 3:
Aceptamos sin demostración la Tesis del siguiente enunciado:

Sea A1, A2, A3, …, una familia enumerable de conjuntos numerables. Su unión C = $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto numerable.

Consecuencia:
Puesto que Q^+, y por igual razón Q^-, son numerables, podemos afirmar que el conjunto de los números racionales

$Q = Q^+ U\{0\} U Q^-$, es enumerable.

Teorema 4:

El conjunto A = [0,1], intervalo cerrado dentro del conjunto R de los números reales, no es numerable.

Dem.: Por reducción al absurdo.

Supongo que A sí es numerable y por tanto puede ser indexado de modo que sus elementos forman una sucesión

A = {a1,a2,a3,…,an,…}

Por tratarse de números reales cada elemento de A es una expresión decimal

a1 = 0,x11x12x13…x1n…
a2 = 0,x21x22x23…x2n…

a3 = 0,x31x32x33…x3n…

……………………………

an = 0,an1an2an3…ann…

…………………………….

Los casos como 0,5000000… lo expresamos como 0,499999… El 1 como 0,9999999………, de modo que cada expresión contiene infinitos decimales no nulos.

Construyo ahora el siguiente número real:

b = 0,b1b2b3b4…bn…

tomando:
b1 <> x11 y no nulo
b2 <> x22 y no nulo
b3 <> x33 y no nulo
………………….
bn <> xnn y no nulo
……….

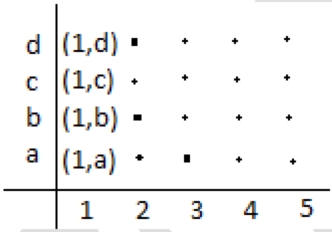
Este número b no coincide con ninguno de los valores a_n de la sucesión contenida en A. Pero b sí está en [0,1], y esto contradice el que A pueda expresarse como una sucesión. Luego [0,1] no es enumerable.

5.7.- Conjunto producto AxB. Grafo de una aplicación

Dados los conjuntos A = {1,2,3,4,5}, B = {a,b,c,d} formamos el conjunto cuyos elementos son pares (k,x), donde k es de A y x es de B:

AxB =
= {(1,a),(1,b),…, (2,a), (2,b),… (k,a), (k,b),… (5,a), (5,b), …}

Podemos representarlo así



Decimos que el conjunto AxB es el producto de A y B.

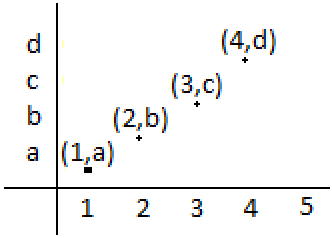
Grafos en AxB:

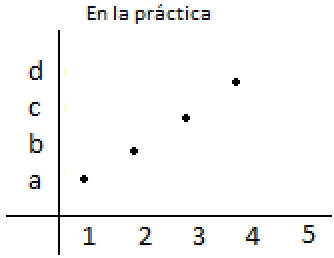
Concepto de Relación ó asociación definida en AxB:

Defi.:
'Es una ley que a ciertos elementos de A asocia uno o más elementos de B'

Por ejemplo, en el caso de AxB anterior, podemos definir la relación (1,a), (2,b), (3,c), (4,d)

Su representación, en un plano, es la siguiente





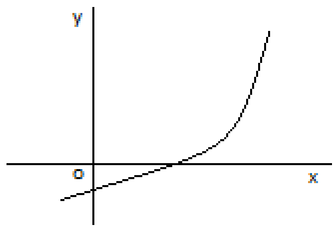
Llamamos 'grafo' al conjunto G de los pares resultado de la asociación.

Un caso muy habitual lo tenemos en una función

f: D ----> R, donde D < R
x ----> y = f(x)

Tenemos G = {(x,y); y = f(x)}

Su representación en un sistema de ejes, que llamamos 'Cartesiano', será algo similar a la siguiente, y que llamamos 'gráfica de f(x)':



5.8.- Conjuntos ordenados: Orden parcial, Orden total

Relación de orden: (Orden parcial)

Sea A un conjunto. Supongamos definida en A una relación R que cumpla las siguientes condiciones:

-Reflexiva: Todo a de A, aRa
-Antisimétrica: Si aRb y bRa, entonces b = a
-Transitiva: Si aRb, y bRc, entonces aRc

Esta es de ‘orden parcial’ ya que pueden existir elementos no relacionados con ningún otro.

Conjuntos totalmente ordenados:

Si a las condiciones anteriores (Relación de orden) añadimos la condición:

Todo par a,b cumple: aRb, ó bRa

Entonces decimos que A está totalmente ordenado.

NOTA:
En una relación de orden seguiremos la siguiente notación: aRb lo indicaremos a < b,
Subconjuntos totalmente ordenados, dentro de un conjunto parcialmente ordenado:

Sea A un conjunto ordenado, posiblemente parcialmente ordenado, o totalmente ordenado.

Si fuese totalmente ordenado lo que sigue no tiene sentido.
Supongamos A parcialmente ordenado.

En A existirán subconjuntos totalmente ordenados que podemos llamar ‘cadenas’ ordenadas (también se les llama ‘látices’). Cuando hablemos de cadenas supondremos que son subconjuntos totalmente ordenados.

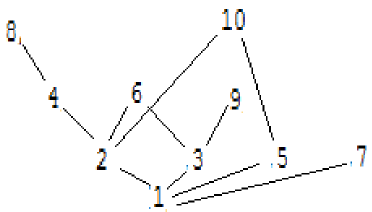
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos:

a) Tomo A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, y defino la relación

‘x es divisor de y’

En este caso obtenemos este diagrama, donde nos desplazamos de abajo arriba:



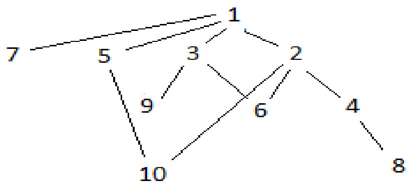
(1)

Aquí tenemos las cadenas: {1,2,4,8}, {1,2,6}, {1,3,6}, {1,3,9}, {1,2,10}, {1,5,10}, {1,7}

b) Tomo A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, y defino la relación

‘x es múltiplo de y’

Observa que ahora vamos a escribir: $x < y$ si x es múltiplo de y.
El diagrama resultará como el anterior invertido.



(2)

A continuación algunos conceptos con cierto interés.

PRIMERO y ÚLTIMO elementos:

‘ x0 es primer elemento si $x0 < x$ para todo x de A’
‘ x0 es último elemento si $x < x0$ para todo x de A’

En el diagrama (1) tenemos primer elemento, pero no último.

ELEMENTOS Maximal y Minimal:

‘ x0 es maximal si es el final de una cadena’.

Esto equivale a que $x < x0$ para todo x relacionado con x0.

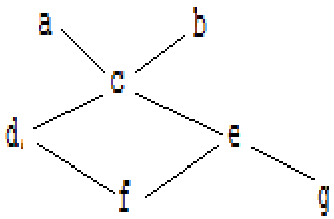
‘ x0 es minimal si es el primero de una cadena’.

Equivale a que $x0 < x$ para todo x relacionado con x0.
En el diagrama (1), el único minimal es 1. Son elemento maximal: 8, 6, 10, 9, 7

Observa que si existe 'primer elemento' este es el único minimal.

Ejemplo:

Sea A = {a,b,c,d,e,f,g} con la relación de orden definida por el gráfico adjunto (ordenados de abajo arriba)



(3)

Cadenas: {f,d,c,a}, {f,d,c,b}, {f,e,c,a}, {f,e,c,b}, {g,e,c,a}, {g,e,c,b}
Observa que al construir las cadenas lo hacemos ascendiendo siempre.
Son maximales: a y b. Son minimales: f y g

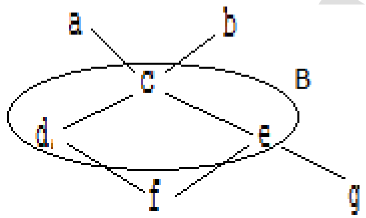
MAYORANTE y MINORANTE: (De un subconjunto de A)

Sea A parcialmente ordenado y B un subconjunto de A.

Defi.:
x0 es mayorante de B si x < x0 para todo x de B
x0 es minorante de B si x0 < x para todo x de B

Ejemplo:

En A = {a,b,c,d,e,f,g}, con la relación de orden definida en el diagrama (3), tomamos el subconjunto B = {c,d,e} con la relación de orden inducida.



(4)

En este caso, c es el primero de los mayorantes de B, siendo además un elemento de B, mientras f es minorante de B que no está en B.

Observa que a y b también son mayorantes de B.

Conjuntos bien ordenados. Principios de inducción: Principio de inducción matemático, Principio de inducción transfinita:

Una vez más tomamos como referencia el conjunto N de los números naturales. También el conjunto Z de los enteros.

‘Todo subconjunto de N tiene primer elemento’

No todo conjunto ordenado, ni totalmente ordenado, tiene primer elemento. Por ejemplo el conjunto Q de los números racionales, ni el de los reales.

Defi.:

Decimos que A está ‘bien ordenado’ si todo subconjunto B tiene primer elemento.

Siguiente y precedente:

Sea A un conjunto ordenado. Decimos que el elemento b es el ‘siguiente’ del elemento a, y que a es el ‘precedente’ de b, cuando $a < b$ y no existe otro elemento c tal que $a < c < b$.

