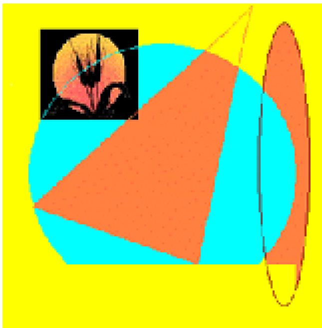
TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 12

Dedicado a Profundización:



Matrices, Espacios vectoriales, Resolución de Sistemas, Aplicaciones lineales, Formas bilineales, Diagonalización de matrices. Espacio afín, Espacio Euclídeo. Profundización: Geometría analítica, Cónicas, Cuádricas, Coordenadas homogéneas, Polarización, Transformaciones y Cambio de Sistema de referencia, Ángulos de Euler. Superficies, Curvas en el espacio.

PROMOCIÓN
NO VENTA

GONZÁLEZ CRIADO, ALEJO

Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

*Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su
estudio.*

Obra completa:

Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto

Figuras y gráficos del autor

Edita: El Autor

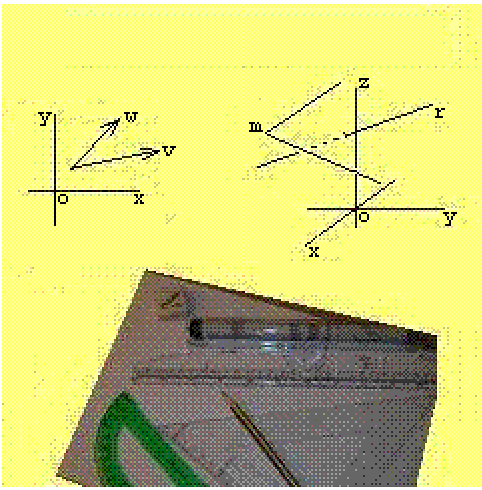
Primera edición Mayo 2018

Editado en España

ISBN:
Depósito Legal:

VOLUMEN 12

Profundización: Matrices, Espacios vectoriales, Resolución de Sistemas, Aplicaciones lineales, Formas bilineales, Diagonalización de matrices. Espacio afín, Espacio Euclídeo. Profundización: Geometría analítica, Cónicas, Cuádricas, Coordenadas homogéneas, Polarización, Transformaciones y Cambio de Sistema de referencia, Ángulos de Euler. Superficies, Curvas en el espacio.



ÍNDICE

Tema 6 Ampliación: Geometría analítica y coordenadas homogéneas. Profundización en el estudio de las Cónicas

Tema 7 Coordenadas homogéneas en el Espacio.
Estudio de las Cuádricas

Tema 8 Estudio de Curvas alabeadas.
Estudio de Superficies

Tema 1

Ampliación en el Estudio de las Matrices

1.1.- Potencias de una matriz cuadrada

Potencia: $A^n = A.\ldots(n \text{ veces}\ldots .A$

Se cumplen las mismas propiedades que en las potencias de números.

También $(A^{-1})^n = A^{-1}\ldots(n \text{ veces } \ldots.A^{-1} = (A\ldots (n \text{ veces } \ldots.A)^{-1} = (A^n)^{-1}$, que expresaremos A^{-n}

$$(A^{-1})^n = A^{-n}$$

Radical:

Definición: Definimos la matriz $A^{1/n}$ como aquella matriz que siendo del mismo orden que A satisface la igualdad

$$(A^{1/n})^n = A$$

Ejemplo:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ halla $A^{1/2}$

Sol.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1/2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 =$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 = a^2 + bc \\ 0 = ab + bd \\ 0 = ca + dc \\ 1 = cb + d^2 \end{cases}$$

Resolviendo, no sin esfuerzo, hemos obtenido el siguiente conjunto de matrices que lo cumplen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

Matriz Periódica:

Llamamos 'Matriz periódica' a aquellas matrices cuadradas A tal que

$$A^{n+1} = A \qquad \text{para algún entero positivo n}$$

Decimos que n es su período.

Matriz Idempotente:

Llamamos así a aquellas matrices cuadradas A tal que $A^2 = A$, y por tanto que su período es 1.

Matriz Nilpotente:
Llamamos así a aquellas matrices A tal que

$$A^n = 0 \text{ para algún entero positivo n}$$

Matriz Involutiva:
Llamamos así a aquellas matrices A tal que $A^2 = I$

Si A es involutiva, su 'inversa' coincide con A: $A^{-1} = A$

Matriz Ortogonal:
Llamamos Ortogonal a aquella matriz cuadrada y regular (det(A) <> 0) tal que $A^t = A^{-1}$

es decir, que su 'traspuesta' coincide con su 'inversa'. (La traspuesta también la expresamos como A')

Consecuencia: $A^t.A = I$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que suponemos ortogonal. Entonces, teniendo en cuenta que A'.A = I, tenemos

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ba + dc = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \dashrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Se puede comprobar que, en todos los casos, si A es ortogonal, y por tanto A'.A = I, se cumple:

-La suma de los cuadrados de los elementos de una fila, o de una columna, es 1

-La suma de los productos de una fila, o columna, por los correspondientes de otra fila, o columna, es cero.

1.2.- Polinomios de Matrices:

La matriz A siempre será 'matriz cuadrada'

Dada una matriz A podemos considerar un polinomio p(x) en el que ahora cambiamos x por A

$p(A) = a0.I + a1.A + a2.A^2 + \ldots + an.A^n$

Podemos descomponerlo en factores de la misma forma que el polinomio p(x), incluso aplicando la Regla de Ruffini.

Ejemplos:

a) El polinomio $p(x) = x^2 +3x -4$ descompone
$p(x) = (x-1).(x+4)$

Del mismo modo $p(A) = A^2 + 3.A - 4.I$ descompone

$$p(A) = (A-I).(A+4.I)$$

Un caso que hemos de tener en cuenta es

$A^3 - I = (A-I).(A^2+A+I)$, y en general

$$A^n - I = (A-I).(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I)$$

b) Ecuación $p(A) = 0$, (matriz cero), donde A es de orden 2x2

$A^2 + 3.A - 4.I = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la incógnita

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 + 3.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Después de cálculos laboriosos llegamos a que admite las siguientes soluciones:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{4-a^2-3a}{b} & -(a+3) \end{pmatrix}$$

1.3.- Ecuación Característica de una matriz A cuadrada. Teorema de Hamilton-Cayley

Siempre se tratará de una matriz cuadrada

Dada A podemos asociarle la matriz A-x.I y su determinante det(A-x.I)

Definición:

Tenemos así el polinomio p(x) = $|A - x.I|$ que llamamos 'Polinomio característico' de A.

Se puede demostrar (Teorema de Cayley-Hamilton) que la matriz A satisface la ecuación

p(A) = 0, donde p(x) = $|A - x.I|$

No lo demostramos, por no ser objetivo de este trabajo (Puede verse una demostración en Algebra y Geometría Analítica, de Francisco Granero Rodríguez, p. 129)

Ejemplos:

1.- Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

p(x) = $|A - x.I|$ = $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix}$ = (1-x).(4-x) – 6 = x^2 -5x -2,

Comprueba (es fácil) que A satisfice la ecuación

A^2 -5.A -2.I = 0

Observación: Si A es cualquiera de orden 2

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, su polinomio característico

p(x) = (a-x).(d-x)-bc

p(x) = x^2 –(a + d).x + (ad - bc)

a + d lo llamamos 'traza', ad - bc es det(A)

2.- Sea A de orden 3

A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$, y su polinomio

característico es

$$p(x) = |A - x.I| = \begin{vmatrix} a11 - x & a12 & a13 \\ a21 & a22 - x & a23 \\ a31 & a32 & a33 - x \end{vmatrix} =$$

$= \quad [\dots\dots.] - [\dots\dots.] = \dots\dots.. =$

llegamos a la forma p(x) =

$$-x^3 + tra(A).x^2 - \left(\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}\right).x + |A|$$

En el caso de matriz A de orden n resulta la siguiente expresión

$p(x) = (-1)^n.[x^n - k1.x^{n-1} + k2.x^{n-2} - k3.x^{n-3} + \dots + det(A)]$, donde

k1 = a11 +a22 +a33 +…. +ann = (que llamamos traza) y represento tra(A)

k2 = Suma(Menores centrales de orden 2) =

$$= \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a11 & 13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} + \cdots + \cdots$$

k3 = Suma(Menores centrales de orden 3) =

$$= \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix} - \cdots + \cdots$$

………………

kn = $|A|$

1.4.- Polinomio Mínimo asociado a A

Hemos visto que la matriz A satisface su polinomio característico p(x) = $|A - x.I|$

Pero puede ocurrir que A satisfaga alguna ecuación m(A) = 0 donde m(x) sea de grado menor que grado de p(x). Lo tratamos en el siguiente punto.

Defi.:

Polinomio mínimo de A es aquel polinomio m(x) de menor grado tal que m(A) = 0. Evidentemente gr(m(x)) ≤ gr(p(x))

Propiedades:

a) El polinomio m(x) es único

En efecto, si m(x) y m'(x) son 'mímos' de A, y por tanto del mismo grado,

$$m(x) = x^r + a1.x^{r-1} + \ldots + ar$$
$$m'(x) = x^r + b1.x^{r-1} + \ldots + br$$

$$m(x) - m'(x) = (a1-b1).x^{r-1} + \ldots + (ar-br)$$

que es de grado r-1 y también es satisfecho por A, en contra de que aquellos son de grado mínimo. Los coeficientes (a1-b1), … , (ar-br) han de ser cero, y por tanto aquellos ocinciden.

b) El polinomio m(x) es divisor de cualquier otro polinomio q(x) tal que q(A) = 0

En efecto, tenemos $\frac{h(x)}{m(x)}$ = q(x) + $\frac{r(x)}{m(x)}$, donde gr(r) < gr(m) h(A) = m(A).q(A) + r(A), de donde, si h(A) = 0 y m(A) = 0, tengo

r(A) = 0, lo que es contradictorio.

Consecuencia:
El polinomio mínimo de A es un divisor de su polinomio característico

p(x) = m(x).q(x)

Aplicaciones del Polinomio mínimo, su cálculo:

Descompongo en factores el polinomio característico p(x)

p(x) = (x-a1).(x-a2)… .q(x), donde q(x)

no descompone más.

Probamos si la matriz A satisface alguna de las siguientes igualdades (en orden ascendente), y en caso afirmativo ahí tenemos el polinomio mínimo m(x):

A-a1.I = 0 -> m(x) = x-a1
(A-a1.I).(A-a2.I) = 0 -> m(x) = (x-a1).(x-a2)
…….
q(A) = 0 -> m(x) = q(x)
(A-a1.I).q(A) = 0 -> m(x) = (x-a1).q(x)
…….

En el peor de los casos llegaremos a p(A) = 0, m(x) = p(x)

Ejemplos:

1.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Su p.c. es p(x) = det(A-x.I) =

$= \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 3 \\ 3 & 2-x & 3 \\ 3 & 3 & 2-x \end{vmatrix} = [(2-x)^3 + 27 + 27] -$

$= [9.(2-x) + 9.(2-x) + 9.(2-x)] = \ldots. = -x^3 + 6x^2 + 15x + 8,$

Intentamos descomponerlo en factores

$-p(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 8 = 0$, obtengo

$p(x) = (x-a).(x^2 - 7x - 8)$

Probando llegamos a que $m(x) = x^2 - 7x - 8$,

Otra forma de proceder es la siguiente:

1º.- Pruebo si m(x) es de la forma x + a

$$A+a.I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 3 & 3 \\ 3 & 2+a & 3 \\ 3 & 3 & 2+a \end{pmatrix} <> 0,$$

evidentemente.

Pruebo si lo es de la forma $x^2 + ax + b$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 2a & 3a & 3a \\ 3a & 2a & 3a \\ 3a & 3a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

A^2+a.A +b.I = $\begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 3a & 3a \\ 3a & 2a & 3a \\ 3a & 3a & 2a \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, y para que sea la matriz cero ha de

cumplirse

$$\begin{cases} 22 + 2a + b = 0 \\ 21 + 3a \quad = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

de donde a = -7, 22 -14 + b = 0 → 8 + b = 0, b = -8

m(x) = x^2 -7x -8

2.- Aplicación al cálculo de Potencias de A:

Supongamos que deseamos calcular determinadas potencias de A

A^2 = 7.A +8.I

Puesto que p(x) = $-x^3$ +6x^2 +15x +8

A^3 = 6.A^2 +15.A +18.I

Veamos las siguientes: A^4 , A^5 ,….

De ser A^2 = 7.A +8.I, tengo A^4 = $(7.A +8.I)^2$ =

$= 49.A^2 +64.I + 14.8.A = 49.(7.A+8.I) + 112.A +64.I = \ldots\ldots$

$A^5 = A^4 .A = \ldots\ldots$

$A^8 = (A^4)^2 = (\ldots\ldots)^2$

3.- Existencia de la inversa de A:

Supongamos que A satisface la una ecuación
$A^r +a1.A^{r-1} +\ldots.+ar.I = 0$, por ejemplo el p.m.

Entonces tengo $A.(A^{r-1} +a1.A^{r-2} +\ldots.. +a_{r-1}.I) = -ar.I$, y cambiando el signo y dividiendo por ar obtengo la inversa de A

$A^{-1} = -1/ar.(A^{r-1} +a1.A^{r-2} + \ldots. +a_{r-1}.I)$

Además podemos afirmar que A es regular

(det(A) <> 0)

4.- Aplica el estudio realizado al caso de una matriz A que satisface

$A^3 -7.A^2 -8.A = 0$

1.5.- Forma Canónica de Matrices. Equivalencia, Semejanza y Congruencia de Matrices. Forma canónica de Hermite

A) Transformaciones elementales entre filas (columnas):

El rango de una Matriz no cambia si efectuamos sobre sus filas, o sobre sus columnas, las siguientes operaciones. El valor del determinante se modifica en la forma que indicamos:

-Intercambiar entre sí las filas i-ésima y j-ésima. En particular permutar dos filas consecutivas. Modifica o no el signo del determinante conforme a que:

Cada permutación para llevar desde i hasta j provoca un cambio del signo.

-Multiplicar una fila por un escalar k no nulo. El rango no cambia; el determinante queda multiplicado por este valor k.

-Sumar a la fila i-ésima la fila j-ésima multiplicada por k. No cambia el rango: no cambia el determinante.

-Sumar a la fila i-ésima una combinación lineal de las restantes. No cambia el rango; no cambia el determinante.

B) Forma Canónica de Hermite:

Dada una matriz A, cuadrada o no, mediante ‘transformaciones elementales’ (descritas antes) podemos obtener una matriz H, con el mismo rango que A, cuya forma es la que describimos a continuación.

De momento suponemos que A es cuadrada:

-La diagonal principal está compuesta por 1 y, posiblemente, completada con ceros.

-A la derecha de la diagonal principal serán todos cero.

-Si un elemento de la diagonal principal es cero, todos los de esa línea son cero. Si el de la diagonal es 1, todos los de la columna son 0.

En la práctica procedemos así:

-Conseguir que a11 sea 1, y operando con las columnas conseguir 0 en todos los de la primera fila.

-Conseguir que a22 sea 1 y repetir el proceso anterior.

-Continuamos del mismo modo con el elemento a33, y así hasta el final.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ llegamos a } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pasando por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

En general, si A es cuadrada llegamos a la siguiente forma

$$H = \begin{pmatrix} I_r & . & (0) \\ & . & \\ \dots & \dots\dots & \dots.. \\ & . & \\ (0) & . & (0) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } (0) \text{ es la matriz cero.}$$

Si A no es cuadrada podemos tener los siguientes prototipos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots. \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ & & . & \\ 0 & 1 & . & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\,. & 0 & 0 \\ 0 & 1\,. & 0 & 0 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots.. \\ 0 & 0\,. & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ ---→ lleva al primer tipo

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ --→ lleva al segundo tipo

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ ---→ lleva al tercer tipo

1.6.- Equivalencia de Matrices. Semejanza y Congruencia de Matrices.

Defi.:
Decimos que A y B son ‘equivalentes’ si podemos pasar de una a la otra mediante transformaciones elementales.

Se puede demostrar, pero aquí no lo haremos, que la condición necesaria y suficiente para que A y B sean equivalentes es que sean del mismo orden y tengan el mismo rango.

Defi.:
Decimos que A y B son ‘semejantes’ si existe una matriz Q, cuadrada y regular, tal que

$$B = Q^{-1}.A.Q$$

Defi.:
Decimos que A y B son ‘congruentes’ si existe una matriz Q, cuadrada y regular, tal que

$B = Q'.A.Q$ (Q' es la traspuesta)

Nota: Observa que si A y B son semejantes o congruentes también son semejantes:

Haciendo $P = Q^{-1}$ tengo B = P.A.Q, con lo cual son semejantes, y lo mismo si hago P = Q'

Ejemplo:

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Obtener las matrices de la forma Q = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, con b<>0 y det(Q) = 1 tales que $B = Q^{-1}.A.Q$

Sol.: Matrices de la forma Q = $\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{-1}{b} & 0 \end{pmatrix}$, b <> 0

Polinomio característico y mínimo de dos matrices semejantes:

Si A y B son semejantes tienen el mismo polinomio característico p(x), y el mismo polinomio mínimo m(x). Son condición necesaria pero no suficiente para que sean semejantes.

En efecto

$$|B - x.I| = |Q^{-1}.A.Q - x.I| = |Q^{-1}.A.Q - Q^{-1}.(x.I).Q| =$$
$$= |Q^{-1}.(A - x.I).Q| = |Q^{-1}|.|A - x.I|.|Q| =$$
$$= |Q^{-1}|.|Q|.|A - x.I| = |A - x.I| \text{ , ya que } |Q^{-1}|.|Q| = 1$$

Ejemplo:

Aquella condición no es suficiente para que A y B sean semejantes. La siguientes matrices tienen igual polinomio mínimo $m(x) = x^2 - 3x + 2$, y sin embargo no tienen igual determinante ni igual rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$$$oOo$$$$

Tema 2

Ampliación al estudio de las

Aplicaciones lineales

2.0.- Recordatorio:

Cambio de base en un Espacio vectorial,
efecto sobre las coordenadas de un vector. Ejemplo

Razonamos tomando E_3 porque el seguimiento que hacemos es el mismo para cualquier otro caso.

Sean dos bases B = {e1, e2, e3}, donde v = (x1, x2, x3), y B’ = {v1, v2, v3}, donde v = (y1, y2, y3).

Supongo expresados los vectores ei de la primera base en función de la nueva

ei = ai1.v1 + ai2.v2 + ai3.v3

que determina una matriz A cuyas filas sean las coordenadas de cada ei = (ai1, ai2, ai3)

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Para un vector v tengo

v = y1.v1 + y2.v2 + y3.v3 en B’

v = x1.(a11.v1 + a12.v2 + a13.v3) + x2.(a21.v1 + …) +

+ x3.(a31.v1 + a32.v2 + a33.v3) =

= (a11.x1 + a21.x2 + a31.x3).v1 + (a12.x1 + a22.x2 + a32.x3).v2 + (a13.x1 + a23.x2 + a33.x3).v3 , en la base B’

Teniendo en cuenta que la expresión de v en una misma base es única, ha de cumplirse

y1 = a11.x1 + a21.x2 + a31.x3
y2 = a12.x1 + a22.x2 + a32.x3
y3 = a13.x1 + a23.x2 + a33.x3

que puedo expresar matricialmente así

$$(y1, y2, y3) = (x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Llamamos matriz del cambio a la matriz A.

Las filas de A son las coordenadas de los vectores de la primera base B expresados en la nueva, base B'.

Abreviadamente escribimos: **y = x.A**

Puedo despejar **x = y.A^{-1}**

Otra forma:

Suponemos los vectores vi de la nueva base expresados en la primera base B:

vi = ai1.e1 + ai2.e2 + ai3.e3

Determinando una matriz A' = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$

Tengo

v = y1.v1 + y2.v2 + y3.v3 = y1.(a11.e1 + a12.e2 +

+ a13.e3) + y2.(a21.e1 + a22.e2 + a23.e3) + y3.(a31.e1 +

+ a32.e2 + a33.e3) =

= (y1.a11 + y2.a21 + y3.a31).e1 + (y1.a12 + y2.a22 + y3.a32).e2 + (y1.a13 + y2.a23 + y3.a33).e3,

y teniendo en cuenta que

v = x1.e1 + x2.e2 + x3.e3,

llego a que

(x1, x2, x3) = (y1.a11 + y2.a21 + y3.a31, y1.a12 + y2.a22 + y3.a32, y1.a13 + y2.a23 + y3.a33),

y matricialmente

$$(x1,x2,x3) = (y1,y2,y3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Abreviadamente **x = y.A’**

Observa que A’ = A^{-1} , donde A es la obtenida en el proceso anterior.

Las filas son las componentes de los vectores de la nueva base B’ expresados en la primera, base B.

Ejemplo:

Sea la base de vectores en V_3 : B = {e1,e2,e3}, y la base B’ relacionada con la primera así:

$$\begin{cases} v1 = (1,0,2) \\ v2 = (0,1,2) \\ v3 = (1,2,0) \end{cases} \rightarrow \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea w = (3, 1, 2) respecto de la segunda base {v1,v2,v3}.

Sus componentes respecto de la primera son w = (5, 5, 8)

Una comprobación:

w = (3, 1, 2) = (respecto de S') = 3.v1 + v2 + 2.v3 =

= 3.(e1+2e3) + (e2+2e3) + 2.(e1+2e2) =

= 5.e1 + 5.e2 + 8.e3 -> (5, 5, 8) respecto de B S.

Obtengo la inversa de A:

Det(A) = -6; Adj(A) = $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ->

$A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

El alumno comprobará que $A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Componentes de w respecto de la base B', siendo w = (5, 5, 8) respecto de B:

$(y1, y2, y3) = (x1, x2, x3).A^{-1}$

$w = \frac{-1}{6} .(-18, -6, -12) = (3,1,2)$

como esperábamos.

2.1.- Recordatorio: Aplicaciones lineales. Núcleo e Imagen

Siempre operamos en el cuerpo de los reales R, salvo que se diga otra cosa, esto es, que los espacios vectoriales lo son sobre el cuerpo R.

Def.:
Dados dos Espacios vectoriales E_n y E'_m, llamamos Aplicación lineal a toda aplicación

f: E **---** > E'
x **----** > **y** = f(x)

que cumpla estas condiciones:

a) Para todo par v1, v2, f(v1 +v2) = f(v1) + f(v2)

b) Para todo v de E y todo escalar k, f(k.v) = k.f(v)

Resumiendo: f(k1.v1 + k2.v2) = k1.f(v1) + k2.f(v2)

Cuando E' = E la llamamos 'Endomorfismo'.

Núcleo e Imagen de f: E **---** > E'

Defi.:
Llamamos 'Núcleo' de f al subconjunto N constituido por todos los vectores cuya imagen es el vector 0:

N = $\{v \in E\ ; f(v) = 0\}$

Afirmo que N es un subespacio vectorial de E.

En efecto, 0 está en N ya que f(0) = 0.

Sean v1, v2 de N, y escalares k1, k2. Tengo

f(k1.v1 + k2.v2) = k1.f(v1)+k2.f(v2) = 0, y por tanto también k1.v1 + k2.v2 está en N (esto nos garantiza que N es Subespacio vectorial).

Def.:

Llamamos 'Imagen' de f al subconjunto de E' formado por todos los vectores w que son imagen de 'algún' vector v:

$$\text{Im(f)} = \{w \in E' \,;\, w = f(v) \; para \; alg\acute{u}n \; v \in E\}$$

Afirmo que Im(f) es un subespacio de E'.

En efecto, 0 está en Im(f) ya que f(0) = 0; sean w1, w2 de Im(f); existen v1, v2 tales que w1 = f(v1), w2 = f(v2); entonces, para todo par de escalares tengo

f(k1.v1 +k2.v2) = k1.f(v1) + k2.f(v2) = k1.w1 + k2.w2, y por tanto k1.w1 + k2.w2 está en Im(f)

Consecuencias:

-Las imágenes {f(ei)} de una base *B*={ei, i=1,…,n} de E forman un Sistema generador de Im(f).

-Si N(f) = {0}, entonces {f(ei)} es además Sistema libre, porque la aplicación f es inyectiva.

-Sean n = dim(E), m = dim(E'). Si m = n y N(f) = {0}, f es biyectiva, Im(f) = E', y {f(ei)} es una base de E'. Decimos que la aplicación f es un 'Isomorfismo'.

2.2.- Matriz asociada a f respecto de bases en E y en E'

Tenemos bases *B* = {e1,e2,…,e_n} en E, *B'* = {u1,u2,…,u_m} en E'. Estamos suponiendo n = dim(E), m = dim(E').

Para un vector v = x1.e1 + x2.e2 + ... + xn.en

tengo su imagen

$$w = f(v) = f(x1.e1+x2.e2+\ldots.+xn.en) =$$

$$= x1.f(e1) + x2.f(e2) + \ldots + xn.f(en)$$

Por otro lado la expresión de w respecto de B'

$$w = y1.u1 + y2.u2 + \ldots. + y_m.u_m ,$$

y por tanto

$$y1.u1 + y2.u2 + \ldots. + y_m.u_m =$$

$$= x1.f(e1) + x2.f(e2) + \ldots + x_n.f(e_n)$$

Matricialmente

$$(y1, y2,\ldots, y_m).\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{pmatrix} = (x1, x2,\ldots, x_n).\begin{pmatrix} f(e1) \\ f(e2) \\ . \\ . \\ . \\ f(e_n) \end{pmatrix}$$

Tomamos ahora la expresión de las imágenes f(ei) en la base *B'*, sean

$$\begin{cases} f(e1) = \ \mathrm{a11.u1} + \mathrm{a12.u2} + \ldots. + a_{1m}.u_m \\ f(e2) = \ \mathrm{a21.u1} + \mathrm{a22.u2} + \ldots. + a_{2m}.u_m \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \\ f(e_n) = \ \mathrm{an1.u1} + \mathrm{an2.u2} + \ldots. + a_{nm}.u_m \end{cases}$$

y ahora matricialmente tengo

$$(y1,y2,\ldots,y_m).\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{pmatrix} =$$

$$= (x1,x2,\ldots,x_n).\begin{pmatrix} a11 & a12 & \ldots\ldots a1m \\ a21 & a22 & \ldots. a2m \\ a31 & a32 & \ldots. a3m \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ an1 & an2 & \ldots. a_{nm} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{pmatrix}$$

Resumiendo: La relación entre las coordenadas xi de v en B, y las coordenadas yj de w = f(v) en B' es

$$(y1, y2, ..., ym) = (x1, x2,..., xn).\begin{pmatrix} a11 & a12 & \ldots\ldots a1m \\ a21 & a22 & \ldots. a2m \\ a31 & a32 & \ldots. a3m \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ an1 & an2 & \ldots. anm \end{pmatrix}$$

Llamando A a la matriz tengo

$$\mathbf{y = x.A}$$

Hemos operado por 'vector fila'. Por vector columna habría resultado la traspuesta de la anterior:

$y^t = A^t.x^t$, donde x^t y y^t son vector columna.

Las filas de A, f(ei), son las coordenadas aij de estas imágenes expresadas en la base *B'* de E'. Estas coordenadas son únicas, y por tanto la matriz A es única.

Resumen:

Dadas las bases *B* = {e1, e2,…, e_n} en E, *B'* = {u1, u2,…, u_m} en E', la matriz A respecto de estas bases está formada tomando como filas las imágenes f(ei) expresadas en la base B'.

Cuando m = n y /A/ <> 0, entonces Im(f) = E', ker(f) = {0}, y estamos exactamente en el caso que llamamos 'Automorfismo'.

2.3.- Caso de un Endomorfismo en E

Cuando E' = E, a la aplicación lineal

f: E ---> E
x ---> **y**

la llamamos 'endomorfismo': **y = x.A**

Matriz asociada:

Respecto de una base B = {e1,e2,…,e_n}, las filas de A son las imágenes f(ei) expresadas en la misma base B:

$$A = \begin{pmatrix} \dots f(e_1) \dots \\ \dots \dots \\ \dots f(e_n) \dots \end{pmatrix}$$

Análisis de f:

a) En general se cumple
   dim(Im(f)) + dim(ker(f)) = n
b) Im(f) es un subespacio vectorial y las filas de A constituyen un Sistema generador.

c) Si /A/ <> 0 entonces existe A^{-1} lo que significa que f admite inversa

y = x.A <---> x = y.A^{-1}

Significa que ker(f) = {0}, subespacio constituido por el vector cero. La aplicación es biyectiva.

En este caso decimos que f es un ‘automorfismo’.

Ejemplos:

1.- Sea f: $R^3 \dashrightarrow R^2$, f(x1,x2,x3) = (3x1+2x2-4x3, x1-5x2+3x3)

Tomo en R^3 y en R^2 las bases canónicas: *B* = {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}, *B'* = {(1,0), (0,1)}

f(e1) = (3, 1) = 3.u1 + u2

f(e2) = (2, -5) = 2.u1 -5.u2

f(e3) = (-4, 3) = -4.u1 +3.u2

A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$,(y1,y2) = (x1,x2,x3).$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Obtenemos la imagen de v = (1,-1,2)

$$(1,-1,2).\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = (-7,11)$$

2.- La misma definición de f

f(x1,x2,x3) = (3x1+2x2-4x3, x1-5x2+3x3)

pero tomamos las siguientes bases: *B* = {v1=(1,1,1), v2=(1,1,0), v3=(1,0,0)} en de R^3, *B'* = {w1=(1,3),w2=(2,5)} en R^2 .

Obtener la matriz A asociada a f respecto de estas bases.

Sol.: f(x1,x2,x3) = (3x1+2x2-4x3, x1-5x2+3x3)

--> $\begin{cases} y1 = 3x1 + 2x2 - 4x3 \\ y2 = x1 - 5x2 + 3x3 \end{cases}$

En la base B en E y el la base canónica {u1,u2} de E' tengo:

v1 = 1.e1+1.e2+1.e3 -→ f(v1) = (1,1,1). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ = (1,-1)

f(v2) = (1,1,0). $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ = (5,-4), f(v3) = (1,0,0).$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ =
= (3,1)

Estas imágenes he de expresarlas en la base B' de E':

(1,-1) = a.(1,3) + b.(2,5) → $\begin{cases} 1 = a + 2b \\ -1 = 3a + 5b \end{cases}$'

a = 1-2b, -1 = 3-6b + 5b, -4 = -b,

b = 4, a = -7

Por tanto: f(v1) = -7.w1 +4.w2 = (-7,4) en la nueva base B'

(5,-4) = a.(1,3)+b.(2,5) → $\begin{cases} 5 = a + 2b \\ -4 = 3a + 5b \end{cases}$,

a = 5-2b, -4 = 15-6b + 5b, -19 = -b,

b = 19, a = -33

f(v2) = (-33, 19) en la nueva base

(3,1) = a.(1,3)+b.(2,5) --→ $\begin{cases} 3 = a + 2b \\ 1 = 3a + 5b \end{cases}$, a = 3-2b, 1 = 9-6b + 5b, -8 = -b, b = 8, a = -13

f(v3) = (-13,8) en la nueva base

Por tanto la matriz respecto de las nuevas bases es

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -33 & 19 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

3.- Tomo el vector v = (1,-1,2) expresado en la base *B* = {v1=(1,1,1), v2=(1,1,0), v3=(1,0,0)} del punto 2. Obtenemos la imagen f(v) expresado en la base *B'* = {w1=(1,3),w2=(2,5)} de E' y en la base canónica de E'. Comprobar el resultado obteniendo para f(v) mediante la definición de f.

Sol.: Tenemos la matriz A respecto de las nuevas bases *B y B' (obtenida en el ejemplo 2),* obtengo f(v) aplicándola

(1,-1,2). $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -33 & 19 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$ = (0,1), expresado en *B'*

En la base canónica de E' será: 0.(1,3) +1.(2,5) = (2,5)

Las coordenadas de v = (1,-1,2) respecto de la base canónica {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} de E son

v = 1.(1,1,1) -1.(1,1,0) +2.(1,0,0) = (2,0,1)

Su imagen f(v) aplicando la definición es f(v) = (3.2+2.0-4.1, 2-5.0+3.1) = (2, 5)

(Comprobado)

4.- Sea el espacio vectorial M_2 de las matrices de orden 2x2. Definimos un endomorfismo

$M_2 \dashrightarrow M_2$, f(M) = T.M, donde $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

a)Determina la matriz asociada a f en la base canónica del espacio de matricas (M_2,+,.).

b)Determinar su núcleo: Dimensión y una base

c)Determinar una base de Im(f)

Sol.:

Recordamos que una matriz de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la expresamos como vector así

M = (a,b,c,d)

a) La base canónica de M_2 es la misma que la de R^4. Por definición de f tengo

$$f(e1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f(e3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Núcleo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ->

$\begin{cases} 0 = a - c \\ 0 = b - d \\ 0 = -2a + 2c \\ 0 = -2b + 2d \end{cases}$, c = a, d = b

N = $\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$; a, b ∈ R }

Una base de N está formada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1,0)$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = (0,1,0,1), por lo que dim(N) = 2

c) dim(Im(f)) = 4 -2 = 2, y una base está formada por el máximo de las columnas f(ei) que sean l.i.

r(A) $\geq$ 2, y las dos primeras columnas son l.i.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = [2] –[2] = 0 ; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ =[0]–[0]= 0

y por tanto la tercera es c.l. de las dos primeras.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = [0] –[0] = 0; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ =[2]–[2]= 0

y por tanto la cuarta es c.l. de las dos primeras.

Una base de Im(f) es $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\}$

2.4.- Cambio de base: Efecto sobre la Matriz asociada a una Aplicación lineal

Sea una aplicación lineal f: E ---> E' , y su matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \ldots\ldots a1m \\ a21 & a22 & \ldots.a2m \\ a31 & a32 & \ldots.a3m \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ an1 & an2 & \ldots.anm \end{pmatrix}$$

respecto de las bases

B = {e1,e2,…,e_n} de E, B' = {u1,u2,…,u_m} de E'.

Recuerda:

Dadas las bases B = {e1,e2,…,e_n}, B' = {u1,u2,…,u_m} en E', la matriz A respecto de estas bases está formada tomando como filas las imágenes f(ei) expresadas en la base B'.

$$(y1, y2,\ldots, ym) = (x1, x2,\ldots, xn).\begin{pmatrix} a11 & a12 & \ldots\ldots a1m \\ a21 & a22 & \ldots.a2m \\ a31 & a32 & \ldots.a3m \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ an1 & an2 & \ldots.anm \end{pmatrix}$$

y = x.A

Sean dos bases en E:

B1 = B = {ei} , donde v = (x1,x2,…,xn)

B2 = {ei'}, donde v = (x1', x2',…, xn')

Hacemos un cambio de base de B1 a B2

Sea la Matriz del cambio de coordenadas P1, tal que

ei = ei'.P1, (la antigua base en función de la nueva)

y entonces

(xi) = (xi').P1

(antiguas coordenadas en función de las nuevas)

Recuerda:

Las filas de P1 son las coordenadas de los vectores ei' expresados en la base B1.

Recordamos:

En un cambio de base en un espacio vectorial, su efecto sobre las coordenadas funciona así

$$(x1, x2, x3) = (x1', x2', x3').\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

donde las filas representan lo dicho anteriormente.

Por otro lado, sean dos bases en E':

B1' = B' = {uj}, donde w = (y1,y2,…,ym);

B2' = {uj'}, donde w' = (y1', y2',…, ym')

Matriz del cambio de base en E', P2:

uj = uj'.P2,

$$(yj) = (yj').P2$$

Entonces, siendo w = f(v) en el par de bases B1, B1', y w' = f(v') en el par de bases B2, B2', tenemos

$(yj) = (xi).A \;\text{---}>\; (yj').P_2 = (xi').P_1.A$, de donde

$(yj') = (xi').P_1.A.P_2^{-1}$, y la nueva matriz es

$$\mathbf{A' = P_1.A.P_2^{-1}}$$

Diremos que las matrices A y A' son 'equivalentes', la imagen w del vector v es la misma, sólo cambia su expresión en coordenadas.

Caso de un Endomorfismo f: E --- > E

Si E' = E, con lo cual f es un endomorfismo, entonces P2 = P1, y tenemos

$$A' = P.A.P^{-1}$$

En este caso, diremos que A y A' son 'semejantes'.

El caso concreto de f: E_3 --- > E_3

Sea el cambio de base de B1= {ei} a B2 = {uj}, dado por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} p11 & p12 & p13 \\ p21 & p22 & p23 \\ p31 & p32 & p33 \end{pmatrix},$$

ei = pi1.u1 + pi2.u2 + pi3.u3

$$(x1, x2, x3) = (y1, y2, y3).\begin{pmatrix} p11 & p12 & p13 \\ p21 & p22 & p23 \\ p31 & p32 & p33 \end{pmatrix}$$

Si A es la matriz de f respecto de B1, y A' la nueva matriz respecto de B2, están relacionadas por la igualdad

$$A' = P.A.P^{-1}$$

y equivalentemente: $A = P^{-1}.A'.P$

Lo confirmaremos mediante alguno de los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1.- Sea f: R^3 --- > R^2, f(x1,x2,x3) = (3x1+2x2-4x3, x1-5x2+3x3), estudiada en el ejemplo 1.

En las base canónicas obtuvimos

$$A1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

y en las nuevas bases

B = {v1= (1,1,1), v2 = (1,1,0), v3 = (1,0,0)},

B' = {w1 = (1,3), w2 = (2,5)}, obtuvimos

$$A2 = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -33 & 19 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$$

Deseamos comprobar la aplicación de la fórmula

$$A2 = P1.A1.P2^{-1}$$

Obtengo las matrices del cambio de base P1 y P2

Un cambio de base en E es en realidad un endomorfismo

h: E --- > E en el cual la imagen de la base {ei} es la base {ei'}:

ei' = h(ei), (xi') = (xi).P1,

Las filas de P1 son las coordenadas de ei' expresados en {ei}, por tanto, en nuestro caso

P1 = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y análogamente en E', P2 = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Inversa de P2: det(P2) = -1, P2' = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, Adj(P2') = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, inversa P2^{-1} = $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Hago P1.A1 = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(P1.A1).P2^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -33 & 19 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$

Vemos que coinciden.

2.- Tomo el endomorfismo f: R^3 --- > R^3 definido por

f(x,y,z) = (2x-y, 3y-z, z-2x)

Si no se indica otra cosa los vectores dados están referidos a la base canónica.

a) Obtener su matriz (respecto la base canónica)

b) Obtener su matriz respecto de la base B1= {v1(1,1,0), v2(1,0,1), v3(0,1,1)}

c) Realizo el cambio de base de B1 a B2 = {w1(1,0,1), w2(2,-1,0), w3(0,-1,3)}

Obtener la matriz de f respecto de la base B2 por dos procedimientos distintos:
-Directamente,
-Por la fórmula de cambio de base

Sol.: Resuélvalo el alumno.

2.5.- Vectores y Valores propios en un Endomorfismo

A lo largo de este trabajo estamos siempre operando en el cuerpo R ó excepcionalmente en C.

Sea un endomorfismo f: E ----→ E, con matriz asociada A respecto de una base *B* = {e1,e2,….,en}, igual o no a la canónica.

Defi.:
Llamamos 'vector propio' de f, o 'vector característico' de f, a aquel vector v tal que

f(v) = k.v, para algún valor k de R

(k puede ser 0)

Al valor k lo llamamos 'valor propio', o 'valor característico'

Su cálculo:

Si A es la matriz asociada a f tenemos, operando por vector-fila,

k.(xi) = (xi).A,

escribiendo k.(xi)= (xi).(k.I) tengo

(xi).A = (xi).(k.I), de donde (xi).(A-k.I) = 0

y por tanto, los vectores propios pertenecen al ‘núcleo’ de (A–k.I)

Si A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.} \\ an1 & an2 & \dots & ann \end{pmatrix}$, tenemos

$$A\text{-}k.I = \begin{pmatrix} a11-k & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22-k & \dots & a2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.} \\ an1 & an2 & \dots & ann-k \end{pmatrix}$$

(xi).(A-k.I) = 0

representa un sistema lineal homogéneo, y la condición para que admita solución no trivial es que su determinante tome el valor cero:

$$|A-k.I| = \left|\begin{pmatrix} a11-k & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22-k & \dots & a2n \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.} \\ an1 & an2 & \dots & ann-k \end{pmatrix}\right| = 0$$

Al desarrollar este determinante obtenemos la llamada ‘ecuación característica’, o ‘polinomio característico’ de la matriz A, cuya expresión es

$p(k) = (-1)^n.(k^n - Tra(A).k^{n-1} +$ Suma(Menores centrales de orden 2).k^{n-2} +- …… -+ ……) + $|A|$

Cuando planteamos su resolución escribiremos p(x) en lugar de p(k)

Recordatorio:

En la resolución de Ecuaciones se demuestra que

k1+k2 + … + kn = coefi. de x^{n-1}

$\sum_{i<>j,i<j} ki.kj$ = coefi. de x^{n-2}

………

k1.k2…… .kn = término independiente

(Recomiendo consultar los puntos 2.3, 2.4)

Ejemplos:

1.- Determina los vectores y valores propios del endomorfismo definido en R^3 mediante f(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)

Sol.: La base de vectores es la canónica. Obtengo su matriz

f(e1) = (2,0,0),   f(e2) = (1,1,2),

f(e3) = (0,-1,4)

A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,   (Operamos por vector-fila:

(yj) = (xi).A

$$p(x) = /A\text{-}x.I/ = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 0 & -1 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$= -x^3 + 7x^2 - (2+8+6)x + 12,$

$p(x) = -x^3 + 7x^2 - 16x + 12$

$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$ -> x = 3 simple, x =2 doble

Vectores propios (Subespacios propios):

Valor propio k1 = 3: $A\text{-}3.I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(x,y,z).\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0) \dashrightarrow \begin{cases} -x+y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases},$$

y = x, z = -2y

Hago x libre, y : y = x, z = -2x

Asociado a k1 = 3 tengo el subespacio S1 = <(1,1,-2)>, dim = 1

Valor propio k2 = 2: $A\text{-}2.I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(x,y,z).\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,0) \dashrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

x libre ya que ninguna restricción le afecta;

z = -y = 0

Asociado a k2 = 2 tengo un subespacio de dim = 1 generado por (1,0,0), S2 = <(1,0,0)>

(a pesar de ser de multiplicidad dos)

2.- Tomamos el endomorfismo en C^2, donde C es el cuerpo de los complejos, definido por la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, respecto de la base canónica de C^2

a) Obtener sus valores y vectores propios

b) Si tengo el vector v = (i, -1-i) expresado en la base *B* = {v1(i,0), v2(0,-i)}, comprueba si este es un vector propio de f

c) Determina los vectores propios l.i. del endomorfismo.

Sol.: a) La base canónica es {(1,0), (0,1)}

(1,0).A = (1,-1), (0,1).A = (2,-1), por eso tengo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = x^2 - 0.x + 1$, $x^2 + 1 = 0$ --→

k1 = +i, k2 = -i

Vectores propios:

k1 = i : $(x,y).\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} = (0,0)$ --→

$\begin{cases}(1-i).x+2y=0\\-x-(1+i).y=0\end{cases}$, x = -(1+i)y

-(1-i).(1+i).y + 2y = 0, -(1-i^2)y + 2y = 0, -2y+2y = 0, 0.y = 0, por tanto 'y' es libre;

Subespacio asociado a k1 = i: S1 = <(1+i, -1)>,

(he hecho y = -1)

k2 = -i: (x,y). $\begin{pmatrix}1+i & -1\\2 & -1+i\end{pmatrix}$ = (0,0) -→ $\begin{cases}(1+i).x+2y=0\\-x+(-1+i).y=0\end{cases}$, x = -(1-i)y

-(1+i).(1-i)y + 2y = 0, 0.y = 0, por tanto 'y' es libre;

Subespacio asociado a k2 = -i:

S2 = <(-(1-i), 1)>

b)Las coordenadas de w en la base canónca son: w = i.(i,0) +(-1-i).(0,-i) = (-1, 0) +(0, i-1) = =(-1, -1+i)

f(w) = (-1, -1+i).$\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$ = (-3+2i, 2-i) -→ No es vector propio

c)Sea w = (a, b) cualquiera

f(w) = (a,b). $\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{pmatrix}$ = (a+2b,-a-b), (a+2b,-a-b) = k.(a,b)

nos lleva al sistema

$\begin{cases}a+2b=k.a\\-a-b=k.b\end{cases}$, a = -(k+1).b, -(k+1).b + 2b = -k.(k+1).b, operando $k^2.b + b = 0$, $b.(k^2 + 1) = 0$,

Posibles soluciones: $b = 0 \dashrightarrow a = 0 \dashrightarrow w = (0,0)$ sin interés.

$k^2 + 1 = 0 \dashrightarrow k = \pm i$, y 'b' libre,

$k = i \dashrightarrow a = -(i+1).b \dashrightarrow w = (1+i, -1)$

$k = -i \dashrightarrow a = -(-i+1).b \dashrightarrow w = (1-i, -1)$

Propiedades de los valores y vectores propios:

a) A un vector propio v <> 0 le corresponde un único valor propio

En efecto, $f(v) = k1.v$, $f(v) = k2.v \dashrightarrow 0 = (k1-k2).v \dashrightarrow$

$k1-k2 = 0$

b) Una combinación lineal de vectores propios asociados al mismo valor propio k es también un vector propio asociado a k.

En efecto, $f(a1.v1+a2.v2+\ldots +am.vm) = a1.f(v1)+a2.f(v2) + \ldots +$

$+ am.f(vm) = k.(a1.v1 +a2.v2 + \ldots. + am.vm)$

Consecuencia:
Los vectores propios asociados al valor propio k constituyen un subespacio vectorial.

c) La dimensión del subespacio S asociado a un valor propio k la obtenemos como sigue:

$\dim(S) = \dim(E) - \text{rango}(A-k.I) = \dim(N_k)$, donde N_k es el núcleo del endomorfismo definido por

(A-k.I).

En efecto, sabemos que en un endomorfismo
dim(ker(f)) = dim(E)- dim(Im(f)), y que

dim(Im(f)) = ran(Af). Aplicamos este hecho al endomorfismo f_k definido por la matriz

(A-k.I), siendo S = {v$\in E$; v.(A-k.I) = 0} = ker(f_k)

NOTA: ker(f) simboliza el núcleo del endomorfismo f

d) Si el polinomio característico p(x) tiene n raíces (soluciones de p(x) = 0) distintas: k1, k2, …, kn, entonces, los vectores propios asociados vi, i=1, …, n, son l.i. y constituyen una base de E.

En efecto, supongamos E = V3, n = 3. Sean k1, k2, k3 distintos, y v1, v2, v3 sus vectores propios asociados. Este razonamiento vale en general.

Supongamos a1.v1 +a2.v2 +a3.v3 = 0 (combinación lineal = 0)

0 = f(a1.v1+a2.v2+a3.v3) = a1.f(v1) +a2.f(v2) +a3.f(v3) =

(a1.k1).v1 +(a2.k2).v2 +(a3.k3).v3

0 = k1.(a1.v1 +a2.v2 +a3.v3) - (a1.k1).v1 +(a2.k2).v2 +(a3.k3).v3

0 = a2.(k1-k2).v2 +a3.(k1-k3).v3

Llamo b2 = a2.(k1-k2), b3 = a3.(k1-k3), con lo cual

0 = b2.v2 +b3.v3, y aplicando otra vez f

0 = f(b2.v2 +b3.v3) = b2.k2.v2 +b3.k3.v3

0 = k2.(b2.v2 +b3.v3) – (b2.k2.v2 +b3.k3.v3)

0 = b3.(k2-k3).v3, de b3 = 0, de donde a3 = 0,

de donde 0 = a2.(k1-k2).v2, de donde a2 = 0, 0 = a1.v1,

de donde a1 = 0, por lo que aquellos son l.i.

Corolario:

Si k1 <> k2, los vectores propios asociados v1, v2 son linealmente independientes

e) En el caso d) anterior con n vectores propios distintos: k1, k2, …, kn, cada ki lleva asociado un único vector propio vi independiente

En efecto, f(v1) = k1.v1,

f(w) = k1.w = k1.(a1.v1 + … + an.vn)

Puesto que w = a1.v1 + … + an.vn, f(w) =

= a1.f(v1)+ … +an.f(vn) = (a1.k1).v1 + … + (an.kn).vn

0 = k1.(a1.v1 +a2,v2 + … + an.vn) - (a1.k1).v1 +(a2.k2).v2 + … + (an.kn).vn

0 = a2.(k1-k2).v2 +a3.(k1-k3).v3 + … + an.(k1-kn).vn

y por ser l.i. ha de ser a2.(k1-k2) = 0, …, an(k1-kn) = 0, y por tanto ha de ser

a2 = 0, a3 = 0, …., an = 0

quedando w = a1.v1, l.d. de v1

f) Supongamos los valores propios distintos k1, k2, …, kr, con multiplicidad m1, m2, …, mr, de modo que m1+m2+ … + mr = n (El polinomio p(x) tiene n raíces, lo cual ocurre siempre si el cuerpo es C de los complejos. No así en R de los reales). Entonces, cada valor propio ki lleva asociado un subespacio S_i generado por m_i vectores propios. Si además para cada ki se cumple que este sistema generador es un sistema libre, y por lo tanto cumplen que

dim(Si) = dim(ker(A-ki.I)) = n – ran(A-ki.I)

entonces podemos construir una base para E formada por 'la reunión' de las base de los vectores propios de cada Si.

g) Evidentemente, la matriz A asociada a un endomorfismo f: E ---> E respecto de una base formada por vectores propios toma la siguiente forma (la escribo para E_5

$$A = \begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k5 \end{pmatrix}$$

donde cada ki figura m_i veces.