Proposición:

Todo elemento ‘a’ de un conjunto A bien ordenado tiene siguiente ‘b’, salvo que ‘a’ sea último elemento de A.

Dem.: Llamo T(a) = {x de A tales que $a < x$}
Puesto que A está bien ordenado, el subconjunto T(a) tiene un primer elemento que llamo b.

Si existiera c tal que $a < c < b$, no sería b el primer elemento de T(a).

No es cierta una proposición análoga afirmando la existencia del ‘precedente’.

Ejemplo:
Es evidente que en N, por su propia naturaleza, todo subconjunto propio S tiene primero y último elementos. El último elemento de S es el precedente del primero de T = N-S.

5.9.- Sección inicial. Principio de inducción Matemática. Principio de inducción Transfinita

Sección inicial de un elemento m en un conjunto bien ordenado:

En un conjunto A bien ordenado llamamos 'sección inicial' de m (o simplemente 'sección' de m) al conjunto

$$s(m) = \{x \text{ de } A \text{ tales que } x < m\}$$

Elemento límite:

Def.:
Llamamos 'elemento límite' de A a todo aquel elemento m que no tiene 'precedente'.

Equivale a que la sección inicial s(m) no tiene último elemento.

NOTA: Recordamos que, entre conjuntos, $B < A$ significa que B está incluido en A, (es un subconjunto de A).

Principio de Inducción Matemático:

Dentro del conjunto N de los números naturales, si $S < N$ y son ciertas las afirmaciones:

a) El 1 está en S
b) El hecho de que n esté en S implica que n+1 también está en S

entonces $S = N$.

Dem.: Por reducción al absurdo.

NOTA: La condición b) equivale a que: ‘Si la sección s(m) está incluida en N, entonces m está en N’.

Supongamos que S < N estrictamente, y por tanto que T = N-S no es vacío. Sea n0 el primer elemento de T, que existe por ser N bien ordenado. Tomo la sección inicial de n0:

s(n0) = {n de N tales que n < n0}

Ahora, por la ‘propiedad’ b) ocurre que n0 está en S, ya que n0 es el siguiente del último elemento de S. Tenemos aquí una contradicción, dado que n0 está en T y en su complementario S.

Principio de inducción transfinita:

Sea A un conjunto bien ordenado. Sea S < A no vacío. Si son ciertas las dos afirmaciones siguientes:

a) m está en S
b) El hecho de que s(m) < S implica que m está en S

entonces S = A.

Dem.: Supongo que S < A estrictamente y por tanto que T = A-S no es vacío. Sea x0 el primer elemento de T, que existe por ser A bien ordenado.

Considero ahora la sección inicial, s(x0), de x0. Puesto que x0 es primer elemento de T, por definición tengo s(x0) < S, y por cumplirse b) obtengo que x0 está en S. Pero esto último es

contradictorio con el hecho de que x0 sea primer elemento de T, siendo éste el complementario de S.
Ha esta contradicción llego por suponer que S < A estrictamente.
Concluyo que S = A.

Ejemplos/Actividades:

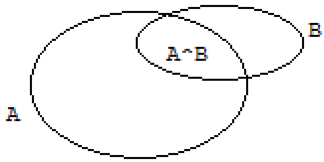
1.- a) Demuestra que $A\cup B = A + B - A\cap B$

b) Demuestra que

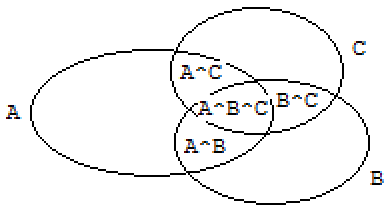
$A\cup B\cup C = A + B + C - A\cap B - A\cap C - B\cap C + A\cap B\cap C$

donde A representa también el número de elementos del conjunto A, y lo mismo para los otros casos.

Sol.: Considero que es suficiente hacerlo gráficamente. Observa el gráfico



En $A\cap B$ tenemos los elementos comunes a A y B. Al realizar $A + B$ estamos sumando todos los de A más todos los de B, y por tanto los elementos comunes los sumamos dos veces, esa es la razón por la que hemos de restar una vez los elementos comunes, es decir, restamos $A\cap B$.



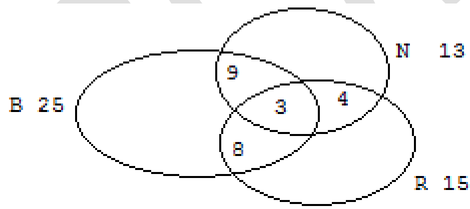
En la suma A+B+C entran todos los de A, más todos los de B, más todos los de C, y por tanto hemos de restar una vez los de $A\cap B,$ los de $A\cap C,$
los de $B\cap C$. Los comunes a los tres:

En la suma A+B+C los he sumado tres veces, al hacer las restas $-A \cap B - A \cap C - B \cap C$ los restamos tres veces de modo que quedan 'descartados'. Pero hemos de incluirlos una vez, y esa es la razón por la que hemos de sumar
Pero al hacer éstas resta $A \cap B \cap C$.

2.- He comprado un lote de vestidos de tres colores: B Balcos, R Rojos, N Negros. Algunos son de un único color, otros llevan dos colores, otros llevan tres colores. Hay 25 sólo blanco, 15 sólo rojo, 13 sólo negro .Hay 8 con blanco y rojo, 9 con blanco y negro, 4 con rojo y negro. Hay 3 con los tres colores.

Determina el número total de vestidos.

Sol.: B indica blancos, R indica rojos, N indica negro.



FÓRMULAS: Para sucesos A, B, C cualesquiera se cumple:

$$A\cup B = A + B - A \cap B$$

$$A\cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = A + (B \cup C) - A \cap (B \cup C) =$$

$$= A + [B + C - B \cap C] - [A \cap (B + C - B \cap C)] =$$

$$= A + B + C - B\cap C - A \cap B - A \cap C + A \cap B \cap C =$$

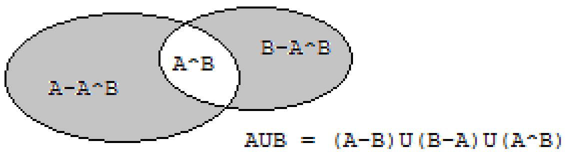
$$= A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$$

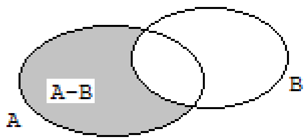
Aplicando esta última tengo:

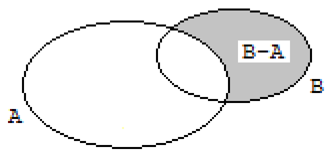
$B\cup R \cup N =$ 25+15+13-8-9-4+3 = 35

3.- Se define la suma: A+B = $A\cup B - A\cap B$
Se define la resta: A-B = $A\text{-}A\cap B$

Observa las gráficas:







$$$$oOo$$$$

Tema 6

Álgebra de Proposiciones

Tablas de verdad

Implicación lógica

6.1.- Enunciado y Proposición

Definiciones:

Enunciado: ‘Es una frase con significado propio’.

Proposición (simple): ‘Es un enunciado susceptible de calificación como verdadero (V) ó falso (F).

Ejemplos: Enunciados simples:

La rosa es roja
Las violetas son azules
Juan está enfermo
Juan está viejo

Enunciado que no es proposición: ¿Dónde vas?, porque no podemos ‘calificarla’ de verdadero o falso.

Proposición compuesta:

‘Las rosas son rojas y las violetas azules’
‘Juan está enfermo o viejo’

Designaremos las proposiciones (ó enunciados) mediante letras: p, q, r, …

NOTA:
Indistintamente hablaremos de ‘enunciado’ y de ‘proposición’, con el mismo significado siempre que el enunciado pueda ser valorado.

Valor de verdad:

Una proposición, simple o compuesta, tiene su valor de verdad. Este valor viene determinado por el valor de verdad de los 'enunciados simples' que lo componen, y la forma en que éstos vayan 'ligados', como veremos ahora.

6.2.- Operaciones básicas con proposiciones La Conjunción p ^ q. La Disyunción p v q

Conjunción:
Dos enunciados p y q pueden estar ligados mediante la copulativa 'y' para formar un enunciado compuesto.

La designamos por ^ en lugar de 'y', y decimos que p ^ q es la 'conjunción' de p y q.

Es análogo a la 'intersección' de dos conjuntos: A^B

Ejemplo: 'Está lloviendo' ^ 'Está nublado'

Tabla de verdad:

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos:

a) p = 'París está en Francia', q = '2+2 = 5'
b) p = 'París está en Francia', q = '2+2 = 4'

p^q tiene el valor V en el caso b), y su valor es F en el caso a)

Disyunción:

Dos enunciados p y q pueden estar ligados mediante la disyuntiva ‘o’ (no excluyente) para formar un enunciado compuesto.

La designamos por v en lugar de ‘o’, y decimos que p v q es la ‘disyunción’ de p y q.

Es análogo a la ‘unión’ de dos conjuntos: AUB

Ejemplo: ‘Está lloviendo’ v ‘hace sol’ , (traduce v por ó)

Observa que puede estar lloviendo y al mismo tiempo hacer sol. Y es que la disyunción es ‘no excluyente’: La verdad de p No excluye la verdad de q, ni la de q excluye la de p.

El valor de verdad de pvq es V salvo cuando esté nublado y no llueva, es decir, cuando p es F y Q es F, como se ve observando la siguiente tabla de verdad.

Tabla de verdad:

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Negación: ¬ p

Dado un enunciado p, podemos construir un enunciado que sea la negación de p así: 'Es falso que p ' , donde p representa es un enunciado. Lo representamos mediante ¬ p

Ejemplo:

p = **'**Está lloviendo', q = 'hace sol'

¬ p ^ q nos dice 'No Está lloviendo' ^ 'hace sol'

La tabla de verdad de ¬ p es muy simple:

p	¬ p
V	F
F	V

Condicional: p -> q

Es un enunciado de la forma 'Si p entonces q'.

Para que se entienda: "Si ocurre p, entonces también ocurre q"

Decimos que es un enunciado condicional, y lo designamos por

p -> q

Otras formas de expresión son:

'p implica q', esto es, que si se da p entonces se da q.

De otro modo: " Si se cumple p, también se cumple q"

Otras formas:

‘p solamente si q’, esto es: Si no se da q no se ha podido dar p.

‘p es suficiente para q’, esto es: Siempre que se dé p se da también q.

‘q es necesario para p’, esto es: Si no se da q no puede darse p.

El valor de verdad del enunciado p -> q resulta de esta condición:

“ p -> q es verdad salvo cuando q sea falso siendo p verdad “

Tabla de verdad:

p	q	p -> q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos:

‘Si llueve el suelo se moja’ -> verdad
‘Si el suelo no está mojado tampoco habrá llovido’ -> verdad
‘Ha llovido y el suelo no está mojado’ -> falsa

Pero ‘El suelo está mojado’ no implica (no exige que…) ‘ha llovido’, ¡ya que puedo haberlo regado mediante camión cisterna!

Bicondicional: p <--> q

Es el caso de: ‘p implica q’ y ‘q implica p’

También es muy habitual la expresión:

‘p si, y solamente, si q’ , ó ‘p si y sólo si q’

El valor de verdad del enunciado p <--> q resulta de esta condición:

“ p <--> q es verdad salvo cuando p (ó q) sea falso siendo q (ó p) verdad”

De otra forma: Su valor es V si p y q tienen el mismo valor (V ó F), y es F si p y q tienen distinto valor.

Tabla de verdad:

p	q	p <---> q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplos:

a) ‘Salamanca pertenece a Castilla y León’ y ‘el número 32 es divisible por 4’

b) 'Un triángulo es rectángulo' si y sólo si sus lados cumplen '$b^2 + c^2 = a^2$'

c) 'Un triángulo es rectángulo' si y sólo si sus 'Sus ángulos suman 180º'

Analizamos: Por mi forma de razonar expreso lo siguiente.
En el caso a) p y q son verdad, pero lógicamente ni p implica q, ni q implica p.

En el caso b) sabemos (Teorema de Pitágoras) que p implica q y q implica p, lógicamente.

En el caso c) puede ocurrir que las dos sean ciertas, pero p no implica q (porque q se cumple siempre) ni q implica p (porque el triángulo puede no ser rectángulo).

Será importante el punto 6.4 donde se estudia la implicación lógica, y la equivalencia lógica.

NOTA Importante:

No deben confundirse la condicional p --> q, ni la bicondicional p <--> q, con la 'Implicación lógica', ni con la 'equivalencia lógica' que veremos más adelante.

6.3.- Polinomios Boolianos. Tablas de verdad

En álgebra tenemos el polinomio P(x), y también el polinomio en dos variables P(x,y), donde x, y son variables indeterminadas.

Considerando las proposiciones p, q como indeterminadas, y combinándolas mediante las conectivas v, ^, ¬, -->, <--> , obtenemos polinomios P(p,q) que llamamos ‘Polinomios boolianos’.

NOTA: Cambio la notación escribiendo f(p,q), g(p,q), para evitar posibles confusiones.

Ejemplos:

a) f(p,q) = ¬pv(p->q)

b) g(p,q) = (p <-> ¬q)^q

c) f(p,q)^g(p,q) = [¬pv(p -> q)]^[(p <-> ¬q)^q]

d) f(p,q) -> g(p,q) = [¬pv(p -> q)] -> [(p <-> ¬q)^q]

Tabla de verdad de un polinomio booliano (Proposición compuesta)

Los siguientes ejemplos muestran cómo proceder en cualquier otro caso.

Sea f(p,q) = ¬ (p ^ ¬q), obtengo su tabla de verdad

p	q	¬ q	p ^ ¬q	¬ (p ^ ¬q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Para los casos anteriores.

f(p,q) = ¬ p v (p -> q)

p	q	¬ p	p -> q	¬ p v (p -> q)
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

g(p,q) = (p <-> ¬q)^q

p	q	¬ q	p <--> ¬ q	(p <--> ¬ q) ^ q
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

f(p,q)^g(p,q) = [¬pv(p -> q)]^[(p <-> ¬q)^q]

p	q	¬ p	¬ q	p -> q	p <--> ¬ q	¬pv(p-->q)	(p<-->¬ q)^q	[¬ p v (p-->q)] ^ [(p <--> ¬ q) ^ q]
V	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F

f(p,q) -> g(p,q) = [¬pv(p -> q)] -> [(p <-> ¬q)^q]

p	q	¬p	¬q	p -> q	p <--> ¬q	¬pv(p-->q)	(p<-->¬q)^q	[¬ p v (p-->q)] --> [(p <--> ¬q) ^ q]
V	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	F

Tautología y Contradicción:

Definición:

f(p,q,r,…) es una TAUTOLOGÍA si su valor de verdad es siempre V, cualesquiera que sean las proposiciones simples p, q, r,…

En una tautología, en la última columna (la de la derecha) lleva V en las cuatro posiciones.

Definición:

f(p,q,r,…) es una CONTRADICCIÓN si su valor de verdad es siempre F, cualesquiera que sean las proposiciones simples p, q, r,…

En este caso, la última columna (la de la derecha) lleva F en las cuatro posiciones.

6.4.- Equivalencia lógica de dos proposiciones

Defi.:

Dos enunciados, ó proposiciones compuestas, $f(p,q,r,\ldots)$ y $g(p,q,r,\ldots)$ son 'lógicamente equivalentes' si sus tablas de verdad coinciden (son idénticas).

Lo indicamos mediante

$$f(p,q,r,\ldots) \equiv g(p,q,r,\ldots)$$

Ejemplo:

Construyendo sus tablas de verdad comprueba que la siguientes son equivalentes:

$f(p,q) = (p \to q) \wedge (q \to p)$
$g(p,q) = p \longleftrightarrow q$

Implicación lógica:

Sean dos enunciados $f(p,q,\ldots)$, $g(p,q,\ldots)$.

Se puede demostrar la siguiente afirmación:

" Las siguientes tres condiciones son equivalentes: "
(a) $\neg f(p,q,\ldots) \vee g(p,q,\ldots)$ es tautología

(b) $f(p,q,\ldots) \wedge \neg g(p,q,\ldots)$ es contradicción

(c) $f(p,q,\ldots) \longrightarrow g(p,q,\ldots)$ es tautología

(El caso c): ' Si f entonces g')

Defi.:

Decimos que f(p,q,…) implica lógicamente g(p,q,…) si se cumple alguna de las tres condiciones anteriores.

Lo indicamos mediante f(p,q,…) ==> g(p,q,…)

NOTA:
Hemos hablado de proposiciones cuando realmente son ‘enunciados compuestos’. Lo dicho para proposiciones es válido para los enunciados.

Se dice que un Enunciado es LÓGICAMENTE VERDADERO cuando la proposición f(p,q,…) que lo ‘identifica’ es una tautología.

Se dice que dos Enunciados son LÓGICAMENTE EQUIVALENTES cuando las proposiciones f(p,q,…), g(p,q,…) que los ‘identifican’ son lógicamente equivalentes (Tienen tabla de valor idénticas).

6.5.- Leyes del Álgebra de proposiciones

Son las siguientes:

De Idempotencia

1-A	$f \vee f \equiv f$	1-B	$f \wedge f \equiv f$

Conmutativas

2-A	$f \vee g \equiv g \vee f$	2-B	$f \wedge g \equiv g \wedge f$

Asociatividad

3-A	$(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$	3-B	$(f \wedge g) \wedge h \equiv f \wedge (g \wedge h)$

Distributivas

4-A	$f \vee (g \wedge h) \equiv (f \vee g) \wedge (f \vee g)$	4-B	$f \wedge (g \vee h) \equiv (f \wedge g) \vee (f \wedge h)$

De identidad

5-A	$f \vee F \equiv f$	5-B	$f \wedge V \equiv f$
6-A	$f \vee V \equiv V$	6-B	$f \wedge F \equiv F$

De complemento

7-A	$f \vee \neg f \equiv V$	7-B	$f \wedge \neg f \equiv F$
8-A	$\neg \neg f \equiv f$	8-B	$\neg V \equiv F$, $\neg F \equiv V$

Leyes de De Morgan

9-A $\neg (f \vee g) \equiv \neg f \wedge \neg g$ 9-B $\neg (f \wedge g) \equiv \neg f \vee \neg g$

$$$$oOo$$$$

Tema 7

Operaciones definidas sobre un conjunto

Estructuras: Grupo, Anillo, Cuerpo

Álgebra de Boole

7.1.- Operador sobre un conjunto. Estructuras de Grupo

NOTA: Operador y Operación son sinónimos en este contexto.