Recíprocamente, si respecto de una determinada base la matriz A tiene la anterior forma diagonal, los valores de dicha diagonal son 'valores propios'.

NOTA:

Teniendo en cuenta que el polinomio p(x) no varía al realizar un cambio de base, es evidente que los valores propios no varían con un cambio de base.

2.6.- Diagonalización de una Matriz

Consecuencia de los resultados del punto 2.3:

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si, y solo si, el endomorfismo que representa proporciona al espacio E una base formada por vectores propios.

Ejemplos:

1.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ que representa un endomorfismo
f: R^3 **-->** R^3 .

Hacer un estudio completo de sus valores propios y los subespacios propios asociados.

Sol.: p(x) = $\begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$ = ……. =
= $-x^3 + 0.x^2 - (-12).x + 16$,

$x^3 - 12x - 16 = 0$, Por Ruffini obtengo:

	1	0	-12	-16	
-2		-2	4	+16	
	1	-2	-8	0	x = -2 es solución
-2		-2	+8		
	1	-4	0		x = -2 es solución

x-4 = 0 --→ x = 4 es solución

Vectores propios asociados:

k1 = -2, doble: (x,y,z). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ =

= (0,0,0) --→ $\begin{cases} 0 = 3x + 3y + 6z \\ 0 = -3x - 3y - 6z \\ 0 = 3x + 3y + 6z \end{cases}$

Solo la primera es l.i., (ran(A-k1.I) = 1, dim(ker(.) = 2)

y, z libres, x = -y -2z,

Base para ker(A-k1.I):

y=1, z=0 -→ x = -1 --→ v1 = (-1,1,0)

y=0, z=1 --→ x = -2 --→ v2 = (-2,0,1)

ker(A-k1.I) = <v1, v2>

k2 = 4: (x,y,z). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ = (0,0,0) ->

$\begin{cases} 0 = -3x + 3y + 6z \\ 0 = -3x - 9y - 6z \\ 0 = 3x + 3y \end{cases}$

Hallo el rango de A-k2.I.

Las dos primeras son l.i.

$\left|\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\right|$ =[-54-54]-[-3.54 +54] =0, ran(A)=2

Resuelvo $\begin{cases} 0 = -x + y + 2z \\ 0 = -x - 3y - 2z \end{cases}$, Sumándolas tengo

-2x -2y = 0, x = -y

0 = 2y + 2z --→ y = -z, x = z,

hago z libre: z = 1 -→ v3 = (1,-1,1),

ker(A-k2.I) = <(1,-1,1)>

La matriz diagonalizada es A = $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$,

que representa el endomorfismo expresada A respecto de la base *B* = {v1, v2, v3} formada por los vectores propios.

2.7.- Diagonalización de una matriz A simétrica

Recordamos que cualquiera que sea A sus elementos son valores reales, y por tanto los coeficientes de su p.c. p(x) = $|A - x.I|$ son reales.

Obtenemos los siguientes resultados.

a) Los valores propios de una matriz simétrica so siempre valores reales.

Sabemos que en toda ecuación p(x) = 0, donde los coeficientes de p(x) son valores reales, si a+ib es una solución compleja también lo es su conjugado a-ib.

Supongamos que v(xi), y w(yj) son vectores propios asociados a k1 = a+ib, y k2 = a-ib, respectivamente.

Opero con vectores fila.

Cualesquiera que sean k1, k2, y los vectores propios tengo

$$(xi).A = k1.(xi) \qquad (1)$$

$$(yj).A = k2.(yj) \qquad (2)$$

Multiplico por $(yj)^t$ por la derecha:

$$(xi).A.(yj)^t = k1.(xi).(yj)^t$$

Haciendo la traspuesta en los dos miembros:

$$(yj).A^t.(xi)^t = k1.(yj).(xi)^t$$

Puesto que A es simétrica tengo $A^t = A$, y entonces

$$(yj).A.(xi)^t = k1.(yj).(xi)^t$$

Ahora multiplico (2) por $(xi)^t$ por la derecha, y tengo

$$(yj).A.(xi)^t = k2.(yj).(xi)^t$$

Por tanto $k1.(yj).(xi)^t = k2.(yj).(xi)^t$,

para cualquier par de vectores propios. Esto nos lleva a que k2 = k1, es decir

a+ib = a-ib, de donde b = 0, y por tanto

k1 y k2 son reales.

b) Si A es simétrica, los vectores propios asociados a valores propios k1, k2 distintos, son ortogonales (Respecto el producto escalar ordinario)

Recordamos que los vectores propios y el producto escalar de dos vectores son invariantes cualesquiera que sea la base.

$(xi).A = k1.(xi)$, $(yj).A = k2.(yj)$

Multiplico la primera por $(yj)^t$,(En el miembro derecho equivale al producto escalar):

$$(xi).A.(yj)^t = k1.(xi).(yj)^t \qquad (1)$$

y la segunda por $(xi)^t$,(En el miembro derecho equivale al producto escalar) :

$$(yj).A.(xi)^t = k2.(yj).(xi)^t \qquad (2)$$

Hago la traspuesta en la primera

$$(yj).A.(xi)^t = k1.(yj).(xi)^t \qquad (3)$$

De (2) y (3) resulta $k2.(yj).(xi)^t = k1.(yj).(xi)^t$ de donde

$$(k2-k1).(yj).(xi)^t = 0$$

Puesto que k2 <> k1, tiene que ser

$(yj).(xi)^t = 0$ (producto escalar cero)

c) Si A es simétrica y admite n = dim(E) vectores propios, siempre se puede obtener para E una base formada por vectores propios que además sea una base ortogonal (los vectores son ortogonales dos a dos).

En efecto, si los n valores propios ki son distintos, en virtud del resultado anterior, la base obtenida con los vectores propios asociados es ortogonal.

Si los valores propios tiene multiplicidad m1, m2, …, mr, (m1+m2+…+mr = n), vectores propios pertenecientes a distintos subespacios Si asociados son ortogonales entre sí. Por tanto es suficiente que dentro de cada subespacio S_i asociado construyamos una base ortogonal (Podemos aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt), y reuniéndolos después tenemos base ortogonal de E.

Ejercicios/Ejemplos:

1.- Sea el endomorfismo en R^3 definido por la siguiente matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hacer un estudio completo obteniendo una base ortogonal y la matriz del cambio de la base canónica a la citada base ortogonal.
Sol.:
a)Valores y vectores propios:

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 0, \quad x.(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \ simple \\ x = 2 \ doble \end{cases}$$

k1 = 0: $(x,y,z).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,0) \rightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ 0 = x + y \\ 0 = 2z \end{cases}$

z = 0, x = -y, y libre. Vector v1 = (1,-1,0)

k2 = 2: (x,y,z). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = (0,0,0)

--→ $\begin{cases} 0 = -x + y \\ 0 = x - y \end{cases}$ z libre,

y libre, x = y : Vectores:

y=1, z=0 --→ v2 = (1,1,0),

y = 0, z = 1 ---→ v3 = (0,0,1)

Ortogonalidad: Los vectores v2, v3 han resultado ortogonales, evidentemente (Casualidad, porque no se ha buscado).

v1 debe ser ortogonal con estos dos (por ser asociado de un valor propio distinto):

v1*v2 = 1 – 1 = 0, v1*v3 = 0 +0 = 0

Tengo una base ortogonal: *B* = {v1,v2,v3}

Respecto de esta base el endomorfismo está representado por la matriz diagonal

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio tiene por filas las coordenadas de la nueva base en función de la primera (en este caso la canónica):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Calculo su inversa: /B/ = [1] – [-1] = 2,

B' = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Adj(B') = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)Convierto la base anterior en una base ortonormal:

v1 --→ u1 = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$,

v2 --→ u2 = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$,

v3 --→ u3 = (0, 0, 1),

La matriz del cambio de base de la canónica a la nueva base ortonormal es

$$B1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Probaremos que su inversa coincide con su traspuesta

$$B1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente comprobaremos que se cumple la fórmula del cambio de base

$A1 = B1.A.B1^{-1} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= 1/2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sqrt{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A1$$ que tenemos más arriba.

2.- Supongamos que en R^3 a un determinado valor propio k le corresponde como asociado el subespacio propio de dim = 2, constituido por

$$S = \{(x,y,ax+by)\}$$

Obtener dos en S dos vectores propios ortogonales.

Sol.: x, y son libres;

x=1, y=0 --→ z=a -→ v1 = (1,0,a)

x=0, y=1, --→ z = b --→ v2 = (0,1,b)

Impongo la condición de ortogonales: 0 =(1,0,a)*(0,1,b) = a.b

Si hago a=0, b libre, son ortogonales. También b=0, a libre nos da vectores ortogonales.

Afirmamos que si tengo una base ortonormal *B' = {u1,u2,….,un}*, la matriz P de cambio de la base canónica B a esta base ortonormal es 'matriz ortogonal', es decir $P^{-1} = P^{t}$

Dem.: Si u1 =(a11,a12,…,a1n)

u2 = (a21,a22,….,a2n)

………

un1 = (an1,an2,…..,ann)

la matriz del cambio es P = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & \dots..a1n \\ a21 & a22 & \dots..a2n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \\ an1 & an2 & \dots\dots.\ ann \end{pmatrix}$,

y su traspuesta P^t = $\begin{pmatrix} a11 & a21 & \dots.. & an1 \\ a21 & a22 & \dots.. & a2n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & & \\ an1 & a2n & \dots\dots & ann \end{pmatrix}$

Hacemos el producto $P.P^t$ =

$$= \begin{pmatrix} a11 & a12 & \dots..a1n \\ a21 & a22 & \dots..a2n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \\ an1 & an2 & \dots\dots.\ ann \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a11 & a21 & \dots.. & an1 \\ a21 & a22 & \dots.. & a2n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & & \\ an1 & a2n & \dots\dots & ann \end{pmatrix} =$$

= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots..0 \\ 0 & 1 & \dots.0 \\ & \dots\dots\dots\dots.. & \\ 0 & 0 & \dots..1 \end{pmatrix}$ = I , porque siendo B’ base

ortonormal, las filas fi de P y columnas fj de P^t cumplen

fi*fj = $\begin{cases} 1, & si\ \ j = i \\ 0, & si\ j <> i \end{cases}$

2.8.- Forma de Jordan

Un endomorfismo en general no siempre será posible representarlo por una matriz diagonal, lo cual ocurre cuando no es posible obtener una base formada por vectores propios, lo cual ocurre, a su vez, del carácter de los valores propios.

En este caso tenemos una forma sencilla de representar el endomorfismo mediante un tipo de matriz llamada 'Forma de Jordan'.

Su forma y método para obtenerla es la siguiente:

Supongamos que los valores propios distintos son: k1, k2, …., kr, con r < n, obtenidos al resolver

$|A - x.I| = 0$, donde A es la matriz de f en la base canónica.

La matriz de Jordan es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J1 & (0) & \dots. & (0) \\ (0) & J2 & \dots. & (0) \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots..} \\ (0) & (0) & \dots. & Jr \end{pmatrix},$$ donde (0) representa

una matriz cero no necesariamente cuadrada, y cada J_i es una matriz central (situada en la diagonal de J) asociada al valor propio k_i.

Para que se entienda mejor lo que sigue supongamos que la multiplicidad de ki es mi = 4 pero que la dimensión del subespacio de vectores propios asociado es de dimensión 2

dim = 2 = dim(ker(A-ki.I)).

Entonces la matriz J_i está formada como sigue:

$$Ji = \begin{pmatrix} ki & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ki & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ki & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ki \end{pmatrix}, \text{ donde ord(Ji) = 4x4 = } m_i x m_i$$

En la diagonal principal lleva ki, y en la línea paralela por encima de la principal van ceros y unos de modo que los unos van consecutivos a partir de la columna 1+dim(ker(A-ki.I)), en nuestro caso 1+2 = 3. El resto de elementos de Ji son cero.

Ejemplos:

1.- Consideremos el endomorfismo f: $R^7 \dashrightarrow R^7$, representado por la matriz A tal que

$$p(x) = (x-2)^4.(5-x)^3 = 0$$

Sus valores propios: k1 = 2 multiplicidad 4, k2 = 5 multiplicidad 3

Supongamos conocido que dim(ker(A-2.I))= 3 y que

dim(A-5.I) = 1

Vamos a obtener la forma de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J1 & (0) \\ (0) & J2 \end{pmatrix}$$

k1 = 2: 1+3 = 4 , $J1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

k2 = 5: 1+1 = 2 ,   J2 = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Finalmente la matriz J

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & . & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2.- Sea la matriz

A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,   determinar

a) Valores propios: p(x) = $|A - x.I|$ =

= (4-x).(-x).(x^2-4x) = 0

k1 = 0 doble,   k2 = 4 doble

b) Subespacios propios asociados:

k1 = 0: A-0.I = A,   dim(ker(A)) = 4-ran(A)

/A/ = 4.$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 4.0 = 0, Encontramos $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ =

= 4.(12-2) <> 0, por lo que ran(A) = 3, y dim(ker(A)) = 1.

Esto nos indica que A no es diagonalizable ya que k1 =0 es de multiplicidad 2.

Vectores propios:

$$(x,y,z,t).\begin{pmatrix}4 & 2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = (0,0,0,0) \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 4x \\ 0 = 2x \\ 0 = 6x + 3y + 2z + t \\ 0 = 2x + y + 4z + 2t \end{cases}$$

x = 0, -- > $\begin{cases} 0 = 3y + 2z + t \\ 0 = y + 4z + 2t \end{cases}$, y = -(4z+2t) -- >

0 = -3.(4z+2t) + 2z + t, 0 = -10z -5t, t = -2z, z libre,

y = -4z + 4z = 0, y finalmente

ker(A) = <(0,0,1,-2)>

k2 = 4: A-4.I = $\begin{pmatrix}0 & 2 & 6 & 2\\ 0 & -4 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}2 & 6 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{vmatrix} =$

= [24+16]-[-96-4] <> 0

ran(A-k2.I) = 3 -- > dim(ker(A-k2.I)) = 1

Vectores propios:

$$(x,y,z,t).\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (0,0,0,0) \text{ -- > }$$

$$\begin{cases} 0 = 2x - 4y \\ 0 = 6x + 3y - 2z + t \\ 0 = 2x + y + 4z - 2t \end{cases}$$

$$x = 2y \text{ -- > } \begin{cases} 0 = 15y - 2z + t \\ 0 = 5y + 4z - 2t \end{cases}, \quad t = -(15y-2z) \text{ -- > }$$

0 = 5y+4z+(30y-4z) = 35y -- > y = 0, x = 0,

t = 2z, z libre, y por tanto

ker(A-k2.I) = <(0,0,1,2)>

c) Matriz de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$$$oOo$$$$

Tema 3

Formas Bilineales

Formas Cuadráticas

3.1.- Formas bilineales. Expresión matricial

Sean dos espacios vectoriales E y E' sobre el cuerpo R de los reales, n = dim(E), m = dim(E')

Definición:
Llamamos 'forma bilineal' a toda Aplicación

f: ExE' --- > R
(v,w) --- > k = f(v,w)

lineal respecto de cada una de las variables v, w

f(a.v1+b.v2,w) = a.f(v1,w) + b.f(v2,w)
f(v,a.w1+b.w2) = a.f(v,w1) + b.f(v,w2)

para todo par de vectores y todo par de escalares.

Ejemplo:

f(x,y) = x1y1 + 2x2y1 - x3y1 + 2x1y2 + x3y2
donde x = (x1,x2,x3), y = (y1,y2)

Más adelante se demuestra que es forma bilineal, si bien, como buen ejercicio se le aconseja al alumno demostrarlo en este momento.

Se verán varios ejemplos más adelante

Expresión matricial de una f.b. respecto de sendas bases de E y E':

Sean bases B = {e1,e2, …, en} de E,
B' = {e1',e2', … ,em'} de E'.

Si v = a1.e1+a2.e2+ … +an.en

y w = b1.e1’+b2.e2’+ … +bm.em’, tengo

f(v,w) = $\sum_i ai.f(ei,w)$ = $\sum_i ai.(\sum_j bj.f(ei,ej'))$ =

= $\sum_i \sum_j ai.bj.f(ei,ej')$ =

= a1.b1.f(e1,e1’)+a1.b2.f(e1,e2’)+… +
+ a1.bm.f(e1,em’) +
+ a2.b1.f(e2,e1’)+a2.b2.f(e2,e2’)+… +
+ a2.bm.f(e2,em’)
+ ………………………………………………………
+ ak.b1.f(ek,e1’)+ak.b2.f(ek,e2’)+… +
+ ak.bm.f(ek,em’)
+ ……………………………………………………
+ an.b1.f(en,e1’)+an.b2.f(en,e2’)+… +
+ an.em.f(en,em’)

Operando de otra forma

f(v,w) = $\sum_i xi.f(ei,w)$ = (x1,x2, … ,xn).$\begin{pmatrix} f(e1,w) \\ f(e2,w) \\ . \\ . \\ . \\ f(en,w) \end{pmatrix}$ =

= (x1,x2, … ,xn).$\begin{pmatrix} \sum_j yj.f(e1,ej') \\ \sum_j yj.f(e2,ej') \\ . \\ . \\ . \\ \sum_j yj.f(en,ej') \end{pmatrix}$ =

= (x1,x2, … ,xn).

$$\cdot\begin{pmatrix} f(e1,e1') & f(e1,e2') & \dots. & f(e1,em') \\ f(e2,e1') & f(e2,\mathrm{e}2') & \dots. & f(e2,em') \\ f(e3,e1') & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & f(e3,em') \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. & & & \\ f(en,e1') & f(en,e2')\dots & & f(en,em') \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ . \\ . \\ . \\ ym \end{pmatrix}$$

Llamando $B = \begin{pmatrix} f(e1,e1') & f(e1,e2') & \dots. & f(e1,em') \\ f(e2,e1') & f(e2,\mathrm{e}2') & \dots. & f(e2,em') \\ f(e3,e1') & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & f(e3,em') \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. & & & \\ f(en,e1') & f(en,e2')\dots & & f(en,em') \end{pmatrix}$

la expresaremos así

f(x,y) = (x1,x2, …., xn).B. $\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ . \\ . \\ . \\ ym \end{pmatrix}$

Es habitual llamar bij = f(ei,ej') y B = (bij),
Para simplificar escribiremos

f(x,y) = x.B.y^t

Caso particular cuando E = R^3 , E' = R^3

f: R3 --- > R3

Si x = x1e1+x2e2+x3e3,   y = y1e1+y2e2+y3e3,

siguiendo el proceso anterior llegamos a

f(x, y) = (x1,x2,x3).$\begin{pmatrix} f(e1,e1) \\ f(e2,e1) \\ f(e3,e1) \end{pmatrix}$.y1 + (x1,x2,x3).$\begin{pmatrix} fe1,e2) \\ f(e2,e2) \\ f(e3,e2) \end{pmatrix}$.y2
+ (x1, x2, x3).$\begin{pmatrix} f(e1,e3) \\ f(e2,e3) \\ f(e3,e3) \end{pmatrix}$.y3

y por tanto tengo la matriz

B = $\begin{pmatrix} f(e1,e1 & f(e1,e2) & f(e1,e3) \\ f(e2,e1) & f(e2,e2) & f(e2,e3) \\ f(e3,e1) & f(e3,e2) & f(e3,e3) \end{pmatrix}$, f(x,y)= $\mathbf{x}.B.\mathbf{y}^t$

Ejemplos:

1.- Sean E_3 y E'_2 espacios vectoriales, y sus base canónicas. Defino

f: ExE' --- > R

del siguiente modo:

f(e1,e1') = 1, f(e1,e2') = 2
f(e2,e1') = 2, f(e2,e2') = 0
f(e3,e1') = -1, f(e3,e2')= 1

Matricialmente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la siguiente expresión:

f(x,y) = (x1,x2,x3). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$ =

= (x1+2x2-x3, 2x1+x3). $\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}$ =

= x1y1 + 2x2y1 -x3y1 + 2x1y2 + x3y2

Evidentemente, por la forma en que ha sido definida será forma bilineal.

2.- Supongamos la aplicación

f: E_3 x E_2 --- > R

definida por la expresión

f(x(xi),y(yj)) = x1y1 +2x2y1 -x3y1 + 2x1y2 +x3y2

Compruebo si es bilineal.

Sol.: f(**a.x+b.x', y**) =

= f((ax1+bx1',ax2+bx2',ax3+bx3'),y) =

= (ax1+bx1').y1 + 2.(ax2+bx2').y1 –(ax3+bx3').y1
+ 2.(ax1+bx1').y2 +(ax3+bx3').y2 =

= a.(x1y1)+b.(x1'y1) +2(ax2y1)+2(bx2'y1) –

-a(x3y1)-b(x3'y1) +2(ax1y2) +2(bx1'y2) +a(x3y2)

+ b(x3'y2) =

= a.(x1y1 +2x2y1 –x3y1 +2x1y2 +x3y2) +

+ b.(x1'y1 +2x2'y1 –x3'y1 +2x1'y2 +x3'y2) =

= a.f((x1,x2,x3),y) +b.f((x1',x2',x3'),y) =

= a.f(x,y) + b.f(x',y).

Sí es lineal respecto de x.

Del mismo modo se comprueba para la variable **y**.

3.2.- Cambio de base en las Formas bilineales

Sean E y E' y sendas bases S y S'

repectivamente, y sea A la matriz asociada a una aplicación bilineal dada

f: ExE' --- > R.

Tomamos nuevas bases T y T', y supongamos que A1 es la matriz asociada a f respecto de estas nuevas bases.

Si P1 y P2 son las matrices del cambio de base en E y en E', respectivamente, y tenemos

(xi) = (xi').P1, (yj) = (yj').P2, entonces

$(xi).A.(yj)^t = [(xi').P1].A.[(yj').P2]^t =$

$= (xi').[P1.A.P2^t].(yj')^t$

de donde

$A1 = P_1.A.P_2^t$ (*)
$A = P_1^{-1}.A1.P_2^{t-1}$

Si las matrices del cambio las tomamos en la forma

$(xi') = (xi).P1, \quad (yj') = (yj).P2$

$f((xi),(yj)) = (xi).A.(yj)^t$

$f((xi'),(yj')) = (xi').A1.(yj')^t$

Por otro lado

$f((xi)P1,(yj)P2) = [(xi).P1].A1.[(yj).P2)]^t =$

$= (xi).[P1.A1.P2^t].(yj)^t$

y por tanto
$A = P_1.A1.P_2^t$,
$A1 = P_1^{-1}.A.(P_2^t)^{-1}$

Ejemplos:

1.- Sea la aplicación bilineal f: $R^2xR^2 \dashrightarrow R$

$f(x,y) = x1y1 + x2y2$

Obtengo su matriz asociada respecto de la base canónica

f(e1,e1) = 1.1+0.0 = 1, f(e1,e2) = 1.0+0.1=0
f(e2,e1) = 0.1+1.0 = 0, f(e2,e2) = 0.0+1.1 =1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomo otra base S'= {v1=(1,0), v2=(1,1)}

f(v1,v1)=1.1+0.0 = 1, f(v1,v2)=1.1+0.1=1
f(v2,v1)=1.1+1.0 = 1, f(v2,v2)=1.1+1.1=1

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz del cambio $\quad P1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(P1^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Compruébelo el Alumno sustituyendo en la igualdad (*).

2.- Sea una forma bilineal representada por la matriz

$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ respecto de la base S1 = {v1=(1,0), v2=(1,1)}.
Tomamos la nueva base S2 = {w1=(0,1), w2=(1,2)}, y deseamos obtener la nueva matriz A2 para la f.b., y la matriz de cambio entre las bases S1 y S2.

Sol.:

Obtengo la matriz de paso de S1 a S2 expresando los vectores w1, w2 en la base S1:

w1 = a.v1+b.v2 -- > $\begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = b \end{cases}$, b = 1, a = -1

w2 = a.v1+b.v2 -- > $\begin{cases} 1 = a + b \\ 2 = b \end{cases}$, b = 2, a = -1

Tengo: w1 = -v1+v2, w2 = -v1+2.v2,
w1=(-1,1), w2=(-1,2) respect S1

P = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, A2 = P.A1.P^t

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(Comprobada y correcto)

Otra comprobación:

Comprobamos el resultado calculando f(wi,wj) mediante la expresión x1y1 + x2y2:

Tengamos en cuenta que w1 =(0,1), w2 =(1,2) están expresados en la base canónica {(1,0), (0,1)}

f(w1,w1) = 0.0+1.1 = 1, f(w1,w2) = 0.1+1.2 = 2
f(w2,w1) = 1.0+2.1 = 2, f(w2,w2) = 1.1+2.2 = 5

Tengo $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, que coinciden.

3.3.- Formas Cuadráticas

Partiendo de una forma bilineal vamos a definir una aplicación lineal f: E --- > R.

En primer lugar, en el contexto de las formas bilineales restringimos el entorno de trabajo exigiendo que E’ = E y que la forma bilineal f: ExE --- > R sea simétrica: f(x,y) = f(y,x). Cuando y = x, tengo f(x,x). Esta condición y = x supone una ‘limitación’ muy fuerte en el dominio de definición de la forma bilineal f. Pero así será.

Defi.:

Dada una forma bilineal simétrica

f: ExE --- > R,   f(x,y),

le asociamos una nueva aplicación

fc: E --- > R, haciendo que
fc(x) = f(x,x), y la llamaremos

‘Forma cuadrática’ asociada a f.

Si A es la matriz que representa la forma bilineal, también representa la forma cuadrática fc:

$fc(x) = (xi).A.(xi)^t$,

(A es siempre matriz simétrica)

Caso E = R^3:

Veamos cómo es su desarrollo cuando E = R^3

$$(x1,x2,x3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} =$$

= (a11x1+a21x2+a31x3, a12x1+a22x2+a32x3,

$$a13x1+a23x2+a33x3).\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \ldots\ldots.$$

$= a11x1^2 + 2.a12x1x2 + 2.a13x1x3 + a22x2^2 +$

+ 2.a23x2x3 + a33x3^2

Decimos que ésta es una expresión ‘homogénea de grado dos’

Forma polar asociada a una forma cuadrática:

Defi.:

Llamamos ‘forma polar’ asociada a la forma cuadrática fc(x) a la ‘forma bilineal’ de donde ‘procede’.

En efecto, tenemos el efecto recíproco. Si tengo una forma cuadrática fc(x), queda definida de forma unívoca una forma bilineal como sigue, que será su ‘forma polar’.

Desarrollo la f.c. como sigue:

fc(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x + y) + f(y, x + y) =

= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y),

e imponiendo que es simétrica

fc(x + y) = fc(x) + 2.f(x,y) + fc(y), de donde

f(x,y) = 1/2.[fc(x+y) -fc(x) -fc(y)]

Además puede interesar la siguente:

fc(x + y) -fc(x-y) = f(x+y,x+y) -f(x-y,x-y) =
= f(x,x) + 2.f(x,y) + f(y,y) -f(x,x) + 2.f(x,y) -f(y,y) =

= 4.f(x,y) -- > f(x,y) = 1/4.[fc(x + y) -fc(x-y)]

Ejemplos:

1.- A la forma bilineal definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

va asociada la forma cuadrática (con la misma matriz) cuya expresión es

$fc((x,y,z)) = x^2 +4xy -2xz +3y^2 +2z^2$

Compruébelo el alumno.

2.- Sea la forma cuadrática $fc((x,y)) = -y^2 +2xy$
Su matriz asociada es

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y esta misma es la que

corresponde a la forma polar asociada.

Forma polar: x = (x1,x2), y = (y1,y2)

$fc(x+y) = fc(x1+y1,x2+y2) = -(x2+y2)^2 +$

$+ 2.(x1+y1).(x2+y2) =$

$= -[x2^2 +y2^2 +2x2y2] +2.[x1x2+x1y2+y1x2+y1y2]$

$fc(x-y) = fc(x1-y1,x2-y2) = -(x2-y2)^2 +$

$+ 2.(x1-y1).(x2-y2) =$
$= -[x2^2 +y2^2 -2x2y2] +2.[x1x2-x1y2-y1x2+y1y2]$

$fc(x+y) – fc(x-y) = 4x1y2 +4x2y1 -4x2y2$

Por tanto f((x1,x2),(y1,y2)) = x1y2 +x2y1 –x2y2

Aplicando ésta a los vectores de la base usual (canónica):

e1=(1,0), e2=(0,1)

f(e1,e1) = 1.0+0.1-0.1 = 0,

f(e1,e2) = 1.1+0.1-0.1 = 1

f(e2,e1) = 0.0+1.1-1.0 = 1,

f(e2,e2) = 0.1+1.0-1.1 = -1

Obtengo ($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.4.- Diagonalización de una Forma cuadrática.
Método de Jacobi

Consiste en 'pasar' de la matriz A simétrica que la define a otra matriz equivalente A1 que sea diagonal.

Esto lo tratamos en el tema 2 para los endomorfismos, donde llegamos a obtener los valores y vectores propios que permiten nuestro objetivo.

Cuando lo hayamos calculado los valore propios tendremos, respecto de la base formada por vectores propios asociados, una matriz diagonal (lo expresamos en R^3, por brevedad)

$$fc((x,y,z)) = (x,y,z).\begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & 0 \\ 0 & 0 & k3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$= k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2$

donde ki son los valores propios.

El cálculo de los v.p. y vectores propios los obtenemos como vimos en los puntos 2.2, 2.3, 2.4, del Tema 2.

Decimos que esta es la 'expresión canónica' de la cuádrica.

Método de diagonalización de Jacobi:

Supongamos la f.c. que en la base canónica

S = {e1,e2,e3} viene definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Sabemos que si sus valores propios son:

k1, k2, k3

y S' = {w1,w2,w3} es una base formada por vectores propios asociados, la matriz que la representa en esta base es de la forma

$$A1 = \begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & 0 \\ 0 & 0 & k3 \end{pmatrix}$$

El método de Jacobi consigue relacionar los coeficientes aij de A con los valores propios ki.

Más adelante utilizaremos los siguientes elementos extraídos de A:

$D_0 = 1$, D1 = a11 (menor central de orden 1)

$$D2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix} \text{ (menor central de orden 2)}$$

$$D3 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{vmatrix} \text{ (menor central de orden 3)}$$

Suponemos que ninguno de éstos es cero.

Procedimiento (o Método) de Jacobi:

NOTA:
Es aplicable cuando los elementos D_i sean todos no nulos.

Tomamos la forma polar f(x,y) asociada a la f.c.

Construimos una base de vectores B' = {v1,v2,v3} tomando cada vi como sigue:

$$\begin{cases} v1 = a1.e1 \\ v2 = b1.e1 + b2.e2 \\ v3 = c1.e1 + c2.e2 + c3.e3 \end{cases} \qquad (1)$$

que cumplan las siguientes dos condiciones:

a) f(vi,ej) = $\begin{cases} 0, & si \quad i <> j \\ 1, & si \quad j = i \end{cases}$

b) f(vi,vj) = $\begin{cases} 0, & si \quad i <> j \\ ki, & j = i \end{cases}$

Resolvemos para obtener los coeficientes a1, bi y ci

Recordamos que f(x,y) = f(y,x) por ser simétrica.

k1 = f(v1,v1) = f(a1.e1, a1.e1) = a1.f(e1,v1) = a1.1 = a1 ->
a1 = k1, y por tanto k1 = a1

k2 = f(v2,v2) = f(b1.e1+b2.e2, v2) =

= b1.f(e1,v2) + b2.f(e2,v2) = b2.1 ->
b2 = k2
y por tanto k2 = b2

k3 = f(v3,v3) = f(c1.e1+c2.e2+c3.e3, v3) =
= c1.f(e1,v3) +c2.f(e2,v3) +c3.f(e3,v3) =

= c3.1 -> c3 = k3, y por tanto k3 = c3

Lo que acabamos de hacer significa que si construimos una base B' = {v1,v2,v3} como en (1), obligando a cumplir las condiciones a) y b), nos va a permitir obtener los valores propios k1, k2, k3, y al mismo tiempo los vectores propios asociados.

Aplicación práctica:
Repetimos lo anterior pero haciendo intervenir la matriz A que define la cuádrica.

Lo que sigue nos permite obtener la referida base construida en (1). Observa que ahora sí hacemos uso de la matriz A como dato de partida:

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Tengamos presentes las condiciones a), b):

a) $f(vi,ej) = \begin{cases} 0, & si \quad i <> j \\ 1, & si \quad j = i \end{cases}$

b) $f(vi,vj) = \begin{cases} 0, & si \quad i <> j \\ ki, & \quad j = i \end{cases}$

Operando

1 = f(v1,e1) = f(a1.e1, e1) = a1.a11 -- >

$$a1 = \frac{1}{a11}$$

$$a1 = \frac{D_0}{D_1} \quad , \quad k1 = \frac{D_0}{D_1}$$

Continúo

0 = f(v2,e1) = b1.f(e1,e1) +b2.f(e2,e1) =

= b1.a11 +b2.a12

1 = f(v2,e2) = b1.f(e1,e2) +b2.f(e2,e2) =

= b1.a11 + b2.a22 , y tengo el sistema

$$\begin{cases} b1.a11 + b2.a12 = 0 \\ b1.a12 + b2.a22 = 1 \end{cases},$$

Multiplico la primera por a12 y la segunda por a11 (método de reducción):

$$\begin{cases} b1.a11.a12 + b2.a12.a12 = 0 \\ b1.a12.a11 + b2.a22.a11 = a11 \end{cases}$$

Sustituyo la segunda por ella menos la primera:

b2.(a22.a11 –a12.a12) = a11,

Observamos que el paréntesis es el desarrollo de

$\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix}$, que designamos por D2,

Por tanto tengo

b2 = $\frac{D_1}{D_2}$, k2 = $\frac{D_1}{D_2}$

Continúo

0 = f(v3,e1) = c1.a11 + c2.a12 + c3.a13
0 = f(v3,e2) = c1.a12 + c2.a22 + c3.a23
1 = f(v3,e3) = c1.a13 + c2.a23 + c3.a33

y tengo el sistema

Sistema $\begin{cases} c1.a11 + c2.a12 + c3.a13 = 0 \\ c1.a12 + c2.a22 + c3.a23 = 0 \\ c1.a13 + c2.a23 + c3.a33 = 1 \end{cases}$

Resuelvo por Crámer

$$M = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

La incógnita es c3

$$c3 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a12 & a22 & 0 \\ a13 & a23 & 1 \end{vmatrix} : /M/ \text{ -- >}$$

$$c3 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix} : /M/,$$

y con la notación adoptada antes

$$c3 = \frac{D_2}{D_3}\ , \quad k3 = \frac{D_2}{D_3}$$

Vectores propios asociados:

Si deseamos obtener la base B' = {v1, v2, v3} tendremos que obtener además el valor de los coeficientes b1, c1, c2. Estos los conseguimos resolviendo por completo los sistemas antes planteados.

Sistema $\begin{cases} b1.a11 + b2.a12 = 0 \\ b1.a12 + b2.a22 = 1 \end{cases}$,

Multiplico la primera por a22 y la segunda por a12 (método de reducción):

$$\begin{cases} b1.a11.a22 + b2.a12.a22 = 0 \\ b1.a12.a12 + b2.a22.a12 = a12 \end{cases}$$

Sustituyo la segunda por ella menos la primera:

b1.(a12.a12 –a11.a22) = a12,

donde el paréntesis es el desarrollo de

-$\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix}$, y tengo b1 = - $\frac{a12}{D_2}$

Sistema

$$\text{Sistema} \begin{cases} c1.a11 + c2.a12 + c3.a13 = 0 \\ c1.a12 + c2.a22 + c3.a23 = 0 \\ c1.a13 + c2.a23 + c3.a33 = 1 \end{cases}$$

Resuelvo por Crámer

$$\text{M} = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

La incógnita c1

c1 = $\begin{vmatrix} 0 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 1 & a23 & a33 \end{vmatrix}$: /M/ ->

c1 = $\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$: /M/,

c2 = $\begin{vmatrix} a11 & 0 & a13 \\ a12 & 0 & a23 \\ a13 & 1 & a33 \end{vmatrix}$: /M/ -- >

c2 = -$\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a12 & a23 \end{vmatrix}$: /M/,

Resumiendo: La nueva base está formada por:

v1 = 1/a11.e1

v2 = - $\frac{a12}{D_2}$.e1 + $\frac{a11}{D_2}$.e2

v3 = $\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$:/M/.e1 -$\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a12 & a23 \end{vmatrix}$: /M).e2 + $\frac{D_2}{D_3}$ .e3

Debemos probar ahora que son vectores propios asociados a los valores propios

k1 = 1/a11

k2 = $\frac{D_1}{D_2}$

k3 = $\frac{D_2}{D_3}$

Por la construcción de la nueva base es claro que

f(vi,vj) = $\begin{cases} ki\,, & si\ j = i \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

y por tanto la forma cuadrática queda representadas por

A1 = $\begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & 0 \\ 0 & 0 & k3 \end{pmatrix}$

Es evidente que vi.A1 = ki.vi, lo que muestra que vi es vector propio asociado a ki.

3.5.- Clasificación de las formas cuádricas

Defi.:

Es habitual la siguiente clasificación de formas cuadráticas: Decimos que es

a) Definida positiva si fc(**x**)>0, para todo **x** ≠ 0

b) Definida negativa si fc(**x**)<0, para todo **x** ≠ 0

c) Semidefinida positiva si fc(**x**) ≥ 0, para todo **x** ≠ 0

d) Semidefinida negativa si fc(**x**)≤ 0, para todo **x** ≠ 0

e) Indefinida si existen **x** ≠ 0 con fc(**x**)>0, y existen **x**≠ 0 con fc(**x**) < 0

Veremos dos procedimientos para conseguir el tipo de una forma cuadrática.

A) Si conocemos sus valores propios, y teniendo en cuenta que toda forma cuadrática puede ser expresada de la forma

$$A1 = \begin{pmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & 0 \\ 0 & 0 & k3 \end{pmatrix}$$

la clasificación anterior nos lleva a la siguiente, según se comporte la lista de valores propios ki, i = 1,2,…, n,:

a) Si todos los ki son positivos -- >Definida positiva
b) Si todos los ki son negativos -- >Definida negativa

c) Si los ki son positivos o ceros –- >
Semidefinida positiva

d) Si los ki son negativos o ceros –- >
Semidefinida negativa

e) Si existen valores ki positivos y otros negativos, y posiblemente ceros, entonces queda Indefinida

B) No conocemos los valores propios. Tomamos la matriz

A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$ asociada, y calculando

los menores centrales (o principales) como hicimos en el punto 3.4:

$D_0 = 1$, D1 = a11,

D2 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix}$, D3 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a12 & a22 & a23 \\ a13 & a23 & a33 \end{vmatrix}$,

Teniendo en cuenta los resultados del método de Jacobi para el cálculo de los valores propios ki, obtuvimos que

k1 = $\frac{D_0}{D_1}$, k2 = $\frac{D_1}{D_2}$, k3 = $\frac{D_2}{D_3}$

Entonces podemos afirmar:

a) Si D0 > 0, D1 > 0, D2 > 0, D3 > 0, entonces es Definida positiva
b) Si D_0 > 0, D1< 0, D2 > 0, D3 < 0, …, esto es, alternando el signo, entonces es Definida negativa

c) Si no se cumple a) ni b), pero todos son no nulos, entonces es Indefinida

d) Cuando alguno de los menores Di sea cero, aunque no es posible obtener los ki, tenemos:

   -Si los restantes son > 0 -- > Semidefinida positiva.

   -Si la sucesión D_0, D1, D2, D3, … presenta alternancia del signo: +, -, +, -, +, … --- > Semidefinida negativa.

Esta clasificación es válida para cualquier matriz Simétrica.

NOTA: Por tanto será de aplicación cuando estudiemos las Cónicas y las Cuádricas.

Ejemplos:

1.- El Hiperboloide: $x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ será cortado por el plano m: 2x –y = 0. Clasificar la cónica resultante.

Sol.: Intersección $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

y = 2x -> $x^2 - \frac{4x^2}{4} - z^2 = 1$ -> $-z^2 - 1 = 0$, $z^2 + 1 = 0$

z = $\mp\, i$ -> (z +i).(z –i) = 0. Producto de dos rectas imaginarias.

2.- Una forma cuadráticas viene definida por la matriz

A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, referida a la base canónica.

Sol.: Comprueba que D1 = 0, D2 = -9, D3 = 0

No podemos aplicar el método de Jacobi porque D3 es cero.

Aplicamos el método del polinomio característico

$\begin{vmatrix} -x & 3 & 4 \\ 3 & -x & 4 \\ 0 & 4 & -x \end{vmatrix}$ = $-x^3 + 0.x^2 + 25x + 0$,

y sus raíces son: k1 = 0, k2 = 5, k3 = -5

con lo cual A1 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

La forma es indefinida.

3.- Clasifica la cuádrica: $x^2 + y^2 + 2xz + 2yz - 1 = 0$

Sol.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}(A) = 2$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}(A_{44}) = -2,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Se trata del Hiperboloide con una hoja.

4.- Clasifica la cuádrica:

$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 4y - 8z + 4 = 0$

Sol.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}(A) = 0, \mathrm{Ran}(A) = 2$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Det}(A_{44}) = 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Se trata de una cuádrica degenerada formada por el producto de dos planos (imaginarios):

$0 = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 4y - 8z + 4 =$

$= x^2 + (y\text{-}2z+2)^2$,

Tengo: $x = \sqrt{-(y-2z+2)^2} = (y\text{-}2z+2).i$,

$x = -\sqrt{-(y-2z+2)^2} = -(y\text{-}2z+2).i$

Planos: $\begin{cases} x-(y-2z+2).i=0 \\ x+(y-2z+2).i=0 \end{cases}$

3.6.- Método de Gauss para la clasificación de una cuádrica

La explicación y comprensión de este método sólo es posible mediante casos prácticos. Sí podemos decir que consiste en hacer desaparecer (por absorción) los términos del tipo a.xy, c.xz, …, mediante el llamado ‘ajuste de cuadrados’.

Ejemplo:

1.- La estudiada antes: $fc(x, y, z) = 6xy + 8yz$

Hacemos $fc(x, y, z) = (x+3y)^2 - (x^2 + 9y^2) + (y+4z)^2$

$-(y^2 + 16z^2) = (x+3y)^2 + (y+4z)^2 - (x^2 + 10y^2 + 16z^2)$

Existen ternas como (0,0,1) para las que toma valor cero. También en (0,1,0) y (0,0,1). Por lo que afirmo que es indefinida pues ‘existirá’ alguna terna para la cual domine el último término dando valor negativo.

Por estudio matricial: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$D_0 = 1$, $D1 = 0$, $D2 = -9$, $D3 = 0$, por lo tanto es indefinida.

2.- Otro caso: $fc(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2y^2 + z^2$

Hago $fc(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2xy) - xy + y^2 + z^2 =$

$= (x-y)^2 + (\frac{x}{2} - y)^2 - \frac{1}{4} . x^2 + z^2$

si bien podrían encontrarse otras expresiones.
Puede existir ternas para las que domine el tercer término y por tanto tomaría valor negativo.

Matricialmente: $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D0 = 1, D1 = 1, D2 = $-\frac{1}{4}$, D3 = $-\frac{1}{4}$

Es indefinida.
NOTA:
Estos dos ejemplos son suficientes para que el alumno comprenda que no se aplica un 'procedimiento concreto', sino agudizando la intuición.

$$$$oOo$$$$

Tema 4

Espacios Afines

4.1.- Recordatorio: Espacios Afínes

Pretendo presentar una introducción a este tipo de Espacios estudiando dos casos concretos, uno sobre R^2 y el otro sobre R^3.

Def.:

Sea una aplicación f: $R^2 x R^2$ --- > V_2 ,

(A, B) -- > v = AB, vector

donde V_2 es el espacio vectorial de los vectores libres sobre el plano R^2.

Observa que A y B son puntos del plano:

A(a1, a2), B(b1, b2)

Supongamos que f cumple estas Propiedades:

a) Para cada punto A, y cada vector v, existe el punto B tal que v = AB = f(A, B)

b) f(A, B) = 0, si y sólo si B = A
c) Para toda terna A, B, C, si AC = AB + BC, entonces

f(A, C) = f(A, B) + f(B, C)

Entonces decimos que (R^2, f) es una estructura de Espacio Afín asociado al espacio vectorial V_2, de dimensión igual a la de V2. Lo designaremos por E_2.

Consecuencia de a): B = A + v

Análogamente en el caso de R^3 tenemos

$$f: R^3 x R^3 \dashrightarrow V_3$$

$$(A, B) \dashrightarrow v = f(A, B), \quad \text{vector}$$

donde V_3 es el espacio vectorial de los vectores libres en R^3.

Evidentemente cumplen las propiedades anteriores, y tenemos una estructura (R^3, f) de Espacio afín asociado a V3, de dim = 3, y que designaremos por E_3.

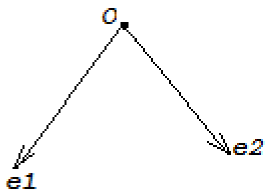
En lo que sigue tomaremos el espacio afín E_3 para introducir nuevos conceptos, su generalización es evidente.

4.2.- Sistema de referencia

4.2.1.- En el Plano. Cambio de Sistema de referencia

Defi.:

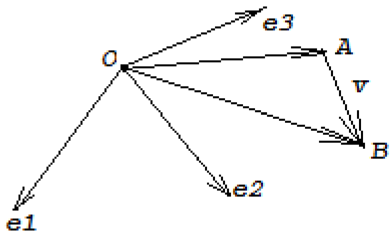
Un sistema de referencia en E2 es un conjunto S = (O; B = {e1,e2}) donde O es un punto que hemos fijado en R^2 y *B* = {e1,e2} es una base de V2.



Respecto de este sistema de referencia

-Los vectores de V2: v = x1.e1+x2.e2,   v = (x1, x2)

-Para los puntos: X = O + OX = (0, 0) + (x1, x2)



B = A + v -- > (b1,b2) = (a1, a2) + (x1,x2)

Vectorialmente: OB = OA + v

Cambio de Sistema de referencia en el Plano:

Cambio de sistema de referencia viene a ser un cambio de base y además un posible nuevo origen.

Si deseamos cambiar del sistema S = (O; B = {e1, e2}) al sistema S' = (O'; B' = {v1, v2}) necesitamos expresar los vectores vi de la nueva base B' en función de los vectores de B (ó al revés), y además disponer como dato las coordenadas del punto O' respecto del sistema S, ó, lo que es equivalente, la expresión del vector OO' en la base B:

Sean

OO' = b1.e1 + b2.e2

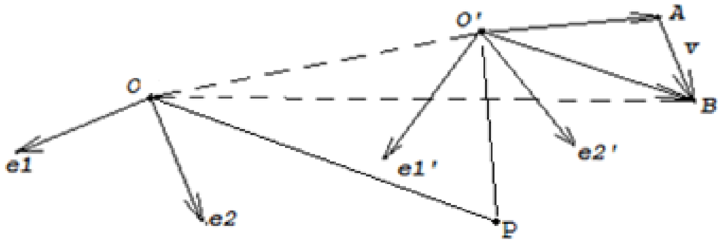
$$\begin{cases} v1 = a11.e1 + a12.e2 \\ v2 = a21.e1 + a22.e2 \end{cases} \qquad (1)$$

Tengo la matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

Para un punto P(x1, x2) cualquiera referido al sistema de referencia S, tenemos

OP = x1.e1 + x2.e2, y también

OP = OO’ + O’P , esto es



x1.e1 + x2.e2 = (b1.e1 + b2.e2) + y1.v1 + y2.v2 ,

x1.e1+x2.e2 = (b1.e1 + b2.e2) + y1.($a11.e1 + a12.e2$) +

+ y2.($a21.e1 + a22.e2$) , y por tanto

$$\begin{cases} x1 = \mathrm{y1.a11} + \mathrm{y2.a21} + \mathrm{b1} \\ x2 = \mathrm{y1.a12} + \mathrm{y2.a22} + \mathrm{b2} \end{cases}$$

Matricialmente

(x1, x2) = (b1, b2) + (y1, y2).$\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

o bien

(x1, x2, 1) = (y1, y2, 1). $\begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ b1 & b2 & 1 \end{pmatrix}$

(Antiguas en función de las nuevas coordenadas)

Las filas de la matriz A son las coordenadas de los vectores de la nueva base, vj, respecto de la primera.

Decimos que A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base

de la base B = {e1,e2} a la nueva B’ = {v1,v2}.