Sea un conjunto M, en principio sin 'estructura' sino simplemente 'cargado' con sus elementos.

Definimos en M una 'operación interna' cuyo 'operador' designaremos por * .

Operación interna en M significa que el resultado de la operación 'queda' dentro de M.
En otro caso sería 'Operación' externa.

Definición:

Suma:

M x M ----> M
(a,b) ---> c = a*b

Decimos que * es un 'operador'

Clausura: La condición de 'clausura' es equivalente a ser 'operación interna':

'Para todo par a,b, el resultado a*b está en M'

Propiedades: Que se cumplirán o no

Conmutatividad: a*b = b*a

Asociatividad: a*(b*c) = (a*b)*c

Existencia de elemento Neutro:

La cumple si existe un elemento ‘e’ tal que a*e = e*a = a (Puede ocurrir que sí lo tenga por la izquierda o por la derecha, solamente)

Existencia del Simétrico:

La cumple si para cada elemento ‘a’ existe otro elemento a’ tal que a*a’ = a’*a = e

Estructura:

Si cumple las condiciones descritas decimos que (M,*) es una **Estructura de grupo** conmutativo.

Si no cumple la conmutativa será: **Estructura de grupo** (solamente)

7.2.- Dos Operadores sobre M. Estructuras de Anillo y de Cuerpo.

Supongamos una estructura de grupo conmutativo (M,+), donde al operador lo llamamos ‘suma’ y lo designamos por +.

En adelante al elemento neutro de la estructura anterior lo llamaremos ‘cero’, y al simétrico de ‘a’ lo llamaremos ‘opuesto de a’.
Decimos que es estructura ‘aditiva’.

Supongamos un segundo operador * definido en M de modo que resulte ser operación interna:

M x M ----> M

(a,b) ---> c = a*b

A este operador lo llamaremos ‘producto’.

Propiedades: Que puede cumplir o no

Conmutatividad: a*b = b*a

Asociatividad: a*(b*c) = (a*b)*c

Existencia de elemento Neutro:

La cumple si existe un elemento e tal que a*e = e*a = a

Este elemento e puede ocurrir que sólo lo cumpla operando por izquierda, u operando por la derecha. Aquí estamos exigiendo que lo cumpla por la izquierda y por la derecha.

Si existe diremos que e es el elemento ‘unidad’.

Existencia del Simétrico:

La cumple si para cada elemento a existe otro elemento b tal que a*b = b*a = e

Si lo admite, diremos que b es el inverso de a.

Unicidad:

Se puede demostrar fácilmente que e y b, cuando existan, son únicos.

Estructura: Si cumple las condiciones descritas decimos que (M,*) es una **Estructura de grupo** conmutativo.

Si no cumple la conmutativa será solamente Estructura de grupo multiplicativo.

Relación entre los dos operadores:

Puede ocurrir que se cumpla la siguiente propiedad que relaciona los dos operadores.

Propiedad distributiva:

(del producto respecto de la suma)

Para toda terna de elementos a,b,c de M se cumple:

a*(a+b) = (a*b) + (a*c)

Estructura:

Si se cumple la anterior propiedad distributiva decimos que

(M,+,*) es una **Estructura de Cuerpo conmutativo.**

Si * no es conmutativo decimos que es Estructura de Cuerpo.

Si (M,*) no es grupo porque no todo elemento ‘a’, o ninguno, admite ‘inverso’, entonces, cumpliéndose la distributiva, decimos que

(M,+,*) es **Estructura de Anillo conmutativo.**

Si * no es conmutativo, cumpliendo las restantes, entonces decimos que es Estructura de Anillo.

7.3.- Operadores en M. ÁLGEBRA de Boole

Sea un conjunto M, en principio sin ‘estructura’ sino simplemente ‘cargado’ con sus elementos.

Definimos en M una o dos operaciones internas, que convenimos en llamar ‘Suma’ y ‘Producto’, como sigue.

Operación * interna en M significa que el resultado de la operación ‘queda’ dentro de M.
En otro caso sería ‘Operación’ externa.

Definiciones:

Suma:

M x M ----> M
(a,b) ---> c = a+b

Producto:

M x M ----> M
(a,b) ---> c = a*b

Decimos que + y * son los ‘operadores’

Clausura: La condición de ‘clausura’ es equivalente a ser ‘operación interna’:

‘Para todo par a,b, el resultado a*b está en M’

Álgebra de Boole:

Defi.:

Dado el conjunto M dotado de dos operaciones +, *, decimos que (M,+,*) es un álgebra de Boole si estas dos operaciones cumplen:

a) Conmutatividad:

$$a+b = b+a, \quad a*b = b*a$$

b) Asociatividad:

$$a+(b+c) = (a+b)+c, \quad a*(b*c) = (a*b)*c$$

c) Distributividad:

$$a*(b+c) = (a*b)+(a*c),$$
$$a+(b*c) = (a+b)*(a+c)$$

d) Existencia de Neutro:

Existen ‘neutro aditivo’ que designamos por 0:

$$a+ 0 = a$$

y ‘neutro multiplicativo’ que designamos por 1 (ó por U):

$$a*1 = a$$

e) Existencia de ‘complemento’ para cada a:

Cada elemento ‘a’ de M lleva asociado otro elemento ‘a’’, que llamamos ‘simétrico de a’ (ó complemento de a), tal que

$$a + a' = 0, \quad a*a' = 1$$

Ejemplos:

1.- Ejemplo importante a pesar de su simplicidad

Sea M = {0,1} donde definimos las operaciones +, * dadas por sus respectivas tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

(M,+,*) es un álgebra booliana

2.- Sea M = P(U) (Conjunto partes de U: ‘Conjunto de todos los subconjuntos de U’)

M está dotado de las operaciones (internas) unión U, e intersección ∩.

El alumno puede comprobar la existencia del neutro: ∅ para la unión, U para la intersección. También existe el complementario A’ de A tal que:

AUA’ = U, A^A’ = ∅

Teniendo en cuenta además las propiedades (conocidas) de U y de ∩, concluimos que

(M,U, ∩) es álgebra de Boole

Dualidad en un álgebra de Boole:

En un álgebra de Boole (M,+,*), si tengo una expresión que ‘liga’ elementos de M mediante los operadores + y *, al intercambiar las posiciones de + y *, de modo que donde figura + coloco *, y donde figura * coloco +, resulta otra expresión que llamamos dual de la primera.

Teorema de dualidad:
El dual de una proposición es también una proposición, y la verdad ó falsedad es también ‘heredada’.

NOTA:
Acepto que lo estudiado sobre estos temas es suficiente para los objetivos de este trabajo.

$$$$oOo$$$$

PROBLEMAS Resueltos o semi-resueltos

De COMBINATORIA

1.- a)Comprueba la igualdades

$$V_{8,5} – V_{8,4} = 15.V_{8,3}$$

b)Calcula el valor de n

$$V_{n,3} = V_{n,4} \,, \qquad V_{n,4} = 4.V_{n-1,3}$$

c)Determina el valor de n y k sabiendo que

$$V_{n,k} = 6.5.4, \qquad V_{n,k} = 8.7.6.5.4$$

2.- a)Resuelve

$$V_{x,4} = 20.V_{x,2} \,, \quad V_{x,6} = 90.V_{x-2,4}$$

b)Simplifica

$$\frac{V_{x,5} \cdot V_{x+2,7} \cdot V_{x-1,6}}{V_{x+1,6} \cdot V_{x-2,4}}$$

c)Comprueba la igualdad

$$(k-1).V_{n,k-1} = n.V_{n,k-1} – V_{n,k}$$

$$\frac{V_{n,k}}{V_{n,h}} = \frac{V_{n-h,k}}{V_{n-k,h}}$$

3.- a)¿Cuántos números naturales podemos obtener con las cifras 1, 2, 3, 4,5, sin repetirse?

Indicación: Suma todos los posibles con una cifra, con dos cifras, …, con 5 cifras.
Resultado: 325

b)Tengo x objetos que puedo colocar en diferentes grupos y ordenaciones. El número de las posibles es el mismo si tomo de cuatro en cuatro que si tomo de cinco en cinco. ¿Cuántos objetos tengo? Resultado: 5

c)Una línea de ferrocarril tiene 30 estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes hemos de imprimir si en cada una ha de figurar 'Origen' y 'Destino'

Indicación: $V_{30,2} = 30.29$

4.- Tomamos los dígitos: 2, 4, 6, 8, y suponemos formados todos los posibles con tres cifras distintas.

a)¿Cuántos comienzan por 2?
b)¿Cuántos terminan en 64?
c)¿Cuántos son mayores que 500?

5.- Tomamos los dígitos: 2, 4, 6, 8, y suponemos formados todos los posibles con tres cifras distintas.

¿Cuánto suman todos los números obtenidos?

Indicación: Total posibles 24, y de éstos tengo 6 que llevan el 2 en las unidades, 6 que llevan el 4 en las unidades, ….; tengo 6 que llevan el 2 en las decenas, ….; Tengo 6 que llevan el 2 en las centenas, ….. Por tanto, su suma la obtengo mediante

$6.(2+4+6+8) +6.(2+4+6+8).10 +6.(2+4+6+8).100 = = 13320$

6.- Si con n elementos formamos todas las variaciones (ordinarias) tomando de tres en tres, y por otro lado las formamos tomando de cinco en cinco, la razón entre el primer número y el segundo es 1/110. Determina el valor de n (Res.: 14)

7.- a)¿Cuántos capicúas de 5 cifras es posible formar con los dígitos 1, 3, 5, 7, 9?