Si deseamos obtener las nuevas coordenadas (yj) en función de las antiguas (xi), basta obtener la matriz inversa A^{-1} y, teniendo en cuenta que

(x1-b1, x2-b2) = (y1, y2).A ,

tengo

(y1, y2) = (x1- b1, x2- b2).A^{-1}

También, si llamo M = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ b1 & b2 & 1 \end{pmatrix}$

tengo (y1, y2, 1) = (x1, x2, 1).M^{-1}

NOTA: En la práctica se suele utilizar la siguiente notación: P(x, y) en el sistema de referencia S, P(x', y') en el sistema de referencia S':

(x, y) = (b1, b2) + (x', y').$\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

(Antiguas en función de las nuevas coordenadas)

Ejemplo: En el plano

Sea el sistema de referencia S: <O; {e1, e2}>, y el nuevo sistema de referencia S' = <O'; {v1, v2}>, siendo

$\begin{cases} v1 = 3.e1 + 2.e2 \\ v2 = \quad e1 - 3.e2 \end{cases}$, OO' = e1 + e2

Sol.: M = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(x1, x2, 1) = (y1, y2, 1).M

Si Q(-1, 2) en el s.r. S', para el s.r. S tenemos:

$$(-1, 2, 1).\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = -7 \\ 1 = 1 \end{cases} \text{-> Q(0, -7) en el s.r. S.}$$

Una comprobación:

$$(y1, y2, 1) = (x1, x2, 1).M^{-1}$$

$$\text{Det}(M) = -11, \quad M^{-1} = \frac{-1}{11}.\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

El alumno comprobará que $M.M^{-1} = I$

Entonces

$$(y1, y2, 1) = \frac{-1}{11}.(0, -7, 1).\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\frac{-1}{11}.(11, -22, -11) = (-1,\ 2,\ 1)$$

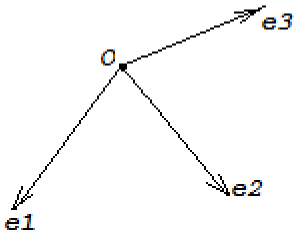
que es lo que esperábamos.

Exactamente igual procederíamos en el caso de un cambio de s. de referencia en el Espacio.

4.2.2.- En el Espacio. Cambio de sistema de referencia

Defi.:

Sistema de referencia en E3 es un conjunto S = (O; {e1, e2, e3}) donde O es un punto que hemos fijado en R^3 y *B* = {e1, e2, e3} es una base de V3.

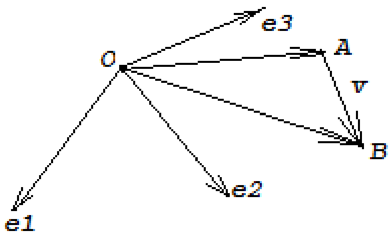


Respecto de este sistema de referencia

-Los vectores de V3: v = x1.e1 + x2.e2 + x3.e3

v = (x1, x2, x3)

-Los puntos: X = O + OX = (0,0,0) + (x1, x2, x3)



B = A + v --- > (b1, b2, b3) = (a1, a2, a3) + (x1, x2, x3)

Vectorialmente: OB = OA + v

Cambio de Sistema de referencia en el Espacio:

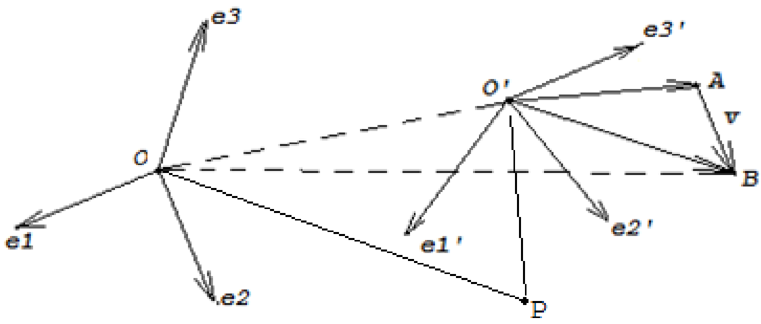
Cambio de sistema de referencia viene a ser un cambio de base y además un nuevo origen.

Si del sistema S = (O; B = {e1, e2, e3}) deseamos cambiar al sistema S' = (O'; B'= {v1, v2, v3}) necesitamos expresar los vectores vi de la nueva base respecto de la primera (ó al revés), y, además las coordenadas del punto O' respecto del sistema S, ó lo que es equivalente la expresión del vector OO' en la primer base:

OO' = b1.e1 + b2.e2 + b3.e3

Sea

$$\begin{cases} v1 = a11.e1 + a12.e2 + a13.e3 \\ v2 = a21.e1 + a22.e2 + a23.e3 \\ v3 = a31.e1 + a32.e2 + a33.e3 \end{cases} \qquad (1)$$



Para un punto P(x1, x2, x3) cualquiera referido al sistema de referencia S, tenemos

OP = x1.e1 + x2.e2 + x3.e3, y también

OP = OO' + O'P , y en coordenadas tengo

x1.e1 + x2.e2 + x3.e3 = (b1.e1 + b2.e2 + b3.e3) +

+ y1.v1 + y2.v2 + y3.v3 ,

x1.e1+x2.e2+x3.e3 = (b1.e1+b2.e2+b3.e3) +

+ y1.($a11.e1 + a12.e2 + a13.e3$) +

+ y2.($a21.e1 + a22.e2 + a23.e3$) +

+ y3.($a31.e1 + a32.e2 + a33.e3$) ,

x1.e1 + x2.e2 + x3.e3 = (b1.e1+b2.e2+b3.e3) +

+ (y1.a11 + y2.a21 + y3.a31).e1 +

+ (y1.a12 + y2.a22 + y3.a32).e2 +

+ (y1.a13 + y2.a23 + y3.a33).e3 , y por tanto

$$\begin{cases} x1 = \mathrm{y1.a11} + \mathrm{y2.a21} + \mathrm{y3.a31} + \mathrm{b1} \\ x2 = \mathrm{y1.a12} + \mathrm{y2.a22} + \mathrm{y3.a32} + \mathrm{b2} \\ x3 = \mathrm{y1.a13} + \mathrm{y2.a23} + \mathrm{y3.a33} + \mathrm{b3} \end{cases}$$

Matricialmente

$$(x1, x2, x3) = (y1, y2, y3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} + (b1, b2, b3)$$

(Antiguas en función de las nuevas coordenadas)

Las filas de la matriz A son las coordenadas de los vectores de la nueva base, vj, respecto de la primera.

Decimos que A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio

de la base B = {e1,e2,e3} a la nueva B' = {v1,v2,v3}.

Si deseamos obtener las nuevas coordenadas (yj) en función de las antiguas (xi), basta obtener la matriz inversa A^{-1} y, teniendo en cuenta que

(x1-b1, x2-b2, x3-b3) = (y1, y2, y3).A , tengo

(y1, y2, y3) = (x1-b1, x2-b2, x3-b3).A^{-1}

También podemos expresarlo así

(x1, x2, x3, 1) = (y1, y2, y3, 1).$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & 0 \\ a21 & a22 & a23 & 0 \\ a31 & a32 & a33 & 0 \\ b1 & b2 & b3 & 1 \end{pmatrix}$

y, si M = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & 0 \\ a21 & a22 & a23 & 0 \\ a31 & a32 & a33 & 0 \\ b1 & b2 & b3 & 1 \end{pmatrix}$

(y1, y2, y3, 1) = (x1, x2, x3, 1).M^{-1}

NOTA: En la práctica se suele utilizar la siguiente notación:

P(x, y, z) en el sistema de referencia S, P(x', y', z') en el sistema de referencia S', y entonces

(x, y, z) =(x', y', z').$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$ + (b1, b2, b3)

(las antiguas en función de las nuevas coordenadas)

Ejemplo:

Sean los sistemas de referencia S = (O; B = {e1,e2,e3}) donde B es la base canónica y por tanto es ortonormal, y S’ = (O; B’ = {v1,v2,v3}) donde B’ viene determinada por

$$\begin{cases} v1 = e1 + e2 - e3 \\ v2 = e1 \qquad + e3 \\ v3 = e1 - 2e2 - e3 \end{cases}$$

Observa que el origen de cada s.r. no se modifica.

La base B’ es ortogonal pero no ortonormal:

v1*v2 = (1,1,-1).(1,0,1) = …. = 0

v1*v3 = (1,1,-1).(1,-2,-1) = …. = 0

v2*v3 = (1,0,1).(1,-2,-1) = …. = 0

Matriz del cambio de base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces (x, y, z) = (x’, y’, z’). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Supongamos que P(2, 3, 3) respecto de S.

Deseo obtener los valores (x’, y’, z’) respecto de S’.

Tengo dos caminos para obtener (x’, y’, z’):

Primero:

Resolviendo: $\begin{cases} 2 = x' + y' + z' \\ 3 = x' - 2z' \\ 3 = -x' + y' - z' \end{cases}$

Sumando 1ª y 3ª : $\begin{cases} 5 = 2y' \\ 3 = x' - 2z \\ 3 = -x' + y' - z' \end{cases}$ ->

y'= 5/2 -> $\begin{cases} x' = 3 + 2z' \\ 3 = -(3 + 2z') + \frac{5}{2} - z' \end{cases}$ -> 6-5/2 = -3z',

z' = -7/6, x' = 3 -14/6, x' = 4/6

(x', y', z') = (0,6667; 2,5; -1,1667)

Segundo: Obteniendo la inversa de A:

Obtengo la inversa A^{-1} : /A/ = [0+1+2]-[0-1-2] = 6

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & 0 & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$,

(x', y', z') = (2, 3, 3). $\begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & 0 & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ =

= (4/6, 15/6, -7/6) = (0,6667; 2,5 ; -1,1667) que coincide con el resultado anterior.

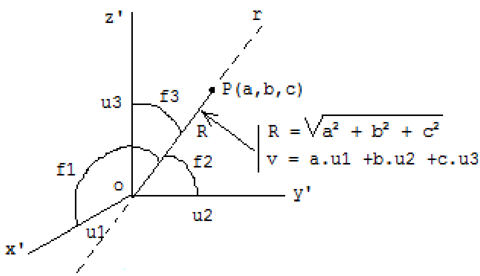
4.2.3.- **Otra forma para el cambio de Sistema de referencia**, utilizando los cosenos directores

En primer lugar hacemos un estudio teórico y después lo aplicamos al ejemplo anterior.

NOTA:
Intencionadamente cambiamos ligeramente la notación.

Como más arriba, sean los Sistemas de referencia S = (O; B={e1,e2,e3}), S' = (O'; B'={u1,u2,u3})

A) Utilizamos los cosenos directores



Supongamos que B' = {u1,u2,u3} es ortonormal:

$$\begin{cases} u1 = b11.e1 + b12.e2 + b13.e3 \\ u2 = b21.e1 + b22.e2 + b23.e3 \\ u3 = b31.e1 + b32.e2 + b33.e3 \end{cases}$$

cos(f1) = $\frac{u1*v}{R} = \frac{b11.a+b12.b+b13.c}{R}$

cos(f2) = $\frac{u2 * v}{R} = \frac{b21.a+b22.b+b23.c}{R}$
cos(f3) = $\frac{u3 * v}{R} = \frac{b31.a+b32.b+b33.c}{R}$

Ahora tenemos

$$\begin{cases} x' = R.\cos(f1) = \mathrm{b11.a} + \mathrm{b12.b} + \mathrm{b13.c} \\ y' = R.\cos(f2) = \mathrm{b21.a} + \mathrm{b22.b} + \mathrm{b23.c} \\ z' = R.\cos(f3) = \mathrm{b31.a} + \mathrm{b32.b} + \mathrm{b33.c} \end{cases}$$

Matricialmente, y aplicándolo a un punto cualquiera P(x,y,z) referido a S,

(x’,y’,z’) = (x,y,z).$\begin{pmatrix} b11 & b21 & b31 \\ b12 & b22 & b32 \\ b13 & b23 & b33 \end{pmatrix}$

Compruebo si esta matriz es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} b11 & b21 & b31 \\ b12 & b22 & b32 \\ b13 & b23 & b33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{pmatrix} =$$

b11.b11 + b21.b21 + b31.b31 = u1*u1 = 1
b11.b12 + b21.b22 + b31.b32 = u1*u2 = 0

y análogamente en los casos restantes.

Entonces, siendo P = $\begin{pmatrix} b11 & b21 & b31 \\ b12 & b22 & b32 \\ b13 & b23 & b33 \end{pmatrix}$ ortogonal

se cumple $P^{-1} = P^t$, y entonces de la anterior obtengo

(x,y,z) = (x’,y’,z’).$\begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{pmatrix}$

y vemos que este resultado coincide con el obtenido más arriba.

Aplicación del método anterior:

Tenemos los datos

$$\begin{cases} v1 = e1 + e2 - e3 \\ v2 = e1 \qquad + e3 \\ v3 = e1 - 2e2 - e3 \end{cases} \text{->} \begin{cases} u1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.(e1 + e2 - e3) \\ u2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.(e1 \qquad + e3) \\ u3 = \frac{1}{\sqrt{6}}.(e1 - 2e2 - e3) \end{cases} \quad (*)$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad P^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Aplicándolo

$$(x,y,z) = (x',y',z').P$$

$$(x',y',z') = (x,y,z).P^t$$

En nuestro caso concreto

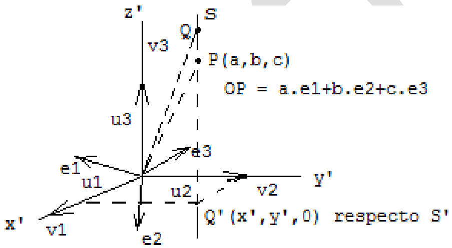
$$(x',y',z') = (2,3,3).\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{-2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2.\sqrt{3}}{3}, \frac{5\,.\,\sqrt{2}}{2}, \frac{-7\,.\,\sqrt{6}}{6} \right) =$$

= (1,1547, 3,535534, -2,857738)
Obtenemos el mismo resultado.

B) Proyectando ortogonalmente el punto P(a,b,c) sobre cada uno de los planos 0x'y', 0x'z', 0y'z'

Lo explicamos aplicándolo al mismo caso (*) visto en el método A).
Sobre el plano 0x'y':



Este plano queda determinado por los vectores

v1 = e1 +e2 –e3,
v2 = e1 + e3

que son ortogonales pero no están normalizados.

Normalizamos aunque no los utilizamos ahora: /v1/ = $\sqrt{3}$, /v2/ = $\sqrt{2}$

Obtengo: u1 = $\frac{\sqrt{3}}{3}\,.\,v1$, u2 = $\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,v2$

Su producto vectorial v1 ^ v2:

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots\ldots = e1 - 2.e2 - e3 = v3$$

w es director de cualquier recta perpendicular a 0x'y'. La recta s ortogonal a este plano y que pasa por P queda determinada por

s: OQ = OP + k.w,

s: OQ = (a+k).e1 +(b-2k).e2 +(c-k).e3

donde Q es el punto genérico de s. La condición para que Q esté en el plano Ox'y' es que existan valores k1, k2 tales que

OQ = k1.v1 + k2.v2 = k1.(e1+e2-e3) +k2.(e1 +e3)=

= (k1+k2).e1 +k1.e2 +(-k1+k2).e3

Igualando obtengo

(a+k).e1 +(b-2k).e2 +(c-k).e3 =

= (k1+k2).e1 +k1.e2 +(-k1+k2).e3

$$\begin{cases} a + k = k1 + k2 \\ b - 2k = k1 \\ c - k = -k1 + k2 \end{cases} \text{->}\quad k1 = b\text{-}2k \text{ -- >} \begin{cases} k2 = a + 3k - b \\ k2 = c - 3k + b \end{cases}$$

a +3k –b = c -3k +b -> 6k = 2b –a +c -- >

k = (2b-a+c)/6 -> k2 = (a-b)+ 3(2b-a+c)/6,

k2 = (3a +3c)/6, k1 = b -2.(2b-a+c)/6,

k1 = (2a +2b -2c)/6

Si P(2,3,3) -> a = 2, b = 3, c = 3, -- >

k1 = 4/6, k2 = 15/6 ,

Este resultado significa que en el sistema de referencia S’ = (O; B’={v1,v2,v3}), las coordenadas de la proyección Q’ de P sobre el plano Ox’y’ son

$$\left(\frac{4}{6}\ ,\frac{15}{6},\ 0\ \right)$$

Vectorialmente:

$$\left(\frac{4}{6}\ ,\frac{15}{6},\ 0\ \right) = \frac{4}{6}.v1 + \frac{15}{6}.\, v2 + 0.v3 =$$

$$= \frac{4}{6}.\sqrt{3}\,.\,u1\ + \frac{15}{6}.\,\sqrt{2}\,.\,u2\ + 0.u3 = \left(\frac{2.\sqrt{3}}{3}\ ,\frac{5.\sqrt{2}}{2}\ ,\ \ 0\ \right) =$$

= (1,1547; 3,535534; 0)

que coincide con los resultados anteriores.

Las dos primeras coinciden con las coordenadas de P en el referido sistema de referencia.

La tercer coordenada podemos obtenerla proyectando el punto P sobre el plano Ox’z’, o sobre Oy’z’, por el mismo procedimiento.

NOTA:
Quiero hacer notar que parte de los cálculos realizado han sido motivados por el hecho de corroborar los resultados, y para que el alumno comprenda que podemos disponer de diferentes procedimientos para llegar al mismo resultado.

Si Ortonormalizamos la base B’ obteniendo

$$\begin{cases} v1 = e1 + e2 - e3 \\ v2 = e1 \qquad + e3 \\ v3 = e1 - 2e2 - e3 \end{cases} \text{->B'=} \begin{cases} u1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.v1 \\ u2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.v2 \\ u3 = \frac{1}{\sqrt{6}}.v3 \end{cases} \text{->} \begin{cases} v1 = \sqrt{3}.u1 \\ v2 = \sqrt{2}.u2 \\ v3 = \sqrt{6}.u3 \end{cases}$$

y en este caso, respecto del sistema de referencia S’ = (O;B’={u1,u2,u3}), las coordenadas de P son

$$\begin{cases} x' = 4.\frac{\sqrt{3}}{6} = 1{,}1547 \\ y' = 15.\frac{\sqrt{2}}{6} = 3{,}5355 \\ z' = -7.\frac{\sqrt{6}}{6} = -2{,}8577 \end{cases}$$

Observa que obtenemos el mismo resultado.

4.3.- Ángulos de Euler en un cambio de s.d.r.

NOTA:
Incluyo este apartado por motivos ‘ilustrativos’ y no por motivos prácticos, pues hemos visto en los ejemplos anteriores cómo realizar un cambio de sistema de referencia con relativa facilidad. En COMPLEMENTOS (pág. 433) se trata con todo detalle estos temas.

Un caso frecuente de cambio de s.d.r. lo tenemos cuando las bases *B y B’* son ortonormales y los orígenes O y O’ coinciden. Es el caso de un giro con centro en el origen de coordenadas.

En estas condiciones la matriz A de paso de la base B a la base B’ es ortogonal, es decir que $A^t = A^{-1}$

En efecto:

$(xi)T_B(yj)^t$ es el producto escalar x*y en la base B

$(xi')T_{B'}(yj')^t$ es el producto escalar x’*y’ en la base B’

Como $(xi) = (xi').A$, $(xi)^t = A^t.(xi')^t$, tengo

$(xi)T_B(yj)^t = [(xi').A].T_B.[A^t.(xi')^t] =$

$= (xi').[A.T_B.A^t].(xi')^t$, de donde $T_{B'} = A.T_B.A^t$

Pero por ser bases ortonormadas, tanto T_B como $T_{B'}$ coinciden con la identidad I, y por tanto

$$I = A.A^t, \quad \text{de donde } A^t = A^{-1}$$

De este modo tendríamos

$$(x,y,z) = (x',y',z').\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$(x',y',z') = (x,y,z).\begin{pmatrix} a11 & a21 & a31 \\ a12 & a22 & a32 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix}$$

Continuando tenemos

$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$, y tengo $A.A^t = I$

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a11 & a21 & a31 \\ a12 & a22 & a32 \\ a13 & a23 & a33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{cases} a11^2 + a12^2 + a13^2 = 1 \\ a11.a21 + \cdots. \ = 0 \\ a11.a31 + \cdots. = 0 \\ a21.a11 + \cdots. = 0 \\ a21^2 + a22^2 + a23^2 = 1 \\ a21.a31 + \cdots. = 0 \\ a31.a11 + \cdots. = 0 \\ a31.a21 + \cdots. = 0 \\ a31^2 + a32^2 + a33^2 = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Deseamos resolver el sistema (2) cuyas incógnitas son aij.

El Caso de R^2:

Con el fin de comprender en toda su profundidad lo que debemos hacer para resolverlo, lo tratamos en primer lugar para el caso de R^2.

Tengo: $(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} a11 & a21 \\ a12 & a22 \end{pmatrix}$$

La matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ cumple A.A^t = I, y por tanto obtengo el sistema

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a11 & a21 \\ a12 & a22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ -- >}$$

$$\begin{cases} a11^2 + a12^2 = 1 \\ a11.a21 + a12.a22 = 0 \\ a21.a11 + a22.a12 = 0 \\ a21^2 + a22^2 = 1 \end{cases} \qquad (2)'$$

Si g = Ox^Ox’ (ángulo formado por Ox, Ox’), una solución para el sistema (2)’ es

a11 = cos(g),   a12 = sen(g),
a21 = -sen(g), a22 = cos(g)

con lo cual A = $\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

Otra solución la obtengo cambiando la orientación del ángulo: Tomando g’ = -g, esto es

g’ = Ox’^Ox (ángulo formado por Ox’, Ox)
con la cual la matriz toma la forma de la traspuesta de la anterior:

a11 = cos(g’),   a12 = -sen(g’)
a21 = sen(g’),   a22 = cos(g’)

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g') & -sen(g') \\ sen(g') & \cos(g') \end{pmatrix}$$

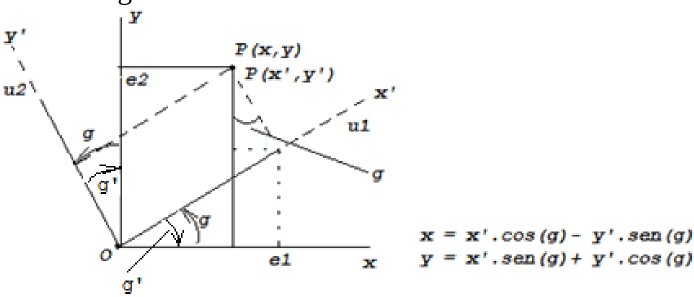
Si en la figura intercambiamos los papeles entre (x, y) y (x', y'), teniendo en cuenta el ángulo g', tenemos

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g') & -sen(g') \\ sen(g') & cos(g') \end{pmatrix}$$

O bien $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g') & sen(g') \\ -sen(g') & \cos(g') \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(Comprobada)

Observa la figura



Téngase en cuenta que sen(g') = -sen(g) por tener g' de orientación contraria a la de g.
"g es el llamado ángulo de Euler", caso del plano.

Otra forma de obtener (x', y') en función de (x, y):

$$\begin{cases} x = x'.cos(g) - y'.sen(g) \\ y = x'.sen(g) + y'.cos(g) \end{cases}$$

Multiplico por …

$$\begin{cases} x.cos(g) = x'.cos^2(g) - y'.cos(g).sen(g) \\ y.sen(g) = x'.sen^2(g) + y'.sen(g).cos(g) \end{cases} \text{-> sumándolas}$$

$$\begin{cases} x.cos(g) + y.sen(g) = x' \\ y = x'.sen(g) + y'.cos(g) \end{cases}$$

Multiplico en aquella por ….

$$\begin{cases} x.sen(g) = x'.sen(g).cos(g) - y'.sen^2(g) \\ y.\cos(g) = x'.\cos(g).sen(g) + y'.cos^2(g) \end{cases} \text{-- > restándolas}$$

$$\begin{cases} x.sen(g) - y.\cos(g) = -y' \\ y = x'.sen(g) + y'.cos(g) \end{cases} \text{-- >}$$
$$\begin{cases} x' = x.cos(g) + y.sen(g) \\ y' = -x.sen(g) + y.cos(g) \end{cases}$$

Matricialmente

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g') & sen(g') \\ -sen(g') & \cos(g') \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que coincide con el resultado anterior.

El Caso de R^3:
Volvemos al sistema (2) obtenido antes:

$$\begin{cases} a11^2 + a12^2 + a13^2 = 1 \\ a11.a21 + \cdots. \quad = 0 \\ a11.a31 + \cdots. = 0 \\ a21.a11 + \cdots. = 0 \\ a21^2 + a22^2 + a23^2 = 1 \\ a21.a31 + \cdots. = 0 \\ a31.a11 + \cdots. = 0 \\ a31.a21 + \cdots. = 0 \\ a31^2 + a32^2 + a33^2 = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Para resolverlo, razonando geométricamente, Euler pensó en hacer coincidir los dos sistemas de ejes ortogonales (bases ortonormales) mediante un giro G, y observó que siempre es posible conseguirlo realizando tres giros G1, G2, G3, cuyo eje de giro sea siempre uno de los ejes del sistema de referencia 'activo' (el primero es el sistema S, y a continuación el s.d.r. resultado del giro realizado).

En el Tema 9, punto 9.2, realizamos un estudio detallado y obtenemos el valor de los ángulo g1, g2, g3, necesarios para un giro cualquiera que lleva del s.d.r. S al nuevo s.d.r. S'.

Presento el resultado obtenido en cada uno de los giros así como su producto. Consúltese COMPLEMENTOS (pág. 433)

Giro g1: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Giro g2: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Realizando g1 y a continuación g2 tengo

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro g3: Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

(Comprobadas)

Realizando la composición de los tres giros, obtengo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

G3*G2*G1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} & \text{Col. 3} \end{array} \\
\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \textit{Primer col.} & \textit{Segunda col.} & \textit{Tercer col.} \end{array} \\
\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)

Los ángulos g1, g2, g3, son los llamados “ángulos de Euler”.

NOTA: Resultado contrastado con otros trabajos consultados y analizados sobre este tema.

Comprobamos la ortogonalidad de la Matriz anterior:

n efecto, si cada una de las tres matrices es ortogonal, y teniendo en cuenta que la familia de matrices ortogonales tienen estructura de grupo, el producto de las tres da como resultado una matriz ortogonal.

Comprobar que cada una de las tres matrices-factor es ortogonal es inmediato, basta hacer el producto por su traspuesta:

$$\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(g1) & -sen(g1) & 0 \\ sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y del mismo modo las otras dos matrices.

NOTA:
Observa que si las matrices P y Q son ortogonales también lo es P.Q. En efecto, tengo $(P.Q).(P.Q)^t = (P.Q).(Q^t.P^t)$ = (por la asociativa) $= P.(Q.Q^t).P^t = P.I.P^t = P.P^t = I$

4.4.- **Aplicación de los ángulos de Euler para un cambio de** Sistema de referencia en el Espacio

Cambio de Sistema de referencia del s.d.r. S (O; {e1, e2, e3} al s.d.r. S' (O; {u1, u2, u3}, donde las bases B = {e1, e2, e3} y B' = {u1, u2, u3} de vectores son ortonormales.

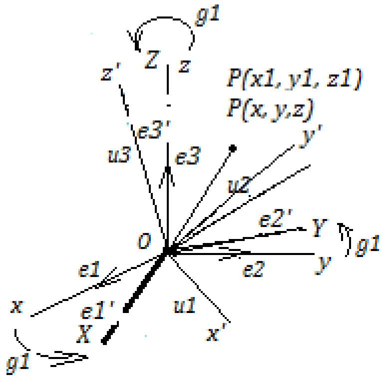
Las bases intermedias pasando de B hasta B' se suponen también ortonormales.

OX es la recta común a los dos planos Oxy , Ox'y'. Los giros a realizar son:

- Giro G1 con eje oz, ángulo g1 = [ángulo determinado por Ox , OX]
- Giro G2 con eje OX, ángulo g2 = [ángulo determinado por Oz, Oz']

- Giro G3 con eje Oz', ángulo g3 = [ángulo determinado por OX, Ox']

Giro G1: Eje oz, ángulo g1



El eje Ox pasa a OX, Oy pasa a OY.

OP = x.e1 + y.e2 + z.e3

OP = x1.e1' + y1.e2' + z1.e3' , donde {e1', e2', e3'} lo determinamos como sigue.

Expresamos : e1' = a11.e1 + a12.e2 + a13.e3

e2' = a21.e1 + a22.e2 + a23.e3

e3' = a31.e1 + a32.e2 + a33.e3

x1 = OP*e1' = (x.e1 + y.e2 + z.e3)*(a11.e1 + a12.e2 + a13.e3) = a11.x + a12.y + a13.z

Del mismo modo

y1 = OP*e2' = …………………… = a21.x + a22.y + a23.z

z1 = OP*e3’ = …………………… = a31.x + a32.y + a33.z (1)

Calculamos los valores a_{ij}

a11 = e1’ * e1 = cos(g1)

a12 = e1’ * e2 = cos(pi/2 – g1) = … = sen(g1)

a13 = e1’ * e3 = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e1’ = cos(g1).e1 + sen(g1).e2

a21 = e2’ *e1 = cos(pi/2 + g1) = … = - sen(g1)

a22 = e2’ * e2 = cos(g1)

a23 = e2’ * e3 = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e2’ = - sen(g1).e1 + cos(g1).e2

a31 = e3’ * e1 = … = 0

a32 = e3’ * e2 = … = 0

a33 = e3’ * e3 = cos(0) = 1

Por tanto: e3’ = e3

Volviendo a las expresiones (1) tengo:

x1 = cos(g1).x + sen(g1).y

y1 = - sen(g1).x + cos(g1).y

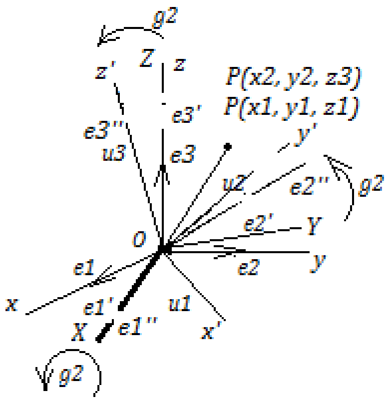
z1 = z

Matricialmente: $$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Comprobada)

Giro G2: Eje OX, ángulo g2

El eje OZ pasa al eje Oz' de u3, el eje e2' pasa al eje de e2''.



OP = x1.e1' + y1.e2' + z1.e3'

OP = x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'', donde {e1'', e2'', e3''} lo determinamos como sigue.

Expresamos : e1'' = a11.e1' + a12.e2' + a13.e3'

e2'' = a21.e1' + a22.e2' + a23.e3'

e3'' = a31.e1' + a32.e2' + a33.e3'

Entonces:

x2 = OP*e1'' = (x1.e1' + y1.e2' + z1.e3')*(a11.e1'+ a12.e2' + a13.e3') = a11.x1 + a12.y1 + a13.z1

Del mismo modo

y2 = OP*e2'' = …………………… = a21.x1 + a22.y1 + a23.z1

z2 = OP*e3'' = …………………… = a31.x1 + a32.y1 + a33.z1 (2)

Por otro lado tengo (Los ejes OX, OY, OZ son ortogonales entre sí)

a11 = e1'' * e1' = cos(0) = 1 ,

a12 = e1'' * e2' = cos(pi/2) = 0

a13 = e1'' * e3' = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e1'' = e1'

Tengo (Observar que el vector e1' es ortogonal al plano OYZ, y que e2'' está sobre este plano)

a21 = e2'' *e1' = cos(pi/2) = 0

a22 = e2'' * e2' = cos(g2)

a23 = e2'' * e3' = cos(pi/2 - g2) = … = sen(g2)

Por tanto: e2'' = cos(g2).e2' + sen(g2).e3'

Tengo (Observa que e1' es ortogonal al plano OYZ, y que e3'' está sobre este plano, y también que OY y OZ son ortogonales)

a31 = e3'' *e1' = cos(pi/2) = 0

a32 = e3'' * e2' = cos(pi/2 + g2) = … = - sen(g2)

a33 = e3'' * e3' = cos(g2)

Por tanto: e3'' = - sen(g2).e2' + cos(g2).e3'

Volviendo a las expresiones (2) tengo:

x2 = x1

y2 = cos(g2).y1 + sen(g2).z1

z2 = - sen(g2).y1 + cos(g2).z1

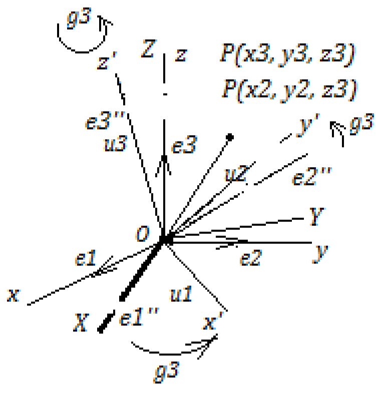
Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

(Comprobada)

Giro G3: Eje OZ' , ángulo g3

El eje OX pasa al eje Ox' de u1, el eje de e2'' pasa al eje Oy' de u2



OP = x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3''

OP = x3.u1 + y3.u2 + z3.u3 ,

La base {u1, u2, u3} es la base del sistema S' de llegada. Desde el punto de vista teórico nos interesa expresarla en la base {e1'', e2'', e3'' }

Expresamos : u1 = a11.e1'' + a12.e2'' + a13.e3''

u2 = a21.e1'' + a22.e2'' + a23.e3''

u3 = a31.e1'' + a32.e2'' + a33.e3''

Entonces:

x3 = OP*u1 = (x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'')*(a11.e1'' + a12.e2'' + a13.e3'') = a11.x2 + a12.y2 + a13.z3

Del mismo modo
y3 = OP*u2 = …………………… = a21.x2 + a22.y2 + a23.z2

z3 = OP*u3 = …………………… = a31.x2 + a32.y2 + a33.z2 (3)

Por otro lado tengo

a11 = u1 * e1'' = cos(g3) ,

a12 = u1 * e2'' = cos(pi/2 – g3) = … = sen(g3)

a13 = u1 * e3'' = cos(pi/2) = 0

Por tanto: u1 = cos(g3). e1'' + sen(g3).e2''

Tengo (Observa que los vectores e1'' y u2 son coplanarios, ya que OX es la intersección de Oxy con Ox'y')

a21 = u2 *e1'' = cos(pi/2+ g3) = - sen(g3)

a22 = u2 * e2'' = cos(g3)

a23 = u2 * e3'' = cos(pi/2) = 0

Por tanto: u2 = - sen(g3).e1’’ + cos(g3).e2’’

Tengo (Observa que el vector u3 es ortogonal con el plano Ox’y’ , y por tanto lo es con e1’’ . El vector e2’’ es ortogonal con e3’’ y por tanto lo es también con u3)

a31 = u3 *e1’’ = cos(pi/2) = 0

a32 = u3 * e2’’ = cos(pi/2) = 0

a33 = u3 * e3’’ = cos(0) = 1

Por tanto: u3 = e3’’

Por tanto, volviendo (3)

x3 = cos(g3).x2 + sen(g3).y2

y3 = - sen(g3).x2 + cos(g3).y2

z3 = z2

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas (x3, y3, z3) son las coordenadas en el sistema S’, y debemos escribir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

Realizamos la composición de los tres giros: G = G3.G2.G1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

=

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Productos:

G3*G2*G1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Col. 1 Col. 2 Col. 3

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \\ \qquad \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ \qquad\qquad sen(g3)sen(g2) & \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \\ \qquad -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ \qquad\qquad \cos(g3)\,sen(g2)/ & \\ sen(g2)sen(g1) \qquad -sen(g2)\cos(g1) \qquad \cos(g2) & \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Primer col. *Segunda col.* *Tercer col.*

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ \\ \qquad \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ \\ \qquad\qquad sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ \\ \qquad -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) \\ \qquad\qquad \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) \qquad - sen(g2)\cos(g1) \qquad \cos(g2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)

4.5.- CÓMO Calcular el valor de los tres ángulos de Euler

Tomaremos la ecuación del plano m: ax + by + cz + d = 0, referido al sistema S.

Obtenemos un vector director de la recta OX común de los planos Oxy, y m:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{---> } ax + by + d = 0$$

Giro G1:

Sea v1 el citado vector director, que suponemos normalizado. Entonces cos(g1) = e1 * v1

Giro G2:

Expreso el eje Oz' respecto del sistema S: Sea u3 = a31.e1 + a32.e2 + a33.e3, normalizado.

cos(g2) = e3 * u3 = a33

Giro G3:

Expreso el eje Ox' respecto del sistema S: Sea u1 = a11.e1 + a12.e2 + a13.e3, normalizado.

cos(g3) = v1 * u1

$$$oOo$$$

Tema 5

Ampliación de Geometría analítica en el Plano y en el Espacio:

Cónicas y Cuádricas en coordenadas Cartesianas: Clasificación

5.1.- Estudio general de las Cónicas

Ecuación general:

$a11x^2 + a22y^2 + 2a12xy + 2a13x + 2a23y + a33 = 0$

Matricialmente (tener en cuenta que: a21 = a12, a31 = a13, a32 = a23)

$$(x, y, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Comprobación:

$(a11x+a12y+a13,a12x+a22y+a23,a13x+a23y+a33).\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(a11x^2+a12yx+a13x)+(a12xy+a22y^2+a23y)+(a13x+a23y+a33) =$

$= a11x^2 + 2a12xy + a22y^2 + 2a13x + 2a23y + a33 = 0$

Representο por A la matriz de coeficientes.

Elementos de la matriz A que debemos resaltar:

Tenemos su determinante D = det(A)

y los menores centrales $A11 = \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$, (resultado de suprimir primer fila y primer columna)

$A22 = \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$, (suprime 2ª fila y 2ª col.)

A33 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$, (suprime 3ª f. y 3ª col)

Clasificación de las Cónicas:

A33 > 0 – >

$$\begin{cases} a11.D < 0 \rightarrow Elipse\ real \\ a11.D > 0 \rightarrow Elipse\ imaginaria \\ D = 0 \rightarrow Dos\ rectas\ imaginarias\ conjugadas \end{cases}$$

A33 < 0 -- > $\begin{cases} D \neq 0 \rightarrow Hipérbola\ real \\ D = 0 \rightarrow Dos\ rectas\ reales\ que\ se\ cortan \end{cases}$

A33 = 0 -- > $\begin{cases} D \neq 0 \rightarrow Parábola\ real \\ D = 0 \rightarrow Dos\ rectas\ paralelas \end{cases}$ -- >

$$\begin{cases} A11 < 0 \rightarrow Reales\ distintas \\ A11 = 0 \rightarrow Reales\ coincidentes \\ A11 > 0 \rightarrow Imaginarias \end{cases}$$

5.2.- Elementos de una cónica

Los siguientes resultados se dan sin definición formal y sin demostración. Remito al Tema 7 para su definición formal y demostración utilizando coordenadas homogéneas. Como se ha dicho antes, en este Tema 5 lo exponemos desde el punto de vista práctico.

5.2.1.- Centro, Ejes, Asíntotas, focos.

Centro de una cónica:

En el Tema 7 quedará probado lo siguiente.

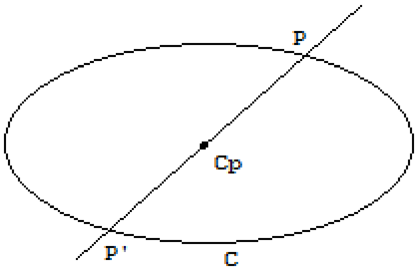
Tomamos las derivadas parciales de la expresión

$f(x,y) = a11x^2 + a22y^2 + 2a12xy + 2a13x + 2a23y + a33$

Estas son

$fx(x,y) = 2a11x + 2a12y + 2a13$

$fy(x,y) = 2a22y + 2a12x + 2a23$



Definición:

Centro de la cónica C es el punto Ce del plano tal que el simétrico respecto a Ce de cualquier punto de C también está en C.

No todas las cónicas tienen centro.

El centro lo obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} fx(x,y) = 0 \\ fy(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a11x + a12y + a13 = 0 \\ a12x + a22y + a23 = 0 \end{cases}$$

Su resolución nos da

$$x0 = \frac{\begin{vmatrix} -a13 & a12 \\ -a23 & a22 \end{vmatrix}}{|A\prime|} = \frac{\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}}{|A\prime|}, \quad y0 = \frac{\begin{vmatrix} a11 & -a13 \\ a12 & -a23 \end{vmatrix}}{|A\prime|} = -\frac{\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a12 & a23 \end{vmatrix}}{|A\prime|},$$

donde $|A'| = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix}$

Centro Ce(x0, y0)

Ejes de una cónica, caso Elipse ó Hipérbola:

Resuelvo la ecuación

$$a12.x^2 + (a11\text{-}a22).x - a12 = 0$$

Sean k1, k2 sus soluciones.

Los ejes son

$$r1:\ f\,'_x(x, y) + k1.f\,'_y(x, y) = 0$$

$$r2:\ f\,'_x(x, y) + k2.f\,'_y(x, y) = 0$$

Ejes de una cónica, caso Parábola:

En este caso su eje es

$$r:\ a11.f\,'_x(x, y) + a12.f\,'_y(x, y) = 0$$

Asíntotas, Caso de Hipérbola:

Las obtenemos como sigue:

Resuelvo: $a22x^2 + 2.a12x + a11 = 0$

Soluciones k1, k2

Asíntotas:

$$s1:\quad f\,'_x(x, y) + k1.f\,'_y(x, y) = 0$$
$$s2:\quad f\,'_x(x, y) + k2.f\,'_y(x, y) = 0$$

Focos:

Supongamos que F(x,y) es un foco. Los valores de (x, y) los obtenemos resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{cases} 4a12 \,.\, f(x,y) = f'_x(x,y).\, f'_y(x,y) \\ 4(a11 - a22).\, f(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)^2 - \left(f'_y(x,y)\right)^2 \end{cases}$$

Si los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas, los focos reales se obtienen resolviendo

$$\begin{cases} 4a12 \,.\, f(x,y) = f'_x(x,y).\, f'_y(x,y) \\ \text{Ecuación de un eje} \end{cases}$$

donde la segunda ecuación es la de uno de los ejes.

5.2.2.- **Polar de un punto, Polo de una recta,** Puntos conjugados, Directrices

Polar de un punto:

Si tengo el punto P(x0, y0), su 'recta polar' respecto de la cónica es

r: $f'_x(x0, y0).x + f'_y(x0, y0).y = 0$

Polo de una recta:

El polo de la recta s es el punto P cuya recta polar es s.
Si tengo la recta ax + by + c = 0, cuya pendiente es

$$m = \frac{-a}{b} \,. x + \frac{-c}{b}$$

NOTA:
Hemos comprobado además que un vector director de la recta ax + by = 0 es v = (-b, a), que confirma que su pendiente es $m = \frac{-a}{b}$.
En ocasiones escribiremos f_x , f_y en lugar de f'_x , f'_y

Por otro lado recordamos que si tengo f(x, y) = 0, derivando respecto de x tengo

$$f_x(p) + f_y(p).y' = 0 \text{ --> } y' = \frac{-f_x(p)}{f_y(p)}$$

y por tanto $m = \frac{-f_x(p)}{f_y(p)}$ -> $\frac{-a}{b} = \frac{-f_x(p)}{f_y(p)}$ -> $\frac{f_y(p)}{b} = \frac{f_x(p)}{a}$

que nos lleva a la igualdad

$$a.\, f_y(p) - b\, .\, f_x(p) = 0$$

Haciendo P(x,y) como punto 'incógnita' tenemos que resolver

$$b.f\,'_x(x,y) – a.f\,'_y(x,y) = 0$$

Puntos conjugados entre sí:

Decimos que P y Q son conjugados cuando P está en la polar de Q, y Q está en la polar de P.

Si P(x1, y1) y Q(x2, y2), estos puntos son conjugados si se cumple la igualdad

$$x2.f\,'_x(x1,y1) + y2.f\,'_y(x1,y1) = 0$$

Directrices:

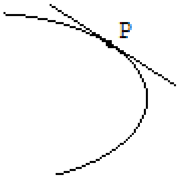
Llamamos 'directriz' de la cónica a las rectas que sean la polar de uno de los focos.

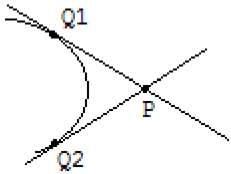
5.2.3.- Tangente a la cónica en uno de sus puntos

En el punto p(x1,y1) de C la ecuación de la recta tangente en P es

$$f_x(p).x + f_y(p).y = 0$$

Si P no es punto de la cónica, desde P se pueden trazar dos tangentes a C.





En el Tema 7 demostramos el procedimiento para obtenerlas.

5.3.- **Invariantes al realizar un Cambio de Sistema de** referencia. Ecuación reducida y tipo de cónica

Tengo una Cónica C determinada por la ecuación

$$(x, y, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Existen ciertos valores que son 'invariantes' ante cualquier cambio de sistema de referencia.

Son los siguientes:

I1 = -(a11 + a22) , (Invariante lineal, métrico)

I2 = A33 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$, (I. afín, cuadrático)

I3 = D = $|A|$

Ecuación reducida de una cónica con ayuda de los invariantes:

A) Caso de Elipse ó Hipérbola:

Sistema de referencia S(O; ox, oy) donde O es el centro y ox, oy son sus ejes de simetría. En este sistema de referencia su Ecuación es 'reducida', como sigue.

Su forma reducida es de la forma

$$b11x^2 + b22y^2 + b33 = 0 \qquad (1)$$

Matriz asociada B = $\begin{pmatrix} b11 & 0 & 0 \\ 0 & b22 & 0 \\ 0 & 0 & b33 \end{pmatrix}$, y los invariantes toman el valor:

b11 + b22 = -I1

b11.b22 = I2 = A33

b11.b22.b33 = I3 --- > b33 = $\frac{I_3}{|I_2|}$

Puesto que I1 = -(b11 + b22) y I2 = b11.b22, sabemos que b11 y b22 son las soluciones k1, k2 de la ecuación en k

$$k^2 + I1.k + I2 = 0$$

y así tengo la expresión reducida (1):

$$k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{I_3}{|I_2|} = 0 \qquad (2)$$

Tipo de cónica:

a) Si k1 y k2 son del mismo signo y $\frac{I_3}{|I_2|}$ con signo contrario -> Elipse real

b) Si k1 y k2 son del mismo signo y $\frac{I_3}{|I_2|}$ también -> Elipse imaginaria

c) Si k1 y k2 son de signo contrario -> Hipérbola real

Observa que los valores I1, I2, I3 son invariantes, y el dato de partida es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

los citados valores invariantes los tomo así

I1 = -(a11 + a22) , I2 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$, I3 = D = $|A|$

Planteamos la ecuación en k

k^2 + I1.k + I2 = 0, y lo mismo para obtener $\frac{I_3}{|I_2|}$.

B) Caso de Parábola:

Sistema de referencia S(O; ox, oy) donde O coincide con el vértice de la parábola, ox, oy son uno el eje de simetría y el otro es la tangente en el vértice. En este sistema de referencia su Ecuación es reducida, como sigue.

La forma reducida es de una de las siguientes formas:

Si el eje de simetría coincide con oy será

$$b11.x^2 + 2.b23.y = 0$$

En el primer caso, Matriz asociada:

$$B = \begin{pmatrix} b11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b23 \\ 0 & b32 & 0 \end{pmatrix}$$

I1 = -b11 --- > b11 = -I1

I3 = /B/ = I1.b23^2 --- > b23 = $\pm\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}$, por tanto podemos expresarla así

$$I1.x^2 - 2.\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}.y = 0, \text{ si } I1 > 0$$
$$-I1.x^2 - 2.\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}.y = 0, \text{ si } I1 < 0$$

(Eje de simetría oy)

Si el eje de simetría coincide con ox será

$$b22.y^2 + 2.b13.x = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b13 \\ 0 & b22 & 0 \\ b31 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I1 = -b22 -- > b22 = -I1

I3 = -b22.b13^2 = I1.b13^2 -- > b13 = $\pm\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}$

y su forma reducida

$$I1.y^2 - 2.\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}.x = 0, \text{ si } I1 > 0$$
$$-I1.y^2 - 2.\sqrt{\frac{I_3}{I_1}}.x = 0, \text{ si } I1 < 0$$

(Eje de simetría ox)

Observa: Como en el caso de la Elipse y la Hipérbola, los valores I_1, I_3 los obtenemos de los datos iniciales, es decir de la matriz A inicial.