(Res.: 125 Observa que la primer cifra y la última son iguales, y los mismo la segunda con la cuarta.)

b)¿Cuántos números con sus cifras distintas hay entre 5000 y 6000 (Res.: 504)

c)¿Cuántas matrículas de coche podemos inscribir si cada una consta de dos letras distintas seguidas de cuatro dígitos que se pueden repetir?

(Res.: $V_{27,2} \cdot VR_{10,4} = \ldots\ldots = 7020000$)

8.- En el alfabeto Morse se utilizan exclusivamente los signos: punto ., raya – , y con ellos se forman 'palabras'. ¿Cuántas palabras es posible formar que consten de: un solo signo, dos signos, tres signos, cuatro signos, cinco signos?

(Res.: $V_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + \ldots = 62$)

9.- a)Determina el valor de x

$x! = 110.(x-2)!$ (Res.: x = 11)

b)Determina el valor de x

$12.x! + 5.(x+1)! = (x+2)!$ (Re: x = 5)

c)¿De cuántas formas pueden sentarse 6 personas en un banco? (Res.: 720)

10.- a)Una persona dispone de 8 chaquetas distintas, de 6 pantalones distintos, de 12 camisas y de 4 pares de zapatos distintos. ¿De cuántas formas puede vestirse para salir a la calle?

(Indic.: $V_{8,1}.V_{6,}1.V12_{,1}.V_{4,1}$ = ……)

b)¿Cuántos números ‘impares’ de cinco cifras distintas podemos escribir con los dígitos 1,2,3,4,5?

c)Demuestra que la suma de todos los números de 3 cifras distintas que podemos formar con los dígitos 4,5,6 se puede expresar así

S = 222.(4+5+6)

11.- a)En el alfabeto Morse, ¿Cuántas ‘palabras’ se pueden formar que lleven 2 puntos y 3 rayas?

(indic.: $PR_5^{2,3}$ = …. = 10)

b)Tengo 9 bolas de las cuales: 4 son rojas, 3 son amarillas, 2 son azules. ¿De cuántas formas distintas pueden ser colocadas el línea?

(Res.: 1260)

c)Tengo 10 cartas de una baraja de las cuales: 4 son ases, 3 reyes, 2 caballos, 1 sota. ¿De cuántas formas distintas podemos presentarlas?

(Res.: 12600)

12.- a)Comprueba la igualdad

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}.\binom{n-1}{k-1},$$

$$n.\binom{n}{k} = k.\binom{n}{k} + (k+1).\binom{n}{k+1}$$

b)Comprueba $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$,

Determina valor de n en $\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-1}{4}} = \frac{8}{5}$, c)Calcula $\binom{18}{k}$ sabiendo que $\binom{20}{k} = \binom{20}{k-10}$

13.- a)Resuelve

$\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = x + 1$, $7.\binom{x}{4} = \binom{x+2}{4}$

(Res.: x = 3, x = 5)

b)Resuelve

$5.\binom{2x}{x} = 18.\binom{2x-2}{x-1}$,

$30.\binom{x}{5} + 24.\binom{x}{4} = 21.\binom{x}{3} - 6.\binom{x}{2}$

(Res.: x = 5, x = 5)

c)Resuelva

$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \frac{x.(x^2+6)}{6}$

(Res.: x = 6)

14.- Resuelve el sistema

$$\begin{cases} \binom{x}{y+1} = \binom{x}{y-1} \\ \binom{x}{y} = \frac{21}{10}.\binom{x}{y-2} \end{cases}$$

(Res.: x = 10, y = 5)

15.- ¿Cuántos planos distintos determinan cinco puntos en el espacio suponiendo que no exiten más de tres que sean coplanarios?

(Indic.: $C_{5,3}$ = …. = 10 planos)

De SUCESIONES

1.- Determina:

a) a6, a6 – a5 , en la sucesión $a_n = \frac{1-n}{2+n}$

b) a10, a10 –a9, en la sucesión $a_n = \frac{n^2-2}{1+2n^2}$

c) a15, a15 – a14, en la sucesión $a_n = \frac{3n+5}{5n-2}$

Sol.: a) a6 = -5/8, $\frac{-5}{8} - \frac{-4}{7} = \cdots . = \frac{-3}{56}$

b) a10 = 98/201, $\frac{98}{201} - \frac{79}{163} = \frac{95}{32763}$

c) a15 = 50/73, $\frac{50}{73} - \frac{47}{68} = \frac{-31}{4964}$

2.- Determina su carácter:

a) $a_n = \frac{n-3}{n+4}$, b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

c) $a_n = 2n^2 - 5$, d) $a_n = \frac{(-1)^n.(4n+3)}{2n-5}$

Sol.: a) a_n -> 1; b) a_n -> 0 (oscilando)

c) a_n -> ∞ ; d) a_n -> +-2

3.- Determina a partir de qué valor de n los valores quedan dentro del interval (1-0,001; 1+0,001), en las siguientes:

a) $a_n = \frac{n}{n-3}$; b) $a_n = \frac{2n}{2n+5}$ c) $a_n = \frac{3-n}{5-n}$

Sol.: a) $\left|\frac{n}{n-3} - 1\right| < 0{,}001 \rightarrow \left|\frac{3}{n-3} < \frac{1}{1000}\right| \rightarrow 3003 < n$

b) $\left|\frac{2n}{2n+5} - 1\right| < 0{,}001 \rightarrow \begin{cases} \frac{2n}{2n+5} - 1 < 0{,}001 \\ \text{ó} \\ 1 - \frac{2n}{2n+5} < 0{,}001 \end{cases}$ ->

$0 < \frac{5}{2n+5} < \frac{1}{1000}$ -> 4995 < 2n, n > 2497,5 , n > 2497

c) -> $\frac{-2}{5-n} < \frac{1}{1000} \rightarrow \frac{n-5}{2} > 1000$, n > 2005

4.- Calcula el límite cuando n -> ∞

a) $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$; b) $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+4}$

c) $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+4}$; d) $a_n = \frac{n^2-3}{5n+4}$

Sol.: Observa que en todos los casos dividimos por la mayor potencia de n.

a)Divido entre n: $\frac{2n-1}{3n+2} \rightarrow \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}$, ya que 1/n y

2/n -> 0

b) Divido entre n^2: $\frac{3n+1}{2n^2+4} \rightarrow \frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{2} = 0$

c) Divido por n^2: $\frac{2n^2-3}{n^2+4} \rightarrow \frac{2-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2$

d) Divido por n^2: $\frac{n^2-3}{5n+4} \rightarrow \frac{1-\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{0}$ no real

(es el ∞)

De PROGRESIONES aritméticas

1.- Resuelve:

a) Interpola 5 medios diferenciales entre

a = 10 y b = 40,

Entre a = 3/5 y b = 23/5

sol.: $a_1 = 10$, $a_7 = 40$

Fórmula de la interpolación: d = $\frac{b-a}{m+1}$

d = (40-10)/(5+1) = 5 -> a2=15, a3=20,

a4=25, a5=30, a6=35

d = (23/5 -3/5)/(5+1) = $\frac{20/5}{6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) Halla el valor de la diferencia 'd':

a1 = 23, a17 = 31,

a19 = -14, a24 = 16,

sol.: Fórmula: a_n = a1 +(n-1).d

a_n = ak +(n-k).d

a17 = a1 +16.d -> d = $\frac{31-23}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

a24 = a19 +(24-19).d -> d = $\frac{16-(-14)}{5} = \frac{30}{5} = 6$

2.- Calcula la suma de:

a) Los 40 primeros múltiplos de tres

b) Los 120 primeros impares

c) Los múltiplos de seis comprendidos entre 100 y 1000

Sol.: a) a1 = 3, a40 = a1 +39.3 = 120

S_{40} = $\frac{3+120}{2}$ $.40 = 123.20 = 2460$

b) a1 = 1, a_n = a1 + 119.2 = 239

S_{120} = $\frac{1+239}{2}$ $.120 = 240.60 = 14400$

c) 100/6 = 16,..; a1 = 17.6 = 102

1000/6 = 166,..; a_n = 166.6 = 996

996 = 102 +(n-1).6 -> n-1 = $\frac{894}{6} = 149$ -> n = 150

S = $\frac{102+996}{2}.150 = \frac{1098}{2}.150 = 549.150 = 82350$

3.- Resuelve

a) $a_1 = 3$, $a_n = 21$, $S = 120$; Calcula: d y n
b) $a_1 = 20$, $d = 2$, $S = 780$; Calcula: a_n y n

Sol.: a) $21 = 3 +(n-1).d$
$120 = (3+21).n/2 = 12.n \rightarrow n = 10$
$21 = 3 + 9.d \rightarrow d = 18/9 = 2$

b) $a_n = 20 + (n-1).2 = 18 +2.n$
$780 = (20+a_n).n/2 = \frac{20+18+2.n}{2}\ .n = \frac{38+2n}{2}\ .n$
$780 = 19.n + n^2 \rightarrow n^2 +19n -780 = 0$
Resulta: $n = 20$, $a_{20} = 58$