5.4.- Estudio de las Cuádricas en coordenadas cartesianas

Ecuación general:

$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + 2a12xy + 2a13xz + 2a14x + 2a23yz + 2a24y + 2a34z + a44 = 0$

Matricialmente, teniendo en cuenta que: a21 = a12, a31 = a13, a32 = a23, a41 = a14, a42 = a24, a43 = a34,

$$(x, y, z, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Haga el alumno la comprobación

Represento por A la matriz de coeficientes, y de forma abreviada

$$\mathbf{X.A.Y^t = 0}$$

Elementos de la matriz A que debo resaltar:

Tenemos su determinante

D = det(A)

y los menores centrales (o principales)

A11 = $\begin{vmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{vmatrix}$, (suprimo 1ª f, y 1ª , Adj(a11))

A22 = $\begin{vmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{vmatrix}$, (suprime 2ª fila y 2ª col., Adj(a22))

A33 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a41 & a42 & a44 \end{vmatrix}$, (suprime 3ª f. y 3ª col, Adj(a33))

A44 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$, (suprime 4ª f. y 4ª col, Adj(a44))

En lo que sigue designamos A’$_{33}$ = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$

Clasificación de las Cuádricas (en cartesianas)**:**

Si $|A| \neq 0$

$$\begin{cases} A_{44} = 0 \quad \rightarrow \quad Paraboloides \begin{cases} |A| > 0 \rightarrow Hiperbólico \\ |A| < 0 \rightarrow Elíptico \end{cases} \\ A_{44} <> 0 \rightarrow \begin{cases} A'33 > 0 \rightarrow \begin{cases} a11.A_{44} > 0 \rightarrow \ Elip. \begin{cases} |A| > 0 \ Imag \\ |A| < 0 \ Real \end{cases} \\ a11.A_{44} < 0 \rightarrow Hiper \begin{cases} |A| > 0 \ Una\ h. \\ |A| < 0 \ Dos\ h. \end{cases} \end{cases} \\ A'33 = 0 \rightarrow \qquad Hiper. \begin{cases} |A| > 0 \ Una\ h. \\ |A| < 0 \ Dos\ h. \end{cases} \\ A'33 < 0 \rightarrow \qquad Hiper. \begin{cases} |A| > 0 \ Una\ h. \\ |A| < 0 \ Dos\ h. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Si $|A| = 0$

$$\begin{cases} A_{44} = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} ran(A) = 2 \rightarrow \begin{cases} A'_{33} < 0 \; Dos\; planos\; reales \\ A'_{33} > 0 \; Dos\; planos\; imag \end{cases} \\ ran(A) = 1 \rightarrow \; Un\; plano\; doble \end{cases} \\ A_{44} <> 0 \rightarrow \begin{cases} A'_{33} > 0 \rightarrow \{ a11.A_{44} > 0 \; Cono\; imag \\ Resto\; caso \rightarrow Cono\; real \end{cases} \\ ran(A) = 3 \rightarrow \quad Cilindros \begin{cases} ran(A_{44}) = 1 \; C.parab. \\ ran(A_{44}) = 2 \; C.elíp.ó\; hiper \end{cases} \end{cases}$$

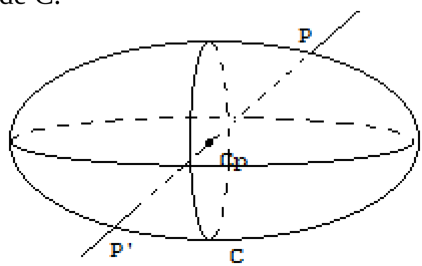
5.4.1.- Elementos de un cuádrica

Sin demostración daremos los siguientes resultados. Su demostración podrá verse en el Tema 7 donde volvemos a su estudio utilizando coordenadas homogéneas.

En este caso de las cuádrica expongo solamente el cálculo del centro.

Centro de una cuádrica:

Centro de la cuádrica C es el punto Cp del espacio tal que el simétrico respecto a Cp de cualquier punto P de C es un punto P' también de C.



NOTA:

En otro lugar, en el caso de las Cónicas, aplicamos otro método de cálculo del centro utilizando las derivadas parciales, contrastando el resultado con su cálculo en homogéneas donde se aplica directamente su definición.

En este caso de las cuádricas utilizamos el mismo método aunque obviamos la comprobación.

En coordenadas cartesianas, obtengo sus derivadas parciales.

Sea la cuádrica

$f(x, y, z) = a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + 2a12xy + 2a13xz + 2a14x +$
$+ 2a23yz + 2a24y + 2a34z + a44 = 0$

(1)

Su matriz $A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$

Obtengo las derivadas parciales de la expresión (1), e igualando a cero puedo resumirlo en las siguientes (llamadas Semi-derivadas)

$f\,'x(x, y, z) = a11x + a12y + a13z + a14 = 0$

$f\,'y(x, y, z) = a22y + a12x + a23z + a24 = 0$

$f\,'z(x, y, z) = a33z + a13x + a23y + a34 = 0$

y resuelvo el sistema

$$\begin{cases} a11x + a12y + a13z + a14 = 0 \\ a12x + a22y + a23z + a24 = 0 \\ a13x + a23y + a33z + a34 = 0 \end{cases} \text{-->}$$

$$\begin{cases} a11x + a12y + a13z = -a14 \\ a12x + a22y + a23z = -a24 \\ a13x + a23y + a33z = -a34 \end{cases}$$

Para resolver el sistema calculamos:

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}, \quad \text{(Tomado de la matriz A)}$$

$$A_x = \begin{vmatrix} -a14 & a12 & a13 \\ -a24 & a22 & a23 \\ -a34 & a23 & a33 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a12 & a13 & a14 \\ a22 & a23 & a24 \\ a23 & a33 & a34 \end{vmatrix} = A_{14}$$

$$A_y = \begin{vmatrix} a11 & -a14 & a13 \\ a21 & -a24 & a23 \\ a31 & -a34 & a33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a31 & a33 & a34 \end{vmatrix} = A_{42}$$

$$A_z = A_{34} = \begin{vmatrix} a11 & a12 & -a14 \\ a21 & a22 & -a24 \\ a31 & a32 & -a34 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a11 & a12 & a14 \\ a21 & a22 & a24 \\ a31 & a32 & a34 \end{vmatrix} = A_{43}$$

y tengo Ce$\left(\frac{A_{14}}{A_{44}}, \frac{A_{42}}{A_{44}}, \frac{A_{43}}{A_{44}}\right)$

NOTA:
Para el estudio de los siguientes conceptos remito al alumno al Tema 7 donde se estudian con detalle (en coordenadas homogéneas) los siguientes conceptos. Estos son:
Recta polar de un punto, Polo de una recta, Puntos conjugados entre sí, Diámetros, Ejes, Vértices, Focos, Asíntotas, Directrices. Plano tangente, Cono tangente, Intersección con un plano, etc.

5.4.2.- Invariantes al realizar un Cambio de

sistema de referencia. Ecuación reducida

Tengo una Cuádrica C determinada por la ecuación

$$(x, y, z, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Definición: Ecuación Secular

Llamamos 'Ecuación secular' al polinomio característico del menor A_{44} , como sigue

$$A44 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix},$$

Ecuación secular:

$$p(x) = \begin{vmatrix} a11-x & a12 & a13 \\ a21 & a22-x & a23 \\ a31 & a32 & a33-x \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollarlo lo expresamos así:

$x^3 + I1.x^2 + I2.x + I3 = 0$ (Ec. secular)

Por el estudio de la relación entre coeficientes de p(x) y las soluciones de p(x) = 0 sabemos que estos coeficientes son invariantes, siendo en este caso

I1 = -(a11+a22+a33), (Invariante lineal)

I2 = Suma de los menores principales de orden 2 de A44:

$I2 = (a11.a22 – a12^2) + (a11.a33 - a13^2) + (a22.a33 - a23^2)$

(Invariante cuadrático)

I3 = -A44

También lo es (aunque no figura entre los coeficientes de la ecuación secular) este valor

T = A11 + A22 + A33 = Suma de los menores principales de orden 3 de A

Los extraemos de la matriz A

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

$$A11 = \begin{vmatrix} a22 & a23 & a24 \\ a32 & a33 & a34 \\ a42 & a43 & a44 \end{vmatrix}, \; A22 = \begin{vmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a31 & a33 & a34 \\ a41 & a43 & a44 \end{vmatrix},$$

$$A33 = \begin{vmatrix} a11 & a13 & a14 \\ a21 & a23 & a24 \\ a41 & a42 & a44 \end{vmatrix}, \quad A44 = \begin{vmatrix} a11 & a13 & a13 \\ a21 & a23 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Ecuación reducida de una cuádrica y su Clasificación:

Los siguientes resultados se dan sin demostración.

En el siguiente cuadro las tres soluciones k1, k2, k3 de la ecuación secular

$$k^3 + I1.k^2 + I2.k + I3 = 0$$

son reales, distintas o no.

-Si dos soluciones son iguales la cuádrica es de revolución.

-Si las tres son iguales es una esfera.

Llamamos D = $|A|$, y A44 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$

k1, k2, k3, A_{44} , y a continuación tenemos en cuenta la sucesión de sus signos.

Clasificación de la Cuádrica:

Ecuación reducida:

$$+,+,+,+\begin{cases} D > 0 \rightarrow Elip.imag \;\} \\ D < 0 \rightarrow Elip.real \quad \} \rightarrow \\ D = 0 \rightarrow Cono\ imag \;\} \end{cases}$$

$$k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{D}{A_{44}} = 0$$

$$-,-,-,-\begin{cases} D > 0 \rightarrow Elip.imag \;\} \\ D < 0 \rightarrow Elip.real \quad \} \\ D = 0 \rightarrow Cono\ imag \;\} \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{D}{A_{44}} = 0$$

$$+,-,-,+\begin{cases} D > 0 \rightarrow Hiper.1\ h. \;\} \\ D < 0 \rightarrow Hiper.2\ h. \quad \} \\ D = 0 \rightarrow Cono\ real \quad \} \end{cases}$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{D}{A_{44}} = 0$$

$$-,+,+,-\begin{cases} D > 0 \rightarrow Hiper.Una\ h. \\ D < 0 \rightarrow Hiper.Dos\ h. \\ D = 0 \rightarrow Cono\ real \end{cases}$$

$$\rightarrow k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{D}{A_{44}} = 0$$

$$+,+,0,0 \begin{cases} D < 0 \rightarrow Para.Elíp. \\ D = 0 \rightarrow Cilin.Elíp. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} k1.x^2 + k2.y^2 \pm 2.\sqrt{\frac{-D}{I_2}}.z = 0 \\ k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{T}{I_2} = 0 \end{cases}$$

$$-,-,0,0 \quad \begin{cases} D < 0 \rightarrow Para.Elíp. \\ D = 0 \rightarrow Cilin.Elíp. \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k1.x^2 + k2.y^2 \pm 2.\sqrt{\frac{-D}{I_2}}.z = 0 \\ k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{T}{I_2} = 0 \end{cases}$$

$$+,-,0,0 \begin{cases} D > 0 \rightarrow Para.Hiper. \rightarrow \\ \qquad k1.x^2 + k2.y^2 \pm 2.\sqrt{\frac{-D}{I_2}}.z = 0 \\ D = 0 \rightarrow Cilin.Hiper. \quad \rightarrow \\ \qquad k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{T}{I_2} = 0 \end{cases}$$

$$-,+,0,0 \begin{cases} D > 0 \rightarrow Para.Hiper.\} \rightarrow \\ \qquad k1.x^2 + k2.y^2 \pm 2.\sqrt{\frac{-D}{I_2}}.z = 0 \\ D = 0 \rightarrow Cilin.Hiper. \rightarrow \quad k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{T}{I_2} = 0 \end{cases}$$

$$\pm,0,0,0 \rightarrow D = 0 \rightarrow Cilin.Parab. \quad \rightarrow$$

$$k1.x^2 + 2.\sqrt{\frac{T}{I_1}}.y = 0$$

$$$$oOo$$$$

Tema 6

Coordenadas homogéneas en el Plano.

Estudio de las Cónicas

6.0.- Coordenadas homogéneas en el plano

Justificación:

En Matemáticas hay situaciones en las que nos encontramos con escollos que hemos de soslayar, pero No ‘rodeando’ y que permanezcan ahí sino ‘resolviendo’ y ‘rompiendo’ ese escollo. Es el caso de, por ejemplo, la resolución de

$$x^2 + 1 = 0$$

lo que provocó la ampliación de los números reales a los números complejos.

En Geometría nos encontramos con el caso de dos rectas paralelas, y decimos que ‘se cortan en el infinito’. Sin embargo no tenemos forma de ‘materializar’ este hecho a la hora de realizar los cálculos. Introduciendo las llamadas ‘Coordenadas homogéneas’ salvamos esta dificultad.

El punto en homogéneas:

En un Sistema de referencia cartesiano S(O; ox, oy) un punto P queda determinado por sus coordenadas cartesianas (x, y).

Definición:
Por definición llamamos ‘coordenadas homogéneas’ de P a toda terna (x1, x2, x3) tal que

$$x = \frac{x1}{x3}, \quad y = \frac{x2}{x3}$$

Según esta definición, también la terna (k.x1, k.x2, k.x3) representa el mismo punto P.

Si k = $\frac{1}{x_3}$ tenemos la representación más sencilla en coordenadas homogéneas: P(x, y, 1).

La recta en homogéneas:

La ecuación cartesiana de una recta r es de la forma

$$ax + by + c = 0$$

Si hacemos x = $\frac{x_1}{x_3}$, y = $\frac{x_2}{x_3}$ tengo

$$ax1 + bx2 + cx3 = 0 \qquad (1)$$

Recta determinada por dos puntos:

Sen los puntos P(p1,p2,p3), q(q1,q2,q3) y X(x1,x2,x3) otro punto cualquiera de la recta determinada por P y Q.

Supongamos la ecuación de la recta

$$ax1 + bx2 + cx3 = 0$$

cuyos coeficientes deseamos calcular. Esta ha de ser satisfecha por cada uno de aquellos puntos, y por tanto tengo el sistema

$$\begin{cases} a.x1 + b.x2 + c.x3 = 0 \\ a.p1 + b.p2 + c.p3 = 0 \\ a.q1 + b.q2 + c.q3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

donde las incógnitas son los coeficientes a, b, c de la recta.

Para que tenga solución no trivial ha de ser

$$\begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 \\ p1 & p2 & p3 \\ q1 & q2 & q3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(Ecuación Matricial)} \ (3)$$

Ecuaciones paramétricas:

Por ser nulo el determinante sus filas son linealmente dependientes

k1.(x1,x2,x3) + k2.(p1,p2,p3) + k3.(q1,q2,q3) = 0

Aquí será k1 <> 0, pues en otro caso los puntos P y Q coincidirían al ser proporcionales sus coordenadas), y por tanto, dividiendo por k1 obtengo

(x1, x2 ,x3) + k2.(p1,p2,p3) + k3.(q1,q2,q3) = 0

Finalmente

$$\begin{cases} x1 = k.p1 + l.q1 \\ x2 = k.p2 + l.q2 \\ x3 = k.p3 + l.q3 \end{cases} \qquad (4)$$

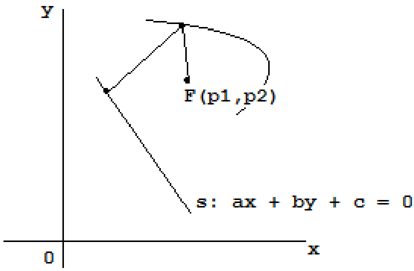
o bien $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} + l.\begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \end{pmatrix}, \qquad (5)$

y de forma abreviada: (xi) = k.(pi) + l.(qi)

6.1.- Definición general de Cónica. Interpretación geométrica

El plano cartesiano más la recta del infinito se llama (lo llamamos) ‘Plano completado’ o ‘Plano completo’.

En el plano completo con sistema de referencia S{O; e1, e2}, fijamos un punto F(p1, p2) que llamaremos ‘foco’, y una recta s: ax + by + c = 0 que llamaremos directriz.



Defi.:
Llamaremos 'Cónica' al lugar geométrico de los puntos P(x, y) del plano tales que la razón entre d(P,F) y d(P,s) es una constante:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,s)} = const = e \qquad (6)$$

La constante 'e' recibe el nombre de 'excentricidad'.

Tipos de cónicas: $\begin{cases} e < 1 \rightarrow la\ llamamos\ Elipse \\ e > 1 \rightarrow la\ llamamos\ Hipérbola \\ e = 0 \rightarrow la\ llamamos\ Parábola \end{cases}$

La igualdad (6) nos lleva a

$$e = \frac{\sqrt{(x-p1)^2+(y-p2)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Elevando al cuadrado

$$e^2.(ax+by+c)^2 = [(x-p1)^2+(y-p2)^2].(a^2+b^2),$$
$e^2.[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy) =$
$= (a^2 + b^2).[(x^2 - 2p1x + p1^2) + (y^2 - 2p2y + p2^2)],$

Agrupando
$(e^2.a^2 - (a^2 + b^2)).x^2 + (e^2.b^2 - (a^2 + b^2)).y^2 +$

$+ (e^2.2ab).xy + (e^2.2ac + 2p1.(a^2 + b^2)).x +$

$+ (e^2.2bc + 2p2.(a^2 + b^2).y \ -(e^2.c^2 - (p1^2 + p2^2).(a^2 + b^2)) = 0$

Llamando: $\begin{cases} a11 = coeficiente\ de\ x2 \\ a22 = coefi.\ de\ y^2 \\ a12 = \frac{1}{2}\ coefi\ de\ xy \\ a13 = \frac{1}{2}\ coefi\ de\ x \\ a21 = a12 \\ a23 = \frac{1}{2}\ coefi\ de\ y \\ a31 = a13 \\ a32 = a23 \\ a33 = término\ independiente \end{cases}$

la anterior queda expresada en la forma cartesiana así

$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy + 2.a13x + 2.a23y + a33 = 0$

Matricialmente podemos escribir

$$(x, y, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

y decimos que

la matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$ define la cónica.

Esta matriz A es siempre simétrica.

En coordenadas homogéneas:

Teniendo en cuenta x = $\frac{x_1}{x_3}$, y = $\frac{x_2}{x_3}$ resulta

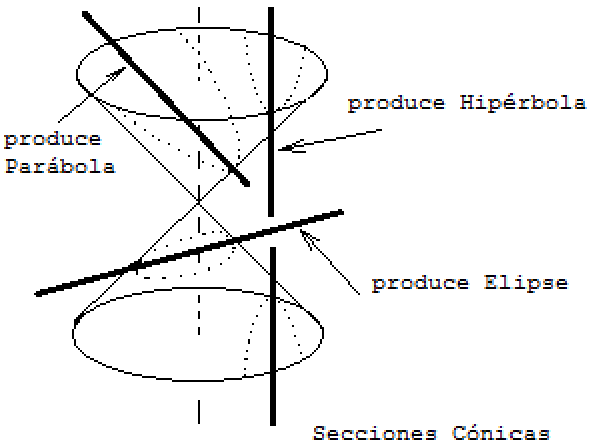
$a11x1^2 + a22x2^2 + 2.a12x1x2 + 2.a13x1x3 + 2.a23x2x3 +$
$+ a33x3^2 = 0$

y matricialmente (la matriz es la misma)

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = 0$$

Interpretación geométrica:

En las siguientes figuras mostramos cómo se obtienen los diferentes tipos de cónicas geométricamente.



6.2.- **Puntos conjugados, Polo de una recta,** Recta polar de un punto

Sea una cónica dada por su matriz (simétrica)

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix},$$

(a21 = a12, a31 = a13, a32 = a23)

Definición:
El punto Q(q1, q2, q3) es conjugado de P(p1, p2, p3) si se cumple

$$(qi).A.(pi)^t = 0$$

Observa que son conjugados entre sí.

Defi.:

Llamamos ‘polar’ de P(p1, p2, p3) al lugar geométrico de los puntos (x1, x2, x3) conjugados de P, es decir, los que cumplen

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix} = 0$$

Operando

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 \\ a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 \end{pmatrix} = 0,$$

y llamando

$$a = a11.p1 + a12.p2 + a13.p3$$
$$b = a21.p1 + a22.p2 + a23.p3$$
$$c = a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 \qquad (1)$$

tenemos $(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$ que nos da una recta

r: a.x1 + b.x2 + c.x3 = 0

Definición:
Llamamos ‘polo’ de la recta r: ax1 + bx2 + cx3 = 0 al punto P tal que su polar es r.

Si tengo la recta ax1 + bx2 + cx3 = 0, y por tanto los valores a, b, c son conocidos, y pretendo obtener su polo P(p1, p2, p3), pi desconocidos, teniendo en cuenta las relaciones (1) tengo el sistema

$$\begin{cases} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 = a \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 = b \\ a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 = c \end{cases}$$

cuyas incógnitas son (p1, p2, p3).

Resolviendo por Crámer: D = $|A|$,

A1 = $\begin{vmatrix} a & a12 & a13 \\ b & a22 & a23 \\ c & a32 & a33 \end{vmatrix}$, A2 = $\begin{vmatrix} a11 & a & a13 \\ a21 & b & a23 \\ a31 & c & a33 \end{vmatrix}$,

A3 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a \\ a21 & a22 & b \\ a31 & a32 & c \end{vmatrix}$, y el polo es: P($\frac{A1}{D}$, $\frac{A2}{D}$, $\frac{A3}{D}$)

IMPORTANTE:

La recta polar de P(p1, p2, p3) es

r: (x1, x2, x3).A.$\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix}$ = 0

Si M(m1, m2, m3) es un punto cualquiera de r, se

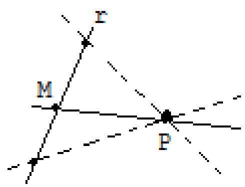
cumple: (m1, m2, m3).A.$\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix}$ = 0, y también (p1, p2, p3).A.$\begin{pmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{pmatrix}$ = 0, y por tanto el punto P pertenece a la polar de M, y recíprocamente.

Consecuencia:

a) La polar de **cualquier** punto M de la polar de P, pasa por P.

Significa que:

"Las rectas polares de los puntos M de la polar r de P están incluidas en el haz de rectas con vértice P"



a) En virtud de lo anterior, Si la polar de P, sea s, corta a la cónica en M1 y M2, las polares de M1 y de M2 pasan por P. Más adelante veremos que las polares de Mi, por ser puntos de C, son tangentes a la cónica. Este hecho nos proporciona el cálculo de las tangentes a C desde el punto P.

6.3. Puntos singulares de una Cónica. Cónica degenerada

Sea una cónica definida por la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Definición:

Llamamos punto 'singular' de la cónica C a todo punto P(pi) de C tal que

$$(xi).A.(pi)^t = 0,$$ para todos los puntos q(xi) de C.

Operando

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 \\ a31.p1 + a32.p2 + a33.p3 \end{pmatrix} = 0,$$

para todo punto (x1, x2, x3) de la cónica. Por tanto ha de cumplirse el sistema homogéneo

$$\begin{cases} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 = 0 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 = 0 \\ a31.p1 + a32.p2 + a33.p3 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

cuyas incógnitas son (p1, p2, p3).

La matriz de este sistema es la matriz A de la cónica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

Por lo que sabemos de la resolución de sistemas homogéneos tenemos la siguiente

Conclusión:

-Si $|A| \neq 0$ -- > No es degenerada, único punto singular (0, 0, 0).

-Si $|A| = 0$ -- > Es degenerada, existen puntos singulares distintos de (0, 0, 0).

Tenemos la siguiente casuística.

Casuística:

a) Si ran(A) = 2, el sistema (4) contiene dos ecuaciones linealmente independientes. Son dos rectas no paralelas y su punto común es el punto singular.

Tomo $\begin{cases} a11.p1 + a12.p2 = -a13.p3 \\ a21.p1 + a22.p2 = -a23.p3 \end{cases}$, (p3 libre)

Resolviendo por Crámer:

A33 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$, A31 = $\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$, A32 = $-\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix}$

p1 = $\dfrac{\begin{vmatrix} -a13.p3 & a12 \\ -a23.p3 & a22 \end{vmatrix}}{A33} = \dfrac{\begin{vmatrix} -a13 & a12 \\ -a23 & a22 \end{vmatrix}}{A33}.p3 = \dfrac{\begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}}{A33}.p3$

p2 = $\dfrac{\begin{vmatrix} a11 & -a13.p3 \\ a21 & -a23.p3 \end{vmatrix}}{A33} = \dfrac{\begin{vmatrix} a11 & -a13 \\ a21 & -a23 \end{vmatrix}}{A33}.p3 = -\dfrac{\begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a21 & a23 \end{vmatrix}}{A33}.p3$

Obtenemos el punto singular (A31, A32, A33)

b) Si ran(A) = 1, en el sistema (4) sólo una de las ecuaciones es l.i., es una recta. Tiene dos incógnitas libres, que dando valores nos darán dos puntos de la recta.

$a11.p1 = -a12.p2 - a13.p3$, con a11 <> 0

p1 = $\dfrac{-(a12.p2+a13.p3)}{a11}$, p2 y p3 libres,

que, dando valore, tengo (en homogéneas) una recta de puntos singulares.

Ejemplos:

1.- Sea la cónica (en cartesianas)
$f(x,y) = x^2 + 2xy -4x-4y +4$, y en hoogéneas

-> $x1^2 +2x1x2 -4x1x3 -4x2x3 +4x3^2 = 0$

Matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

det(A) = [4 +4]-[4 +4] = 0, -- > Es degenerada

$A33 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 <> 0$ -- > ran(A) = 2 -- > Son dos

rectas: $\begin{cases} x1 + x2 - 2x3 = 0 \\ x1 \quad - 2x3 = 0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} x1 + x2 = 2x3 \\ x1 = 2x3 \end{cases}$ -- >

x2 = -x1 +2x3 = 0

Punto de corte P(2x3, 0, x3) -- > P(2, 0, 1),

En cartesianas:

La cónica es el producto de las dos rectas

$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x \quad - 2 = 0 \end{cases}$, que se cortan en P(2, 0)

2.- Sea la cónica $x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$ ->

$x1^2 + 4x2^2 + 2x1x3 + x3^2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

det(A) = [4] –[4] = 0,   A33 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ = 4

ran(A) = 2. Las dos primeras filas son l.i. Los puntos singulares los obtengo resolviendo

$\begin{cases} x1 \quad + x3 = 0 \\ \quad 4x2 \quad = 0 \end{cases}$, x2 = 0, x1 =-x3

Luego son dos rectas que se cortan en el punto singular P(-1, 0, 1) -- > P(-1, 0) en cartesianas.

La cónica C es el producto de las siguientes dos rectas (en cartesianas):

$x^2 + 4y^2 + 2x + 1 = 0$, despejo y

$y^2 = \frac{-(x^2+2x+1)}{4}$, $y = \frac{\pm\sqrt{x^2+2x+1}}{2}\,.i = \frac{\pm\sqrt{(x+1)^2}}{2}\,.i$ ->

$y = \frac{\pm(x+1)}{2}\,.i$

Rectas imaginarias: $\begin{cases} 2y - (x+1).i \\ 2y + (x+1).i \end{cases}$

Comprobamos: [(2y-(x+1).i].[2y +(x+1).i] =

= $4y^2 + (x+1)^2 - 2y.(x+1).i + 2y.(x+1).i = 4y + (x^2 + 2x + 1)$,

Deben cortarse en el punto singular P(-1, 0):

$\begin{cases} 2y - (x+1).i \\ 2y + (x+1).i \end{cases}$, Restándolas: -2(x+1).i = 0 -- >

x+1 = 0, x = -1, -- >   2y = 0, y = 0

Intersección de la cónica con la recta del infinito:

$$\begin{cases} \mathrm{x1}^2 + 4\mathrm{x2}^2 + 2\mathrm{x1x3} + \mathrm{x3}^2 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases}$$ -- >

$$\begin{cases} x1^2 + 4x2^2 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases}$$

Divido por $x2^2$ (x = x1/x2)

$x^2 + 4 = 0$, x = +-2i,

x1/x2 = 2i -- > x1 = 2i.x2 -- > Punto (2i.x2, x2, 0)

Hago x2 = i , y tengo x1 = -2 -- > p1(-2, i, 0)

x1/x2 = -2i -- > x1 = -2i.x2

Hago x2 = i -- > x1 = 2 -- > p2(2, i, 0)

6.4.- Intersección entre cónica y recta

Tengo una recta determinada por dos puntos fijos p(p1, p2, p3), q(q1, q2, q3)

r: (xi) = k.(pi) + l.(qi),

y una cónica determinada por su ecuación matricial

$(xi).A.(xi)^t = 0$

Los puntos comunes han de cumplir este sistema

$$\begin{cases} (xi) = k.(pi) + l.(qi) \\ (xi).A.(xi)^t = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Sustituyo la primera en la segunda, y teniendo en cuenta que ‘la traspuesta de una suma’ es ‘la suma de las traspuestas’, y además la propiedad distributiva del producto de matrices. Con todo ello tengo

$[k.(pi) + l.(qi)].A.[k.(pi) + l.(qi)]^t = 0$

$[k.(pi) + l.(qi)].A.[k.(pi)^t + l.(qi)^t] = 0$

$k^2.(pi).A.(pi)^t + 2.k.l.(pi).A.(qi)^t + l^2.(qi).A.(qi)^t = 0$

Las incógnitas son los parámetros k, l.

Representando los coeficientes como sigue

$$b11 = (pi).A.(pi)^t$$
$$b12 = (pi).A.(qi)^t$$
$$b22 = (qi).A.(qi)^t$$

tengo la ecuación:

$$b11.k^2 + b22.l^2 + 2.b12.k.l = 0 \qquad (3)$$

Esta ecuación (3) representa la proyección sobre la recta $x_3 = 0$ (recta del infinito) de los puntos comunes de recta y cónica, reales ó imaginarios.

Si supongo $l \neq 0$ y divido por l^2 y escribo:
$x = k/l$, $a = b11$, $b = 2.b12$, $c = b22$, tengo la ecuación en x

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Esta nos dará dos valores: Reales distintos o iguales, imaginarios conjugados.

Ejemplo:

Sean:
Cónica $x_1^2 + x_2^2 -25x_3^2 = 0$, y la recta

$$(xi) = k.(pi) + l.(qi)$$

dada por los puntos P(0,0,1), Q(8,6,1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de (3) son

$$(0,0,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,-25).\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -25$$

$$(0,0,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,-25).\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -25$$

$$(8,6,1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = (8,6,-25).\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 75$$

Por tanto tengo la ecuación de segundo grado en k y l

$-25.k^2 -50.k.l + 75.l^2 = 0$, $k^2 +2.kl -3.l^2 = 0$

$$k = \frac{-2l \pm \sqrt{2l^2+12l^2}}{2} = \frac{-2l \pm 4l}{2} = \begin{cases} l \\ -3.l \end{cases}$$

$$k = l \dashrightarrow \begin{cases} x1 = l.0 + l.8 = 8.l \\ x2 = l.0 + l.6 = 6.l \\ x3 = l + l = 2.l \end{cases} \dashrightarrow$$ Punto (8.l, 6.l, 2.l), y dando

el valor l = 1 , tengo P(8,6,2)≡ (4,3,1)

$$k = -3.l \dashrightarrow \begin{cases} x1 = 0 + l.8 = 8.l \\ x2 = 0 + l.6 = 6.l \\ x3 = -3.l + l = -2.l \end{cases} \dashrightarrow$$

Q = (4, 3, -1) ≡ Q(-4, -3, 1). Estos son los puntos de corte.

6.5.- Rectas tangentes a una cónica desde un punto P. Asíntotas

Cónica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

A) Si P(p1, p2, p3) es un punto de C hemos visto en el punto 6.2 que la polar de P es tangente a la cónica en P, y esta es la única tangente a C:

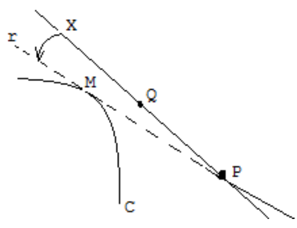
$$r: (x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \text{ ó bien } ax1 + bx2 + cx3 = 0$$

donde

$a = a11.p1 + a12.p2 + a13.p3$
$b = a21.p1 + a22.p2 + a23.p3$
$c = a31.p1 + a32.p3 + a33.p3$

B) Sea P(p1, p2, p3) que no está en C.

Si Q(x1, x2, x3) es otro punto cualquiera, la recta definida por P y Q pertenece al haz de rectas con vértice en P. Deseo obtener aquellas que sean tangentes a C, lo cual significa que la cortan en un punto doble.



La recta determinada por P y Q tiene por ecuación

$(xi) = k.(pi) + l.(qi)$, donde (pi) es fijo dado y

(qi) es variable.

Los puntos de corte con la cónica vienen dados por el sistema

$$\begin{cases} (xi) = k.(pi) + l.(qi) \\ (xi).A.(xi)^t = 0 \end{cases}$$

En el punto 6.4 vimos que los puntos de corte vienen dados por las soluciones de

$$a.k^2 + b.k.l + c.l^2 = 0, \quad \text{donde}$$

$a = (pi).A.(pi)^t$
$b = 2.(pi).A.(qi)^t$
$c = (qi).A.(qi)^t$

Dividiendo por l^2, y escribiendo: $x = \frac{k}{l}$, tengo

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Para que tenga solución doble (tangencia) ha de ocurrir que

$$b^2 - 4.a.c = 0$$

Esto es

$$4.[(pi).A.(qi)^t]^2 - 4.[(pi).A.(pi)^t].[(qi).A.(qi)^t] = 0$$

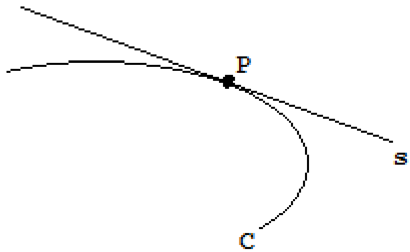
donde (pi) son valores fijos dados y (qi) son incógnita.

Simplificando y cambiando (qi) por (xi) tengo

$$[(pi).A.(xi)^t]^2 - [(pi).A.(pi)^t].[(xi).A.(xi)^t] = 0 \qquad (*)$$

Si desarrollásemos obtendríamos una ecuación homogénea de segundo grado en x1, x2, x3, es decir, una cónica.

Casuística:



a) El punto fijo P es de la cónica C:

En este caso $(pi).A.(pi)^t = 0$, y la igualdad (*) queda reducida a

$$[(pi).A.(qi)^t]^2 = 0,$$ que es una recta doble.

Observa que $(pi).A.(xi)^t = 0$ es una recta.

Esta última igualdad es equivalente a $(xi).A.(pi)^t = 0$, que es la ecuación de la recta polar de P(p1, p2, p3).

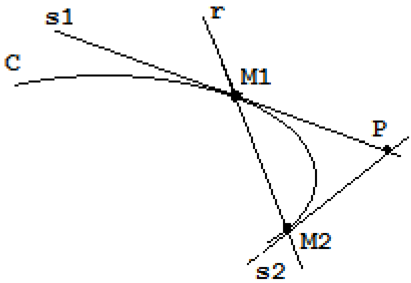
Consecuencia:
Si P es un punto real de C, la tangente en P coincide con la polar de P.

Si P es un punto de C en el infinito, a estas tangentes las llamamos 'Asíntotas' (Las Asíntotas son las tangentes a C en sus puntos del infinito)

b) Si P no está en C:
La igualdad

$$[(pi).A.(qi)^t]^2 - [(pi).A.(pi)^t].[(qi).A.(qi)^t] = 0$$

donde (qi) es incógnita, define una cónica C' que es degenerada, ya que el punto P sería un punto singular. Por tanto consta de dos rectas s1, s2 (cuyo producto nos da la expresión de C').



Al tratar la polar de un punto llegamos a la conclusión de que si P no está en la cónica C su polar r corta a C en dos puntos M1, M2, y las polares de estos puntos, que son tangentes a C, pasan por P.

Estas dos rectas s1, s2 son las tangentes a la cónica desde P.

Cómo obtener las tangentes desde P:

Obtengo la polar de P(p1, p2, p3), sea r, y obtengo los puntos de corte con la cónica C, sean M1, M2 estos puntos. Las tangentes a C son las rectas s1 y s2 que pasan por P y por M1 y M2, respectivamente.

Asíntotas:
Llamamos 'asíntota' a las tangentes a la cónica en sus puntos (de C) del infinito. Es decir, las tangentes desde los puntos de C comunes con la recta del infinito (x3 = 0).

Cabe hablar de asíntotas en el caso del tipo Hipérbola.

6.6.- Clasificación de una cónica mediante su intersección con la recta del infinito

Tengo la cónica

$$C: a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + 2a12x1x2 + 2a13x1x3 +$$

$+ 2a23x2x3 = 0$

Su matriz $A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$

Hallo sus puntos comunes con la recta del infinito

Tengo el sistema

$$\begin{cases} a11x1^2 + 2a12x1x2 + 2a13x1x3 + a22x2^2 + 2a23x2x3 + a33x3^2 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases}$$

que queda así

$$\begin{cases} a11.x1^2 + 2.a12.x1x2 + a22.x2^2 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases}$$

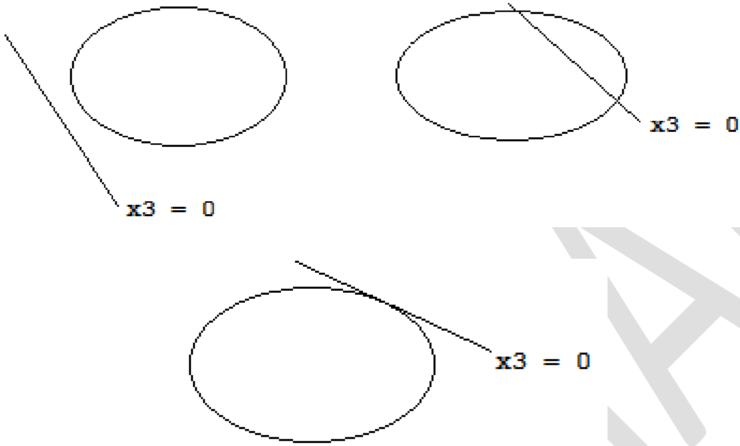
Divido en la primera por x_2^2 , y me queda la ecuación

$a11.x^2 + 2a12x + a22 = 0$, donde $x = \frac{x1}{x2}$

Resolviendo: $x = \frac{-2a12 \pm \sqrt{4a12^2 - 4a11a22}}{2a11} = \frac{-a12 \pm \sqrt{a12^2 - a11a22}}{a11}$

Observa que $a12^2 - a11.a22 = -A33$, y por tanto $x = \frac{-a12 \pm \sqrt{-A_{33}}}{a11}$

Observa la siguientes gráficas y casuística.



x3 = 0 es la recta del infinito.

Por tanto: $\begin{cases} A33 > 0 \ \rightarrow No\ corta\ al\ infinito \rightarrow Elipse \\ A33 < 0 \rightarrow Corta\ en\ dos\ puntos \rightarrow Hipérbola \\ A33 = 0 \rightarrow Es\ tangente \rightarrow Parábola \end{cases}$

6.7.- Elementos de una Cónica (en homogéneas)

6.7.1.- Centro y Diámetros

Sea C una cónica no degenerada, esto es det(A) $\neq$ 0

dada por la matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$

Definición:
Llamamos centro de C, si lo tiene, al polo de la recta del infinito.

Al tratar la polar r de un punto P(p1, p2, p3), y el polo P de r, teníamos

(xi).A.(pi)^t = 0, y llamando

$$\begin{cases} a = a11p1 + a12p2 + a13p3 \\ b = a21p1 + a22p2 + a23p3 \\ c = a31p1 + a32p2 + a33p3 \end{cases}, \qquad (1)$$

tenemos la recta

(x1, x2, x3).$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ = 0 -- > a.x1 + b.x2 + c.x3 = 0

recta polar de P(p1, p2, p3).

Ahora impongo que la recta coincide con x3 = 0, y por tanto a = 0, b = 0, c = 1, y la incógnita es el polo P(x1, x2, x3) de esta recta. Por tanto el anterior sistema (1) queda así

$$\begin{cases} a11x1 + a12x2 + a13x3 = 0 \\ a21x1 + a22x2 + a23x3 = 0 \\ a31x1 + a32x2 + a33x3 = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

Podemos resolver por el método de Crámer:

Debemos tener presente la matriz A de la cónica

A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$, D = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$,

A_{x1} = $\begin{vmatrix} 0 & a12 & a13 \\ 0 & a22 & a23 \\ 1 & a32 & a33 \end{vmatrix}$ = A_{31} -- > x1 = $\frac{A31}{D}$,

A_{x2} = $\begin{vmatrix} a11 & 0 & a13 \\ a21 & 0 & a23 \\ a31 & 1 & a33 \end{vmatrix}$ = A_{32} -- > x2 = $\frac{A32}{D}$,

A_{x3} = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ a31 & a32 & 1 \end{vmatrix}$ = A_{33} -- > x3 = $\frac{A33}{D}$

El centro es Ce($\frac{A31}{D}$, $\frac{A32}{D}$, $\frac{A33}{D}$)

o bien Ce($\frac{A31}{A33}$, $\frac{A32}{A33}$, 1) si $A_{33} \neq 0$

En cartesianas: Centro ($\frac{A31}{A33}$, $\frac{A32}{A33}$)

Si A33 = 0 la cónica es una parábola, y su centro está en la recta del infinito, es un punto impropio.

Diremos que la parábola No tiene centro.

Otra forma: Por derivación parcial

Tenemos la expresión de la cónica

f(x1, x2, x3) = $a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + 2a12x1x2 +$

$+ 2a13x1x3 + 2a23x2x3 = 0$

Su matriz $A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$

La tomamos en cartesianas:

$f(x, y) = a11x^2 + a22y^2 + 2a12xy + 2a13x + 2a23y + a33 = 0$

Hallo sus derivadas parciales y planteo el sistema y resuelvo:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \ 2a11.x \ + 2a12.y + 2a13 \ = \ 0 \\ f_y(x,y) = \ 2a22.y \ + 2a12.x + 2a23 \ = \ 0 \end{cases} \text{-- >}$$

$$\begin{cases} a11.x \ + a12.y \ = \ - a13 \\ \ a12.x + a22.y = - a23 \end{cases}, \qquad D = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix}$$

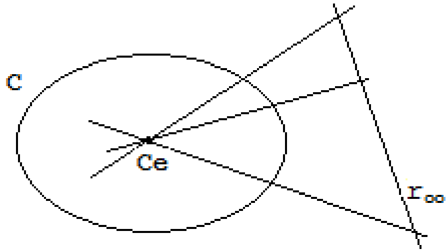
$A_x = \begin{vmatrix} -a13 & a12 \\ -a23 & a22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix} = A_{31}$

$A_y = \begin{vmatrix} a11 & - a13 \\ a12 & - a23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a12 & a23 \end{vmatrix} = A_{32}$

$$x = \frac{A_x}{D} \quad , \ y = \frac{A_y}{D} \text{ -- > } Ce(\frac{A_x}{D} , \ \frac{A_y}{D}) = Ce(\frac{A31}{A33} , \ \frac{A32}{A33})$$

Diámetros:

Llamamos ‘Diámetros de la cónica’ a la polar de cada uno de los punto de la recta del infinito (x3 = 0).



Observa:
Recuerda que, siendo la recta r_∞ (recta del infinito x3 = 0) la polar del punto-centro Ce, la polar de cada punto de la recta del infinito pasa por Ce. Por tanto todo diámetro pasa por el centro Ce de la cónica.
Además: "El polo de cada diámetro es un punto de la recta del infinito x3 = 0.

6.7.2.- Pares de puntos conjugados entre sí. Pares de Rectas conjugadas entre sí. Par de ejes, par de ejes ortogonales. Vértices

Defi.: Decimos que un par de puntos P y Q son 'conjugados entre sí' cuando se cumple

$$(qi).A.(pi)^t = 0$$

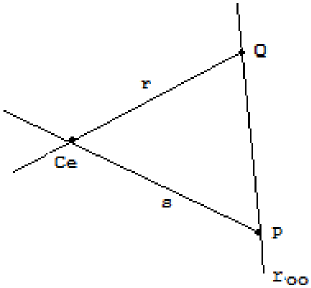
De esta igualdad se deduce que cada uno de estos puntos está en la polar del otro: La polar de P pasa por Q, la polar de Q pasa por P.
Llamamos 'par de rectas conjugadas', respecto de la cónica C, a todo par de rectas r y s cuyos polos son conjugados entre sí.

Equivale a que cada una de estas rectas contiene el polo de la otra.

Defi.:
Llamamos 'par de Ejes de la cónica' a todo par de diámetros conjugados entre sí.

Equivalente a que sus polos (que son puntos del infinito) son conjugados entre sí, y que cada eje pasa por el polo del otro.

Recuerda que 'diámetros' son las polares de los puntos del infinito, y que el polo de cada uno es un punto del infinito.



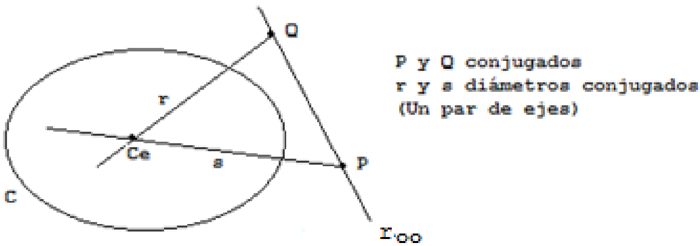
6.8.- Relación entre las pendientes de un par de ejes.
Par de ejes ortogonales

En Cartesianas tenemos:

Ce(c1, c2) es el centro de C. Las rectas r y s (par de ejes) tienen por ecuación

r: (y-c2) = m.(x-c1), -- > $\frac{y-c2}{m} = \frac{x-c1}{1}$

s: (y-c2) = m'.(x-c1), -- > $\frac{y-c2}{m'} = \frac{x-c1}{1}$



Un vector director de r es v = (1, m), y Q(1, m, 0) es un punto de r en el infinito.

Un vector director de s es w = (1, m'), y P(1, m', 0) un punto de s en el infinito.

En homogéneas y tomando la expresión de la Cónica:

Teniendo en cuenta que la polar de Q es s, para todo punto (x1, x2, x3) de s se cumple:

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(x1, x2, x3).\begin{pmatrix} a11 + a12.m \\ a21 + a22.m \\ a31 + a32.m \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde}$$

s: (a11+a12.m).x1 + (a21+a22.m).x2 + (a31+a32.m).x3 = 0,

cuya pendiente es

$$m' = \frac{-(a11+a12.m)}{(a12+a22.m)}$$

que es la relación entre las pendientes de un par de ejes (par de diámetros conjugados).

(Recuerda que: a21 = a12, a31 = a13, a32 = a23)

Consecuencias:

A) ¿Cómo obtener un par de ejes?.

La relación anterior se refiere a un par de rectas conjugadas que pasan por el centro (Un par de ejes)
Procedemos como sigue:

Tomo una recta r: (y-c2) = m.(x-c1), -- >

$$r: \frac{y-c2}{m} = \frac{x-c1}{1}$$

que pasa por Ce(c1, c2), y fijo esta recta como eje e1 (dependiendo del parámetro m).

Acto seguido tomo el valor m’ = $\frac{-(a11+a12.m)}{(a12+a22.m)}$ como pendiente para otra recta s, de modo que, imponiendo que pasa por el mismo punto Ce(c1, c2), es decir que su ecuación es de la forma

$$s: (y-c2)= m'.(x-c1) \dashrightarrow \frac{y-c2}{m'} = \frac{x-c1}{1},$$

y la tomo como eje e2. Dando valor al parámetro m obtengo un par de ejes (diámetros conjugados).

B) Cálculo de un par de Ejes ortogonales: (perpendiculares entre sí)

Sabemos por el estudio en Cartesianas, que si m’ = -1/m, el par de rectas correspondiente son perpendiculares entre sí. Son un par de ejes ortogonales.

Imponemos esta condición y tenemos

$$1/m = \frac{(a11+a12.m)}{(a12+a22.m)} \dashrightarrow a12 + a22.m = a11.m + a12.m^2,$$

$$a12.m^2 + (a11-a22).m - a12 = 0$$

De esta ecuación obtenemos dos valores m1, m2 que son las pendientes de un par de ejes ortogonales entre sí (respecto de la cónica).

Defi.:

Llamamos ‘vértices de la cónica’ a los puntos de corte de la cónica con cada uno de los dos ejes (ortogonales entre sí).

Ejemplo:

Tengo la cónica C: $x^2 + 4y^2 -6x -16y + 21 = 0$ -- >

$x1^2 + x2^2 -6x1x3 -16x2x3 +21x3^2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ -3 & -8 & 21 \end{pmatrix}$$

Determinar:

El centro, un par de ejes ortogonales y los vértices

Sol.: Calculando obtengo

$/A/ = -16$, $A31 = 12$, $A32 = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 8$, $A33 = 4$

(Los determinantes Aij son los Adjuntos algebraicos de $|A|$)

Tengo: Ce(12, 8, 4) -- > Ce(3, 2, 1) -- > Ce(3, 2) en cartesianas.

Otra forma: Semi-Derivadas parciales

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.f'_x: \ x - 3 = 0 \\ \frac{1}{2}.f'_y: \ 4y - 8 = 0 \end{cases},$$ de donde: x = 3, y = 2

Par de Ejes ortogonales: Las soluciones de

$$a12.m^2 + (a11\text{-}a22).m - a12 = 0$$

son las pendientes de dos ejes ortogonales.

$0.m^2 + (1-4).m - 0 = 0$ -- > $-3.m = 0$, $m = 0$

En realidad debo expresar: $0.m^2 - 3m = 0$,

m.(0.m -3) = 0 -- > $\begin{cases} m = 0 \\ 0.m - 3 = 0 \rightarrow \; m = \frac{3}{0} = \infty \end{cases}$

Obtengo las rectas: r: y-2 = 0.(x-3) -- > **y = 2**

s: y-2 = ∞.(x-3) → 1/∞.(y-2) = (x-3) -- > 0 = x-3,

s: x = 3 (pendiente ∞)

Vértices: Resuelvo $\begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0 \end{cases}$ -- >

$x^2 + 16 - 6x - 32 + 21 = 0$ → $x^2 - 6x + 5 = 0$,

x = 5, x = 1, V1(5, 2), V2(1, 2)

Resuelvo $\begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0 \end{cases}$ -- >

$9 + 4y^2 - 18 - 16y + 21 = 0$ -- > $4y^2 - 16y + 12 = 0$,

$y^2 - 4y + 3 = 0$ -- > y = 3, y = 1 -- > V3(3, 3), V4(3, 1)

6.9.- Focos y Directrices

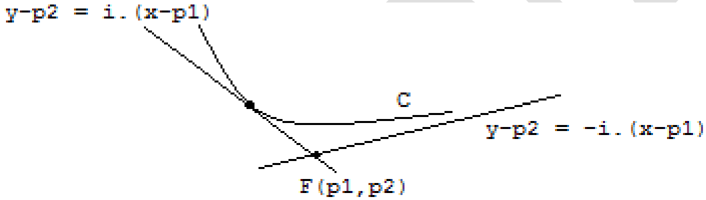
Definiciones:

Llamamos ‘focos de C’ a aquellos puntos F(p1, p2) tales que las tangentes a C desde ellos son las rectas

r: y-p2 = i.(x-p1),
s: y-p2 = -i.(x-p1)

Interesan sólo los focos reales: p1, p2 reales

Las tangentes mencionadas son las rectas con pendiente m = i, m’ = -i



Llamamos ‘directrices’ de la cónica a la recta polar de cada foco.

Cálculo de los focos:

Imponemos la condición de tangencia planteando el sistema que nos dará los puntos de corte entre la cónica y cada una de aquellas rectas:

$$\begin{cases} a11x2 + a22y2 + 2a12xy + 2a13x + 2a23y + a33 = 0 \\ y - p2 = i\,.(x - p1) \end{cases}$$

Despejo y = p2 + i.(x-p1)

Sustituyendo en la primera obtendremos una ecuación de segundo grado en x^2

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

donde A, B, C son valores complejos que dependen de los valores reales aij y i, conocidos, y de los parámetros p1, p2 cuyos valores hemos de calcular.

Puesto que el punto de corte Q ha de ser punto doble tiene que cumplirse

$$B^2 – 4.A.C = 0$$

Como este miembro izquierda es un valor complejo, designando por M la parte real y por N la parte imaginaria, hemos de resolver

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

De aquí obtenemos los valores p1, p2 que determinan el foco.

Ejemplos:

1.- Sea la cónica xy + 2x -2 = 0
Obtener focos y directrices.

Sol.: Focos, sea F(p1, p2): $\begin{cases} xy + 2x - 2 = 0 \\ y - p2 = i.(x - p1) \end{cases}$

y = p2 +i.(x-p1) -- >
x.(p2 + i(x-p1)) + 2x -2 = 0 -- >

x.p2 + i.x.(x-p1) + 2x -2 = 0 -- >
$i.x^2$ + (p2 + 2 -i.p1).x -2 = 0

Entonces, con la notación anterior
A = i
B = 2+p2-p1.i
C = -2

Discriminate: $B^2 = (2+p2-p1.i)^2 = (2+p2)^2 – p1^2 - 2(2+p2).p1.i$

4AC = -8i

B^2 -4AC = 0 -- > $[(2+p2)^2 - p1^2] + [8-2.(2+p2).p1].i = 0$ -- >

$$\begin{cases} (2+p2)^2 - p1^2 = 0 \\ 8 - 2.(2+\text{p2}).\text{p1} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2+p2)^2 - p1^2 = 0 \\ 4 - (2+\text{p2}).\text{p1} = 0 \end{cases}$$

de donde

$$2+p2 = \frac{4}{p1} \text{ -- > } \left(\frac{4}{p1}\right)^2 = p1^2 \text{ -- > } 16 = p1^4$$

$p1^2 = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases}$, $\quad p1 = \begin{cases} \pm 2 \\ \pm 2i \end{cases}$

p1 = 2 -- > p2 = 0 -- > foco F1(2, 0)
p1 = -2 -- > p2 = -4 -- > foco F2(-2, -4), focos reales

Además
p1 = 2i -- > p2 = -2+2/i = -2 -2i -- > F3(2i, -2-2i)
p1 = -2i -- > p2 = -2-2/i = -2+2i -- > F4(-2i, -2+2i)

Prescindimos de estos últimos por ser imaginarios.

Directrices: Polar de cada foco

$$\text{F1(2,0,1):} \quad (2, 0, 1).\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = (1, 1, 0).\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} =$$

= x1 + x2 = 0 -- > **x + y = 0**

$$\text{F1(-2,-4,1):} \quad (-2, -4, 1).\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = (-1, -1, -4).\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} =$$

-x1 –x2 -4x3 = 0 -- >

x +y +4 = 0

2.- Sea la cónica $x^2 + 5y^2 -5 = 0$.

Sus focos son F1(2, 0), F2(-2, 0) y se pueden obtener gráficamente.

Resultados: Sus directrices son

d1: $2x -5 = 0$, d2: $2x + 5 = 0$

Compruébelo el alumno. La cónica es una elipse.

6.10.- Reducción de la ecuación general a forma canónica

Sea la ecuación general

C: $a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + 2a12x1x2 + 2a13x1x3 +$
$+ 2a23x2x3 = 0$

y en cartesianas

C: $f(x, y) = a11x^2 + a22y^2 + 2a12xy + 2a13x + 2a23y + a33 = 0$

A) Caso de la Elipse y la Hipérbola:

En estos dos casos elegimos como sistema de referencia aquel cuyos ejes son los ejes de la cónica, y como origen (0, 0) su centro.
Supongamos que la siguiente es la expresión en este nuevo sistema de referencia.

C: $g(x, y) =$
$= c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + 2c13x + 2c23y + c33 = 0$

Teniendo en cuenta la simetría central de estas cónicas y que el centro es (0, 0), para todo punto P(x, y) de C tiene que cumplirse

$$g(-x, -y) = g(x, y) = 0$$

esto es

$$c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + 2c13x + 2c23y + c33 = 0$$
$$c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy -2c13x -2c23y + c33 = 0$$

y restándolas obtengo

$$4.c13x + 4.c23y = 0 ,$$

de donde, si ha de cumplirse para todo punto P(x, y) de la cónica, tiene que ser

$c13 = 0$, $c23 = 0$, quedando en cada una de aquellas

$$c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + c33 = 0$$
$$c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + c33 = 0$$

Por otro lado, Teniendo en cuenta que el eje ox es eje de simetría, y lo mismo el eje oy, para todo p(x, y) de C ha de cumplirse

$$g(x, -y) = g(x, y) = 0, \qquad g(-x, y) = g(x, y) = 0$$

y por tanto

$$c11x^2 +c22y^2 -2c12xy +c33 = 0$$
$$c11x^2 +c22y^2 +2c12xy +c33 = 0$$

de donde $c12 = 0$, y queda

$$c11x^2 + c22y^2 + c33 = 0$$

que es la 'Ecuación reducida' de la Elipse y/o de la Hipérbola.

B) Caso de la Parábola:

En este caso el origen y ejes del nuevo sistema de referencia serán:

(0, 0) el vértice de la parábola

Eje ox (ó el oy) el eje de simetría de la parábola.

El eje oy (ó el ox) la tangente a la parábola en el vértice.

Supongamos que la siguiente es la expresión en este nuevo sistema de referencia

C: g(x, y) =
$= c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + 2c13x + 2c23y + c33 = 0$

Puesto que la cónica pasa por (0,0) será $c33 = 0$

La tangente en el vértice es la polar del punto (0, 0), con lo cual

$$(0, 0, 1).\begin{pmatrix} c11 & a12 & c13 \\ a12 & c22 & a23 \\ c13 & a23 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (c13, a23, 0).\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = c13x + a23y$$

y como esta ha de coincidir con el eje oy, cuya ecuación es $x = 0$, ha de ser

$$a23 = 0$$

Queda C: $c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + 2c13x = 0$

Por ser el eje de la parábola eje de simetría se ha de cumplir

$$g(x, -y) = g(x, y) = 0$$

por lo que

$c11x^2 + c22y^2 + 2c12xy + 2c13x = 0$
$c11x^2 + c22y^2 -2c12xy + 2c13x = 0$

de donde $4.c12.xy = 0$ para todo P(x, y) de C, con lo cual $c12 = 0$,

Queda C: $c11x^2 + c22y^2 + 2c13x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} c11 & 0 & c13 \\ 0 & c22 & 0 \\ c13 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ser parábola sabemos que A33 = 0, por lo que

$c11.c22 = 0$, de donde las siguientes dos opciones:

$c11 = 0 \to c22y^2 + 2c13x = 0$, (eje de simetría 0x)

$c22 = 0 \to c11x^2 +2c13x = 0 \to x.(c11x +2c13) = 0$

(Esta es degenerada, producto de dos rectas distintas)
$c11 = 0, c22 = 0 \to 2c13.x = 0$
(degenerada: recta x = 0 doble)

Nos quedamos con $c22y^2 + 2c13x = 0$

NOTA:
Si en la elección del sistema de referencia tomamos como eje oy (eje de simetría), entonces habríamos llegado a la ecuación

$$c11x^2 + 2c13y = 0$$

$$$$oOo$$$$

Tema 7

Coordenadas homogéneas el Espacio.

Estudio de las Cuádricas

7.0.- Coordenadas homogéneas en el Espacio

El Punto en coordenadas homogéneas:

En cartesianas tengo la representación de un punto P(x, y, z), respecto de un sistema de referencia S(O; ox, oy, oz).

Por definición hacemos x = $\frac{x1}{x4}$, $\frac{x2}{x4}$, $\frac{x3}{x4}$, de modo que ahora el punto lo representamos mediante

P(x1, x2, x3, x4),

Cuando x4 = 0 decimos que P(x1,x2,x3,0)es un punto del infinito, en otro caso es un punto real.

Si multiplico por k las coordenadas xi tengo (kx1, kx2, kx3, kx4), y teniendo en cuenta que

x = $\frac{k.x1}{k.x4}$ = $\frac{x1}{x4}$, y lo mismo para y, z, y el punto que representa la cuaterna anterior es el mismo punto P. De ahí el nombre de coordenadas homogéneas.

Observa que si k = $\frac{1}{x4}$, con x4 ≠ 0, entonces la citada cuaterna queda de la forma P(x, y, z, 1), y esta es la que utilizaremos habitualmente para representar un punto real P(x, y, z) pero expresado en coordenadas homogéneas.

El Plano en coordenadas homogéneas:

En cartesianas m: ax + by + cz + d = 0

En homogéneas a. $\frac{x1}{x4}$ + b. $\frac{x2}{x4}$ +c. $\frac{x3}{x4}$ + d = 0

de donde

m: a.x1 + b.x2 + c.x3 + d.x4 = 0

Plano determinado por tres puntos:

Sean tres puntos P(pi), Q(qi), R(ri), no alineados, y X(xi) un punto cualquiera del plano que estos determinan.

Cada uno de estos cuatro puntos han de satisfacer la ecuación de m, por tanto tengo el sistema

$$\begin{cases} \mathrm{a.x1} + \mathrm{b.x2} + \mathrm{c.x3} + \mathrm{d.x4} = 0 \\ \mathrm{a.p1} + \mathrm{b.p2} + \mathrm{c.p3} + \mathrm{d.p4} = 0 \\ \mathrm{a.q1} + \mathrm{b.q2} + \mathrm{c.q3} + \mathrm{d.q4} = 0 \\ \mathrm{a.r1} + \mathrm{b.r2} + \mathrm{c.r3} + \mathrm{d.r4} = 0 \end{cases}$$

donde las incógnitas son a, b, c, d.

Este sistema es homogéneo y para que admita solución no nula el determinante de sus coeficientes ha de ser nulo, esto es

$$\begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 \\ p1 & p2 & p3 & p4 \\ q1 & q2 & q3 & q4 \\ r1 & r2 & r3 & r4 \end{vmatrix} = 0$$

Esto significa que existe relación de dependencia lineal entre su filas (y entre columnas) lo que nos lleva a la existencia de escalares k1, k2, k3, k4 tales que

k1.(x1,x2,x3,x4) + k2.(p1,p2,p3,p4) +
+ k3.(q1,q2,q3,q4) + k4.(r1,r2,r3,r4) = (0,0,0,0)

Abreviado y vectorialmente tenemos lo siguente:

k1.(xi) + k2.(pi) + k3.(qi) + k4.(ri) = 0

En ésta igualdad ha de ser k1 ≠ 0, pues de lo contrario los tres puntos dados estarían alineados.

Entonces podemos obtener

(x1, x2, x3, x4) = h1.(pi) + h2.(qi) + h3.(ri),

y sus ‘Ecuaciones paramétricas’

$$\begin{cases} x1 = h1.p1 + h2.q1 + h3.r1 \\ x2 = h1.p2 + h2.q2 + h3.r2 \\ x3 = h1.p3 + h2.q3 + h3.r3 \\ x4 = h1.p4 + h2.q4 + h3.r4 \end{cases}$$

donde intervienen los tres parámetros h1, h2, h3. Recuerda que en coordenadas cartesianas figurarían dos parámetros.

La recta en homogéneas:
En cartesianas una recta viene dada como intersección de dos planos

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Al pasar a homogéneas tengo

$$r: \begin{cases} ax1 + bx2 + cx3 + dx4 = 0 \\ a'x1 + b'x2 + c'x3 + d'x4 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

La Recta determinada por dos puntos:

Sean dos puntos P(p1, p2, p3, p4), Q(q1, q2, q3, q4) y sea X(x1, x2, x3, x4) otro punto cualquiera de la recta.

Para cada uno de estos puntos se ha de cumplir el sistema (*), y por tanto tengo el sistema

$$\begin{cases} ax1 + bx2 + cx3 + dx4 = 0 \\ a'x1 + b'x2 + c'x3 + d'x4 = 0 \\ ap1 + bp2 + cp3 + dp4 = 0 \\ a'p1 + b'p2 + c'p3 + d'p4 = 0 \\ aq1 + bq2 + cq3 + dq4 = 0 \\ a'q1 + b'q2 + c'q3 + d'q4 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

donde las incógnitas son

(a, b, c, d) y (a’, b’, c’, d’)

Del sistema (**) extraemos

$$\begin{cases} ax1 + bx2 + cx3 + dx4 = 0 \\ ap1 + bp2 + cp3 + dp4 = 0 \\ aq1 + bq2 + cq3 + dq4 = 0 \end{cases}$$

cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 \\ p1 & p2 & p3 & p4 \\ q1 & q2 & q3 & q4 \end{pmatrix}$$

Para que admita solución no trivial el rango de esta matriz ha de ser menor que tres, lo que significa que existe relación de dependencia lineal entre sus filas:

k1.(x1,x2,x3,x4) + k2.(p1,p2,p3,p4) +

+ k3.(q1,q2,q3,q4) = (0,0,0,0)

Aquí k1 ha de ser no nulo, pues de lo contrario P y Q serían el mismo punto.

Dividiendo por k1 tengo

(xi) + k.(pi) + l.(qi) = (0,0,0,0)

y las ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x1 = k.p1 + l.q1 \\ x2 = k.p2 + l.q2 \\ x3 = k.p3 + l.q3 \\ x4 = k.p4 + l.q4 \end{cases}$$

También matricialmente

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} + l.\begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \end{pmatrix},$$

ó de forma abreviada: (xi) = k.(pi) + l.(qi)

7.1.- Definición general de Cuádrica en homogéneas.
Expresión matricial

Defi.:
En cartesianas viene definida por una ecuación de la forma

$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy + 2.a13xz + 2.a23yz + 2.a14x + 2.a24y + 2.a34z + a44 = 0$

Matricialmente podemos escribir

$$(x, y, z, 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

y decimos que la matriz $A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$ define la cuádrica.

En coordenadas homogéneas tengo:

$a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + a44x4^2 + 2.a12x1x2 +$
$+ 2.a13x1x3 + 2.a14x1x4 + 2.a23x2x3 + 2.a24x2x4 +$
$+ 2.a34x3x4 = 0$

y matricialmente

$$(x1, x2, x3, x4).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = 0$$

7.2.- Puntos conjugados, Plano polar de un punto.
Polo de un plano

Sea una cuádrica dada por su matriz (simétrica)

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

Defi.:
Los puntos P(p1, p2, p3, p4) y Q(q1, q2, q3, q4) son conjugados entre sí respecto de la cuádrica si se cumple

$$(qi).A.(pi)^t = 0$$

Defi.:
Llamamos 'polar' de P al lugar geométrico de los puntos (x1, x2, x3, x4) conjugados de P, es decir, los puntos Q(xi) que cumplen

$$(x1, x2, x3, x4).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} = 0$$

Operando

$$(x1, x2, x3, x4).\begin{pmatrix} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 + a14.p4 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 + a24.p4 \\ a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 + a34.p4 \\ a41.p1 + a42.p2 + a43.p3 + a44.p4 \end{pmatrix} = 0,$$

y llamando

a = $a11.p1 + a12.p2 + a13.p3$+a14.p4
b = $a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 + a24.p4$
c = $a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 + a34.p4$
d = $a41.p1 + a42.p3 + a43.p3 + a44.p$

(1)

tenemos $$(x1, x2, x3, x4).\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0,$$

m: a.x1 + b.x2 + c.x3 + d.x4 = 0, que es un plano.

Defi.:
Llamamos 'polo' del plano m al punto P tal que su polar es m.

Si tengo el plano m: ax1 + bx2 + cx3 + dx4 = 0, y por lo tanto tengo los valores a, b, c, d, pretendo obtener su polo P(p1, p2, p3, p4).

Teniendo en cuenta las relaciones (1) tengo el sistema

$$\begin{cases} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 + a14.p4 = a \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 + a24.p4 = b \\ a31.p1 + a32.p3 + a33.p3 + a34.p4 = c \\ a41.p1 + a42.p3 + a43.p3 + a44.p4 = d \end{cases}$$

donde la incógnita es (p1, p2, p3, p4).

Resolviendo por Crámer

D = $|A|$, B1 = $\begin{vmatrix} a & a12 & a13 & a14 \\ b & a22 & a23 & a24 \\ c & a32 & a33 & a34 \\ d & a42 & a43 & a44 \end{vmatrix}$, B2 = $\begin{vmatrix} a11 & a & a13 & a14 \\ a21 & b & a23 & a24 \\ a31 & c & a33 & a34 \\ a41 & d & a43 & a44 \end{vmatrix}$

B3 = $\begin{vmatrix} a11 & a13 & a & a14 \\ a21 & a23 & b & a24 \\ a31 & a33 & c & a34 \\ a41 & a43 & d & a44 \end{vmatrix}$, B4 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & a \\ a21 & a22 & a24 & b \\ a31 & a32 & a34 & c \\ a41 & a42 & a43 & d \end{vmatrix}$,

las coordenadas del polo son P($\frac{B1}{D}$, $\frac{B2}{D}$, $\frac{B3}{D}$, $\frac{B4}{D}$),

o bien P($\frac{B1}{B_4}$, $\frac{B2}{B_4}$, $\frac{B3}{B_4}$, 1). Cartesianas P($\frac{B1}{B_4}$, $\frac{B2}{B_4}$, $\frac{B3}{B_4}$)

IMPORTANTE:

El plano polar de P(p1, p2, p3, p4) es

$$m: (x1, x2, x3, x4).A.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} = 0$$

Para un punto M(m1, m2, m3, m4) de m se cumple

$(m1, m2, m3, m4).A.\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \end{pmatrix} = 0$, y también

$$(p1, p2, p3, p4).A.\begin{pmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \\ m4 \end{pmatrix} = 0,$$

lo que significa que el punto P pertenece al plano polar de M.

Hemos hecho uso de que la matriz A de una cuádrica (como de una cónica) es siempre simétrica, y por tanto $A^t = A$.

Consecuencia:

a) Si m es el plano polar de P, el plano polar de **cualquier** punto M del plano m pasa por P. Los planos polares de los puntos M de m están incluidos en el 'haz cónico' de planos con vértice P.

b) En virtud de lo anterior, si el plano polar de P, sea m, corta a la cuádrica produciendo una curva g, el plano polar de todo punto Q de g pasa por P. Este hecho tendrá importancia cuando tratemos 'los planos tangentes' a la cuádrica desde un punto P.

7.3.- Puntos singulares. Cuádrica degenerada

Sea una cuádrica C definida por la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

Defi.:

Llamamos punto 'singular' de la cuádrica a un punto P(pi) tal que

$$(xi).A.(pi)^t = 0, \text{ para todo punto } q(xi) \text{ de C}$$

Operando

$$(x1, x2, x3, x4).\begin{pmatrix} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 + a14.p4 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 + a24.p4 \\ a31.p1 + a32.p2 + a33.p3 + a34.p4 \\ a41.p1 + a42.p2 + a43.p3 + a44.p4 \end{pmatrix} = 0,$$

para todo punto (x1, x2, x3, x4) de C, y Por tanto ha de cumplirse el sistema

$$\begin{cases} a11.p1 + a12.p2 + a13.p3 + a14.p4 = 0 \\ a21.p1 + a22.p2 + a23.p3 + a24.p4 = 0 \\ a31.p1 + a32.p2 + a33.p3 + a34.p4 = 0 \\ a41.p1 + a42.p2 + a43.p3 + a44.p4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La matriz de este sistema es la matriz A de la cuádrica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

Casuística:

c) /A/ ≠ 0 -- > Único punto singular (0,0,0). La cónica es No degenerada.

d) Si ran(A) = 3, el sistema (1) contiene tres ecuaciones linealmente independientes, una sola incógnita libre, y por tanto un punto.

Del mismo modo que en las cónicas este punto es

M(A41, A42, A43, A44), y es un punto de la cuádrica.

Se demuestra que toda recta que pasa por M y por otro punto de C, toda ella está incluida en C. Por tanto:

-Si A44 ≠ 0 -- > La cuádrica es un cono real con vértice en M.

-Si A44 = 0 -- > La cuádrica es un cilindro cuyas generatrices son paralelas que pasan por el punto M(A41, A42, A43, 0) del infinito.

-Si ran(A) = 2, el sistema (1) contiene dos ecuaciones linealmente independientes que son dos planos no paralelos. La cuádrica está formada por dos planos no paralelos.

-Si ran(A) = 1, en el sistema (1) sólo una de las ecuaciones es l.i., es un plano (dos planos coincidentes). La cuádrica está formada por un plano doble.

Decimos que la cuádrica es degenerada si /A/ = 0 y en otro caso decimos No degenerada.

Ejemplo:
Sea la cuádrica C dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$z^2 + 2xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$

Se comprueba que ran(A) = 2 -- > dos planos m1, m2
Las dos primeras filas son l.d., pero la primera y tercera son l.i., y por tanto representan sendos planos cuya intersección es la recta

$$r: \begin{cases} -z + 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Hemos de hacer notar que, por satisfacer el sistema (1), es esta recta r la que está incluida en C, pero no necesariamente lo está cada plano. Tenemos que obtener los dos planos que forman la cuádrica.
Los citados planos pertenecen al haz

$$(x - y + z - 2) + k.(z-2) = 0$$

Un punto de C es P(1, 0, 0) y por él ha de pasar uno de los planos que la forman:

$$(1-2) + k.(-2) = 0, \quad k = -1/2,$$

y el plano será m1: 2.(x-y+z-2) -(z-2) = 0,

$$m1: 2x -2y +z -2 = 0$$

El otro plano m2 puedo obtenerlo haciendo la división

$(z^2 +2xz -2yz -4x +4y -4z +4) : (2x-2y +z -2)$

División:

```
z² -2(2-x+y).z –(4(x-y-1) | z+2x-2y-2
                            ------------------
                                 z -2
-z² -2xz+2yz+2z
---------------------------
“                -2z      -4(x-y-1)
                 +2z      +4x-4y-4
                 ---------------------
                 “                  “
```

con lo cual m2: z -2 = 0 es el otro plano.

Otra forma para obtener los dos planos m1, m2:

Consiste en resolver

$$z^2 + 2xz -2yz -4x + 4y -4z + 4 = 0,$$

tomando z como incógnita.

Si f(z) y g(z) son las soluciones, entonces

$$C: (z-f(z)).(z-g(z)) = 0,$$

y los planos son: m1: (z-f(z)) = 0, m2: (z-g(z)) = 0

Resuelvo: $z^2 + 2(x-y-2)z + 4(-x+y+1) = 0$

$$z = \frac{-2(x-y-2) \pm \sqrt{4.(x-y-2)^2 - 16.(-x+y+1)}}{2} =$$

$$= \frac{-2(x-y-2) \pm 2\sqrt{(x-y)^2}}{2} \text{ -- >}$$

$$z = \begin{cases} -(x-y-2)+(x-y)=2 \\ -(x-y-2)-(x-y) = -2x+2y+2 \end{cases},$$

con lo cual la cuádrica está formada por el producto de dos planos:

$$(z + 2x - 2y - 2).(z - 2) = 0$$

7.4.- Intersección entre un plano m y la cuádrica C. Plano tangente. Intersección con $x_4 = 0$

Sean una cuádrica C: $(xi).A.(xi)^t = 0$
con matriz

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

y un plano m determinado por tres puntos P(pi), Q(qi), R(ri)

m: (x1, x2, x3, x4) = k.(pi) + l.(qi) + s.(ri)

k, l, s son los parámetros que determinan los puntos del plano.

Su intersección es el lugar geométrico de los puntos (x1, x2, x3, x4) que satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} (x1, x2, x3, x4) = k.(pi) + l.(qi) + s.(ri) \\ (xi).A.(xi)^t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Deducimos que

$$[k.(pi) + l.(qi) + s.(ri)].A.[k.(pi) + l.(qi) + s.(ri)]^t = 0$$

Teniendo en cuenta que se cumple la propiedad distributiva y que la traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas, tenemos

$k^2.(pi).A.(pi)^t + 2kl.(pi).A.(qi)^t + 2ks.(pi).A.(ri)^t + l^2.(qi).A.(qi)^t +$

$+ 2ls.(qi).A.(ri)^t + s^2.(ri).A.(ri)^t = 0$

Llamando:

$b11 = (pi).A.(pi)^t$, $b12 = (pi).A.(qi)^t$
$b13 = (pi).A.(ri)^t$, $b22 = (qi).A.(qi)^t$
$b23 = (qi).A.(ri)^t$, $b33 = (ri).A.(ri)^t$

tenemos

$$b11.k^2 + b22.l^2 + b33.s^2 + 2b12.kl + 2b13.ks + 2b23.ls = 0, \qquad (2)$$

donde k, l, s son parámetros.

Escribiendo x1 por k, x2 por l, x3 por s, tengo

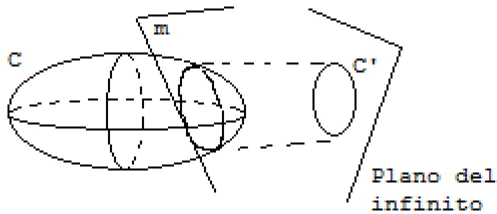
$$b11.x1^2 + b22.x2^2 + b33.x3^2 + 2b12.x1x2 + 2b13.x1x3 + 2b23.x2x3 = 0, \qquad (2)'$$

que representa la proyección, sobre el plano del infinito x4 = 0, de la curva intersección del plano m con la cuádrica C.

En cartesianas esta curva es

$$C': b11.x^2 + b22.y^2 + 2b12.xy + 2b13.x + 2b23.y + b33 = 0,$$

Esta proyección es una cónica C' sobre el referido plano del infinito (x4 = 0).



Observa cómo se han obtenido los coeficientes b_{ij}

$b11 = (pi).A.(pi)^t$, $b12 = (pi).A.(qi)^t$
$b13 = (pi).A.(ri)^t$, $b22 = (qi).A.(qi)^t$
$b23 = (qi).A.(ri)^t$, $b33 = (ri).A.(ri)^t$

Intersección de la cuádrica con el plano x4 = 0 (El infinito):

$$\begin{cases} x4 = 0 \\ (xi).A.(xi)^t = 0 \end{cases}$$ --> Haciendo x4 = 0 en la segunda

$$\begin{cases} x4 = 0 \\ a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + 2a12x1x2 + 2a13x1x3 + 2a23x2x3 = 0 \end{cases}$$

que es una cónica sobre el plano x4 = 0

En cartesianas

$$a11.x^2 + a22.y^2 + 2a12.xy + 2a13.x + 2a23.y + a33 = 0$$

Los coeficientes a_{ij} proceden de la matriz de C

7.5.- Rectas tangentes a una cuádrica desde un punto P
Cono tangente a la cuádrica con vértice en P

Sea la cuádrica definida por A

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

a) Si P pertenece a C, entonces, como ocurre en las cónicas con una recta, ahora el plano m polar de P es tangente a la cuádrica en P. Toda recta contenida en m y que pase por P es tangente a C en este punto P.

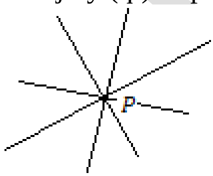
La ecuación del plano polar m es: $(pi).A.(xi)^t = 0$

y éste es el único plano tangente a la cuádrica en P.

a) Sea P que no está en C. En este caso consideramos la familia de rectas que pasan por P

$$r: (xi) = k.(pi) + l.(qi) \qquad (1)$$

donde (pi) es punto fijo y (qi) es punto genérico.



La igualdad (1) representa la 'radiación' de rectas, en el espacio, que pasan por P. Fijado el punto Q(qi) los parámetros k, l determinan la recta PQ.

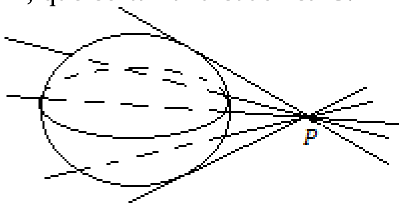
Los puntos de corte de las rectas de esta radiación con la cuádrica C vienen determinados por el sistema

$$\begin{cases} (xi) = k.(pi) + l.(qi) \\ (xi).A.(xi)^t = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Sustituyo la primera en la segunda y tengo

$$[\mathrm{k.(pi)} + \mathrm{l.(qi)}].A.[\mathrm{k.(pi)} + \mathrm{l.(qi)}] = 0 \qquad (3a\ )$$

Esta igualdad (3a) representa la familia de rectas de la radiación (1), con centro en P, que cortan a la cuádrica C.



Teniendo en cuenta que se cumple la propiedad distributiva y que la traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas, la igualdad (3a) puede ser expresada así

$$k^2.(pi).A.(pi)^t + 2k.l.(pi).A.(qi)^t + l^2.(qi).A.(qi)^t = 0 \qquad (3b\ )$$

Haciendo:

$b11 = (pi).A.(pi)^t$
$b12 = (pi).A.(qi)^t$
$b22 = (qi).A.(qi)^t$

tengo

$$b11.k^2 + b22.l^2 + 2b12.k.l = 0, \qquad (3c\ )$$

Tengamos en cuenta que (qi) es variable y cuando fijo uno de éstos puntos queda determinada una recta s, de modo que los parámetros k, l determinan cada punto de s.

En lo que sigue podemos suponer fijado uno de estos puntos Q(qi).

En $b11.k^2 + b22.l^2 + 2b12.k.l = 0,$

divido por l^2 y escribiendo: $x = \frac{k}{l}$, y me queda la ecuación en x

$$b11.x^2 + 2b12.x + b22 = 0 \qquad (3d\ )$$

Escribo a = b11, b = 2.b12, c = b22, y teniendo en cuenta lo que representan éstos tengo

$a = (pi).A.(pi)^t$
$b = 2.(pi).A.(qi)^t$
$c = (qi).A.(qi)^t$

$$a.x^2 + b.x + c = 0, \qquad (3e\ )$$

Deseamos determinar aquellos puntos Q(qi) tales que la recta s determinada por PQ sea tangente a la cuádrica. La ecuación (3e) nos da dos soluciones para k / l, por lo tanto un par de rectas de la familia que cortan a la cuádrica C. Para que estas rectas sean tangentes a C, esto es, para que coincidan siendo la misma recta, la ecuación (3e) debe tener solución doble.

Para que (3e) tenga solución doble (tangencia) ha de ocurrir que

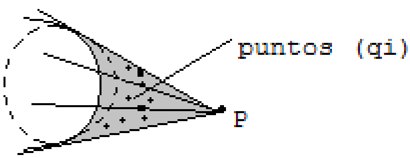
$$b^2 -4.a.c = 0 \text{ -- >}$$

$$4.[(pi).A.(qi)^t]^2 -4.[(pi).A.(pi)^t].[(qi).A.(qi)^t] = 0$$

Simplificando y cambiando (qi) por (xi) me queda

$$[(pi).A.(xi)^t]^2 -[(pi).A.(pi)^t].[(xi).A.(xi)^t] = 0 \qquad (4)$$

que determina aquellos puntos Q(qi) tales que la recta s = PQ es tangente. La solución doble de (3e) me da la relación k/l entre los parámetros que determinan los puntos de esta recta s.



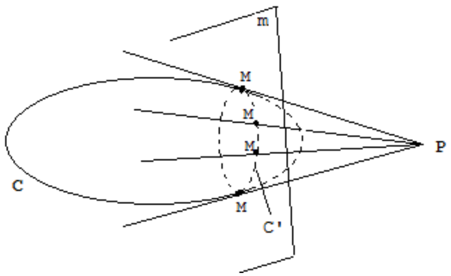
La figura ilustra el lugar geométrico de los puntos Q citados.

Es una superficie cónica con vértice en P. Es una cuádrica degenerada.

Conclusión:
Tenemos el cono tangente a la cuádrica C con vértice en P.

Cómo obtener el cono tangente a C con vértice P:

Aunque lo veremos también en el siguiente punto, podemos adelantar lo siguiente:



Si C’ es el corte con C del plano m, polar de P, el plano polar de cada punto M de C’ es tangente a C y pasa por P. La intersección de cada par de planos consecutivos es una generatriz del cono.

Es decir, este cono está formado por todas las rectas que pasan por P y son tangentes a C en un punto de C’.

Ejemplos:

1.- Sea C dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2-4 = 0$, halla el cono tangente a C y vértice en P(0, 0, 4)   (Datos en cartesianas)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Cálculos: $(0\ 0\ 4\ 1).A.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots. = 12$

$$(0\ 0\ 4\ 1).A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots.. = 4z -4$$

$$(x\ y\ z\ 1).A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots. = x^2 +y^2 +z^2 -4$$

Sustituyendo en la expresión

$$[(pi).A.(xi)^t]^2 -[(pi).A.(pi)^t].[(xi).A.(xi)^t]=0$$

obtengo la ecuación del cono

$$3x^2 +3y^2 -z^2 +8z -16 = 0$$

Otra forma:

Obtengo la curva C’ = C^(plano polar de P)

$$(0\ 0\ 4\ 1).A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots. = 4z -4$$

La ecuación de d viene dada por el sistema

C’: $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$, (directriz del cono)

2.- Tomo la misma cuádrica C pero ahora P(1,1,1,0) del infinito. Obtener el cono tangente a C.

Resuelva el alumno

3.- Tomo la misma cuádrica pero ahora P(0,0,1,0) del infinito. Obtener el cono tangente a C.
Resuelva el alumno

7.6.- Planos tangentes a una cuádrica que pasan por P.
Cono tangente

Cuádrica

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$$

A) Si P pertenece a C, entonces, del mismo modo que en las cónicas tenemos recta tangente, el plano polar de P es tangente a la cuádrica en P:

Su ecuación, del plano polar es: $(pi).A.(xi)^t = 0$, y este es el único plano tangente a la cuádrica en P.

B) Supongamos que P no está en C, y sea m el plano polar de P.

Este plano es m: (xi) = k.(pi) + l.(qi) + s.(ri) (1)

donde (pi), (qi) y (ri) son puntos fijos que determinan el plano, y k, l, s son los parámetros que determinan cada punto de m.

Los puntos de corte vienen dados por las soluciones del sistema

$$\begin{cases}(xi) = k.(pi) + l.(qi) + s.(ri) \\ (xi).A.(xi)^t = 0\end{cases} \qquad (2)$$

Sustituyendo la primera en la segunda tengo

$$[\mathrm{k.(pi) + l.(qi) + s.(ri)}].A.[\mathrm{k.(pi) + l.(qi) + s.(ri)}]^t = 0 \qquad (3a)$$

Teniendo en cuenta que se cumple la propiedad distributiva y que la traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas, la igualdad (3a) podemos expresarla así

$k^2.(pi).A.(pi)^t + 2kl.(pi).A.(qi)^t + 2ks.(pi).A.(ri)^t + l^2.(qi).A.(qi)^t +$

$+ 2ls.(qi).A.(ri)^t + s^2.(ri).A.(ri)^t = 0$ (3b)

Llamando:

$b11 = (pi).A.(pi)^t$, $b12 = (pi).A.(qi)^t$
$b13 = (pi).A.(ri)^t$, $b22 = (qi).A.(qi)^t$
$b23 = (qi).A.(ri)^t$, $b33 = (ri).A.(ri)^t$

tengo

$b11.k^2 + b22.l^2 + b33.s^2 + 2b12.k.l + 2b13.k.s + 2b23.l.s = 0,$ (3c)

donde k, l, s, son los parámetros que describen los puntos del plano m polar de P. (No confundamos (pi) con P).

Si en (3c) divido por s^2 y escribo: x = k/s, y = l/s, me queda (en cartesianas)

C’: $b11x^2 + b22y^2 + 2b12xy + 2b13x + 2b23y + b33 = 0$ (4)

cuyos coeficientes vienen dados (como vimos) por

$b11 = (pi).A.(pi)^t$, $b12 = (pi).A.(qi)^t$
$b13 = (pi).A.(ri)^t$, $b22 = (qi).A.(qi)^t$
$b23 = (qi).A.(ri)^t$, $b33 = (ri).A.(ri)^t$

Esta ecuación (4) define una cónica C’ (en cartesianas).

Si M es un punto cualquiera de la curva C’, intersección de m con C, el plano polar de M es tangente a C y pasa por P:

“Es un plano tangente a la cuádrica pasando por P exterior a C”

Ocurre que por P pasan infinitos planos tangentes a C, y estos planos producen (por su intersección de cada plano con su consecutivo) el cono de rectas tangentes a C con vértice en P.

7.7.- **Reducción de una cuádrica a la forma reducida.** Forma canónica

Una cuádrica No degenerada es de uno de estos tres tipos:

$$\begin{cases} Si\ A_{44}\ \neq 0 \rightarrow Elipsoide\ o\ Hiperboloide\ (tienen\ centro) \\ Si\ A_{44} = 0 \rightarrow Paraboloide \qquad\qquad (carece\ de\ centro) \end{cases}$$

A) $A_{44} \neq 0$ -> Cuádrica con centro (Elipsoide, Hiperboloide)

En el caso de las cónicas (Elipse e Hiperbola) obtuvimos

$$k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{|A|}{A33} = 0$$

donde k1, k2 son los valores propios de A_{33}.
Como en el caso de las cónicas, tomando como ejes del sistema de referencia los de la cuádrica (con origen en su centro) su ecuación, referida a este sistema de referencia, es de la forma

$$k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{|A|}{A44} = 0 \text{ , si } A_{44} \neq 0$$

donde k1, k2, k3 son los valores propios de A_{44}.

Forma canónica: **Caso $A_{44} \neq 0$**

Su forma canónica la obtenemos así:

Llamando p = - $\frac{|A|}{A44}$, $k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 = p$,

$$\frac{k1.x^2}{p} + \frac{k2.y^2}{p} + \frac{k3.z^2}{p} = 1$$

y haciendo los cambios de signo necesarios para que los radicales sean valores reales

a = $\sqrt{\frac{p}{k1}}$, b = $\sqrt{\frac{p}{k2}}$, c = $\sqrt{\frac{p}{k3}}$ resultan

finalmente las posibles expresiones:

-Si todos los ki > 0 -- > $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Elipsoide

-Si sólo uno de los ki es < 0 -- > $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperboloide de una hoja

-Si dos de los ki son < 0 -- > $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dos hojas

Ejemplos:

1.- Tengo la cuádrica

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6x - 6y + 1 = 0$$

obtener su forma reducida.

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

/A/ = desarrollando por tercer fila = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ = -5.(4-1) = -15, A44 = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

Esto nos dice que es no degenerada (Elipsoide o Hiperboloide)

Hallo el polinomio característico de A44

$\begin{vmatrix} 2-k & 1 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix}$ = …. = (1-k).(k^2 -4k +3)

Valores propios: k1 = 1

(k^2 -4k +3) = 0 $\rightarrow \begin{cases} k2 = 1 \\ k3 = 3 \end{cases}$ -- > Ecuación reducida:

$x^2 + y^2 + 3z^2 - 5 = 0$

Ecuación canónica: $\frac{|A|}{|A_{44}|}$ = -15/3 = -5

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{\frac{5}{3}} = 1$$

Caso A44 = 0 (Paraboloide):

Cuando estudiamos las cónicas, en el caso de la Parábola la ecuación reducida queda de la forma

$a.x^2 + 2b.y = 0$, ó $a.y^2 + 2b.x = 0$

En el caso del Paraboloide llegaremos a la forma

$a.x^2 + b.y^2 + 2c.z = 0$,

ó lo que resulte de intercambiar los papeles de x, y, z.

Vamos a obtener los coeficientes a, b, c

Su matriz B = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

Para obtener el valor de los coeficientes a, b, c tenemos en cuenta los llamados 'Invariantes':

I1 = traza de A44, y además

I2 = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$,

(suma de los menores principales de orden dos)

/A/ = /B/ = $-a.b.c^2$

Los referidos invariantes permiten obtener el siguiente sistema

$$\begin{cases} a11 + a22 + a33 = a + b \\ \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a11 & a13 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} = a.b \\ |A| = |B| = -a.b.c^2 \end{cases}$$

o mejor $\begin{cases} I1 = a + b \\ I2 = a.b \\ |A| = -a.b.c^2 \end{cases}$

de donde obtengo los valores de a, b, c.

NOTA: Tra(B_{44}) = a + b; $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = a.b

Para resolver el sistema observa que a y b son las soluciones de

$$x^2 - I1.x + I2 = 0$$

Después obtengo c.

Forma canónica:

Tenemos la forma reducida $ax^2 + by^2 + 2cz = 0$

Despejando z y haciendo a = $\frac{-a}{2.c}$, b = $\frac{-b}{2.c}$

podemos expresarla así

$$z = a.x^2 + b.y^2 \qquad \text{(forma canónica)}$$

2.- Tengo la cuádrica

$$C: x^2 + y^2 -2x + 2y -2z + 2 = 0$$

Obtener su ecuación reducida

Sol.: C: $x1^2 + x2^2 -2x1x4 + 2x2x4 -2x3x4 + 2x4^2 =0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ /A/ = \dots = -1, \ A44 = 0$$

Es no degenerada (/A/≠0) del tipo paraboloide (A44 = 0)

Deseo llegar a la expresión $ax^2 + by^2 +2cz = 0$

$$\begin{cases} a+b = 1+1+0 = 2 \\ a.b = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ -a.b.c^2 = |A| = -1 \end{cases}$$

a.b = 1 -- > a =1, b = 1 (ó a = -1, b = -1)

Por ser a + b = 2 -- > a = 1, b = 1,
$-c^2 = -1$ -- > c = +- 1,

Quedan dos opciones: $x^2 + y^2 + 2z = 0$,
$x^2 + y^2 - 2z = 0$

7.8.- Clasificación mediante su Intersección con el plano del infinito.

Tengo la cuádrica

C: $a11.x1^2 + a22.x2^2 + a33.x3^2 + a44.x4^2 + 2a12.x1x2 +$

$+ 2a13.x1x3 + 2a14.x1x4 + 2a23.x2x3 + 2a24.x2x4 +$

$+ 2a34.x3x4 = 0$

Corte con el plano x4 = 0:

$$\begin{cases} \mathrm{a11x1^2 + a22x2^2 + a33x3^2 + a44x4^2 + 2a12x1x2 +} \\ \mathrm{+2a13x1x3 + 2a14x1x4 + 2a23x2x3 +} \\ \mathrm{+2a24x2x4 + 2a34x3x4 = 0} \\ x4 = 0 \end{cases}$$

Haciendo x4 = 0 en la primera, queda

$$\begin{cases} \mathrm{a11.x1^2 + a22.x2^2 + a33.x3^2 + 2a12.x1x2 + 2a13.x1x3 +} \\ \mathrm{+2a23.x2x3 = 0} \\ x4 = 0 \end{cases}$$

que es una cónica C' en el plano x4 = 0 del infinito. La matriz de esta cónica es

$$A' = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

obtenida a partir de la matriz A de la cuádrica C.

Avanzo las siguientes conclusiones que pueden justificarse observando los resultados que van después:
-Si es una elipse imaginaria -- > La cuádrica es Elipsoide real

-Si es una elipse real -- > La cuádrica es Hiperboloide de una hoja
-Si es hipérbola real -- > La Cuádrica es Hiperboloide de dos hojas
-Si son dos rectas reales distintas -- > La cuádrica es Paraboloide hiperbólico (o silla)
-Si son dos rectas imaginarias (conjugadas) -- > La cuádrica es Paraboloide elíptico.

Comprobación de los Resultados que se citados antes:

Elipsoide: $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2}+\frac{x2^2}{b^2}+\frac{x3^2}{c^2}=x4^2 \\ x4=0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2}+\frac{x2^2}{b^2}+\frac{x3^2}{c^2}=0 \\ x4=0 \end{cases}$

Elipse imaginaria

Si A es la matriz, /A/ = $\frac{1}{a^2}.(-\frac{1}{b^2.c^2}) < 0$

Hiperboloide de una hoja: $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} + \frac{x2^2}{b^2} - \frac{x3^2}{c^2} = x4^2 \\ x4 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} + \frac{x2^2}{b^2} - \frac{x3^2}{c^2} = 0 \\ x4 = 0 \end{cases}$ **,** elipse real

Si A es la matriz, /A/ = $\frac{1}{a^2}.(\frac{1}{b^2.c^2})$ > 0

Hiperboloide de dos hojas: $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} - \frac{x2^2}{b^2} - \frac{x3^2}{c^2} = x4^2 \\ x4 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} - \frac{x2^2}{b^2} - \frac{x3^2}{c^2} = 0 \\ x4 = 0 \end{cases}$ **,** hipérbola real

Si A es la matriz, /A/ = $\frac{1}{a^2}.(-\frac{1}{b^2.c^2})$ < 0

Paraboloide elíptico: $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} + \frac{x2^2}{b^2} = x3x4 \\ x4 = 0 \end{cases}$ **->** $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} + \frac{x2^2}{b^2} = 0 \\ x4 = 0 \end{cases}$

dos rectas imaginarias (conjug.)

Si A es la matriz, /A/ = $\frac{1}{a^2}.(-\frac{1}{4.c^2})$ < 0

Paraboloide hiperbólico (silla): $\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} - \frac{x2^2}{b^2} = x3x4 \\ x4 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} \frac{x1^2}{a^2} - \frac{x2^2}{b^2} = 0 \\ x4 = 0 \end{cases}$, dos rectas reales distintas

Si A es la matriz, /A/ = $\frac{1}{a^2}.(\frac{1}{4.c^2})$ > 0

Clasificación:

En lo que sigue designaremos por A'_{33} al valor

$\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$ tomado de A' = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$

Tenemos la matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a23 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a41 & a42 & a43 & a44 \end{pmatrix}$ que define la cuádrica.

/A/ ≠ 0 (No degenerada)

$A_{44} \neq 0$ -- >

$$\begin{cases} A'_{33} > 0, \quad a11.A_{44} > 0 \rightarrow Elipsoide \begin{cases} |A| < 0 \rightarrow real \\ |A| > 0 \rightarrow imag \end{cases} \\ En\ otro\ caso\ Hiperboloide \begin{cases} |A| < 0 \rightarrow dos\ hojas \\ |A| > 0 \rightarrow una\ hoja \end{cases} \end{cases}$$

$A_{44} = 0 \begin{cases} Paraboloides \begin{cases} |A| < 0 \rightarrow elíptico \\ |A| > 0 \rightarrow hiperbólico \end{cases} \end{cases}$

/A/ = 0 (Degenerada)

$$\begin{cases} ran(A) = 3 \begin{cases} A_{44} <> 0 \rightarrow Cono \begin{cases} A'_{33} > 0, a11.A_{44} > 0 \rightarrow imag. \\ En\ otro\ caso \rightarrow real \end{cases} \\ A_{44} = 0 \rightarrow Cilindro \end{cases} \\ ran(A) = 2 \begin{cases} A'_{33} < 0 \rightarrow Dos\ planos\ reales\ distintos \\ A'_{33} > 0 \rightarrow Dos\ planos\ imag.\ conjugados \end{cases} \\ ran(A) = 1 \rightarrow \quad Un\ plano\ real\ doble \end{cases}$$

Ejemplos:

1.- Clasifica la cuádrica

C: $x^2 + y^2 + 2xz + 2yz - 1 = 0$

Sol.:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, /A/ = 2, A_{44} = -2, A'_{33} =1

Es hiperboloide de una hoja

2.- Clasifica la cuádrica

C: $x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 4y - 8z + 4 = 0$

Sol.:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, /A/ = 0, ran(A) = 2

Dos planos imaginarios (conjugados)

Podemos expresarla así:

C: $x^2 + (y-2z+2)^2 = 0$, y resolviendo en la variable x

x = $\pm\sqrt{-(y-2z+2)^2}$ = +-(y-2z+2).i

Los dos planos son: $\begin{cases} x - (y - 2z + 2).\, i = 0 \\ x + (y - 2z + 2).\, i = 0 \end{cases}$

$$$$oOo$$$$

Tema 8

Curvas alabeadas

Superficies

Superficies regladas y desarrollables

Superficies de rotación

Superficies de traslación

8.1.- Curvas alabeadas en E_3

8.1.1.- Definiciones y generalidades

Defi.:
Curva alabeada es el lugar geométrico de los puntos determinados por el sistema

(1) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, cuando t recorre un intervalo (t1; t2) de R, que puede coincidir con R.