De PROGRESIONES geométricas

4.- Resuelve
a) Calcula el valor de r (la razón) sabiendo que
$a_1 = 2/9$, $a_6 = 54$
b) Interpola 5 'medios proporcionales' entre 81/4 y 16/9
c) Calcula el medio proporcional entre
1/8 y 1/2 ; m/n y n/m

Res.: a) Fórmulas: $an = a1.r^{n-1}$, $an = ak.r^{k-1}$
$54 = \frac{2}{9}\ .r^5 \rightarrow\ 486 = 2.r^5 \rightarrow r^5 = 243$, $r = 3$

b) Fórmula: Entre a1 y an tenemos intercalados n-2 términos. Para llegar desde a1 hasta an ‘multiplico (n-2)+1 = n -1 veces’ por r, de modo que an = a1.r^{n-1}. Si intercalo m entre ‘a’ y ‘b’, para llagar desde a hasta b he de multiplicar m+1 veces por r, y por tanto

b = a.r^{m+1} , $\frac{16}{9} = \frac{81}{4}\,.r^6 \rightarrow\ r^6 = \frac{64}{729} = \frac{4^3}{9^3}$,

r^2 = 4/9 -> r = $\frac{2}{3}$

c) Fórmula-Definición: mp = $\sqrt{a.b}$

mp = $\sqrt{\frac{1}{8}.\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

mp = $\sqrt{\frac{m}{n}.\frac{n}{m}} = 1$

5.- Resuelve

a) Calcula la suma de los nueve primeros de

9/2, 3/2, 1/2, … ;

b) Calcula el producto de los seis primeros de

$\sqrt{3}$, 3.$\sqrt{3}$, 9.$\sqrt{3}$, ...

c) Calcula la suma de la p.g. ilimitada

3, 3/2, 3/4, 3/8, ….

Res.: a) a1 = 9/2, r = 1/3, a9 =

= 9/2.$(1/3)^8$ = 1/2.$(1/3)^6$

Suma: Sn = $\frac{an.r-a1}{r-1} = \frac{a1.(r^n-1)}{r-1}$;

$$S_9 = \frac{\frac{9}{2}.(\frac{1}{3^9}-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3.(1-3^9)}{2.3^9.(-2)} = \frac{(1-3^9)}{-4.3^8} = \frac{3^9-1}{4.3^8} = \cdots .. = 6.\frac{1093}{1458}$$

b) a1 = $\sqrt{3}$, r = 3, a6 = $\sqrt{3}.3^5$

Fórmula: $P_k = \sqrt{(a1.ak)^k}$

$$P_6 = \sqrt{\left(\sqrt{3}.3^5.\sqrt{3}\right)^6} = (3^6)^3 = 3^{18}$$

c) a1 = 3, r = 1/2,

Fórmula: $S = \frac{-a1}{r-1} = \frac{a1}{1-r}$; $S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$

6.- Resuelve

a) De una p.g. conocemos:

r = 2, n = 7, S_7 = 635; halla a1 y an

b) Calcula la fracción generatriz de la expresión decimal: 0,189189189…

c) Calcula la fracción generatriz de

0,84515151….

Res.: a) an = $a1.2^6$, $635 = \frac{a1.(2^7-1)}{2-1}$,

$a1 = \frac{635}{127} = 5$, $a_7 = 320$

b) Formo la p.g. ilimitada

a1 = 0,189, a2 = 0,000189, …. , r = 1/1000

$$S = \frac{0{,}189}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{189}{999}$$

c) Tengo en cuenta que 0,84515151…. = 0,84 +

+ 0,0051 + 0,000051 + …

Hago a1 = 0,0051, r = 1/10000,

$$S = 0{,}84 + \frac{0{,}0051}{1-\frac{1}{10000}} = \frac{84}{100} + \frac{51/10000}{9999/10000} = \frac{84.9999+5100}{999900}$$

$$\text{ó bien: } \frac{84}{100} + \frac{51}{9999} = \frac{84}{100} + \frac{17}{3333} = \cdots.$$

7.- En una p.g. a1 = 7, an = 448, Sn = 889. Determina el valor r y n

Sol.: $\begin{cases} 448 = 7.r^{n-1} \\ 889 = \frac{7.(r^n-1)}{r-1} \end{cases}$ -> $\begin{cases} r^{n-1} = 64 \\ 127 = \frac{64.r-1}{r-1} \end{cases}$ ->

127.r -127 = 64.r -1, 63.r = 126, r = 2

$2^{n-1} = 64 = 2^6$ -> n-1 = 6, n = 7

8.- La suma de una p.g. ilimitada es 2, y a1 = 1/2. Determina el valor de r.

Sol.: S = $\frac{a1}{1-r}$, $2 = \frac{\frac{1}{2}}{1-r}$, 4.(1-r) = 1, -4.r = -3, r = 3/4

9.- Determina el valor de x que hace que los términos: 2x+1, 4x+2, 7x+5, formen parte de una p.g.

Sol.: $\frac{4x+2}{2x+1} = \frac{7x+5}{4x+2}$ -> $(4x+2)^2 = (2x+1).(7x+5)$,

$16x^2 + 16x + 4 = 14x^2 + 17x + 5$,

$2x^2 - x - 1 = 0$ -> $x = 1$, $x = -1/2$,

Tomamos x = 1, y tengo: 3, 6, 12

10.- Supongamos que sobre un tablero de ajedrez (64 casillas) colocamos: una avellana en el primero, dos en el segundo, 4 en el tercero, 8 en el cuarto, …., y así hasta completar el tablero. ¿Cuántas avellanas van en la casilla nº 64?. ¿Cuántas hemos colocado en total? (suponiendo que esto fuese posible).

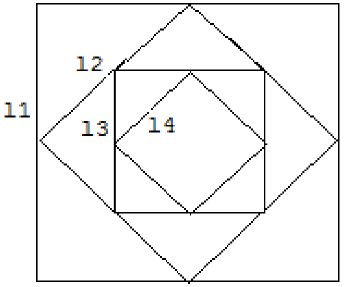
Sol.: a1 = 1, r = 2, $an = a1.2^{n-1}$

$a_{64} = 1.2^{63} = \ldots.$; $S_{64} = \frac{1.(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} - 1 = \ldots$

11.- Tengo un cuadrado C1 con l = 1 m. Uniendo los puntos medios obtengo el cuadrado C2. Uniendo los puntos medios de los lados de éste obtengo otro cuadrado C3, … , y así sucesivamente. Deseamos calcular: a) La suma de sus perímetros, y b) La suma de sus áreas.

Sol.: Observa la figura

Los lados nos llevan a la p.g. donde: a1 = 1, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$l1 = 1$
$l2 = \sqrt{2}\,/2 = \sqrt{2}\,/2\,.1$
$l3 = 1/2 = \sqrt{2}\,/2.\sqrt{2}\,/2$
$l4 = \sqrt{2}\,/2.1/2$

....

$a1 = 1, \quad r = \sqrt{2}\,/2$

Para la suma de los perímetros la razón es mayor que uno, y por tanto la SUMA resulta ilimitadamente elevada (grande). Veamos las áreas.

Áreas:

A1 = 1, A2 = $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, A3 = $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.A2$,
A4 = $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\,.A3$, …. Podemos concluir que forman p.g. con

A1 = 1, r = 1/2 (< 1)

Esta p.g. sí es SUMABLE: S = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,m^2$

12.- Tengo un triángulo equilátero con l = 1 m. Uniendo los puntos medios obtengo otro triángulo equilátero, y repitiendo esta operación obtengo una sucesión de triángulos rectángulos.

a) Comprueba que la razón r1 de la sucesión l_n de la longitud de sus lados es r1 = 1/2.

b) Comprueba que el área del primero es A1 = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) Comprueba que la razón r2 de la sucesión A_n de sus áreas es r2 = 1/4.

d) Calcula la suma de la sucesión ilimitada de las áreas.

e) Calcula el valor de la suma de todos los perímetros.

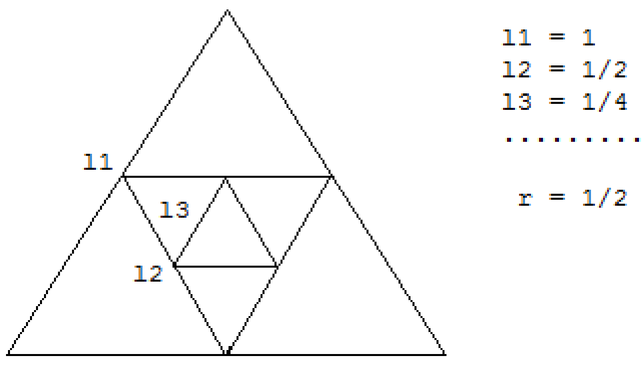
Sol.: Observa la figura

b) Valor A1: h = $\frac{1.\sqrt{3}}{2}$, A1 = $\frac{1}{2}$ .1.$\frac{1.\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) S = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) Para la suma de los perímetros: P1 = 3.1 = 3

$$S = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{1} = 6$$



13.- De una cuba llena de vino cuya capacidad es 512 litro, sacamos el 1 de Noviembre la mitad de su contenido. El día 2 sacamos la mitad de lo que quedó, y el día 3 sacamos de nuevo la mitad del resto, y así continuamos sacando siempre la mitad de lo que queda.

¿Qué cantidad hemos sacado el día 20 de Noviembre?