Decimos que (1) son sus ecuaciones paramétricas.

Si del sistema (1) eliminamos el parámetro t obtenemos dos relaciones

$$f(x,y,z) = 0,$$
$$g(x,y,z) = 0$$

que nos da la curva como la intersección de dos superficies. Decimos que son sus ecuaciones cartesianas.

Si la curva está contenida (todos sus puntos) en un plano decimos que es una curva plana.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 + 3t \\ z = t^2 + t \end{cases}$$

Eliminamos el parámetro t. Inmediatamente obtengo

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 3x \\ z = x^2 + x \end{cases},$$

que determina la curva mediante la intersección de dos superficies.

En general la curva puede ser el resultado de la intersección de diferentes pares de superficies.

Por eso, aunque aparentemente parece que no es plana, para confirmarlo vamos a aplicar un procedimiento que puede ser general.

Veamos si es o no plana:

Debe existir un plano Ax + By + Cz + D = 0 que contenga todos sus puntos.

Sería $A.t + B.(2t^2 + 3t) + C.(t^2 + t) + D = 0$

Operando: $(2B + C).t^2 + (A + 3B + C).t + D = 0$

Puesto que ha de cumplirse para infinitos puntos los coeficientes han de ser cero

$$\begin{cases} 2B + C = 0 \\ A + 3B + C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$ -> C = -2B -> A +B = 0 -- > B = -A, y por tanto C = 2.A

Obtengo el plano: A.x –A.y +2A.z = 0, es decir

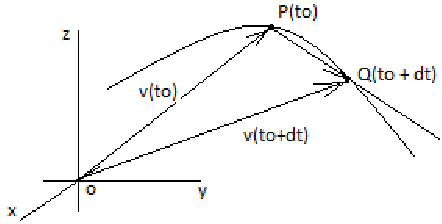
x – y + 2z = 0 -- > Sí es plana.

Esto nos permite expresar la curva como la intersección del plano y una de aquellas superficies:

C: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ z = x^2 + x \end{cases}$ ó bien C : $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y = 2x^2 + 3x \end{cases}$

8.1.2.- Recta tangente a una curva alabeada en un puntos

Sea C: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, t recorriendo (t1; t2)



PQ = OQ – OP , $\frac{PQ}{dt} = \frac{v(to+dt)-v(to)}{dt}$

Las components del vector PQ son

$$\begin{cases} \mathrm{x(to + dt) - x(to)} \\ \mathrm{y(to + dt - y(to)} \\ \mathrm{z(to + dt) - z(to)} \end{cases}, \quad \text{dt = incre. de t}$$

Al realizar $\lim_{dt\to 0} \frac{PQ}{dt}$, separando las componentes de PQ, y teniendo en cuenta que límite de una suma es suma de los límites, nos queda

$$t^{->} = \lim_{dt\to 0} \frac{PQ}{dt} =$$
$$= \left(\lim_{dt\to 0} \frac{x(to+dt)-x(to)}{dt}, \quad \lim_{dt\to 0} \frac{y(to+dt)-y(to)}{dt}, \right.$$
$$\left. \lim_{dt\to 0} \frac{z(to+dt)-z(to)}{dt} \right)$$

de modo que $t^{->}$ = a.e1 + b.e2 + c.e3 donde: $\begin{cases} a = x'(to) \\ b = y'(to) \\ c = z'(to) \end{cases}$

que es el vector director de la recta tangente.

Importante:

Tiene interés la expresión t-> = $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$

En cartesianas t-> = (dx , dy , dz)

Ejemplos:

1.- En paramétricas

$$C: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2+2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

Determina la recta tangente en P(1, 2, 0)

Sol.: El punto P corresponde a to = 0

x'(0) = 1, y'(0) = 0, z'(0) = 0,

y por tanto el vector directos es t-> = (1,0,0)

y la recta es r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{0}$ -> $\begin{cases} y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$

2.- Curva en cartesianas (intersección de dos superficies)

$$C: \begin{cases} x^3 - 3x - 3y - z + 8 = 0 \\ x^2 - xy + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Deternima la recta tangente en P(1, 2, 0)

Sol.: Calculo las diferenciales

$3x^2.dx - 3.dx - 3.dy - dz = 0$
$2x.dx - (y.dx + x.dy) + dz = 0$

que en P(1,2,0) nos da $\begin{cases} -3.dy - dz = 0 \\ -dy + dz = 0 \end{cases}$, de donde

dy = 0, dz = dy = 0, dx libre

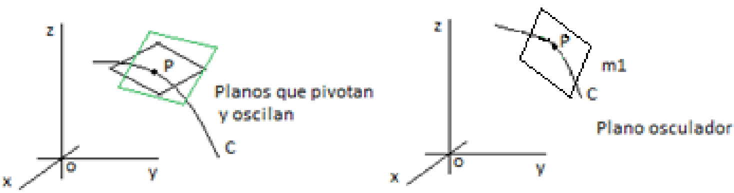
El vector director es $\vec{t} = (dx, 0, 0)$, y la recta

r: $\frac{x-1}{dx} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{0}$ -> $\begin{cases} y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, donde hemos

hecho dx = 1

8.1.3.- Plano osculador en P

Como se muestra en la figura, los planos cuasi-tangentes a la curva en el punto p pivotan u oscilan, mostrándose como un elemento inseguro.



Pero entre estos planos existe uno en especial que determinaremos y llamamos ‘Plano osculador’.

Un plano queda determinado por tres puntos. El punto P fijado más otros dos puntos Q1, Q2 de C determinan un plano m. Cuando los puntos Q1, Q2 se aproximan a P seguimos determinado un plano m, y en el límite obtenemos también un plano. Podemos dar la siguiente definición.

Defi.:
Llamamos Plano osculador al plano que resulta al realizar el siguiente límite

$$m = \lim_{Q1,Q2\to P}(Plano\ determinado\ por\ P, Q1, Q2)$$

Por su complejidad me limito a exponer el resultado de un laborioso proceso (Puede verse en Álgebra y G. Analítica de Francisco Granero).

Resulta, en el punto P(x0, y0, z0)

Curva en paramétricas: C: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2+2 \\ z = t^3 \end{cases}$

$$m = \begin{vmatrix} x - x(to) & y - y(to) & z - z(to) \\ x'(to) & y'(to) & z'(to) \\ x''(to) & y''(to) & z''(to) \end{vmatrix} = 0$$

Curva en cartesianas: C: $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$

$$m = \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 & z - z0 \\ dx(p) & dy(p) & dz(p) \\ d^2x(p) & d^2y(p) & d^2z(p) \end{vmatrix} = 0$$

donde, como debe recordar el alumno, d^2 indica ‘diferencial segunda.

Casuística:

-Si en el punto P la curvatura es cero, lo cual significa que en un entorno D(p, r) la curva coincide con un segmento-recto, entonces los tres puntos quedan alineados y por tanto no determinan un plano. No existe plano osculador en P.

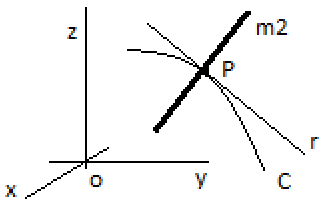
-Si la curva es plana, entonces el plano osculador coincide con este plano.

8.1.4.- Plano Normal a la curva y recta Normal principal en un punto P

Recordamos que en E_2, dada una curva C, en un punto P tenemos la recta tangente r y la recta normal s, siendo ésta perpendicular a r.
Ahora estamos en E_3, donde tengo una curva C que en general no será plana sino alabeada.

Comenzamos con el plano normal.

Defi.:
Fijada la recta r tangente en P, teniendo en cuenta que estamos en el espacio, las rectas perpendiculares a r en P llenan un plano, que llamamos 'Plano normal' a la curva en P.



En un entorno de P, D(p, r), la curva puede considerarse 'plana' contenida en el plano osculador m1. Esto nos lleva a que la recta s intersección de los planos m1 y m2 juega el mismo papel que la recta normal en el caso de una curva en E_2. Esto nos permite dar la siguiente

Defi.:
Llamamos 'Normal principal', en el punto P, a la recta

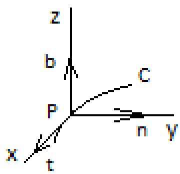
s = m1 ∩ m2, (∩ indica intersección)

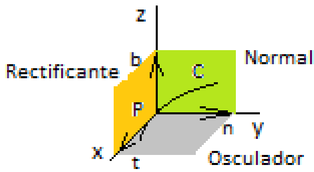
intersección de los planos m1 osculador y m2 normal, en P.

8.1.5.- Recta binormal. Triedro intrínseco a una curva alabeada en P

Supongamos que tenemos la recta r1 tangente y la normal principal r2, en un punto P de C. La recta r3, que pasa por P, perpendicular al plano determinado por r1 y r2 la llamamos 'recta binormal'. A su vector directo unitario lo designamos por b-> y lo llamamos 'binormal'.

Los tres vectores (unitarios) t->, n-> , b->, determinan en P un triedro que llamamos 'triedro intrínseco' a la curva en P.





Ejemplo: Sea la curva C: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2 \\ z = t^3 \end{cases}$

Se pueden comprobar los siguientes resultados

Recta Normal principal r2: $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Recta Binormal r3: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Plano Normal m2: x -1 = 0

Plano rectificante m3: y -2 = 0

8.2.- Superficies en el espacio

8.2.1.- Definiciones

Estamos en el Espacio tridimensional, Sistema de referencia S(O; ox, oy, oz), Base de vectores libres B = {e1, e2, e3} ortonormal.

Defi. 1:
Llamamos 'Superficie' al lugar geométrico de los puntos P(x, y, z) que satisfacen una relación (o igualdad) de la forma

$$z = f(x, y) \text{ , } (x, y) \text{ recorriendo D en } R^2$$

También puede venir definida por f(x, y, z) = 0

A estas expresiones las llamamos 'cartesianas', en contraste con las siguientes.

Defi. 2:
Llamamos superficie al lugar geométrico de las ternas (x, y, z) definidas por

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases} \text{, donde (t, u) recorre D en } R^2 \text{ de forma}$$

continua.

A estas las llamamos 'Ecuaciones paramétricas' de la superficie.

NOTA:
Estamos suponiendo que se dan las condiciones suficientes de continuidad en todos los casos.

Si de la anterior eliminamos los dos parámetros t, u, obtenemos una relación

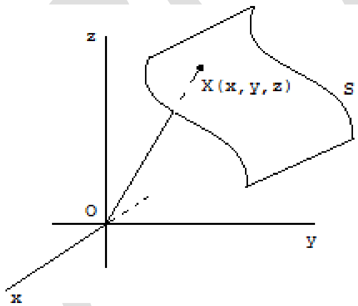
$f(x, y, z) = 0$, que determina la misma superficie.

Ecuación paramétrico-vectorial:

Si $X(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la superficie S definida por las paramétricas, el vector de posición de este punto viene expresado así

$$OX = x(t,u).e1 + y(t,u).e2 + z(t,u).e3$$

a la que llamaremos 'Ecuación paramétrico-vectorial'



8.2.2.- Plano tangente en un punto P

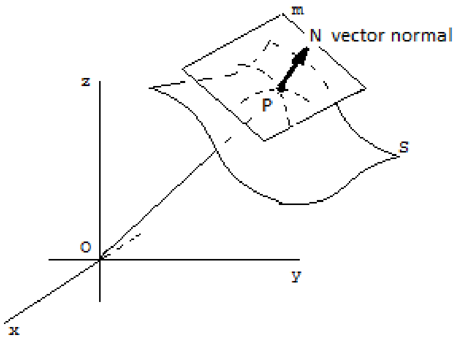
Sea una superficie S: $\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases}$,

t, u recorren un dominio D en R.

Sea un punto P(x0, y0, z0), correspondiente a los valores t0, u0.

Defi.:
Llamamos plano tangente a S, en el punto P, al plano formado por las infinitas rectas tangentes a las infinitas curvas sobre la superficie que pasan por P.

Este punto existirá si f(x, y) está definida y es continua y derivable en un entorno D(p; r) de P. Suponemos que se cumplen las condiciones necesarias para la existencia del citado plano.



Puesto que un plano queda determinado por dos rectas que se corta, basta considerar dos de las curvas sobre S que pasen por P.

Tomamos las siguientes

$$\text{C1:}\begin{cases} x = x(t, u0) \\ y = y(t, u0) \\ z = z(t, u0) \end{cases}, \qquad \text{C2:}\begin{cases} x = x(t0, u) \\ y = y(t0, u) \\ z = z(t0, u) \end{cases}$$

A cada curva Ci le fijamos el vector tangente

$$v1 = (\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)_P, \quad v2 = (\left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}\right)_P$$

Si Q(x, y, z) es el punto genérico del plano, el vector PQ = (x-x0, y-y0, z-z0) está sobre el plano y por tanto el producto mixto de vectores será cero:

$$OP^*(v1 \wedge v2) = \begin{vmatrix} x-x0 & y-y0 & z-z0 \\ \frac{dx}{dt}(p) & \frac{dy}{dt}(p) & \frac{dz}{dt}(p) \\ \frac{dx}{du}(p) & \frac{dy}{du}(p) & \frac{dz}{du}(p) \end{vmatrix} = 0$$

(Ecuación del plano tangente a S en P)

(* es el producto escalar, ^ es el producto vectorial)

Si la superficie S viene dada en cartesianas

z = f(x, y), parametrizando $\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = f(t,u) \end{cases}$, y entonces

$$\begin{vmatrix} x-x0 & y-y0 & z-z0 \\ 1 & 0 & f'_x(p) \\ 0 & 1 & f'_y(p) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de donde}$$

$(x-x0).(-f'_x(p)) - (y-y0).f'_y(p) + (z-z0).1 = 0$

o bien:

$(z-z0) = f'_x(p).(x-x0) + f'_y(p).(y-y0)$

Sea W el vector normal en P a la superficie (es el vector perpendicular al plano en P). Sus componentes son:

$W = (f'_x(p), f'_y(p), -1)$

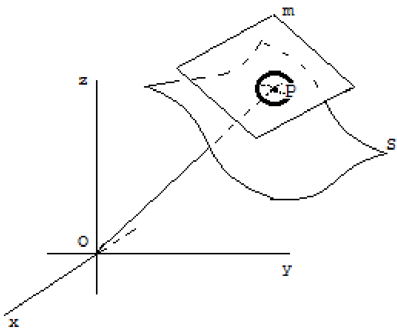
Observa que este vector w es ortogonal con los dos vectores

$$v1 = (1, 0, f'_x(p)),\ \ v2 = (0, 1, f'_y(p))$$

8.2.3.- **Intersección del plano tangente en el punto P con la** propia superficie

Sea la superficie S: z = f(x, y), y P(x0, y0, z0) un punto de S en el cual admite plano tangente

$$(z\text{-}z0) = f'_x(p).(x\text{-}x0) + f'_y(p).(y\text{-}y0)$$



NOTA:
No debe confundirse este 'análisis' con el concepto de 'intersección' de la superficie con un plano cualquiera. El siguiente análisis se hace en un entorno U(P) del punto P en el que se produce el 'contacto' (tangencia) entre el plano y la superficie.

Mediante traslación del sistema de referencia podemos suponer que el punto P es el origen (0,0,0).

Supongamos que se cumplen las condiciones de derivabilidad suficientes para que admita

'Desarrollo de Taylor' de z = f(x, y) en el punto P(0,0,0):

z = f(0,0)+$\frac{f'_x(p).x+f'_y(p).y}{1!}+\frac{f''_{xx}(p).x^2+2.f''_{xy}(p).xy+f''_{yy}(p).y^2}{2!}+$ …

(Consultar Vol. 8)

Observa que f(0,0) = 0.

Teniendo en cuenta que la ecuación del plano tangente en el punto (0,0,0) tiene por ecuación

z = f ’$_x$(p).x + f ’$_y$(p).y

y por tanto, en dicho punto (0,0,0) se cumple

z = f ’$_x$(p).0 + f ’$_y$(p).0 = 0,   y queda

z = f(x, y) = $\frac{f''_{xx}(p).x^2+2.f''_{xy}(p)\ .xy+f''_{yy}(p).y^2}{2!}$ + ….+

términos de grado superior.

Al cortar con el plano z = ε (valor arbitrariamente pequeño), los términos de grado superior a grado dos son infinitésimos respecto

de los de grado dos, y cuando
$\varepsilon \rightarrow 0\ podemos\ despreciarlos$

quedando
z = f(x, y) = $\frac{f''_{xx}(p).x^2+2.f''_{xy}(p)\ .xy+f''_{yy}(p).y^2}{2!}$
en un entorno suficientemente pequeño del punto P.

La curva intersección del plano z = ε con la superficie viene determinada por el siguiente sistema

$$\begin{cases} z = \varepsilon \\ z = \dfrac{f''_{xx}(p).x^2+2.f''_{xy}(p)\,.xy+f''_{yy}(p).y^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Si eliminamos la variable z nos queda en la segunda

$$2.\varepsilon = f''_{xx}(p).x^2 + 2.f''_{xy}(p)\,.xy + f''_{yy}(p).y^2$$

o bien $f''_{xx}(p).x^2 + 2.f''_{xy}(p)\,.xy + f''_{yy}(p).y^2 - 2.\varepsilon = 0$ (2)

que es la 'proyección' sobre z = 0, de la curva sobre la superficie resultado de la sección con el plano z = ε.

Dicha proyección es una cónica que clasificaremos.

La matriz asociada es A = $\begin{pmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) & 0 \\ f''_{yx}(p) & f''_{yy}(p) & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon \end{pmatrix}$

/A/ = - 2ε. $\begin{vmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) \\ f''_{yx}(p) & f''_{yy}(p) \end{vmatrix}$, A_{33} = $\begin{vmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) \\ f''_{yx}(p) & f''_{yy}(p) \end{vmatrix}$

Observa que $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} A_{33} > 0 \rightarrow |A| < 0 \rightarrow P\ es\ punto\ elíptico \\ A_{33} < 0 \rightarrow |A| > 0 \rightarrow P\ es\ punto\ hiperbólico \\ A_{33} = 0 \rightarrow P\ lo\ llamamos\ punto\ parabólico \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que A_{33} es un invariante (en las cónicas), no es necesario realizar el cambio de sistema de referencia al que nos referimos al iniciar este estudio 'analítico', podemos aplicar el criterio anterior directamente calculando las derivadas de orden dos en el punto P(x0, y0, z0).

Ejemplo:
Sea la superficie S: $x^2 + y^2 + z - 16 = 0$, o bien

$$z = f(x,y) = -x^2 - y^2 + 16$$

$$f'_x = -2x, \quad f'_y = -2y,$$

$$f''_{xx} = -2, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{yy} = -2$$

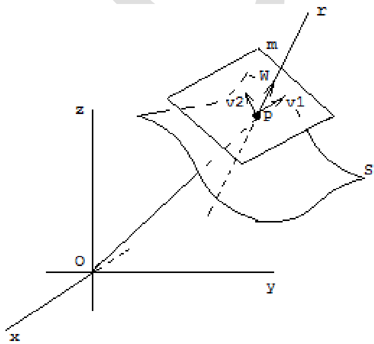
En cualquier punto P de la superficie

$A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow$ Todo punto P es punto

elíptico (circunf., punto umbilical) en cualquier punto P de la superficie.

8.2.4.- Recta normal a la superficie en un puntos P

El vector director de la recta r, normal a S en P, puede ser el vector 'producto vectorial' de los dos vectores que generan el subespacio director del plano tangente en P.



Los referidos vectores son:

$$v1 = \left(\frac{dx}{dt}(p),\ \frac{dy}{dt}(p),\ \frac{dz}{dt}(p)\right)$$

$$v2 = \left(\frac{dx}{du}(p),\ \frac{dy}{du}(p),\ \frac{dz}{du}(p)\right),$$

y su producto vectorial: W = v1 ^ v2 , que calculamos como sigue.

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ \frac{dx}{dt}(p) & \frac{dy}{dt}(p) & \frac{dz}{dt}(p) \\ \frac{dx}{du}(p) & \frac{dy}{du}(p) & \frac{dz}{du}(p) \end{vmatrix},$$

En cartesianas:

z = f(x, y), parametrizando $\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = f(t,u) \end{cases}$, y entonces

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 1 & 0 & f'_x(p) \\ 0 & 1 & f'_y(p) \end{vmatrix} = -f'_x(p).e1 - f'_y(p).e2 + e3$$

es decir: $w = (-f'_x(p), -f'_y(p), 1)$, y también

$$w = (f'_x(p),\ f'_y(p), -1)$$

Observa que este vector w es ortogonal con los dos vectores

$$v1 = (1, 0, f'_x(p)),\ \ v2 = (0, 1, f'_y(p))$$

8.3.- Superficies regladas

8.3.1.- Definiciones

Expresión reducida de una recta en el Espacio:

Sabemos que una recta en el espacio, en cartesianas, viene dada como la intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Elimino 'y' de la primera:

$$\begin{cases} b'.ax + b'.by + b'.cz + b'.d = 0 \\ b.a'x + b.b'y + b.c'z + b.d' = 0 \end{cases}$$

Reemplazo la primera por el resultado de la resta

$$\begin{cases} ax + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Elimino 'x' de la segunda

$$\begin{cases} a'.ax + a'.cz + a'.d = 0 \\ a.a'x + a.b'y + a.c'z + a.d' = 0 \end{cases}$$

Reemplazo la segunda por el resultado de la resta

$$\begin{cases} ax + cz + d = 0 \\ b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{-- >} \begin{cases} x = mz + n \\ y = m'z + n' \end{cases} \tag{1}$$

Defi.: Superficie reglada

Sea una recta r dada como la intersección de dos planos y expresada en la forma reducida

$$\text{r: } \begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$$

Para valore fijos de la cuaterna (m, a, n, b) tenemos una recta. Si damos otra cuaterna tengo otra recta, y así tantas rectas diferentes como deseemos.

Si hago que los valores m, a, n, b dependan de un parámetro t, que toma valores en un intervalo [t0, t1], entonces obtengo una infinidad de rectas que, al variar m(t), a(t), n(t), b(t) de forma continua, generan una superficie (compuesta por rectas).

Tendríamos S: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases}$, t ∈ [t0, t1]

Ejemplo: Si

$$\begin{cases} m(t) = t \\ a(t) = t + 1 \\ n(t) = t \\ b(t) = 2t \end{cases}$$

tenemos $\begin{cases} x = t.z + t + 1 \\ y = t.z + 2t \end{cases}$

Eliminando t obtengo f(x, y, z) = 0, que es la ecuación de la superficie en cartesianas:

De la primera t = (x-1)/(z+1), lo llevo a la segunda
y = (x-1)/(z+1).(z+2) -- > y.(z+1) = (x-1).(z+2) -- >

yz + y = xz +2x –z -2 -- > f(x,y,z) = xz –yz 2x –y –z -2 = 0

Ecuación vectorial:

Teníamos S: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases}$, t ∈ [t0, t1]

Un punto P(x, y, z) cualquiera de la superficie viene localizado por un vector OP = x.e1 + y.e2 + z.e3

OP = $[[m(t).z + a(t)].e1 + [n(t).z + b(t)].e2 + z.e3$

(Ecuación vectorial de la superficie)

Obtenemos las Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ \quad z = z \end{cases} \quad , \ t \in [t0, t1]$$

8.3.2.- Plano tangente en un punto de una superficie reglada

Sea una superficie reglada S: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ \quad z = z \end{cases}$

Aplicando el proceso general tenemos el plano

m: $\begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 & z - z0 \\ \frac{dx}{dt}(p) & \frac{dy}{dt}(p) & \frac{dz}{dt}(p) \\ \frac{dx}{dz}(p) & \frac{dy}{dz}(p) & \frac{dz}{dz}(p) \end{vmatrix} = 0$, y en este caso de la superficie (1)

$$\text{m: } \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 & z - z0 \\ m'.z0 + a' & n'(t).z0 + b' & 0 \\ m(t) & n(t) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Calculo el determinante como sigue:

Hago f1 = f1+(z0-z).f3 y tengo

$$\begin{vmatrix} x - x0 + m.(z0 - z) & y - y0 + n.(z0 - z) & z - z0 + (z0 - z) \\ m'.z0 + a' & n'(t).z0 + b' & 0 \\ m(t) & n(t) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x - x0 + m.(z0 - z) & y - y0 + n.(z0 - z) & 0 \\ m'.z0 + a' & n'(t).z0 + b' & 0 \\ m(t) & n(t) & 1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la tercer columna,

$$= \begin{vmatrix} x - x0 + m.(z0 - z) & y - y0 + n.(z0 - z) \\ m'.z0 + a' & n'(t).z0 + b' \end{vmatrix} =$$

sustituyendo x0 = mz0 +a, y0 = n.z0 +b

$$= \begin{vmatrix} x - mz - a & y - nz - b \\ m'.z0 + a' & n'.z0 + b' \end{vmatrix} =$$

= (n'.z0+b').(x-mz-a) –(m'.z0+a').(y-nz-b)

Igualando a cero

m: (n'.z0 + b').(x -mz-a) –(m'.z0 + a').(y –nz -b) = 0

y despejando obtengo, en el punto (t_0, z_0)

$$y - (b(t0) + n(t0).z) = \frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}.(x - (a(t0) + m(t0).z)) \qquad (*)$$

donde t0 es el valor que nos da los valores x0, y0 en el punto P(x0, y0, z0).

Observa que el coeficiente $\frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$ es un valor real, y que en la expresión (*) no se trata de una recta sino de un plano, observa que interviene la variable z como parámetro.

Interesa hacer notar lo siguiente:

El haz de planos que pasan por la siguiente recta

$$r: \begin{cases} x = m(t0).z + a(t0) \\ y = n(t0).z + b(t0) \end{cases} \qquad \text{toma la forma}$$

haz: (y - (b(t0) +n(t0).z) + u.(x - (a(t0)+m(t0).z)) = 0

donde el parámetro u recorre R. Evidentemente, el plano (*) pertenece a este haz de planos, basta hacer

$$u = \frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$$

Esto nos lleva a afirmar que:

"El plano tangente a la superficie reglada, en el punto P, contiene a la recta generatriz que pasa por P".

Ejemplo:

Sea la superficie reglada S: $\begin{cases} x = tz + t + 1 \\ y = 2tz + 3t - 1 \\ z = z \end{cases}$ -- >

2xz –yz + 3x –y -4 = 0

Se pide: Obtener el plano tangente correspondiente al valor t = 1, en los puntos donde z = 0, z = 1

Sol.: Observa que derivando: $\begin{cases} m = t \\ n = 2t \\ a = t + 1 \\ b = 3t - 1 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} m' = 1 \\ n' = 2 \\ a' = 1 \\ b' = 3 \end{cases}$,

y cuando t = 1 queda

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ a = 2 \\ b = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} m' = 1 \\ n' = 2 \\ a' = 1 \\ b' = 3 \end{cases};$$

y en z0 = 0: Coeficiente $\frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$ = 3, en z0 = 1: Coeficiente $\frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$ = 5/2, y los planos pedidos son:

m1: (y - (2+2z)) = 3.(x - (2+1z)) -- >

y-2-2z = 3.(x-2-z) -- > m1: **3x-y-z-4 = 0**

m2: (y - (2+2z)) = 5/2.(x - (2+z)) -- >

2(y-2-2z) = 5.(x-2-z) -- > m2: **5x-2y+z -6 = 0**

8.3.3.- Superficie desarrollable y superficie alabeada

Sea una superficie reglada S: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ \quad z = z \end{cases}$

Vimos que la ecuación del plano tangente en el punto P(x(t0), y(t0), z0) es

m: y - (b(t0) + n(t0).z) =

$$= \frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}.(x - (a(t0) + m(t0).z)) \quad (*)$$

en la cual se observa que, fijado un valor t = t0, que determina una generatriz (de la superficie reglada), el plano tangente en cualquier punto de esta generatriz sólo depende del valor z0 que determina el valor del coeficiente

$$\frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$$

Defi.:

De la superficie reglada S decimos que es además ‘desarrollable’ si dada una recta generatriz g cualquiera, en todo punto P de g el plano tangente a S es el mismo.

La definición exige que el coeficiente $\frac{n'(t0).z0+b'(t0)}{m'(t0).z0+a'(t0)}$ sea constante a lo largo de g. Veamos la condición para que así ocurra.

Tomo una generatriz g y dos puntos en ella, sean
P1(x(t0), y(t0), z1), P2(x(t0), y(t0), z2) (Recuerda que el valor t0 determina la generatriz g).

Para que los planos tangentes en P1 y P2 coincidan ha de cumplirse

$$\frac{n'.z1+b'}{m'.z1+a'} = \frac{n'.z2+b'}{m'.z2+a'} \text{ -- >}$$

(n'.z1 + b').(m'.z2 + a') = (m'.z1 + a').(n'z2 + b')

Operando nos lleva a que

n'.a'.(z1-z2) = m'.b'.(z1-z2) -- >

n'.a' = m'.b' , ya que (z1-z2) $\neq$ 0 por ser punto distintos.

$$n'.a' = m'.b' \text{ -- > } \frac{a'}{b'} = \frac{m'}{n'}$$

Conclusión:
Condición para que una superficie reglada

$$S: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = z \end{cases}$$

sea desarrollable es que se cumpla

$$\frac{a'(t0)}{b'(t0)} = \frac{m'(t0)}{n'(t0)} \quad \text{para cualquier valor t0 de t}$$

y por tanto $\frac{a'(t)}{b'(t)} = \frac{m'(t)}{n'(t)}$ 'idénticamente'.

Si no es desarrollable decimos que es ‘alabeada’.

8.3.4.- Arista de retroceso en una superficie desarrollable

Tenemos una superficie desarrollable dada por

$$S: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ \quad z = z \end{cases} \qquad (*)$$

Defininción:
Se llama ‘Arista de retroceso’ a cierta curva C sobre S tal que cada generatriz (es decir, cada recta que componen la superficie) es tangente a dicha curva.
Vamos a determinar la citada curva.

En las ecuaciones paramétricas (*) intervienen dos parámetros: t y z. Si fijamos una relación entre ellos de modo que en (*) actúe un solo parámetro obtenemos una curva sobre la superficie. Por ejemplo si z = k(t) obtenemos una curva

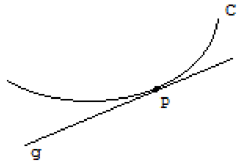
$$C: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ \quad z = k(t) \end{cases}$$, que determina una curva sobre la superficie S (**)

Cada relación z = k(t) determina una curva distinta sobre S.

Vamos a determinar qué relación z = k(t) nos da una curva tal que toda generatriz sea tangente a ella.

Sea una generatriz g: $\begin{cases} x = m(t)z + a(t) \\ y = n(t)z + b(t) \end{cases}$’

y supongamos que P es un punto cualquiera de C, sea P(x, y, z), donde x, y, z satisfacen (**).



Un vector director de la recta tangente a C en P toma la forma

v = (x'(t), y'(t), z'(t)), donde

$$\begin{cases} x'(t) = m'.k + m.k' + a' \\ y'(t) = n'.k + n.k' + b' \\ z'(t) = k' \end{cases}$$

Por otro lado, de la expresión de la generatriz g puedo obtener

$$\begin{cases} z = \frac{x-a(t)}{m(t)} \\ z = \frac{y-b(t)}{n(t)} \end{cases}$$, y por tanto g: $\frac{x-a(t)}{m(t)} = \frac{y-n(t)}{n(t)} = \frac{z}{1}$

y por tanto un vector director de g es w = (m(t), n(t), 1).

Por tanto, para que la recta tangente y la generatriz coincidan se debe cumplir

$$\frac{m'.k+m.k'+a'}{m} = \frac{n'.k+n.k'+b'}{n} = \frac{k'}{1}$$, de donde

$$\begin{cases} m'.k + m.k' + a' = m.k' \\ n'.k + n.k' + b' = n.k' \end{cases} \text{--} > \begin{cases} m'(t).k(t) + a'(t) = 0 \\ n'(t).k(t) + b'(t) = 0 \end{cases},$$

donde la incógnita es k(t).

Son dos ecuaciones con una incógnita por lo que el rango de la matriz de coeficientes debe ser uno, y para ser compatible también el rango de la ampliada ha de ser uno. En efecto, esto se cumple, ya que por ser superficie desarrollable sabemos que

$$\begin{vmatrix} m'(t) & a'(t) \\ n'(t) & b'(t) \end{vmatrix} = 0 \text{ , para todo valor de t.}$$

Resolviendo tenemos $k(t) = \frac{-a\prime(t)}{m\prime(t)} = \frac{-b\prime(t)}{n\prime(t)}$, que es la relación entre z y t, es decir z = k(t), necesaria para que la curva C sea la arista de retroceso. Por tanto, la ecuación de la citada arista es:

$$C: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = \frac{-a\prime(t)}{m\prime(t)} \end{cases}$$

Ejemplo:

Tengo una recta 'variable' s(t,z): $\begin{cases} x = t.z + k(t) \\ y = k(t).z + \frac{t^3}{3} \end{cases}$

Se pide:

A) Obtener la expresión k(t) de modo que la recta s engendre una superficie desarrollable

Sol.: La forma general de s es $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases}$,

donde t y z son parámetros. En nuestro caso

$$\begin{cases} m = t \\ a = k(t) \\ n = k(t) \\ b = \frac{t^3}{3} \end{cases} \text{-->} \begin{cases} m'(t) = 1 \\ a'(t) = k'(t) \\ n'(t) = k'(t) \\ b'(t) = t^2 \end{cases}$$

Para que resulte desarrollable se ha de cumplir:

n’(t).a’(t) = m’(t).b’(t) -> $k'(t)^2 = t^2$ -- >

-> k’(t) = +-t -- >

$$\to \begin{cases} k(t) = \frac{t^2}{2} + const \\ \text{ó} \\ k(t) = -\frac{t^2}{2} + const \end{cases}$$

Resultan por tanto las superficies desarrollables

$$S1: \begin{cases} x = t.z + \frac{t^2}{2} + c \\ y = (\frac{t^2}{2} + c).z + \frac{t^3}{3} \\ z = z \end{cases}, \quad S2: \begin{cases} x = t.z - \frac{t^2}{2} + c \\ y = (-\frac{t^2}{2} + c).z + \frac{t^3}{3} \\ z = z \end{cases}$$

(con la condición añadida $\frac{\boldsymbol{a\prime(t)}}{\boldsymbol{b\prime(t)}} = \frac{\boldsymbol{m\prime(t)}}{\boldsymbol{n\prime(t)}}$ **)**

B) De las posibles superficies según el resultado anterior, determina aquella para la cual k(t) = 0 cuando t = 0, y eligiendo aquella donde k(t) va afectada del signo menos.

Sol.:
k(t) = 0 cuando t = 0 nos lleva a que 0 + c = 0, y por tanto c = 0

y nos quedamos con S2: $\begin{cases} x = t.z - \frac{t^2}{2} \\ y = -\frac{t^2}{2}.z + \frac{t^3}{3} \\ z = z \end{cases}$

C) Obtener las ecuaciones paramétricas de la arista de retroceso de la superficie elegida.

Sol.: En general la arista de retroceso toma la forma

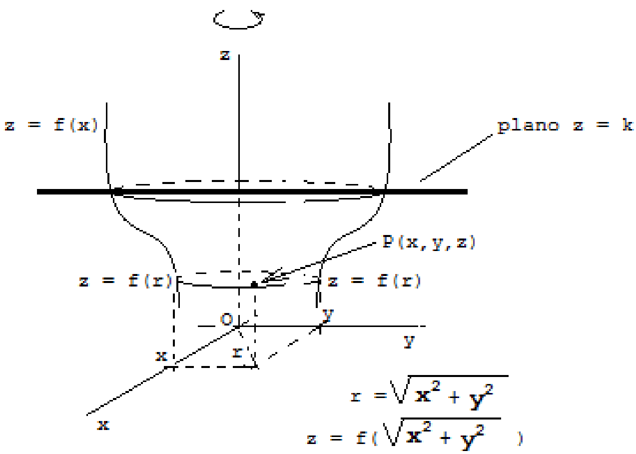
$$C: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = \dfrac{-a\prime(t)}{m\prime(t)} \end{cases}$$

En nuestro caso: a(t) = $-t^2/2$, m(t) = t, y por tanto:
a'(t) = -t, m'(t) = 1 -- > -a'/m' = t

Me queda C: $\begin{cases} x = t.z - \dfrac{t^2}{2} \\ y = -\dfrac{t^2}{2}.z + \dfrac{t^3}{3} \\ z = t \end{cases}$ -- >C: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = -\dfrac{t^3}{6} \\ z = t \end{cases}$

8.4.- Superficies de revolución

Defi.:
Si tengo una curva C y la hago girar alrededor de una recta fija (llamada eje), C engendra una superficie que llamamos de 'revolución'. La curva C es la 'generatriz'.



En la figura tengo una curva (plana) en el plano xoz y el eje oz:

$$\begin{cases} z = f(x) \\ y = 0 \end{cases},$$

Primer procedimiento: Razonamiento directo

Sea P(x, y, z) un punto cualquiera de la superficie S. Al girar con eje Oz, el radio de la curva descrita por P sobre un plano z = k es r = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Observa que r = x obtenido cuando y = 0, y por tanto

z = f($\sqrt{x^2 + y^2}$) , (x, y) en el plano z = 0 ,

es la ecuación cartesiana de la superficie de revolución.

Ejemplos:

1.- Sea la curva C: $\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, eje: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

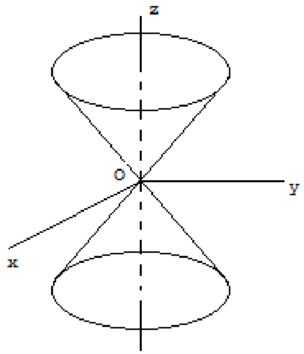
(Es decir, eje oz)

Sol.: El eje es Oz. La generatriz está en el plano yoz. Al girar, el radio de la curva descrita en el plano z = k es

r = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Cuando x = 0 tengo: r = y, y como z = 2y, tengo z = 2r. Entonces, para un punto P(x, y, z) cualquiera de la superficie

z = 2. $\sqrt{x^2 + y^2}$, que es un cono simple.



El cono doble (o completo) lo tengo con la expresión

$$z = \pm 2.\sqrt{x^2 + y^2}$$

Suprimiendo radical: $z^2 = 4.(x^2 + y^2)$

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$$

2.- Sea la curva generatriz C: $\begin{cases} y = z^2 \\ x = 0 \end{cases}$, y el eje: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (Eje oy)

Sol.: El eje es oy. La generatriz está en el plano yoz.

Al girar, el radio de la curva descrita por P(x, y, z) en el plano $y = k$ es

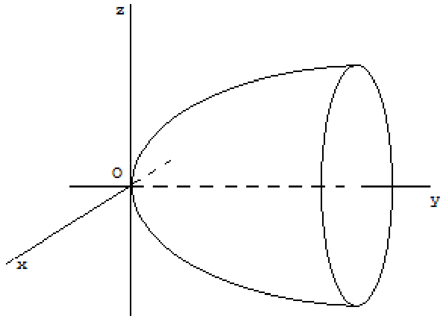
$$r = \sqrt{x^2 + z^2},$$

Cuando $x = 0$, $r = z$, y por tanto $z^2 = (x^2 + y^2)$, de donde

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

que es la ecuación de la superficie:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$



Caso general: Método general

Sea una curva cualquiera C: $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$
como generatriz, y una recta r como eje.

Esta superficie puede ser generada como sigue:

-Tomamos un punto P(x0, y0, z0) fijo del r

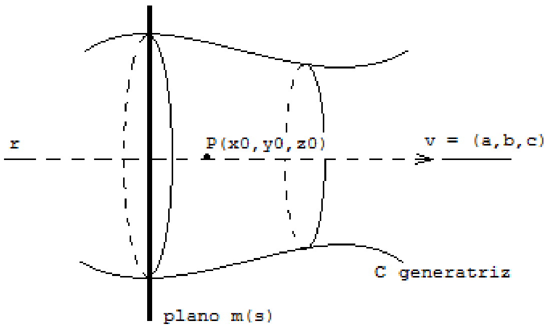
-Consideramos las esferas con radio R(t) variable y centro en P

-Considero los planos m(s) perpendiculares al eje r y moviéndose dependiendo del parámetro s

Observa que si la recta eje de giro es de la forma

r: $\frac{x-x0}{a} = \frac{y-y0}{b} = \frac{z-z0}{c}$, la ecuación de esos planos es

de la forma m(s): ax + by + cz + d(s) = 0



-Consideramos las circunferencias resultantes de la intersección de cada uno de estos planos con cada una de las esferas, e imponiendo a los parámetros t y s la condición para que esta circunferencia sea tangente a la generatriz C.

Con todo lo anterior tenemos el sistema de restricciones

$$\begin{cases} (x-x0)^2+(y-y0)^2+(z-z0)^2=R(t)^2 \quad esfera \\ \quad ax+by+cz+d(s)=0 \qquad\qquad plano \\ f(x,y,z)=0 \qquad\qquad define n\ la \\ g(x,y,z)=0 \qquad\qquad\qquad generatriz \end{cases}$$

De este sistema eliminamos x, y, z para llegar a una relación entre los parámetros, sea esta relación

$$F(R(t)^2, d(s)) = 0$$

Obtenida ésta relación tengo la expresión

$$F((x-x0)^2+(y-y0)^2+(z-z0)^2, \ -(ax+by+cz))=0$$

que es la ecuación cartesiana de la superficie.

Ejemplos:

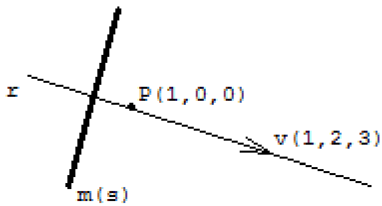
1.- Sea la curva generatriz C: $\begin{cases} y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$, y el eje la recta

r: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Sol.: Tomo un punto del eje lo más simple posible P(1,0,0), y un vector director: v = (1, 2, 3) también del eje. Este vector determina un plano m perpendicular al eje r:

m: x + 2y + 3z + d(s) = 0

Tenemos así el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = R(t)^2 \\ x + 2y + 3z + d(s) = 0 \\ y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$



De la segunda resto la cuarta, queda

x - 1 = - d(s)

De la primera resto la tercera, queda

$(x - 1)^2 + 2 = R(t)^2$

Tengo el sistema $\begin{cases} x - 1 = -d(s) \\ (x-1)^2 + 2 = R(t)^2 \end{cases}$, de donde

$d(s)^2 + 2 = R(t)^2$

y por tanto $(x + 2y + 3z)^2 + 2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$

que podremos desarrollar y resumir, quedando:

f(x, y, z) = $3y^2 + 8z^2 + 4xy + 6xz + 12yz + 2x + 1 = 0$

2.- Tengo la curva generatriz

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}, \text{ y el eje } x = y = \frac{1-z}{2}$$

Sol.: Tomo P(0,0,1), y vector director del eje

v = (1, 1, -2) (Observa: r: x/1 = y/1 = (z-1)/-2)

$$\text{Tenemos el sistema } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = R(t)^2 \\ x + y - 2z + d(s) = 0 \\ x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}$$

Llevando las tres últimas a las primeras

$$\begin{cases} t^2 + 4t^2 + t^2 = R(t)^2 \\ t + 2t - 2t - 2 = d(s) \end{cases}, \begin{cases} 6t^2 = R(t)^2 \\ t - 2 = -d(s) \end{cases}, \text{-- >}$$

t = 2 - d(s) -- > en la primera: $6.(2 - d(s))^2 = R(t)^2$,

y finalmente la ecuación cartesiana de la superficie

$$6.(2 + x + y - 2z)^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

que desarrollada nos lleva a f(x, y, z) =

$= 5x^2+5y^2+23z^2+12xy-24xz-24yz+24x+24y-46z+23$

Superficie f(x, y, z) = 0

8.5.- Superficie de traslación

Sean dos líneas, rectas o curvadas, L1 directriz y L2 generatriz, definidas en paramétricas

$$\text{L1:}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \qquad \text{L2:}\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases},$$

donde t y u recorren sus respectivos intervalos cerrado en R.

Además suponemos que tienen un punto común P0 para los valores t = t0 y u = u0:

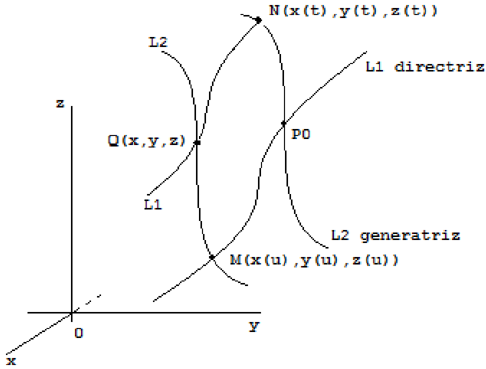
$$\text{p0:}\begin{cases} x(t0) = x(u0) \\ y(t0) = y(u0) \\ z(t0) = z(u0) \end{cases}$$

Deseamos obtener la expresión que nos da la ecuación f(x, y, z) = 0 de la superficie S, o mediante su parametrización.

Resolvemos.
Para un punto cualquiera Q(x, y, z) de S tenemos (vectorialmente)

OQ = OM + MQ = OM + P_0N, ya que MQ = P_0N

OQ = OM + P_0N (Ecuación vectorial de S)



En coordenadas

(x, y, z) = (x(u), y(u), z(u)) +

+ ((x(t)-x(t0), y(t)-y(t0),z(t)-z(t0))

que nos da el siguiente sistema que determina S paramétricamente

$$S: \begin{cases} x = x(u) + x(t) - x(t0) \\ y = y(u) + y(t) - y(t0) \\ z = z(u) + z(t) - z(t0) \end{cases} \qquad (1)$$

Puedo hacer también lo siguiente cambiando los papeles de L1 y L2:

OQ = ON + NQ = ON + P_0M, ya que NQ = P_0M

OQ = ON + P_0M (Ecuación vectorial de S)

(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)) + ((x(u)-x(u0), y(u)-y(u0), z(u)-z(u0)) y obtengo S: $\begin{cases} x = x(t) + x(u) - x(u0) \\ y = y(t) + y(u) - y(u0) \\ z = z(t) + z(u) - z(u0) \end{cases}$ (1)'

Ejemplos:

1.- Tomo directriz L1: $\begin{cases} x^3 - y - 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$,

y generatriz L2: $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t^2 - 5 \\ z = 6 \end{cases}$.

Obtengo la parametrización de S

Sol.- Parametrización de L1: $\begin{cases} x = u \\ y = u^3 - 4 \\ z = u + 4 \end{cases}$

Hallo el punto común: En L1 tengo x = u , y en L2 tengo x = 2t-4 y entonces: u = 2t-4

De L1 obtengo z = (2t-4) + 4 = 2t, y llevándolo a L2 obtengo

2t = 6, de donde t = 3, y por tanto u = 2. Tengo el punto común

Po(2, 4, 6)

Sustituyendo en (1) y resumiendo queda

S: $\begin{cases} x = 2t + u - 6 \\ y = t^2 + u^3 - 13 \\ z = u + 4 \end{cases}$

2.- Tomo directriz L1: $\begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = sen(u) \end{cases}$,

y generatriz el eje oy, es decir L2: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Obtengo la ecuación cartesiana de S

Sol.- Parametrización de L2: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

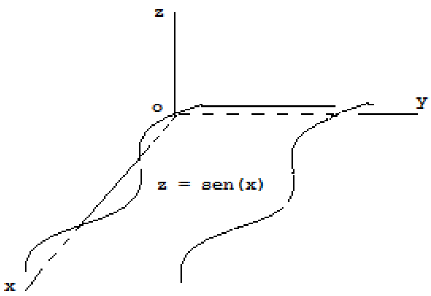
Punto común: En L2 x = 0 -- > en L1 u = 0, z = 0
En L2 z = 0 -- > tomo y = 0 (por ser libre), y obtengo

Punto P0(0, 0, 0)

Parametrización de S: $\begin{cases} x = 0 + u - 0 \\ y = t + 0 - 0 \\ z = 0 + sen(u) - 0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} x = u \\ y = t \\ z = sen(u) \end{cases}$

Obtengo z = sen(x), y libre (será un cilindro)

f(x, y, z) = sen(x) - z



$$$$oOo$$$$

Tema 9

Proceso simple y rápido para realizar un cambio de Sistema de referencia en el Plano y en el Espacio

Orientación en el Plano y en el Espacio

9.1.- En el Plano:

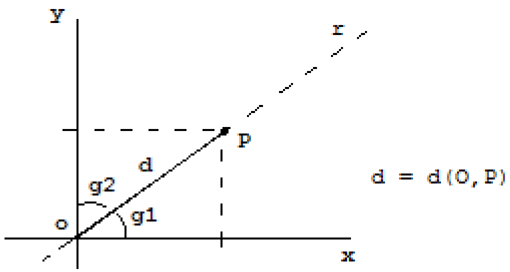
9.1.1.- Cosenos directores de una recta

Si no precisamos otra cosa habremos elegido Sistema de referencia ortonormal S(O; ox, oy), B = {e1, e2} base ortonormal.

Sea P(a, b)un punto. Vector de posición

$$OP = ae1 + be2$$

Sea d = d(O, P) = /OP/ = $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Tengo: $\begin{cases} a = d.\cos(g1) \\ b = d.\cos(g2) \end{cases}$,

Para la recta r determinada por O y P tenemos

r: b.x –a.y + d = 0

d.cos(g2).x – d.cos(g1).y + d = 0 -- >

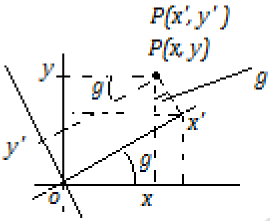
$$\cos(g2).x - \cos(g1).y + 1 = 0$$

Def.: A los valores cos(g1), cos(g2) los llamamos ‘cosenos directores de la recta r

9.1.2.- Cambio de Sistemas de referencia (s.d.r.):

Giro del s.d.r. :

Observando la siguiente figura quedan justificada la relación entre las coordenadas (x, y), (x’, y’) de un punto P del plano.



$$x = x'.\cos(g) - y'.sen(g)$$
$$y = x'.sen(g) + y'.\cos(g)$$

Expresado en forma de matriz (vector fila)

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

o bien

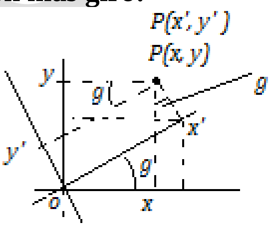
$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

También podemos expresar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

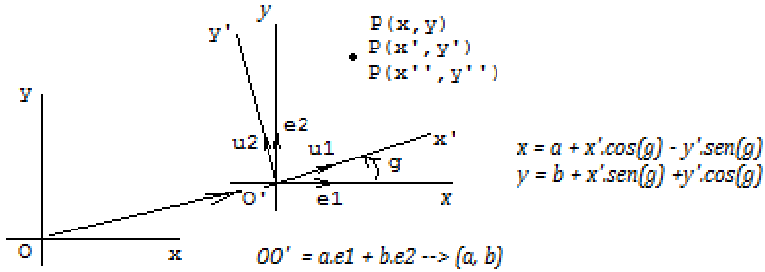
Suponemos que el nuevo sistema de referencia S’(O; ox’, oy’) es también ortonormal.

Traslación más giro:



$$x = x'.\cos(g) - y'.sen(g)$$
$$y = x'.sen(g) + y'.\cos(g)$$

Al giro mostrado en la figura la traslación añade la suma del vector que traslada el origen O al origen O’: OO’ = (a, b)

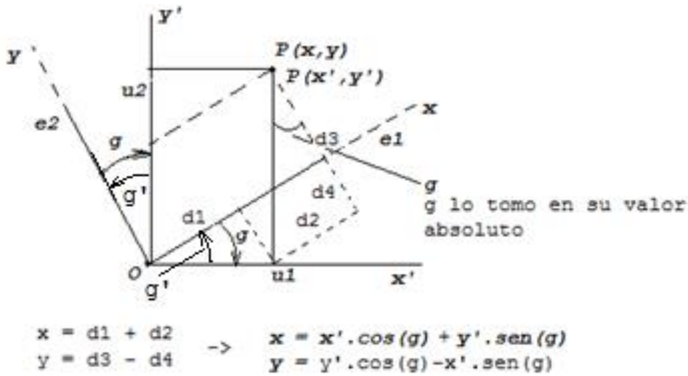


Tengo

$$(x, y) = (a, b) + (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

Giro: Caso de otra posición relativa:

El giro g se hace en el sentido de las agujas del reloj.



$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

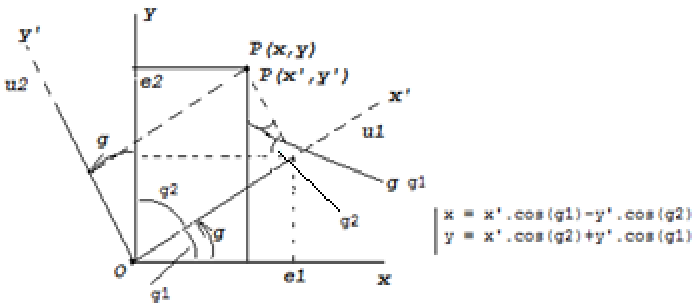
Expresado mediante los cosenos directores:

Me propongo expresarlo en función de los cosenos directores: cos(g1), cos(g2) de la recta ox' conforme se muestra en la siguiente figura.

Teniendo en cuenta que sen(g1) = cos(90-g1) = cos(g2) nos queda

$$\begin{cases} x = x'.\cos(g1) - y'.\cos(g2) \\ y = x'.\cos(g2) + y'.\cos(g1) \end{cases}$$

donde cos(g1), cos(g2) son los cosenos directores de la recta Ox' respecto del sistema de referencia S inicial.



Matricialmente

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g1) & cos(g2) \\ -cos(g2) & \cos(g1) \end{pmatrix}$$

Realización práctica: Datos:

-Sistema de partida S = {O; ox, oy}, ortonormal y con la base canónica de vectores

B = {e1 = (1,0); e2 = (0,1)}

-Sistema destino S' = {O; ox', oy'}, ortonormal, del que conocemos su relación con el sistema S de tres formas posibles:

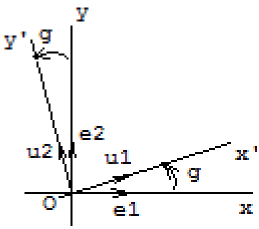
a) La base B' = {u1, u2} asociada con S' es ortonormal y viene dada por

$$\begin{cases} u1 = c11.e1 + c12.e2 \\ u2 = c21.e1 + c22.e2 \end{cases}$$

b)Conocemos la ecuación de la recta ox' respecto del sistema S

c)Conocemos el ángulo g que forma el eje ox' con el eje ox.

Resolución: Caso a:



cos(g) = e1*u1 = c11 -- >

$$\begin{cases} \cos(g1) = c11 \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - c11^2} \end{cases}$$

Caso b: Sea ox': ax + by = 0

Obtengo un vector director: x = b, y = -a

$$v = (b,-a) \text{ -- > } w = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\cos(g) = e1*w = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ -- >}$$

$$\begin{cases} \cos(g1) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Observa: $\cos(g2) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Caso c: En este caso lo tenemos muy sencillo

$$\begin{cases} \cos(g1) = \cos(g) \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1-\cos(g)^2} \end{cases}$$

9.2.- En el Espacio: Cambio de Sistema de referencia

9.2.0.- Introducción

En el caso del Espacio prescindiremos de los cosenos directores de una recta, pues hemos llegado a la conclusión de que el método más eficaz es el de los ángulos de Euler (Tema 4).

Datos:

-Sistema de partida S = {O; ox, oy, oz}, ortonormal y con la base canónica

B = {e1 = (1,0,0); e2 = (0,1,0); e3 = (0,0,1)}

-Sistema destino S' = {O; ox', oy', oz'}, ortonormal, del que conocemos su relación con el sistema S de alguna de las siguientes formas:

a) Conocemos la expresión del plano x'Oy' respecto del sistema S

b) La base B' = {u1, u2, u3} asociada con S', ortonormal, dada por

$$\begin{cases} \mathrm{u1} = \mathrm{c11.e1} + \mathrm{c12.e2} + \mathrm{c13.e3} \\ \mathrm{u2} = \mathrm{c21.e1} + \mathrm{c22.e2} + \mathrm{c23.e3} \\ u3 = c31.e1 + c32.e2 + c33.e3 \end{cases}$$

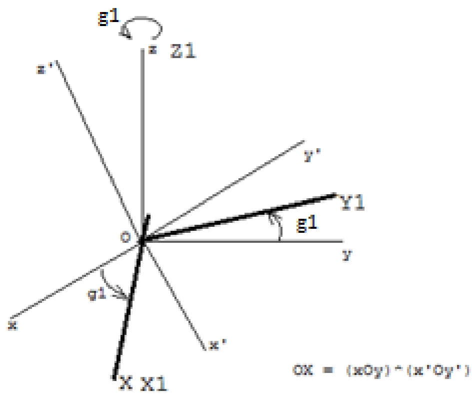
9.2.1.- Cambio de s.d.r. mediante tres giros

Lo realizaremos mediante tres giros cuya composición nos da el giro G deseado.

Recomiendo consultar el punto 4.3 del Tema 4.

Giro G1: Eje OZ, ángulo de giro g1. Obtención de cos(g1).

El eje ox pasa a la recta OX , que será el nuevo eje OX1.



La recta OX es la intersección de los planos XOY, X’OY’

Observa que el plano X1OY1 es ortogonal con OZ1

Calculamos la recta OX intersección de los dos planos xOy, x’Oy’ (xOy es el plano z = 0, por lo que OX está en z = 0).

Sea m: ax + by + cz = 0 el plano x’Oy’, que pasa por el origen.

OX: $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ --> $\begin{cases} ax + by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Obtengo vector director de OX haciendo en la primera x = b, y obtengo

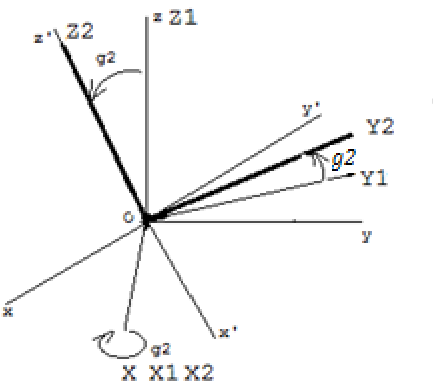
v = (b, -a, 0) -- > w = $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, o\right)$ normalizado.

cos(g1) = e1*w = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ -> sen(g1) = $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Resumen: cos(g1) = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,   g1 = arcCos($\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

Giro G2: Eje OX1 y ángulo g2. Obtención de cos(g2)

El eje OZ1 pasa al eje oz', el eje OY1 pasa al eje OY2. En los dos casos quedan sobre el plano perpendicular a OX1.



En este momento los ejes so: OX2, OY2, OZ2.

El ángulo g2 será elegido de modo que el eje OY2 quede sobre el plano x'oy'. Esto me dice que OY2 ha de ser la intersección de los planos x'oy', X1OY1.

Observa que el plano Y2OZ2 es ortogonal con OX2, coincidente con OX, que a su vez coincide con OX1.

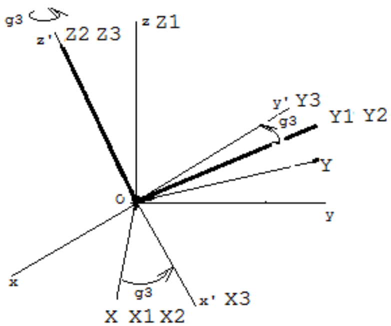
Necesito el vector director de la recta Oz' expresado en la base B. El eje Oz' es ortogonal con el plano x'Oy' : ax + by +cz = 0, y por tanto lo es el vector w que necesito. Sabemos que lo cumple el vector w = (a, b, c).

Tengo /w/ = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, cos(g2) = e3*w = $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

sen(g2) = $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}}$, g2 = arcCos($\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$)

Resumen: cos(g2) = $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, g2 = arcCos($\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$)

Giro G3: Eje OZ2 (oz') y ángulo g3. Obtengo cos(g3).



El eje OX2 pasa a la recta ox' (eje del nuevo s.d.r. y final), y el eje OY2 pasa a oy'. El ángulo g3 debe cumplir esta condición.

El ángulo g3 es el que forman la recta OX con la recta ox', conocidas, la primera es la intersección de los planos xOy, x'Oy' y fue calculada al obtener g1, la segunda es el eje ox' del nuevo sistema de referencia.

Vector director de OX: Obtuvimos

v = (b, -a, 0)-- > w = ($\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, o) normalizado

Vector director de Ox’: Lo obtengo de los datos iniciales

$$u1 = c11.e1 + c12.e2 + c13.e3\ ,$$

que suponemos normalizado.

Entonces, **Resumen:**

$$\mathrm{Cos}(g3) = \frac{c11.b - c22.a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ , \quad g3 = \mathrm{arcCos}\left(\frac{c11.b - c22.a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

El giro G que deseamos realizar es el resultado de la composición de los tres giros anteriores:

Si operamos por columnas: $G = G_3.G_2.G_1$

Conocidos los tres ángulos tomamos las matrices de transformación obtenidas en el punto 4.3:

Obteniendo las nuevas coordenadas (x’, y’, z’) en función de las originales (x, y, z).

Giro g1: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Giro g2: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Realizando g1 y a continuación g2 tengo

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro g3: Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

(Comprobadas)

Como en 4.3, realizamos la composición de los tres giros:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

$=$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Productos: G3*G2*G1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix}.$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \text{Col. 1} \qquad\qquad\qquad \text{Col. 2} \qquad\qquad\qquad \text{Col. 3} \\ \begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)sen(g1)/ & & \\ & \cos(g3)sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ & & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)sen(g1)/ & & \\ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ & & \cos(g3)sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \textit{Primer col.} \qquad\qquad \textit{Segunda col.} \qquad\qquad \textit{Tercer col.} \\ \begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)sen(g1)/ & & \\ & \cos(g3)sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ & & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)sen(g1)/ & & \\ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ & & \cos(g3)sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)

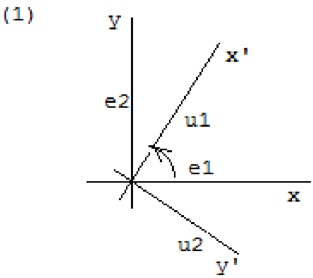
Los ángulos g1, g2, g3, son los llamados “ángulos de Euler”.

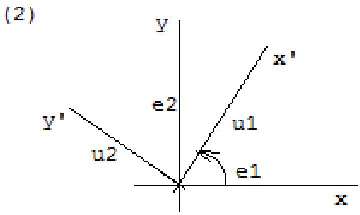
9.3.- Orientación en el Plano y en el Espacio
Ejemplos prácticos

No siempre es posible realizar el cambio de un Sistema de referencia cualquiera S a otro cualquiera S'. ¿Cuándo será posible?

En el Plano:

Observa las figuras





El criterio a seguir es que si giro para que e1 coincida con u1 incluso en su orientación, el eje e2 ha de coincidir con u2 incluso en su orientación. En la figura (2) sí se cumple pero en la (1) no.

Lo mostramos con un caso real:

Sean los sistemas de referencia

S = (O; B = {e1, e2}) ortonormal,

S' = {O; B' ={u1, u2}) ortogonal, donde se

conoce la relación entre las bases B y B':

$$\begin{cases} u1 = e1 + 2e2 \\ u2 = 2e1 - e2 \end{cases}, \text{ Matriz del cambio B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

/B/ = -5, luego sí es una base.

$$/u1/ = \sqrt{5}, \quad /u2/ = \sqrt{5}$$

Redefino la base B' de modo que resulte ortonormal:

u1 = $\frac{\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{2.\sqrt{5}}{5}.e2$, u2 = $\frac{2.\sqrt{5}}{5}.e1 - \frac{\sqrt{5}}{5}.e2$

La matriz ortogonal del cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad /P/ = [-5/25]-[20/25] = -25/25 = -1$$

Si observamos las figuras podemos comprobar que, efectivamente no es posible pasar del sistema S al sistema S' (reflejados en la figura (1)).

En cambio si tomamos la base B'

$$\begin{cases} u1 = \frac{\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{2.\sqrt{5}}{5}.e2 \\ u2 = -\frac{2.\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{\sqrt{5}}{5}.e2 \end{cases}$$

tenemos $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$,

$$/P/ = [5/25]-[-20/25] = 25/25 = +1$$

En el Espacio:

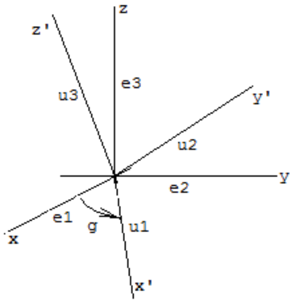
Cuando hablamos de realizar el cambio del Sistema de referencia S = (O; B={e1, e2, e3}) al sistema S' = (O; B'={u1, u2, u3}) hemos de entender que el eje determinado por e1 pasa al eje determinado por u1, e2 pasa a u2, e3 pasa a u3, conservando el sentido de los ejes, mediante tres giros como hemos visto anteriormente.

Observa las figuras adjuntas y comprueba cuándo es posible lo anterior.

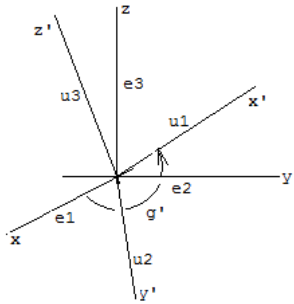
En la figura (1), cuando pasamos el eje e1 al eje u1 mediante el giro g, el eje e2 queda con el mismo sentido (positivo) que u2.

En la figura (2), cuando pasamos el eje e1 al eje u1 mediante el giro g, el eje e2 queda con sentido opuesto al de u2.

(1)



(2)



Veamos analíticamente qué significa esto.

Dado el sistema S con base de referencia

B = {e1= (1,0,0), e2 = (0,1,0), e3 = (0,0,1)}, esta lleva asociado el valor

$$/B/ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Sea ahora S' con base de referencia B' = {u1, u2, u3} ortonormal y la matriz P de cambio de base. Sabemos que P es ortogonal: $P^t = P^{-1}$, y por tanto /P/ = +1.

Si no exigimos la ortonormalidad de B’ sino sólo la ortogonalidad, entonces será /P/ > 0 no necesariamente valor uno.

Diremos que la nueva referencia S’ tiene orientación positiva, la misma que S.

Supongamos ahora S’ cuya base de referencia sea

B’= {u1 = (0,1,0), u2 = (1,0,0), e3 = (0,0,1)} (siempre referida a la base canónica). La matriz del cambio es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /P/ = -1$$

y decimos que el sistema de referencia S’ es de orientación negativa.

Lógicamente, entre ‘sistemas de referencia ortogonales’, no será posible el cambio de s.r. de orientación positiva a otro s.r. de orientación negativa.

Ejemplos prácticos:

1.- En el Plano:

Sean los sistemas de referencia
S = (O; B = {e1, e2}) ortonormal,

S’ = {O; B’ ={u1, u2}) ortogonal, donde se conoce la relación entre las bases B y B’:

$$\begin{cases} u1 = e1 + 2e2 \\ u2 = 2e1 - e2 \end{cases}, \text{ Matriz del cambio } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

/B/ = -5, luego sí es una base.

$/u1/ = \sqrt{5}$, $/u2/ = \sqrt{5}$.

Redefino la base B’ de modo que resulte ortonormal:

$$u1 = \frac{\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{2.\sqrt{5}}{5}.e2\,, \quad u2 = \frac{2.\sqrt{5}}{5}.e1 - \frac{\sqrt{5}}{5}.e2$$

La matriz ortogonal del cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad /P/ = [-5/25]-[20/25] = -25/25 = -1$$

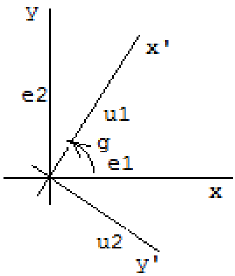
Si observamos las figuras podemos comprobar que, efectivamente no es posible pasar. En cambio si tomamos la base B'

$$\begin{cases} u1 = \frac{\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{2.\sqrt{5}}{5}.e2 \\ u2 = -\frac{2.\sqrt{5}}{5}.e1 + \frac{\sqrt{5}}{5}.e2 \end{cases}$$

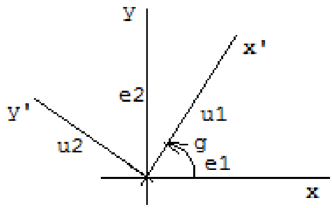
tenemos $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, /P/ = [5/25]-[-20/25] = 25/25 = + 1

y en la figura (2) comprobamos que sí es posible.

(1)



(2)



Nos interesan los siguientes valores:

cos(g) = cos(e1^u1) = $\frac{\sqrt{5}}{5}$ = 0,4472,   g = 1,1072 rad, sen(g) = $\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2.\sqrt{5}}{5}$ = 0,8944,

o bien sen(g) = sen(1,1072) = 0,8945

Tengo entonces la Fórmula de la transformación

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} 0{,}4472 & 0{,}8944 \\ -0{,}8944 & 0{,}4472 \end{pmatrix}$$

o bien (La matriz es ortogonal: $A^t = A^{-1}$)

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} 0{,}4472 & -0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{pmatrix}$$

Aplicación:
Comprobación aplicándolo a un punto concreto

Tomo P(2, 3) respecto de S

$$(x', y') = (2, 3).\begin{pmatrix} 0{,}4472 & -0{,}8944 \\ 0{,}8944 & 0{,}4472 \end{pmatrix} = (3{,}5776;\ -0{,}4472)$$

El mismo caso operando vectorialmente

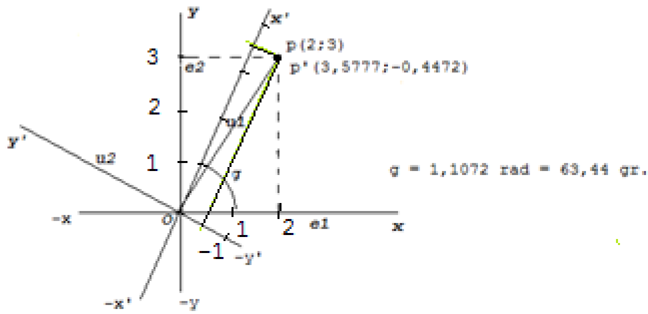
$$\text{Matriz del cambio P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

v = OP = 2.e1 + 3.e2 = (2, 3)

$$OP' = (2, 3).\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = (2.\frac{\sqrt{5}}{5} + 3.\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ -2.\frac{2\sqrt{5}}{5} + 3.\frac{\sqrt{5}}{5}) =$$

= (3,5777, -0,4472) -- > $\begin{cases} x' = 3{,}5777 \\ y' = \ -0{,}4472 \end{cases}$

Gráficamente:



NOTA: No confundamos 'Cambio de sistema de referencia' con la 'Transformación giro' con ángulo g.

En el cambio de S. de referencia el punto permanece fijo, lo que cambia es la determinación de sus coordenadas. En un giro, el S. de referencia permanece fijo y movemos el punto obteniendo sus nuevas coordenadas en la misma referencia.

Con los valores anteriores realizamos el giro con ángulo g y centro en O(0, 0).

Observa la figura

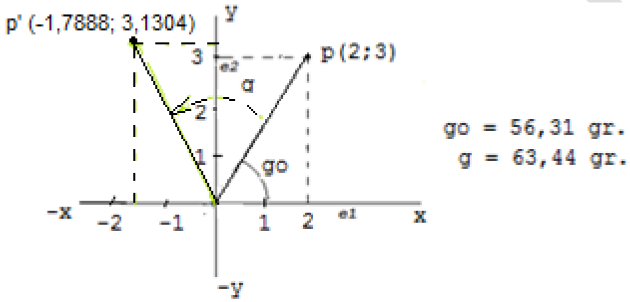
Recordamos que para el giro tenemos:

x' = r(p).cos(go+g) = r.[cos(go).cos(g) - sen(go).sen(g)] =
= x.cos(g) –y.sen(g)

y' = r(p).sen(go+g) = r.[sen(go).cos(g) + cos(go).sen(g)] =

= y.cos(g) + x.sen(g)

(x', y') = (x, y).$\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -\text{sen}(g) & cos(g) \end{pmatrix}$



Utilizando los datos

$\begin{cases} x' = 2.0{,}4472 - 3.0{,}8945 = -1{,}7888 \\ y' = 2.0{,}8944 + 3.0{,}4472 = 3{,}1304 \end{cases}$, Observa la figura

2.- En el Espacio:

Sean los sistemas de referencia

S = (O; B = {e1, e2, e3}) ortonormar,

S' = {O; B' ={v1, v2, v3}) ortogonal, donde se conoce la relación entre las bases B y B', esto es, por ejemplo

$$\begin{cases} v1 = e1 + e2 - e3 \\ v2 = e1 \ + \ e3 \\ v3 = e1 - 2e2 - e3 \end{cases}$$

Veamos que es ortogonal:

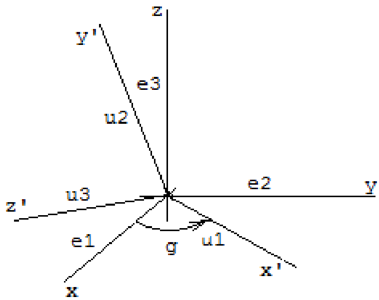
v1*v2 = (1, 1, -1)*(1, 0, 1) = 0,

v1*v3 = (1, 1, -1)*(1, -2, -1) = 0,

v2*v3 = (1, 0, 1)*(1, -2, -1) = 0

Son l.i.: Matriz del cambio B' = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

/B'/ = [3] –[-3] = +6,



Al ser /B'/ > 0 nos confirma que sí es posible este cambio de s.r.

Si normalizamos esta base tenemos

/v1/ = $\sqrt{3}$, /v2/ = $\sqrt{2}$, /v3/ = $\sqrt{6}$, con lo cual

$$\begin{cases} u1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.e1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.e2 - \frac{1}{\sqrt{3}}.e3 \\ u2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.e1 \qquad + \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.e3 \\ u3 = \frac{1}{\sqrt{6}}.e1 - \frac{2}{\sqrt{6}}.e2 - \frac{1}{\sqrt{6}}.e3 \end{cases}$$

Plano x'Oy': Un vector ortogonal a él es

w = V1xV2 = $\begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = e1 -2e2 –e3 =

= (1, -2, -1) , (como cabía esperar)

Ecuación del plano: x -2y –z = 0

Intersección con el plano xOy (z = 0):

$$r: \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{->} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vector director de r: x = 2y, hago y = 1, y obtengo

v = (2, 1, 0)

cos(g1) = e1*v = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ = 0,8944, sen(g1) = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ = 0,4472

g1 = arcCos(0,8944) = 0,4637 rad.

Ángulo g2: Eje Oz: w1 = (0, 0, 1),

Eje Oz’: v3 = (1, -2, -1)

cos(g2) = w1*v3 = abs($\frac{-1}{\sqrt{6}}$) = $\frac{1}{\sqrt{6}}$ = 0,4082, **g2 =** 1,1503 rad.,

sen(g2) = $\sqrt{\frac{5}{6}}$ = 0,9129,

Ángulo g3: Ángulo formado por OX que ya conocemos y Ox’ que se da como dato.

Vector director de OX: w = (2, 1, 0)
Vector director de Ox’: v1 = (1, 1, -1)

cos(g3) = w*v1 = $\frac{3}{\sqrt{5}.\sqrt{3}}$ = $\frac{3}{\sqrt{15}}$ = 0,7746 , g3 = 0,6847 rad.

sen(g3) = $\sqrt{\frac{6}{15}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ = 0,6325

Resumen: cos(g1) = 0,8944 , sen(g1) = 0,4472
cos(g2) = 0,4082 , sen(g2) = 0,9129
cos(g3) = 0,7746 , sen(g3) = 0,6325

Sustituyo estos valores en la siguiente expresión matricial

X ’=

Primer col. *Segunda col.* *Tercer col.*

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1) / \\ \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1) / \\ sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1) / \\ -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) \\ \cos(g3)\,sen(g2) / \\ sen(g2)sen(g1) \quad - sen(g2)\cos(g1) \quad \cos(g2) \end{pmatrix} . X$$

. X

(/ separa elementos dentro de la fila)

después de realizar los cálculos de cada elemento de esta matriz obtengo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5773 & 0,5773 & 0,5774 \\ -0,7071 & -0,0000 & 0,7071 \\ 0,4082 & -0,8165 & 0,4082 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

9.4.- **Interesantes Problemas resueltos sobre Superficies,** Cónicas y Cuádricas:

1.- Sea la forma cuadráticas f: R^3 --- > R

f(x1, x2, x3) = $5.x1^2 + 11.x2^2 + 2.x3^2 + 8.x1x2$

Realizar:

a) Matriz asociada A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Hallar una matriz P ortogonal tal que al aplicar la transformación lineal (cambio de base) $(xi)^t = P.(yi)^t$ sobre

$$(xi).A.(xi)^t$$

se cumpla f(xi) = $(yi).B.(yi)^t$, donde B es diagonal, y calcular B

Sol.: Obtengo los valores característicos de A

$|A-k.I| = \begin{vmatrix} 5-k & 4 & 0 \\ 4 & 11-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = -k^3 + 18k^2 - 71k + 78$

Otra forma: $|A-k.I| = (2-k).\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 11-k \end{vmatrix} =$
$= (2-k).[k^2 - 16k + 39] = 0$

$k^2 - 16k + 39 = 0$ -- > $k = \frac{16 \pm \sqrt{256-156}}{2} = \begin{cases} \frac{16+10}{2} = 13 \\ \frac{16-10}{2} = 3 \end{cases}$

k1 = 2, k2 = 3, k3 = 13

Vectores propios: k1 -> $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -- >

$\begin{cases} 3x1 + 4x2 = 0 \\ 4x1 + 9x2 = 0 \\ 0.x3 = 0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} 3x1 + 4x2 = 0 \\ x1 + 5x2 = 0 \end{cases}$ -- > x1 = -5x2 -- >

-15x2+4x2 = 0 -> x2 = 0, x1 = 0, x3 libre -- > v1 = (0,0,1)

k2: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -- > $\begin{cases} 2x1 + 4x2 = 0 \\ 4x1 + 8x2 = 0 \\ -x3 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} 4x1 + 8x2 = 0 \\ 4x1 + 8x2 = 0 \end{cases}$ -- > x1 = -2x2, x2 libre -- > v2 = (-2,1,0)

k3: $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -- > $\begin{cases} -8x1 + 4x2 = 0 \\ 4x1 - 2x2 = 0 \\ -11x3 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} -8x1 + 4x2 = 0 \\ 8x1 - 4x2 = 0 \end{cases}$ -- > x2 = 2x1, x1 libre -> v3 = (1,2,0)

Estos tres vectores serán ortogonales dos a dos, lo comprobamos:

v1*v2 = 0+0+0 = 0,
v1*v3 = 0+0+0 = 0,
v2*v3 = -2+2+0 = 0

Debemos normalizarlos:

/v1/ = 1 -> w1 = (0,0,1)
/v2/ = $\sqrt{5}$ -> w2 = ($\frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$,0)
/v3/ = $\sqrt{5}$ -> w3 = ($\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$,0)

La matriz P debe ser P = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que es ortogonal.

Matriz B: Ha de cumplirse

(x1,x2,x3). $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$ = (yi).P^t.A.P.$(yi)^t$ = (yi).B.$(yi)^t$,

de donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

La expresión de la cuádrica es ahora, en la nueva base
B' = {w1, w2, w3},

$$f(yi) = (yi).B.(yi)^t = 2y1^2 + 3y2^2 + 13x3^2$$

Clasificación:

Aplicamos el siguiente resultado teórico:

Sean n = dim.V (Espacio vectorial ambiente)

r = nº valores propios no nulos
s = nº valores propios > cero

$$\begin{cases} Si\ s = r = n \to Definida\ positiva \\ Si\ s = r < n \to Semidef.positiva \\ Si\ r = n\ ,\ \ y\ \ \ s = 0 \to Defin.negativa \\ Si\ r < n,\ \ y\ \ \ s = 0 \to Semi.Defi.negat \end{cases}$$

En nuestro caso es Definida positiva

Otra forma:

No será difícil conseguir la descomposición

$$5x1^2 + 11x2^2 + 2x3^2 + 8x1x2 = (2x1+2x2)^2 +$$

$+ (x1^2 + 7x2^2 + 2x3^2) > 0$ para toda cuterna (x1, x2, x3, x4)

2.- Sea la forma cuadráticas f: R^3 --- > R

$f(x1,x2,x3,x4) = x1^2 + x2^2 + 5x3^2 + 6x4^2 + 2x1x3 - 4x2x3$

Realizar: Lo mismo que en el problema 1 anterior

a) Matriz asociada A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) Hallar una matriz P ortogonal tal que al aplicar la transformación lineal (cambio de base) $(xi)^t = P.(yi)^t$ sobre

$(xi).A.(xi)^t$

se cumpla $f(xi) = (yi).B.(yi)^t$, donde B es diagonal, y calcular B

Sol.: Obtengo los valores característicos de A, resultando $(6-k)^2 . k . (k-1) = 0$ ->

k1 = 6 doble, k2 = 0, k3 = 1

Clasificación: Puesto que s = r = 3 < n (n=4), se trata de forma cuadrática Semi-Definida positiva.

Prueba obtener la descomposición

$x1^2 + x2^2 + 5x3^2 + 6x4^2 + 2x1x3 - 4x2x3 = (x1+x3)^2 + (x2-2x3)^2 +$

$+ 6x4^2 > 0$, para toda cuaterna no nula.

Observa que f(…) = 0 cuando x1+x3 = 0 y x2-2x3 = 0 y x4 = 0, simultáneamente, y por tanto ‘No es Definida positiva’ sino ‘Semi-Definida positiva’.

3.- Resuelve los siguientes:

a) Obtener el centro y el radio de la intersección del plano
m: $2x+y+z-8 = 0$ con la esfera

S: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 9 = 0$
(Obtener previamente el centro y radio de la esfera).

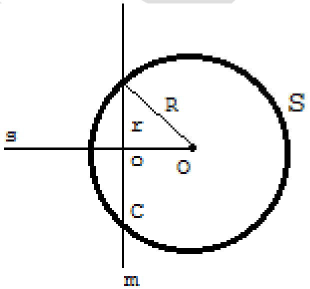
Sol.: Aplicando la teoría

Directamente, puedo expresarla así
$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 10$ -- > Ce(1,0,0), R = $\sqrt{10}$

Tomo la resta s perpendicular al plano m, y obtengo el punto de corte; este punto es el centro de C.

Vector director de s es el vector ortogonal a m

v = (2, 1, 1) -> s: (x-1)/2 = y/1 = z/1

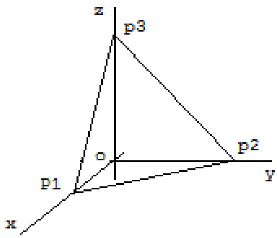


He de resolver $\begin{cases} 2x+y+z-8=0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \end{cases}$ -> $\begin{cases} 2x+y+z-8=0 \\ x-1=2y \\ z=y \end{cases}$

->x = 3, y = 1, z = 1 -> o(3,1,1)

Radio r: $d(O, o)^2 + r^2 = R^2$,
$d(O, o) = \sqrt{6}$ -> $r^2 = 10-6 = 4$, r = 2

b)Obtener el área del triángulo que resulta al cortar el plano m anterior a los tres ejes coordenados



Puntos de corte: Se obtienen P1(4,0,0), P2(0,8,0), P3(0,0,8)

El área viene dada por 1/2 del módulo del producto vectorial de los vectores que determinan dos de sus aristas:

V1 = P1P2 = (-4,8,0), V2 = P1P3 = (-4,0,8)

$$W = V1xV2 = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64.e1 + 32.e2 + 32.e3$$

/W/ = …… = $\sqrt{32^2 + 6} = 32.\sqrt{6}$ -> área = $16.\sqrt{6}$

c)Calcula el volumen determinado por el plano m anterior y los tres planos coordenados:

Este volumen viene dado por 1/6 del producto mixto de tres aristas con vértice común, por ejemplo tomando, además de los dos vectores antes calculados, el vector P1o = (-4,0,0), obtengo

$$V = 1/6.\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1/6.([-256] - [0]) = -128/3,$$

Evidentemente el volumen es un valor > 0: $V = \frac{128}{3}$

d)Dada la circunferencia C obtenida en el punto a), obtener su proyección (ortogonal) sobre el plano coordenado xOy. Esta proyección será una cónica sobre xOy, clasificarla y obtener su ecuación reducida.

La circunferencia C es el lugar geométrico definido por el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 9 = 0 \quad esfera \\ \quad 2x + y + z - 8 = 0 \quad plano\ m \end{cases}$$

La proyección ortogonal sobre el plano z = 0 no es el resultado de 'cortar' con este plano sino el resultado de 'eliminar' la variable z entre las dos ecuaciones de este sistema que determina C:

De la segunda z = 8 –(2x+y), que sustituyo en la primera

$x^2 + y^2 + (8-2x-y)^2 - 2x - 9 = 0$, y desarrollando resulta

$5x^2 + 2y^2 + 4xy - 34x - 16y + 55 = 0$,

(Una cónica en z = 0)

Clasificación: $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -17 \\ 2 & 2 & -8 \\ -17 & -8 & 55 \end{pmatrix}$, $/A'/ = -24$,

y por tanto es no degenerada. Al ser $A'_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, concluimos que es una elipse (que se intuye gráficamente).

Ecuación reducida:

Porque estamos operando en cartesianas actuamos como sigue

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = k^2 -10k + 6,\ \ k^2 -10k + 6 = 0$$

Tengo k1 = 6, k2 = 1; además $\frac{|A'|}{|A'_{33}|} = -4$, y la ecuación reducida es

$$6x^2 + y^2 -4 = 0 \to \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

También, cambiando los papeles de k1, k2, podemos tomar

$$x^2 +6y^2 -4 = 0$$

4.- Tenemos las rectas r1: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, r2: $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

A)

a)Analiza la posición relativa de r1, r2

Analizo el sistemas $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

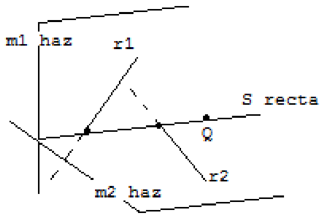
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos ran(A) = 3, ran(B) = 4, por lo que el sistema es incompatible, No se cortan.

b)Se sabe que por el punto Q(1, -1, 1/2) pasa una recta s que se apoya en r1 y en r2. Obtener su ecuación.

La recta s yace sobre sobre alguno de los planos del haz con vértice haz1: x + t.y = 0, y por la misma razón yace en alguno de los del haz2: (x+y-1) +u.z = 0, y por tanto su ecuación ha de satisfacer el siguiente sistema para algún par de valores (t0, u0):

$$s: \begin{cases} x + t.y = 0 \\ (x + y - 1) + u.z = 0 \end{cases}$$



Imponemos la condición de que pasa por Q(1, -1, 1/2)

$$\begin{cases} 1 - t = 0 \rightarrow t = 1 \\ 1 - 1 - 1 + \frac{1}{2}.u = 0 \rightarrow u = 2 \end{cases},$$

y la ecuación de s es s: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

c)Obtener la recta (o rectas) que cortando a r1 y a r2 además es perpendicular al plano

m: x+2y+3z-4=0

Sol.: El razonamiento es análogo al del punto anterior, con la diferencia de que ahora la última condición es la perpendicular a m

Tomo como en b)

$$s: \begin{cases} x + t.y = 0 \\ (x + y - 1) + u.z = 0 \end{cases}$$

Por ser s normal a m, un vector director de s es v = (1, 2, 3)

Por otro lado, si s es la intersección de dos planos m1, m2, su vector director es el 'producto vectorial' de los vectores normales a m1 y m2. En este caso, un vector director de s es (dependiendo de los dos parámetros)

$$v(t, u) = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 1 & u \end{vmatrix} = (t.u).e1 - u.e2 + (1-t).e3$$

Estos dos vectores directores de s han de ser proporcionales

$$\frac{t.u}{1} = \frac{-u}{2} = \frac{1-t}{3} \text{ -> } \begin{cases} 2.t.u = -u \\ -3u = 2 - 2t \end{cases} \text{ -- >}$$

$$\begin{cases} (2t+1).u = 0 \\ 3u = 2t - 2 \end{cases}$$

u = 0 -- > t = 1 -- > s: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

t = -1/2 -- > 3u = -3, u = 1 -- > s: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Observa que el primer resultado No es real.

B) Halla la ecuación del lugar geométrico dado por las rectas que se cortan con r1 y r2, y además se apoyan en la recta

$$r3: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Clasificar esta superficie y obtener su intersección con el plano z = 0.

Sol.: Tomamos el sistema que define la familia (dependiendo de dos parámetros) de rectas que se apoyan en r1, r2

$$s: \begin{cases} x + t.y = 0 \\ (x + y - 1) + u.z = 0 \end{cases}$$

al agregamos el que determina la recta r3

$$\begin{cases} x + t.y = 0 \\ (x + y - 1) + u.z = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

En primer lugar, de (*) debemos obtener una relación entre t y u:

De las dos últimas, restándolas: x –y -3 = 0

Tomo $\begin{cases} x + t.y = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ -- > (y+3) + t.y = 0 -- > y.(1+t) = -3,

y = $\frac{-3}{1+t}$, x = $\frac{-3}{1+t} + 3$ = $\frac{3t}{1+t}$, z = x -2 = $\frac{-2+t}{1+t}$

Sustituyo en la segunda

$\frac{3t}{1+t} + \frac{-3}{1+t} - 1 + u.\frac{-2+t}{1+t}$ = 0 ->3t-3–(1+t)+(-2+t).u = 0,

2t – 4 = (2-t).u -> u = $\frac{2t-4}{2-t}$ ->2.u–ut-2t +4 = 0,

ó bien: t.u +2.t -2.u -4 = 0   (**)

De la primera del sistema obtengo: t = -x/y, y de la segunda:
u = -(x+y-1)/z

Sustituyendo en la relación (**) tengo

-x/y.[-(x+y-1)/z] -2x/y + 2(x+y-1)/z -4 = 0

Operando llegamos a

C: $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2xz - 4yz - x - 2y = 0$

(Superficie pedida)

Clasificación:

Para obtener correctamente su matriz asociada es conveniente expresarla previamente en homogéneas

C: $x1^2 + 2x2^2 + 0.x3^2 + 0.x4^2 + 3x1x2 - 2x1x3 - x1x4 - 4x2x3 - 2x2x4 + 0.x3x4 = 0$

Matricialmente A = $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango de A: $\text{ran}(A) \geq 2$

/A/ = $\left| \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|$ = 0, ya que la 3ª y 4ª

filas son l.d.

Me quedo con la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sus menores de orden 3 son

$\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [0+3+3]-[+2+4+0] = 0 \to A_{44} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [0+3/2+3/2]-[+1+2+0] = [3]-[3] = 0$$

Por lo tanto ran(A) = 2 -- > la cuádrica es degenerada y está formada por dos planos.

Por se $A'_{33} = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} = \ldots = -1/4 <> 0 ->$ los

planos son reales distintos.

Intersección con el plano xOy:

Resolvemos $\begin{cases} \mathrm{x2} + \mathrm{2y2} + \mathrm{3xy} - \mathrm{2xz} - \mathrm{4yz} - \mathrm{x} - \mathrm{2y} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

de donde: $\begin{cases} \mathrm{x2} + \mathrm{2y2} + \mathrm{3xy} - \mathrm{x} - \mathrm{2y} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que será una

cónica degenerada formada por dos rectas. Las obtengo así:

$$x^2 +(3y-1)x +2y(y-1) = 0$$

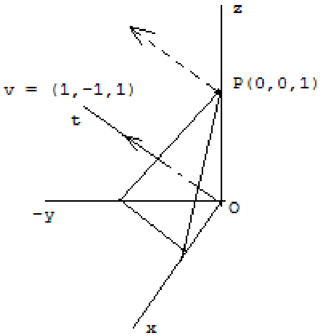
$$x = \frac{-(3y-1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - 8y(y-1)}}{2} = \frac{1-3y \pm \sqrt{y^2+2y+1}}{2} = \ \ldots.$$

operando llegamos a

$$\begin{cases} x = \frac{2-2y}{2} = 1-y \\ x = \frac{-4y}{2} \end{cases} \text{-> Rectas: } \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x+4y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

5.- Consideramos el 'triedro' cuyas aristas son los semiejes

Ox, -Oy, Oz. Tomo el plano m que pasa por P(0,0,1) y es perpendicular a la bisectriz del triedro, y la circunferencia C de radio r = 1 con centro en P.



Se piden:

a)Ecuación de C: Tomo la esfera S de radio R = 1 con centro en P

$$S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

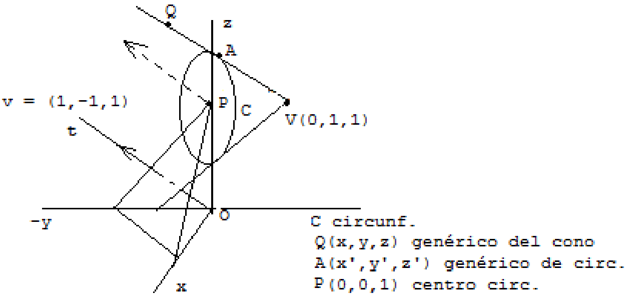
Ecuación de m: El vector v (figura) es ortogonal a m por lo que

$$m: x - y + z - 1 = 0$$

$$C = S \wedge m : \begin{cases} x2 + y2 + (z-1)2 = 1 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

donde ^ indica la intersección.

b)Obtener la ecuación del cono que se obtiene proyectando desde el punto V(0,1,1) la circunferencia C anterior.



Sol.: Sea A un punto de C y Q un punto cualquiera del cono y que está alineado con V y A. Tengo

OQ = OV + t.VA, (Ecuación vectorial del cono)

De esta tengo

(x, y, z) = (0,1,1) + t.(x'-0, y'-1, z'-1) -- >

$$\begin{cases} x = t.x' \\ y = t.y' - t + 1 \\ z = t.z' - t + 1 \end{cases}$$

donde (x', y', z') han de satisfacer las condiciones de C como

lugar geométrico. Con todo ello los puntos (x, y, z) del cono han de satisfacer

$$\begin{cases} x = t.x' \\ y = t.y' - t + 1 = t.(y' - 1) + 1 \\ z = t.z' - t + 1 = t.(z' - 1) + 1 \\ x' - y' + z' - 1 = 0 \\ x'^2 + y'^2 + (z' - 1)^2 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Voy a eliminar x', y, z'

De la primera, segunda y tercera:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} & \\ y' - 1 = \frac{y-1}{t} \rightarrow & y' = 1 + \frac{y-1}{t} \\ z' - 1 = \frac{z-1}{t} \rightarrow & z' = 1 + \frac{z-1}{t} \end{cases}$$

Sustituyo en la cuarta

x/t –(t+y-1)/t + (t+z-1)/t -1 = 0

x –(t+y-1) + (t+z-1) –t = 0 -- > t = x-y+z

y volviendo a las expresiones de x’, y’, z’, tengo

$$x' = \frac{x}{x-y+z},\ y' = \frac{x+z-1}{x-y+z},\ z' = \frac{x-y+2z-1}{x-y+z}$$

$$z'-1 = \frac{x-y+2z-1}{x-y+z} - 1 = \frac{z-1}{x-y+z}$$

Sustituyo en la última de (*)

$$\left(\frac{x}{x-y+z}\right)^2 + \left(\frac{x+z-1}{x-y+z}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{x-y+z}\right)^2 = 1$$

Operando, agrupando y simplificando llegamos a

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 2x - 4z + 2 = 0$$

que es el cono pedido.

c)La proyección del cono anterior sobre el plano z =1, y la proyección sobre el plano x + 2z = 0, dan como resultado dos cónicas C1, C2, respectivamente. Las proyecciones sobre el plano z = 0 de éstas las designamos por C1’, C2’. Se pide:

c1) La ecuación de C1’ y de C2’

C1: $\begin{cases} x2 - y2 + z2 + 2xy + 2yz - 2x - 4z + 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ -- >

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

C2: $\begin{cases} x2 - y2 + z2 + 2xy + 2yz - 2x - 4z + 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ -- >

como z = -x/2, $z^2 = x^2/4$, 2yz = 2y(-x/2) = -xy,

-4z = 2x, -- >

C2: $\begin{cases} x^2 - y^2 + \frac{x^2}{4} + 2xy - xy - 2x + 2x + 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ -- >

C2: $\begin{cases} 5x^2 - 4y^2 + 4xy + 8 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

Se sigue que

C1’: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

C2’: $\begin{cases} 5x^2 - 4y^2 + 4xy + 8 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

c2) Clasificar las cónicas C1’, C2’

A1 = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, /A1/ = 0, $A1_{33}$ = -2 -> Es hipérbola degenerada formada por dos rectas reales.

A2 = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, /A2/ = -192, $A2_{33}$ = -24

Es una hipérbola no degenerada real.

c3) Para C2': Determina el centro y los ejes, y la ecuación reducida.

Por derivación:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \text{->} \begin{cases} 10x - 4y = 0 \\ -8y + 4x = 0 \end{cases} \text{-> } x = 2y \text{ ->}$$

20y -4y = 0 -> 16y = 0, y = 0, x = 0, Ce(0,0,0)

Ejes: Resolvemos la ecuación

$$a12.m^2 -(a22 -a11).m -a12 = 0$$

$$2.m^2 + 9.m -2 = 0,$$

Obtenemos m1 = $\frac{-9+\sqrt{97}}{4}$, m2 = $\frac{-9-\sqrt{97}}{4}$, y por tanto los ejes son: E1: y = $\frac{-9+\sqrt{97}}{4}.x$, E2: y = $\frac{-9-\sqrt{97}}{4}.x$

Ecuación reducida: Obtengo la ecuación secular

$|A2_{33} - k|$ = $\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & -4-k \end{vmatrix}$ = $k^2 - k - 24$, $k^2 - k - 24 = 0$,

de donde resulta: k1 = $\frac{1+\sqrt{97}}{2}$, k2 = $\frac{1-\sqrt{97}}{2}$,

además tengo $\frac{|A2|}{A2_{33}} = \frac{-192}{-24} = 8$,

y entonces: $k1.x^2 + k2.y^2 + \frac{|A2|}{A2_{33}} = 0$, que se convierte en

$$\frac{1+\sqrt{97}}{2}.x^2 + \frac{1-\sqrt{97}}{2}.y^2 = 8,$$

Para que los dos coeficientes sean positivos escribimos

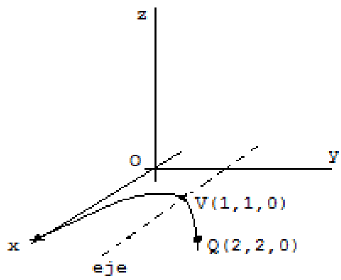
$\frac{1+\sqrt{97}}{2}.x^2 - \frac{-1+\sqrt{97}}{2}.y^2 = 8$, como corresponde al caso de la hipérbola.