Sol.: a1 = 512, r = 1/2, $a_n = a1.r^{n-1}$

$$a_{20} = 512.(\frac{1}{2})^{19} = \frac{512}{2^{19}} = \frac{2^9}{2^{19}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

14.- Un sirviente le propone a su amo lo siguiente: 'Usted me abonará 0,01 céntimos el primer día, 0,02 céntimos el segundo día, 0,04 el segundo, y así multiplicando por dos cada día. En cambio Yo, por el alojamiento, pagaré 1 euro el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero, y así sumando uno cada día. El amo aceptó por 30 días. Realiza el balance final.
Sol.: Lo que recibe el sirviente forma una p.g. con a1 = 0,01 cént. de euro, siendo la razón r = 2

$a_{30} = 0{,}01/100.2^{29} = 5368709{,}1$ euros

Suma = $\frac{a_{30}.r-a1}{r-1} = \frac{10737418-0{,}0001}{1} = 10737417{,}9999\ euros$

Lo que pagará el sirviente forma p.a. con b1 = 1, d = 1,
$b_{30} = 1 + 29.1 = 30$
Su Suma = $\frac{b1+b30}{2}.30 = \frac{31}{2}.30 = 31.15 = 465\ euros$

¡Saca conclusión!

De MATEMÁTICA MERCANTIL

15.- Un capital C colocado al 6 % de interés simple, ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?

Sol.: $3.C = C + \frac{C.6.t}{100}$ -> $2.C = \frac{6.C.t}{100}$, $100.C = 3.C.t$,
$100 = 3.t$, $t = 33,33$ años

16.- Un capital C es colocado al 3 % de interés compuesto. ¿En qué se ha convertido al final de n años?. ¿Qué representan los interés?

Sol.: Haciendo $i = r/100$ = tanto por uno

$C1 = C.(1+i)$ al final del primer año

$C2 = C1.(1+i) = C.(1+i)^2$ al final del segundo

………..

$Cn = …. = C.(1+i)^n$ al final del año n

En nuestro caso: $M = C.(1,03)^n$; $I = M – C$

17.- Un capital C es colocado al 6 % de interés compuesto. ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse?.

Sol.: $3.C = C.(1,06)^n$, $3 = (1,03)^n$

Necesitamos aplicar logaritmos (tomamos base 10):

$\log(3) = n.\log(1,03)$, (Compruébelo el alumno)

$$n = \frac{\log(3)}{\log(1,06)} = \frac{0,477121}{0,025306} = 18,85\ años$$

(Compara con el resultado del nº 15)

$$M = m.\frac{(1+i)^{np+1}-(1+i)}{(1+i)-1} = m.\frac{(1+i).[(1+i)^{np}-1]}{i}$$

de donde: $m = \frac{M.i}{(1+i).[(1+i)^{np}-1]}$

Ejemplo: M = 500000 euros, r = 3 %, n = 20 años

Determina la mensualidad m y el importe de los intereses.

Sol.: i = 3/1200

CAPITALIZACIÓN

Teoría:

Deseo formar un capital M a lo largo de n años ingresando en el Banco una cantidad m el día 1 de cada mes, y de forma que genere intereses del r % anual, que se acumulan al montante ingresado (interés compuesto). Deseo saber qué cantidad m he de ingresar cada primero de mes. Razonamos como sigue:
Número de períodos: np = 12.n ,
Tanto por uno mensual: $i = \frac{r}{1200}$

Nº ingreso:	Se convierte en:
1	$m.(1+i)^{np}$
2	$m.(1+i)^{np-1}$
3	$m.(1+i)^{np-2}$
………………………………………….	
np-1	$m.(1+i)^{2}$
np	$m.(1+i)$

Las cantidades ingresadas más los intereses generados acumulan el siguiente montante (Observa que la suma lleva a p.g. con a1 = (1+i), razón = (1+i)):

0,0025 , np = 240

$M.i = 1250$, $(1+i)^{240} = 1,0025^{240} = 1,820755$

$(1+i)^{np} – 1 = 0,820755$

$(1+i).[(1+i)^{np} -1]=1,0025.0,820755=0,822807$

$m = \frac{1250}{0,822807} = 1519,1898$ euros/mes

Intereses: Las cantidades ingresadas dan la cantidad final:

C = 240.1519,1898 = 364605,55 eur.

el resto: 500000 – 364605,55 = 135394,45 eur.

son intereses acumulados.

AMORTIZACIÓN

Teoría:

He recibido la cantidad C como préstamo al r’ % anual y que he de devolver en n años, más los intereses que pueda generar a favor del prestamista. Llamaré M al montante de la deuda: M = C.$(1+i')^n$. Pactamos amortizar esta deuda ingresando la cantidad m el último día de cada mes, y de forma que estas cantidades generan intereses a mi favor del r % anual, que se van acumulando a la cantidad total ingresada.

Razonamos como sigue:
Número de períodos: np = 12.n ,
Tanto por uno mensual: i = $\frac{r}{1200}$, i’ = $\frac{r'}{100}$

Nº ingreso:	Se convierte en:
1	m.$(1+i)^{np-1}$
2	m.$(1+i)^{np-2}$
3	m.$(1+i)^{np-3}$
………………………………	………………
np-1	m.(1+i)
np	m

Las cantidades ingresadas más los intereses generados han de dar un montante igual a la deuda M (Observa que la suma lleva a p.g. con a1 = (1+i), razón = (1+i)):

$$M = m.\frac{(1+i)^{np}-1}{(1+i)-1} = m.\frac{(1+i)^{np}-1}{i}$$

de donde: $m = \frac{M.i}{(1+i)^{np}-1}$

Ejemplo: C = 500000, r' = 5 %, n = 20,

r = 3 %

Determina la mensualidad m, y los intereses abonados por un lado, y los generados a mi favor.

Sol.: np = 240, i' = 0,05, $i = \frac{3}{1200} = 0{,}0025$

$M = C.(1+i')^{20} = 500.000.(1{,}05)^{20} = 1326648{,}90$ eur.

M.i = 1326648,90.0,0025 = 3316,6221

$(1+i)^{np} = 1{,}0025^{240} = 1{,}820755$

$m = \frac{3316{,}6221}{0{,}820755}$ = 4040,9405 eur.

Análisis de los intereses:

A favor del Prestamista: $I' = C.(1+i')^{20} – C =$

= 1326648,90 – 500000 = 826648,90 eur.

A mi favor: I = M -240.4040,9405 = 1326648,90 – 969825,72 = 356823,18 eur.

Ejemplo práctico: Compra de un piso

C = 180000 eur., r’ = 4 %, r = 2 %, n = 20

Determina la mensualidad y analiza los intereses.

Sol.: i’ = 0,04, i = 2/1200 = 0,001666,

np =240

$M = 180000.(1,04)^{20} = 180000.2,191123 = 394402,17$

M.i = 657,074010,

$(1+i)^{np} = 1,001666^{240} = 1,491090$

$m = \frac{657,074010}{0,491090} = 1337,9910$ eur.

Análisis de los intereses:

I’ = M-C = 214402,17 eur., para prestamista

np.m = 240.1337,9910 = 321117,84 eur.

I = M – np.m = 394402,17 – 240.1337,9910 =

= 73284,33 eur., a mi favor.

Otro ejemplo: Compro piso e hipoteco una parte

C = 100.000, i’ = 4 %, i = 2 % , n = 20

Se pide lo mismo de antes

Sol.: $i' = 0{,}04$, $i = 2/1200 = 0{,}001666$,

$np = 240$

$M = 100000.(1{,}04)^{20} = 100000.2{,}191123 = 219112{,}30$

$M.i = 365{,}0411$,

$(1+i)^{np} = 1{,}001666^{240} = 1{,}491090$

$m = \frac{365{,}0411}{0{,}491090} = 743{,}3283$ eur.

Análisis de los intereses:

$I' = M\text{-}C = 119112{,}30$ eur., beneficio del Banco

$np.m = 240.743{,}3283 = 178398{,}79$ eur.

$I = M – np.m = 219112{,}30 – 240.743{,}3283 =$

$= 40713{,}5080$ eur., a mi favor

Beneficio neto del Banco: $B = I'\text{-}I = 137685{,}28$

% : $B/C . 100/n = 6{,}8843$ % interés anual simple

De CONJUNTOS

1.- Designamos por c(A) el cardinal de A (número de elementos de A)

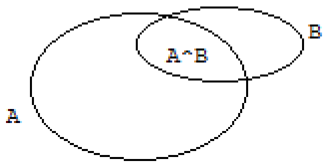
a) Demuestra que

$$c(A\cup B) = c(A) + c(B) - c(A\cap B)$$

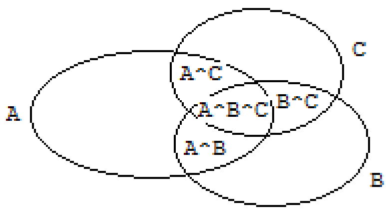
b) Demuestra que

$$c(A\cup B\cup C) = c(A) + c(B) + c(C) - c(A\cap B) - c(A\cap C) - c(B\cap C) + c(A\cap B\cap C)$$

Sol.: Considero que es suficiente hacerlo gráficamente. Observa el gráfico



En $A\cap B$ tenemos los elementos comunes a A y B. Al realizar $A+B$ estamos sumando todos los de A más todos los de B, y por tanto los elementos comunes los sumamos dos veces, esa es la razón por la que hemos de restar una vez los elementos comunes, es decir, restamos $A\cap B$.



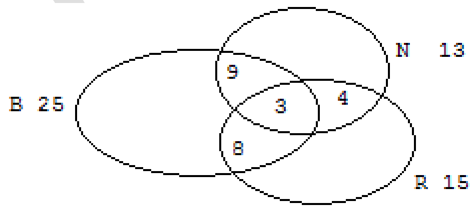
En la suma A+B+C entran todos los de A, más todos los de B, más todos los de C, y por tanto hemos de restar una vez los de $A \cap B,$ los de $A \cap C,$
los de $B \cap C$. Los comunes a los tres:

En la suma A+B+C los he sumado tres veces, al hacer las restas $-A \cap B - A \cap C - B \cap C$ los restamos tres veces de modo que quedan ‘descartados’. Pero hemos de incluirlos una vez, y esa es la razón por la que hemos de sumar
Pero al hacer éstas resta $A \cap B \cap C$.

2.- He comprado un lote de vestidos de tres colores: B Blancos, R Rojos, N Negros. Algunos son de un único color, otros llevan dos colores, otros llevan tres colores. Hay 25 sólo blanco, 15 sólo rojo, 13 sólo negro .Hay 8 con blanco y rojo, 9 con blanco y negro, 4 con rojo y negro. Hay 3 con los tres colores.

Determina el número total de vestidos.

Sol.: B indica blancos, R indica rojos, N indica negro.



FÓRMULAS: Para sucesos A, B, C cualesquiera se cumple:

$$c(A\cup B) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$$

$c(A\cup B\cup C) = c(A) + c(B) + c(C) - c(A\cap B) - c(A\cap C) - c(B\cap C) + c(A\cap B\cap C)$

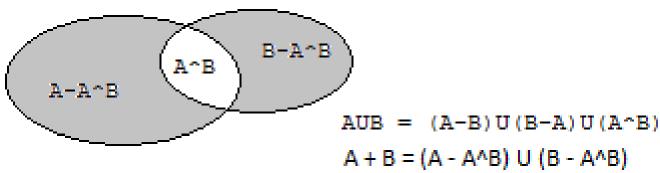
Aplicando esta última tengo:

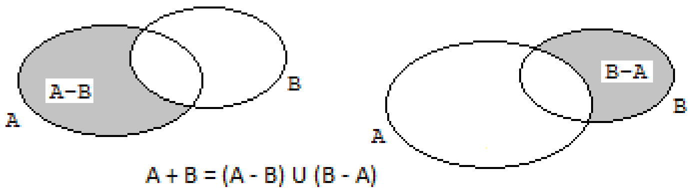
$c(B\cup R\cup N) =$ 25+15+13-8-9-4+3 = 35

3.- Se define la suma: $A + B = A\cup B - A\cap B$

Se define la resta: $A - B = A - A\cap B$

Observa las gráficas:

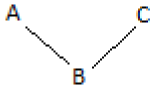




4.- Sean A = {a,b,c}, B = {b}, C = {b,c,d}.

Construye el diagrama lineal

Sol.:



5.- En lo que sigue x representa una figura geométrica en el plano. Sean

A = {x; x es cuadrilátero}, B = {x; x es rectángulo},

C = {x; x es rombo}, D = {x; x es cuadrado}

Redefinirlos y expresar la relación que existe entre ellos.

Sol.: A: ‘Tiene cuatro lados’

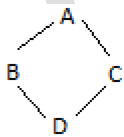
B: ‘Cuatro ángulos rectos’

C: ‘Cuatro lados iguales y paralelos dos a dos’

D: ‘Cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos (lados paralelos dos a dos)’

Relación entre ellos: B, C, D están incluidos en A

D < B, D < C ….



6.- Cómo demostrar que B no está incluido en A

Sol.: Basta probar que existe x en B que no está en A.

Ejemplo: A = {2,3,4,5}, B = {2,3,4,$\sqrt{2}$ }

7.- Sean A, B, C tales que A < B, B < C. Sean elementos

a ∈ A, b ∈ B, c ∈ C,

y por otro lado sean d ¬ ∈ A, e ¬ ∈ B, f ¬ ∈ C, donde ¬ indica ‘negación’.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles no?

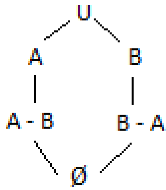
a ∈ C, b ∈ A, c ¬∈ A, d ∈ B, e ¬∈ A, f ¬∈ A

Sol.: La primera V; la segunda F; la tercera puede ser verdad; la cuarta puede ser verdad; la quinta es verdad (si no está en B no puede estar en A ya que A < B); la sexta es verdad, pues A < C y si f no está en C tampoco en A.

5.- Dados A y B tales que A ¬< B y B ¬< A (es decir, son no comparables), construir el diagrama lineal de los conjuntos:

A, B, A-B, B-A, Ø, U (universal)

Sol.:



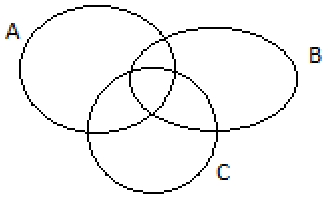
8.- Sean los conjuntos:

U = {a,b,c,d,e}, A = {a,b,d}, B = {b,d,e}

Determinar: AUB, A^B, B’, B – A, A’^B, AUB’, A’^B’, B’ – A’, A^B’, (AUB)’

Sol.: AUB = {a,b,d,e}, A^B = {b,d}, B’ = {a,c},
B – A = {e}, A’ = {c,e} -> A’^B = {e},
AUB’ = {a,b,c,d}, A’^B’ = {c}, B’ – A’ = {a},
A^B’ = {a}, (AUB)’ = {c}

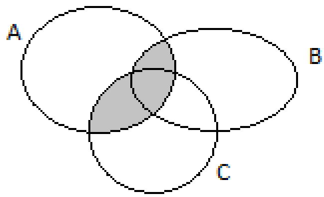
9.- Tenemos tres conjuntos y un diagrama (de Venn) que representa sus posibles relaciones.

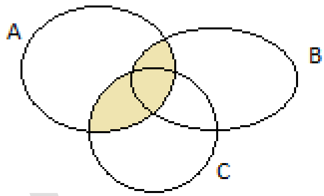


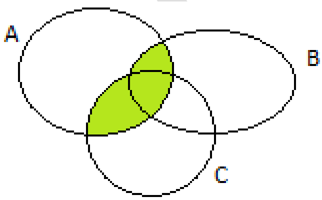
Marcar de alguna manera (por ejemplo mediante 'rayados') los siguientes subconjuntos:

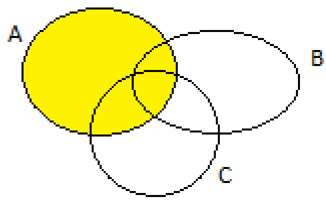
A^(BUC), (A^B)U(A^C), AU(B^C), (AUB)^(AUC)

Sol.:









NOTA: A^(BUC) = (A^B)U(A^C)
AU(B^C = (AUB)^(AUC)

BIBLIOGRAFÍA

Elementos de Matemáticas
4ª Edición
Julio Rey Pasto y A. de Castro
S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)
Madrid 1967

Análisis Matemático, Tomo I,
Julio Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo
Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires

Lecciones de Álgebra,
Julio Rey Pastor
5ª Edición, Madrid

Elementos de álgebra abstracta
Autor: A. Clark
Traducción: A. López-Lago y J. Margaref Roig
Editorial Alhambra, S.A., Madrid 1974

Álgebra Lineal (incluyendo Teoría de Conjuntos),
y Problemas resueltos
Autor: Alberto Luzárraga
Editado por el autor, Barcelona 1968

Teoría de Conjuntos y Grafos
Autor: … Lipchit ,
Editado: McGraw-Hill, México 1970

Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas
Autor: Murray R. Spiegel (Profesor de Matemáticas
del Rensselaer Polytechnic Institute)
Traducido: Orlando Guerrero Ribero

NOTACIÓN y Nomenclatura. Valores:

Símbolo	Significado
*	Producto
.	Producto
^	Potencia
sqr(a)	Raíz cuadrada
rad(a)	Raíz cuadrada
rad(a;n)	Radical con índice n
rad(a;n/m)	Radical con índice n/m

∈ significa ‘pertenece a’

∞ infinito

exp(x)	Exponencial: exp(x) = e^x
exp(x;a)	Exponencial de base a>0: exp(x;a) = a^x
ln(x)	Logaritmo neperiano: y = ln(x) <--> x = e^y
log(x;a)	Logaritmo base a>0: y = log(x;a) <--> x = a^y

≅ aproximado
Δ incremento
< menor que …, > mayor que …, Ej: x < y, x > y
≤ menor que …, ≥ mayor que …, Ej: x ≤ y, x ≥ y

∪ unión de conjuntos,
∩ intersección de conjuntos
≡ equivalencia

∈ pertenencia
¬ negación
→ implicación
↔ doble implicación

Valores:

π = 3,1415927... (número pi, en radianes)
pi = 3,1415927... (número pi, en radianes)

e = 2,7182818... (número e, base de ln(x))

sen(0) = 0	cos(0) = 1
sen(pi/6) = $\frac{1}{2}$	cos(pi/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
sen(pi/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos(pi/3) = $\frac{1}{2}$
sen(pi/2) = 1,	cos(pi/2) = 0