6.- Tenemos el punto V(1,1,0) y la recta r:$\begin{cases} y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$, que serán el vértice y eje de simetría de la parábola que además pasa por p(2,2,0). Hemos fijado un sistema de referencia ortonormal. Se pide:

a)Obtener la ecuación de este parábola y dibujarla.

Sol.:
La tangente en el vértice es x = 1.

El haz de cónicas con vértice en V y eje de simetría y = 1, tiene por ecuación: $(y-1)^2 + k.(x-1) = 0$



Si ha de pasar por P(2,2) tengo:

$(2-1)^2 + k.(2-1) = 0$,

k = -1 -> $(y-1)^2 - (x-1) = 0$ -> $y^2 - 2y - x + 2 = 0$

b)Obtener la ecuación del cilindro generado tomando como directriz la parábola anterior y sus generatrices son paralelas a la recta x = y = z.

Sol.: La cónica en el espacio es

$$C:\begin{cases} y^2 - x - 2y + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

y por tanto un punto genérico de C es de la forma

$$X'(y'^2-2y'+2,\ y',\ 0).$$

Cualquier generatriz será de la forma

$$\frac{x-(y'2-2y'+2)}{1} = \frac{y-y\prime}{1} = \frac{z}{1}$$, de donde

$$\begin{cases} x - (y'2 - 2y' + 2) = y - y' \\ y - y' = z \end{cases}$$ --> y' = y-z, que sustituyo

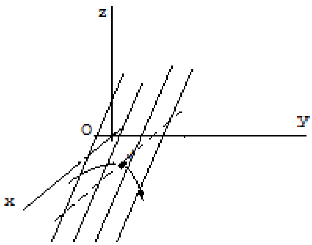
en la primera: $x - (y-z)^2 + 2(y-z) - 2 = z$, operando

$$x-(y^2 + z^2 - 2yz) + 2y - 2z - 2 = z$$

$$-y^2 - z^2 + 2yz + x + 2y - 3z - 2 = 0$$

y finalmente $y^2 + z^2 - 2yz - x - 2y + 3z + 2 = 0$

que es la ecuación del cilindro.



c)Considerar la sección S que produce el plano m: x + z -2 = 0 en el cilindro anterior, y obtener la ecuación de la proyección (ortogonal) S' de S sobre el plano xOy.

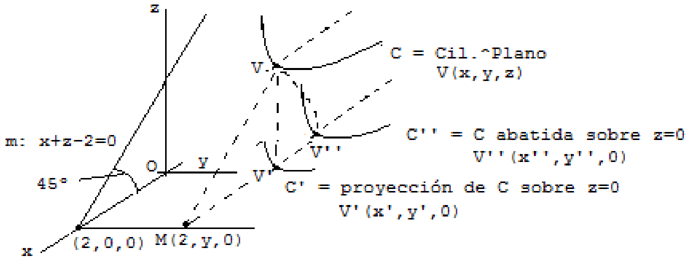
Sol.: Sección S: $\begin{cases} y2 + z2 - 2yz - x - 2y + 3z + 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$,

y su proyección sobre z = 0 la obtenemos eliminando z de la anterior (No confundir 'proyección' con intersección o sección):

$z = 2-x \text{ -- > } y^2 + (2-x)^2 - 2y(2-x) - x - 2y + 3(2-x) + 2 = 0$

resultando C': $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 6y + 12 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

d)Giramos el plano x + z -2 = 0, que contiene a S, tomando como eje la recta $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, y entonces S se abate sobre la que llamamos S''. Podemos obtener así una correspondencia entre S' y S''. Se pide:



Parece que la figura
No es la que
realmente se obtiene
pero sirve para
razonar el proceso

MV' = MV''.cos(45º) = MV''.1/rad(2)
(2-x') = (2-x'').1/rad(2)
x' = 2 -(2-x'').1/rad(2)
x' = 2 -2.1/rad(2) +x''.1/rad(2)
x' = [2.(rad(2)-1) + x'']/rad(2)

-Determinar esa correspondencia, y con ayuda de ésta obtener la ecuación de S'' partiendo de la ecuación de S'.

Sol.: Observar con detenimiento la figura anterior y las notas adjuntas.

La ecuación de la curva C' la expreso ahora así

C': $x'^2 + y'^2 + 2x'y' - 8x' - 6y' + 12 = 0$

Estamos realizando un giro de 45º del plano m: x + z -2 = 0. Tenemos pues

x' $= \frac{1}{2}.\sqrt{2}\left[x'' + 2.\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$,   y' = y''

Sustituyendo en (*), operando (Cálculo laborioso) llegamos a (escribiendo x, y, z en lugar de x'', y'', z'')

C'': $x^2 + 2y^2 + 2.\sqrt{2}.xy - 4(1+\sqrt{2})x - 4(1+\sqrt{2}).y +$
$+ 4(1+2\sqrt{2}) = 0$

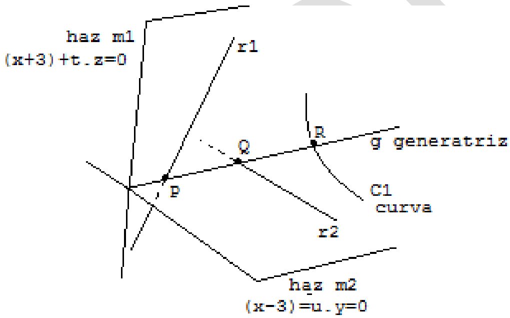
7.- Se pide lo siguiente:

a) Obtener la ecuación de la superficie reglada engendrada por una recta s que se apoya en las rectas

r1: $\begin{cases} x+3=0 \\ z=0 \end{cases}$, r2: $\begin{cases} x-3=0 \\ y=0 \end{cases}$, y en la curva

C1: $\begin{cases} yz-4=0 \\ x=0 \end{cases}$

Observa la figura



Sol.: Tomo el haz de planos con vértice r1, y el de vértice r2. La recta s tiene que yacer en algún plano de cada uno de estos haces, y por tanto va a depender de los valores de dos parámetros: t, u. Además ha de satisfacer la ecuación de la curva C1. En resumen, si (x, y, z) es un punto de la superficie ha de satisfacer

el sistema: $\begin{cases} (x+3)+t.z=0 \\ (x-3)+u.y=0 \\ yz-4=0 \\ x=0 \end{cases}$,

Debemos obtener una relación g(t, u) = 0 entre los parámetros.

t = -(x+3)/z,   u = -(x-3)/y

t.u = (x+3).(x-3)/yz -> 4.t.u = x^2 -9

Como x = 0, tengo 4t.u + 9 = 0

Sustituyendo aquí las expresiones de t y u anteriores

4.(x+3)/z .(x-3)/y + 9 = 0,

-> 4(x+3).(x-3) + 9yz = 0 -> **4x² +9yz -36 = 0**

b) Clasificamos la cuádrica obtenida y calculamos el plano tangente en el punto P(3,9,0)

Sol.: A = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}$, /A/= -36.(-81) = 2916

Puesto que /A_{44}/ = -81 -> Es Elipsoide ó Hiperboloide.

Por ser $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, se trata de hiperboloide, que, por ser /A/ > 0, es de una hoja.

Plano tangente en P(3, 9, 0): Su expresión general es

$f'_x(P).(x-x0) + f'_y(P).(y-y0) + f'_x(P).(z-z0) = 0$

f 'x(P) = 8.3= 24, f'y(P)= 9.0 = 0, f'z(P) = 81

y por tanto

24.(x-3) + 0.(y-9) + 81.(z-0) = 0 -> 24x + 81z-72 = 0

ó bie: 8x + 27z -24 = 0

Otra forma: Tomando las ecuaciones paramétricas de la superficie

$$\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = \dfrac{36-4t^2}{9u} \end{cases}$$

Plano m:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z-0 \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z \\ 1 & 0 & -\frac{8t}{9u} \\ 0 & 1 & \frac{-36+4t^2}{9u^2} \end{vmatrix} = 0$$

Puesto que t = 3, u = 9, tengo

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z \\ 1 & 0 & -\frac{8}{27} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ -> } z -[-8/27.(x-3) = 0$$

y finalmente **m: 8x + 27z -24 = 0**

c)La superficie obtenida en el punto a), al ser intersectada por el cilindro $y = x^2$, determina una línea. Se pide:

-Ecuaciones paramétricas de esta línea

Sol.: La g curva viene determinada por el sistema

$$\begin{cases} 4x^2 + 9yz - 36 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$, Parametrizamos

haciendo x = t, y = t^2 , z = $(36 - 4t^2)/(9t^2)$ = …

En resumen: g: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{4}{t^2} - \frac{4}{9} \end{cases}$, Observa que

t = 3 -> P(3,9,0)

-Obtener la ecuación de la tangente a esta curva en P, y la del plano osculador.

Sol.: Un vector director de la tangente en P es

v = $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)_P = (1, 2t, -8/t^3)_P =$ (1, 6, -8/27)

Ecuación **s:** $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-0}{\frac{-8}{27}}$ -> $\begin{cases} 6x - y - 9 = 0 \\ 8x + 27z - 24 = 0 \end{cases}$

Plano osculador m:

Necesitamos el vector ‘derivadas de orden dos’

w = $(d^2x/dt,\ d^2y/dt,\ d^2z/dt)_P = (0, 2, 24/t^4)_P = (0, 2, 8/27)$

m: $\begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z-0 \\ \frac{dx}{dt}(p) & \frac{dy}{dt}(p) & \frac{dz}{dt}(p) \\ \frac{d^2x}{dt}(p) & \frac{d^2y}{dt}(p) & \frac{d^2z}{dt}(p) \end{vmatrix} = 0$ -> $\begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z \\ 1 & 6 & \frac{-8}{27} \\ 0 & 2 & \frac{8}{27} \end{vmatrix} = 0$

Calculando **m**: 32x -4y + 27z -60 = 0

8.- Sea la curva determinada por g:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ y-z+1=0 \end{cases},$$

Se pide:

a) Ecuación del cilindro que se proyecta desde el punto V(a,0,1,0) del infinito tomando g como directriz.

Sol.: La ecuación de la directriz g puede ser modificada como sigue:

g: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ -- > Observa: z-y = 1, $(z\text{-}y)^2 = 1$,

z^2 +y^2 -2yz = 1 -> $y^2 + z^2 = 1 + 2yz$ -- >

g: $\begin{cases} x^2+2yz-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ -> hago z = y+1, 2yz = $2y^2 + 2y$ -- >

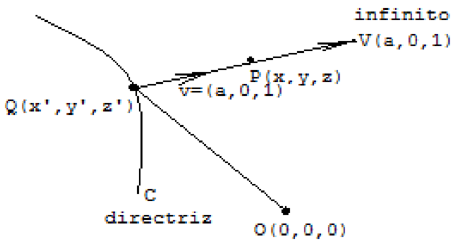
g: $\begin{cases} x^2+2y^2+2y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$; Nos quedamos con esta última.

Represento por Q(x', y', z') un punto cualquiera de esta directriz, escribiendo ahora

g: $\begin{cases} x'^2+2y'^2+2y'-3=0 \\ y'-z'+1=0 \end{cases}$ (*) El punto genérico del cilindro lo represento por P(x, y, z), y vectorialmente tengo

OP = OQ + QP = OQ + t.v, donde v es un vector director de la recta QV.

Por ser V(a,0,1,0) punto en el infinito, el vector directos de la recta MV para cualquier punto M es precisamente v = (a,0,1)



Por tanto: (x, y, z) = (x’, y’, z’) + t.(a, 0, 1), de donde

$$\begin{cases} x = x' + a.t \\ y = y' \\ z = z' + t \end{cases}$$, donde x’, y’, z’ han de satisfacer el sistema (*).

Hemos de eliminar t, x’, y’, z’ con la ayuda de las cinco igualdades.

De estas últimas: $\begin{cases} x' = x - at \\ y' = y \\ z' = z - t \end{cases}$, y tomando la segunda de (*)

y –(z-t) + 1 = 0 -- > t = z-y-1 -> x’ = x-a(z-y-1)

Llevándolo a la primera de (*) tengo la ecuación del cilindro

$$[x-a(z-y-1)]^2 + 2y^2 + 2y -3 = 0,$$

cuyo desarrollo dejamos en manos del alumno.

Observa que depende del valor de a.

b) La intersección de este cilindro con el plano z = 0 nos da un haz de cónicas tomando ‘a’ como parámetro.

Se pide:

-El número de cónicas de este haz que pasan por cada punto del plano z = 0.

Sol.: Haz: $\begin{cases} [\mathrm{x}-\mathrm{a}(\mathrm{z}-\mathrm{y}-1)]^2 + 2\mathrm{y}2 + 2\mathrm{y} - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ->

$\begin{cases} [\mathrm{x}+\mathrm{a}(\mathrm{y}+1)]^2 + 2\mathrm{y}^2 + 2\mathrm{y} - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ -> Operando y

simplificando en la primera tengo

$x^2 + (a^2+2)y^2 + 2axy + 2ax + 2(a^2+1)y + a^2 - 3 = 0$ (**)

Por ejemplo para a = 0 resulta la cónica

$$x^2 + 2y^2 + 2y - 3 = 0$$

Para cada punto p(x0,y0) del plano z = 0, al sustituir en (**) resulta una expresión

$A.a^2 + B.a + C = 0$, donde A, B, C son

valores reales. De esta expresión se extraen dos valores del parámetro ‘a’ que determinan dos cónicas del haz que pasan por ese punto p.

-Clasificamos todas las cónicas del haz (**):

A = $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2+2 & a^2+1 \\ a & a^2+1 & a^2-3 \end{pmatrix}$, /A/= $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2+2 & a^2+1 \\ a & a^2+1 & a^2-3 \end{vmatrix}$ =

Transformo: f2 = f2 –a.f1, f3 = f3 –a.f1

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$ = -7 -> No es degenerada si ‘a’ es valor real

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2+2 \end{vmatrix}$ = 2 > 0 -> Elipse real.

Además, para cualquier valor de ‘a’ es a11 > 0 y por tanto ninguna es imaginaria.

Cuando a = ∞ los cálculos anteriores no son válidos. En este caso, retomando la expresión (**) del haz

$$x^2 + (a^2+2)y^2 + 2axy + 2ax + 2(a^2+1)y + a^2 -3 = 0$$

Hacemos (dividiendo por a^2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(1 + \frac{2}{a^2}\right).y^2 + \frac{2}{a}\ .xy + \frac{2}{a}\ .x + 2.\left(1 + \frac{1}{a^2}\right).y + 1 - \frac{3}{a^2} = 0$$

y haciendo a -> ∞ nos queda: $y^2 + 2y + 1 = 0$

que descompone $(y + 1)^2 = 0$ -> Dos rectas iguales.

c) Obtener el lugar geométrico de los centros

de las cónicas no degeneradas del haz (**)

$$x^2 + (a^2+2)y^2 + 2axy + 2ax + 2(a^2+1)y + a^2 -3 = 0$$

Obtengo sus derivadas parciales

$$f\,'_x = 2x + 2ay + 2a$$

$f'_y = 2(a^2+2)y + 2ax + 2(a^2+1)$

y resuelvo el sistema $\begin{cases} x + ay + a = 0 \\ (a^2+2)y + ax + (a^2+1) = 0 \end{cases}$ -- >

$a = \frac{-x}{y+1}$ -- > $a^2 = \frac{x^2}{(y+1)^2}$,

$a^2 + 2 = \frac{x^2}{(y+1)^2} + 2 = \frac{x^2+2(y^2+2y+1)}{(y+1)^2}$,

$a^2 + 1 = \frac{x^2}{(y+1)^2} + 1 = \frac{x^2+y^2+2y+1}{(y+1)^2}$,

y llevándolo a la segunda

$$\frac{x^2+2(y^2+2y+1)}{(y+1)^2}.y + \frac{-x}{y+1}.x + \frac{x^2+y^2+2y+1}{(y+1)^2} = 0$$

Multiplico por $(y+1)^2$

$$[x^2+2y^2+4y+2].y - x^2.(y+1) + [x^2+y^2+2y+1] = 0$$

que dejamos sin desarrollar.

9.- Respecto de un sistema de referencia ortonormal S(O; ox, oy, oz), y base ortonormal asociada B = {e1, e2, e3}, tenemos la ecuación paramétrico-vectorial de una superficie S:

$$v = t.e1 + u.e2 + (2tu-t^3).e3 \qquad (1)$$

Se pide:

a) Expresarla en paramétricas y en forma cartesiana z = f(x, y).

Sol.: (x, y, z) = (t, u, $2tu-t^3$) -> $\begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = 2tu - t^3 \end{cases}$

Explícita: $z = 2xy - x^3$,

b) Obtener el plano tangente en el punto P correspondiente a (t, u) = (1, 1)

m: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = [(z-1)] –[-(x-1) + 2(y-1)]= 0

m: x -2y + z = 0

c) Ecuación de la (recta) normal (principal), en el punto P, a la curva C sobre la superficie determinada por la relación u = t^2.

Sol.: Sustituyo u = t^2 en las ecuaciones paramétricas de S, tengo

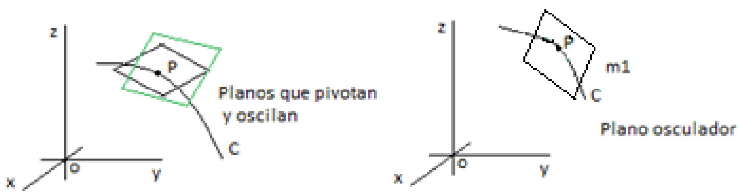
C: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$,

La normal principal a la curva C es la recta intersección del plano normal con el plano osculador. (Observa la figura 3 que siguen)

NOTA: Antes de continuar recordamos la definición de estos planos:

a) "Llamamos Plano osculador al plano que resulta al realizar el siguiente límite

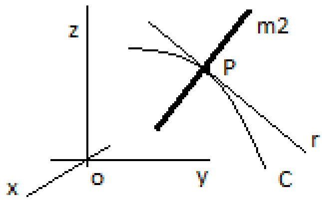
m = $\lim_{Q1,Q2\to P}(Plano\ determinado\ por\ P, Q1,\ Q2)$



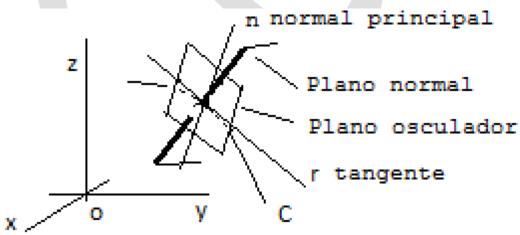
(1)

Pero entre estos planos que pivotan existe uno en especial, resultado de aquel límite, que determinaremos y llamamos ‘Plano osculador’.

b) Fijada la recta r tangente en P, teniendo en cuenta que estamos en el espacio, las rectas perpendiculares a r en P llenan un plano, que llamamos ‘Plano normal’ a la curva en P.

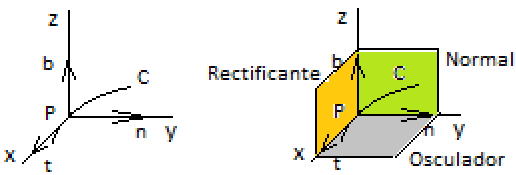


(2)



(3)

c) Triángulo intrínseco:



Seguimos:

$(dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (1, 2t, 3t^2)$ -- >Vector

$(d^2x/dt, d^2y/dt, d^2z/dt) = (0, 2, 6t)$ -- >Vector

y en el punto P correspondiente a t = 1

V = (1, 2, 3) -- > Vector ortogonal al plano normal

W = (0, 2, 6) -- > Vector ortogonal al plano osculador

Por tanto, en el punto P(1, 1, 1)

Plano normal a la curva: (x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0

Plano osculador:

m2: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ =0 -> 6(x-1)-6(y-1)+2(z-1)=0

Tengo así el sistema $\begin{cases} x+2y+3z-6=0 \\ 3x-3y+z-1=0 \end{cases}$

Podemos dar valor a z (como incógnita libre):

z = 0 -> $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 3x-3y-1=0 \end{cases}$ -> $\begin{cases} -3x-6y+18=0 \\ 3x-3y-1=0 \end{cases}$ ->

-9y + 17 = 0, y = 17/9

$\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 3x-3y-1=0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} 3x+6y-18=0 \\ 6x-6y-2=0 \end{cases}$ -> 9x -20 = 0,

x = 20/9, y tengo el punto p1(20/9, 17/9, 0),

Puesto que ya sabemos que pasa por P(1,1,1), tenemos un vector director

v = (20/9 -1, 17/9 -1, 0-1) = (11/9, 8/9, -1)

Tomo v = (11, 8, -9), y tengo la ecuación de la normal principal

r: $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{-9}$

d) Por la curva C: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, pasan infinidad

de cuádricas (y superficies en general) de las cuales podemos obtener algunas de forma inmediata. Obtener dos de ellas fáciles de determinar por su expresión explícita y clasifica aquella en la que intervienen x, y, z.

Sol.: Las obtengo eliminando el parámetro t así:

S1: $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$, S2: $\begin{cases} y = x^2 \\ z = xy \end{cases}$, S3: xy – z = 0

Clasifico S3: (Observa que en homogéneas

S3: x1x2 –x3x4 = 0

A = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, /A/ = $\frac{1}{16}$

Puesto que $A_{44} = 0$, se trata de un paraboloide hiperbólico (por ser /A/ > 0).

e) Tomamos el par de superficies

S2: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ z = xy \end{cases}$, S3: xy – z = 0

Consideramos el haz de cuádricas generado por estas dos:

$(x^2 - y) + t.(xy-z) = 0 \dashrightarrow x^2 + t.xy - y - t.z = 0$

Obtenemos las cuádricas degeneradas de este haz.

En homogéneas $x1^2 + t.x1x2 - x2x4 - t.x3x4 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}, \ /A/ = \ldots.. = \frac{t}{2}.\frac{-t}{2}.\frac{-t^2}{4},$$

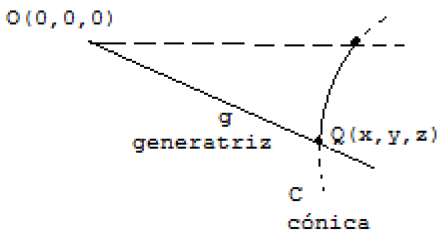
$\frac{t}{2}.\frac{-t}{2}.\frac{-t^2}{4} = 0 \dashrightarrow t = 0$, y por tanto, cuando t = 0

la cuádrica del haz es $x^2 - y = 0$, que es un cilindro. Es la única degenerada.

f) Determinar la ecuación del cono que

proyecta la curva C: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, desde el punto O(0,0,0) como vértice.

Sol.:



La recta s que pasa por O y un punto de C tiene por ecuación

s: $x/t = y/t^2 = z/t^3$ donde debe ser $t \neq 0$

Por ser $t \neq 0$ tengo: s: $x = y/t = z/t^2$, y de ésta

$t = y/x$, $t^2 = y^2/x^2$, con lo que

$x = \frac{z.x^2}{y^2}$ **-- >** $xy^2 - zx^2 = 0$ **-- >** $\mathbf{x.(y^2 - xz) = 0}$

(ecuación del cono)

g) Comprobar que la recta s: $\begin{cases} y = tx - \frac{t^2}{4} \\ z = \frac{3t^2}{4}.x - \frac{t^3}{4} \end{cases}$

engendra una superficie desarrollable, y que su arista de retroceso es la curva C (de los apartados anteriores)

Sol.: Recordamos que superficie desarrollable es aquella que …

La recta s: $\begin{cases} y = tx - \frac{t^2}{4} \\ z = \frac{3t^2}{4}.x - \frac{t^3}{4} \end{cases}$, llamando

$$\begin{cases} a = t, \quad p = -\frac{t^2}{4} \\ b = \frac{3t^2}{4}, \ \ q = -t^3/4 \end{cases}$$

la expresamos s: $\begin{cases} y = ax + p \\ z = bx + q \end{cases}$

La Superficie reglada generada por s es 'desarrollable' si se cumpliese $\frac{da/dt}{db/dt} = \frac{dp/dt}{dq/dt}$, véamoslo.

$a'(t) = 1$, $b'(t) = 6t/4$ -- > $a'/b' = 4/6t = 2/3t$

$p'(t) = -2t/4$, $q'(t) = -3t^2/4$ -- > $p'/q' = 2/3t$

y vemos que sí se cumple.

Línea de retroceso: Resolvemos el siguiente

$$\begin{cases} y = ax + p \\ z = bx + q \\ x = -\frac{p'(t)}{a'(t)} \end{cases} \text{->} \begin{cases} y = tx - \frac{t^2}{4} \\ z = \frac{3t^2}{4}.x - \frac{t^3}{4} \\ x = \frac{t}{2} \end{cases},$$

de la tercera t = 2x, que lo sustituyo en primera y segunda

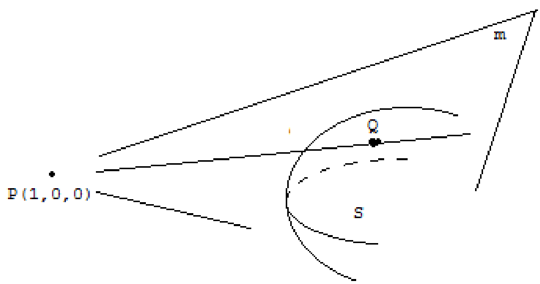
$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \\ x = x \end{cases} \text{-->} \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$, que es la curva C del punto b)

10.- Se sabe que el lugar geométrico los puntos de contacto de los planos tangentes a la superficie

S: $\begin{cases} x = t + u \\ y = t.u \\ z = t^2 + 4u^2 \end{cases}$, trazados desde el punto

P(1,0,0), está formado por tres curvas.

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de estas curvas.



Sol.:

Consideramos un plano m con punto de contacto Q en la superficie S, y que es uno cualquiera de todos los posibles.

Si Q está en S sus coordenadas pueden ser expresadas de la forma Q(t+u, t.u, t^2+4u^2). La ecuación del plano m tangente a S en Q será de la forma

$$\text{m:}\begin{vmatrix} x-(t+u) & y-t.u & z-(t^2+4u^2) \\ 1 & u & 2t \\ 1 & t & 8u \end{vmatrix}=0$$

Este plano m pasa por el punto P(1,0,0) y por tanto

$$\text{m:}\begin{vmatrix} 1-(t+u) & -t.u & -(t^2+4u^2) \\ 1 & u & 2t \\ 1 & t & 8u \end{vmatrix}=0$$

Para el cálculo de este determinante realizo algunas transformaciones que conservan su valor.

$$\begin{vmatrix} 1-t-u & -t.u & -t^2-4u^2 \\ 1 & u & 2t \\ 1 & t & 8u \end{vmatrix}=$$

Hago 2.f1, t.f2, u.f3

$$=\frac{1}{2tu}.\begin{vmatrix} 2-2t-2u & -2t.u & -2t^2-8u^2 \\ t & tu & 2t^2 \\ u & tu & 8u^2 \end{vmatrix}=$$

Hago: f1 = f1 +f2 +f3

$$=\frac{1}{2tu}.\begin{vmatrix} 2-t-u & 0 & 0 \\ t & tu & 2t^2 \\ u & tu & 8u^2 \end{vmatrix}=$$

$$= \frac{1}{2tu}.(2tu).\begin{vmatrix} 2-t-u & 0 & 0 \\ 1 & u & t \\ 1 & t & 4u \end{vmatrix} = (2-t-u).[4u^2 - t^2];$$

$$(2-t-u).[4u^2 - t^2] = 0 \dashrightarrow \begin{cases} 2-t-u = 0 \\ \text{ó} \\ (2u+t).(2u-t) = 0 \end{cases} \dashrightarrow$$

relaciones entre los parámetros: $\begin{cases} t = 2-u, & \text{ó} \\ t = -2u, & \text{ó} \\ t = 2u, \end{cases}$

Al sustituir cada una de estas en la expresión

paramétrica S: $\begin{cases} x = t+u \\ y = t.u \\ z = t^2 + 4u^2 \end{cases}$ de S, resultan las tres curvas

C1: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2u - u^2 \\ z = 5u^2 - 4u + 4 \end{cases}$, C2: $\begin{cases} x = -u \\ y = -2u^2 \\ z = 8u^2 \end{cases}$, C3: $\begin{cases} x = 3u \\ y = 2u^2 \\ z = 8u^2 \end{cases}$

b) Comprobar que cada una de las curvas obtenidas es plana, y obtener para cada una el plano que la contiene.

Sol.: C1 está contenida en el plano x = 2.

C2: Observa que 4y + z = 0 , que es el plano pedido.

C3: Observa que 4y – z = 0.

c) Se sabe que una de estas curvas tiene por ecuación cartesiana $\begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$, que es la intersección de un plano con una cuádrica (cilindro). Se pide:

-Obtener el plano osculador a la citada curva en el punto Q(3,2,8)

Sol.: Por simple observación la referida curva es

$$C3:\begin{cases} x = 3u \\ y = 2u^2 \\ z = 8u^2 \end{cases} \text{ , ya que } \begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

En efecto: $\begin{cases} x = 3u \\ y = 2u^2 \end{cases}$ -- > $2.x^2$ -9y = 0,

$4.2u^2 = 8u^2$ -- > 4y –z = 0

El punto Q(3, 2, 8): 3u = 3 -- > u = 1, que satisface las otras dos igualdades.

Siendo una curva plana, su plano osculador coincidirá con el plano que la contiene.

Comprobación:

Plano osculador m: $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-8 \\ 3 & 4 & 16 \\ 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$, desarrollando

m: -3.$\begin{vmatrix} y-2 & z-8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$ -> 4y – z = 0,

y coinciden como debía esperar.

-Obtener la proyección de esta curva (la C3) sobre el plano z = 0.

Debo eliminar z de la expresión de la curva, pero como en su expresión tengo la relación

$$2x^2 - 9y = 0,$$

esta es la que buscamos, Proy.: $\begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

-Clasificar la cónica proyección anterior y obtener sus focos.

Sol.: Es una parábola y = $\frac{2}{9}.x^2$, con vértice (0, 0, 0) y eje oy.

Foco: Estará en eje oy por lo que será de la forma F(0, b).

Recordatorio: Focos son aquellos puntos F(a, b) tales que las tangentes a la cónica desde F(a, b) son las rectas

r1: y-b = i.(x-a), r2: y-b = -i(x-a)

En general, los focos F(a, b) resultan de resolver el siguiente sistema que nos da los puntos de tangencia. Los valores (a, b) los obtenemos al exigir que la solución es doble.

Sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ y - b = i.(x - a) \end{cases} \text{-- > (aquí a = 0)} \begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ y - b = i.x \end{cases}$$

Tengo y = b + ix -- > $2x^2$ -9(b + ix) = 0,

$2x^2$ -9i.x -9.b = 0,

cuyas soluciones en x deben coincidir, y por tanto su discriminante D debe ser cero:

D = $(-9i)^2$ -4.2.(-9b) = -81 + 72.b, D = 0 -- >

b = 81/72 = 27/24 = 9/8 -- > F(0, 9/8)

d) Obtener la superficie de revolución al girar la cónica anterior alrededor del eje oy.

Sol.: Vamos a obtenerla de dos formas: Por el procedimiento general, y por observación directa.

Por observación directa:

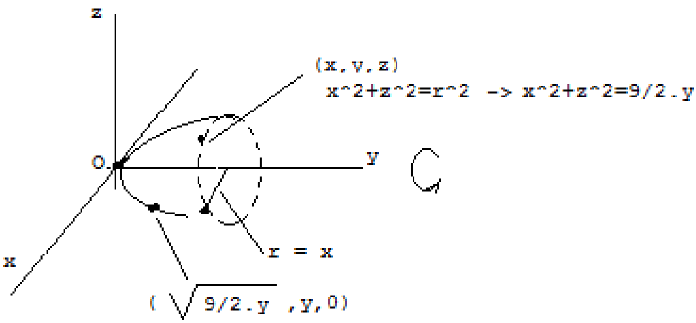
Para cualquier punto P(x, y, z) se cumple

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad (*)$$

Sobre z = 0 tengo la curva $\begin{cases} 2x^2 - 9y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

y también, sobre z = 0 es r = x = $\sqrt{\frac{9}{2}.y}$. Llevándolo a (*) me queda

$x^2 + z^2 = 9/2.y$ -- > S: $\mathbf{2x^2 + 2z^2 - 9y = 0}$



Procedimiento general: (Observa la figura)

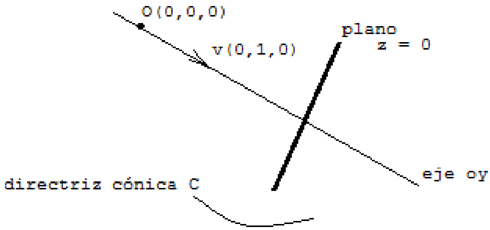
Planteamos el sistema S: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \\ y = u \\ 2x^2 - 9y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, de las tres

últimas: $x^2 = 9/2.u$, que llevo a la primera: $9/2.u + u^2 + 0 = t^2$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9y}{2} + y^2 ,$$

de donde finalmente $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 9y + 2y^2$ -- >

S:$\mathbf{2x^2 + 2z^2 - 9y = 0}$



11.- Resolver los siguientes:

a) Dadas las dos cuádricas

C1: $x^2 + z^2 + 4y - 16 = 0$,
C2: $xy - z^2 - 4x + 2 = 0$.

Se pide:

-Proyección sobre el plano x0y de la curva intersección de C1 y C2.

Sol.: Curva intersección C': $\begin{cases} x^2 + z^2 + 4y - 16 = 0 \\ xy - z^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$, y su proyección sobre z = 0 se obtiene eliminando la variable z:

Sumándolas tengo Proy C': $x^2 + xy - 4x + 4y - 14 = 0$

-Obtener la intersección de C' con el plano z = 0

Sol.: Basta hacer z=0 en $\begin{cases} x^2 + z^2 + 4y - 16 = 0 \\ xy - z^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$,

resultando: C'': $\begin{cases} x^2 + 4y - 16 = 0 \\ xy - 4x + 2 = 0 \end{cases}$, que representan

los puntos comunes de una parábola (la primera) y una hipérbola.

-Obtener la intersección con z = 0 de cada una de las cuádricas C1, C2:

Sol.: C1^(z = 0): $\begin{cases} x^2+4y-16=0 \\ z=0 \end{cases}$, (parábola)

C2^(z = 0): $\begin{cases} z=0 \\ xy-4x+2=0 \end{cases}$ (hipérbola)

(^ indica intersección)

b)Hemos obtenido antes las dos cónicas

C1': $\begin{cases} x^2+4y-16=0 \\ z=0 \end{cases}$, C2': $\begin{cases} z=0 \\ xy-4x+2=0 \end{cases}$

Se pide:

-Obtener el haz de cónicas que pasan por los puntos de intersección de C1' y C2', y Obtener las cónicas degeneradas reales de este haz.

Sol.: El haz de cónicas pedido es

$(x^2+4y-16)+t.(xy-4x+2)=0$ -- >

$x^2 + txy - 4tx + 4y + (2t-16) = 0$

Matricialmente A= $\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & -2t \\ \frac{t}{2} & 0 & 2 \\ -2t & 2 & (2t-16) \end{pmatrix}$,

/A/ = -t3-8 = 0

$t^3 = -8$ -- > solución real t = -2; Por tanto la única degenerada real es (cuando t = -2)

$x^2 - 2xy + 8x + 4y - 20 = 0$

-Calcular el lugar geométrico de los centros de las cónicas del haz

$$x^2 + txy - 4tx + 4y + (2t-16) = 0$$

Sol.: Por derivación

$$f'x = 2x + t.y - 4t, \quad f'y = t.x + 4$$

$\begin{cases} 2x + ty - 4t = 0 \\ tx + 4 = 0 \end{cases}$, $t = -4/x$ que llevo a la primera:

$2x - 4y/x + 16/x = 0 \to 2x^2 - 4y + 16 = 0 \to$ **$x^2 - 2y + 8 = 0$,**

que es una parábola

$$y = 1/2.x^2 - 4$$

-Hallar los focos de la cónica obtenida (como lugar geométrico de los centros)

Sol.: Si F(a, b) es el foco, para obtener (a, b) resolvemos el sistema

(*) $\begin{cases} x^2 - 2y + 8 = 0 \\ y - b = i.(x - a) \end{cases}$, imponiendo que tenga

solución doble (punto de tangencia). Tengo

$y = b + i.(x - a) \to x^2 - 2(b + i.(x-a)) + 8 = 0,$

$$x^2 - 2i.x + (-2b + 2i.a + 8) = 0.$$

Imponemos que la solución sea doble:

$$D = -4 - 4.(-2b + 2ia + 8) = -36 + 8b - 8ai$$

$D = 0 \to -36 + 8b - 8ai = 0 \to 2b - 2ai = 9$

También el sistema (*) ha de verificarse para –i, y esto nos lleva a

$$2b + 2ai = 9$$

Tengo así $\begin{cases} 2b - 2ai = 9 \\ 2b + 2ai = 9 \end{cases}$, de donde b = 9/2, a = 0,

Foco F(0,9/2)

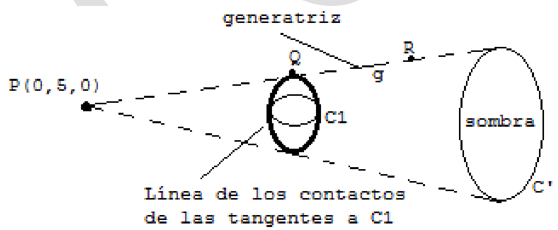
Observa que la cónica (parábola) se puede expresar así:

$(y-4) = 1/2.(x-0)^2$, lo que indica que su vértice está en (0,4) y su eje de simetría es la recta x = 0 (eje oy).

c)Supongamos que en el punto P(0, 5, 0) colocamos un foco luminoso.

Obtener la ecuación de la curva C' que delimita la sombra proyectada sobre el plano z -3 = 0 por la cuádrica C1. La curva obtenida será una cónica; clasificarla.

Sol.: C1: $x^2 + z^2 + 4y -16 = 0$,



Obtendremos el cono con vértice en P circunscrito a la cuádrica C1. Aplicamos el siguiente procedimiento, que explicamos aquí.

Si Q(x', y', z') es un punto de la línea de contactos de las tangentes a C1 desde P, y R(x, y, z) es el punto genérico de la recta PQ, podemos expresar

$$\begin{cases} x'^2 + z'^2 + 4y' - 16 = 0 \quad (cuádrica\ C1) \\ y\ para\ el\ vector\ director \\ x - 0 = t.(x' - 0) \\ y - 5 = t(y' - 5) \\ z - 0 = t.(z' - 0) \end{cases}$$

Obtengo: x' = x/t, y' = (y-5 + 5t)/t , z' = z/t

Sustituyéndolos en la primera tengo

$\frac{x^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2} + \frac{4.(y+5t-5)}{t} - 16 = 0$ ->

$x^2 + z^2 + (4y+20t-20).t - 16t^2 = 0$ -> $x^2 + z^2 + 4t.y + 4(t^2 - 5t) = 0$

Pero interesa obtener el valor de t, y por tanto la ecuación a resolver es

$4t^2 + (4y - 20)t + (x^2 + z^2) = 0$ -> $t^2 + (y-5)t + \frac{x^2+z^2}{4} = 0$

Para cada punto (x, y, z) el valor de t ha de ser único (porque la tangente en este punto es única), por tanto la solución ha de ser doble, por lo que

$D = (y-5)^2 - 4.\frac{x^2+z^2}{4}$ ha de ser cero

$y^2 - 10y + 25 - x^2 - z^2 = 0$ -> C3: $x^2 - y^2 + z^2 + 10y - 25 = 0$

que es la ecuación del cono (cuádrica que designo C3). La sombra sobre el plano z-3 = 0 la obtengo 'seccionando' el cono con este plano, esto es

Sombra C': $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 + 10y - 25 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$ -- >

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 10y - 16 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$ (Expresión de la sombra)

Clasificación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -16 \end{pmatrix},\quad /A/ = -9,\quad A_{33} = -1,\ \text{por lo que}$$

estamos en el caso de Hipérbola.

$$$oOo$$$

MÁS Problemas interesante

A) De CONICAS (muy interesantes)

1.- Clasifica la cónica y determina su Ecuación reducida:

C: $2x^2 -3xy -2x + 5y -3 = 0$

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$, /A/ = 7/4, A33 = -9/4

A33 < 0 -> Hipérbola real.

NOTAS:
Mediante una traslación el centro de la cónica pasa al origen (0, 0, 0), y a continuación un giro que lleva sus ejes a los ejes de coordenadas. Su expresión general pasa a su 'Forma reducida'.

Se ha demostrado lo siguiente que nos da la 'Ecuación reducida'.

A) En el caso de la Elipse o la Hipérbola: Si k1, k2 son las soluciones de

$$x^2 - I1.x + I2 = 0,$$

la ecuación reducida es: $k1.x^2 + k2.y^2 = \frac{-I3}{I2}$

donde: I1 = a11 + a22, I2 = A33, I3 = /A/

B) En el caso de la parábola:

$I1.y^2 \pm 2.\sqrt{\frac{-I3}{I1}}.x = 0$, donde I1, I2, I3 son

los anteriores.

En nuestro caso: I1 = 2, I2 = -9/4, I3 = 7/4

x^2 -2x -9/4 = 0, $4x^2$ -8x -9 = 0, de donde

k1 = $\frac{2+\sqrt{13}}{2}$, k2 = $\frac{2-\sqrt{13}}{2}$

Ecuación reducida: $\frac{2+\sqrt{13}}{2}.x^2 + \frac{2-\sqrt{13}}{2}.y^2 = \frac{7}{9}$

2.- Clasifica y determina su ecuación reducida:

C: $x^2 - y^2 + xy + x - 3 = 0$

Sol.: El alumno probará los resultados siguiendo la pauta del anterior.

Es Hipérbola real. Ec. reducida: $\sqrt{5}.x^2 - \sqrt{5}.y^2 = \frac{32}{5}$

3.- Estudia la siguiente cónica dependiente del valor del parámetro k:

$k.x^2 - 4y^2 + 4xy - 4kx - 16y = 0$

Sol.: A = $\begin{pmatrix} k & -2 & -2k \\ -2 & -4 & -8 \\ -2k & -8 & 0 \end{pmatrix}$, /A/ = $16.k^2$

k = 0: -> /A/ = 0, -- > Cónica reducible;

A33 = $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ = - 4.(k+1); A33 = - 4 si k = 0, y en este caso ‘son dos rectas reales que se cortan’.

k ≠ 0: /A/ > 0 -- > Es cónica irreducible;

A33 = -4.(k+1);

k > -1 -> A33 < 0, Hipérbola real

k = -1 -> A33 = 0, Parábola real

k < -1 -> A33 > 0, k./A/ < 0 -> Elipse real

4.- Halla la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos:

P1(0, 0), P2(2, 0), P3(0, -3), P4(-1, 4), P5(-2, 2)

Sol.: Lo resolvemos mediante el haz de cónicas que pasan por cuatro puntos, y después exigir que pasa por el quinto punto.

Tomo los cuatro puntos primeros. Tengo las siguientes 4 rectas:

r1 = P1P2: y = 0

r2 = P1P3: x = 0

r3 = P2P4: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{4}$ -> 4x + 3y -8 = 0

r4 = P3P4: $\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{7}$ -> 7x + y + 3 = 0

El haz de cónicas que pasan por estos 4 puntos tiene ecuación (Tomamos pares de rectas de modo que no tengan vértice común):

y.(7x + y + 3) + k.x.(4x + 3y -8) = 0

Imponiendo que pase por P5:

2.(-14+2+3) + k.(-2).(-8+6-8) = 0

-18 + 20.k = 0 -> k = 18/20 = 9/10

Sustituyendo

$(7xy + y^2 + 3y) + 9/10.(4x^2 + 3xy -8x) = 0$

$(70xy + 10y^2 + 30y) + (36x^2 + 27xy -72x) = 0$

C: $\mathbf{36x^2 + 10y^2 + 97xy -72x + 30y = 0}$

5.- Comprueba que la siguiente cónica es Hipérbola. Determina la ecuación de sus ejes y las de sus asíntotas:

$3x^2 + y^2 -4xy + x + 2y -5 = 0$

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -5 \end{pmatrix}$, /A/ = [-15-1-1] –[1/4 -20+3] =

= -17 – [1/4 -17] = -17 + 67/4 = -1/4

A33 = 3 -4 = -1 -> Hipérbola real.

NOTA:
Ecuación de los ejes: Se ha demostrado que si k1, k2 son las soluciones de

$a12.x^2 + (a11-a22).x – a12 = 0$, y las semiderivadas

$1/2.f_x(x, y)$, $1/2.f_y(x, y)$

los ejes son:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.f_x(x,y) + k1.\frac{1}{2}.f_y(x,y) = 0 \\ \frac{1}{2}.f_x(x,y) + k2.\frac{1}{2}.f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

En nuestro caso:

$-2x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 – x -1 = 0$

obtengo: $k1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $k2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$1/2.f_x(x, y) = 1/2.(6x - 4y + 1) = 3x - 2y + \frac{1}{2}$

$1/2.f_y(x, y) = 1/2.(2y - 4x + 2) = y - 2x + 1$

y tengo los ejes:

$$\begin{cases} \left(3x - 2y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}.(-2x + y + 1) \\ (-2x + y + 1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}.(-2x + y + 1) \end{cases}$$

NOTA:
Para las asíntotas, si k1, k2 son las soluciones de

$a22.x^2 + 2.a12.x + a11 = 0$, tomando como antes las semiderivadas, las ecuaciones son

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.f_x(x,y) + k1.\frac{1}{2}.f_y(x,y) = 0 \\ \frac{1}{2}.f_x(x,y) + k2.\frac{1}{2}.f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

En nuestro caso: $x^2 - 4x + 3 = 0$ --> k1= 3, k2 = 1

y tengo: $\begin{cases} \left(3x - 2y + \frac{1}{2}\right) + 3.(-2x + y + 1) = 0 \\ \left(3x - 2y + \frac{1}{2}\right) + (-2x + y + 1) = 0 \end{cases}$ -->

$$\begin{cases} 6x - 2y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 3 = 0 \end{cases}, \text{ (Asíntotas)}$$

6.- Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica

C: $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 8y + 21 = 0$

en el punto P(3, 5).

Sol.: Pasamos a coordenadas homogéneas

C: $2x^2 -2xy + y^2 + 2xz -8yz + 21z^2 = 0$, P(3, 5, 1)

Tomamos las semi-derivadas, su valor en el punto P, y obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{2}.fx(P).x + \frac{1}{2}.fy(P).y + \frac{1}{2}.fz(P).z = 0,$$

que es la ecuación de la tangente en P.

Operamos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}.(4x-2y+2z) = 2x-y+z \\ \frac{1}{2}.f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}.(-2x+2y-8z) = -x+y-4z \text{ ->} \\ \frac{1}{2}.f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}.(2x-8y+42z) = x-4y+21z \end{cases}$$

Valor en P, $\begin{cases} \frac{1}{2}.fx(P) = 2 \\ \frac{1}{2}.fy(P) = -2 \\ \frac{1}{2}.fz(P) = 4 \end{cases}$, $2x -2y + 4z = 0$ -- >

r: x –y + 2 = 0, en cartesianas.

7.- Determina el polo de la recta r: x + 2y + 7 = 0

respecto de la cónica (dada en homogéneas):

C: $x^2 -xy + yz -3xz -z^2 = 0$

Sol.: Pasamos a homogéneas: r: x + 2y + 7z = 0

Semi-derivadas: $\begin{cases} \frac{1}{2}.f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}.(2x-y-3z) \\ \frac{1}{2}.f_y(x,y,z) = \qquad \frac{1}{2}.(-x+z) \\ \frac{1}{2}.f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}.(y-3x-2z) \end{cases}$;

$\frac{2x-y-3z}{2.1} = \frac{-x+z}{2.2} = \frac{-3x+y-2z}{2.7}$ ->

$$\begin{cases} 4.(2x-y-3z) = 2.(-x+z) \\ 14.(-x+z) = 4.(-3x+y-2z) \end{cases}$$

-> $\begin{cases} 4x-2y-6z = -x+z \\ -7x+7z = -6x+2y-4z \end{cases}$ -> $\begin{cases} 5x-2y-7z = 0 \\ -x-2y+11z = 0 \end{cases}$;

Hago z = 1, -> $\begin{cases} 5x-2y = 7 \\ -x-2y = -11 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x-2y = 7 \\ -5x-10y = -55 \end{cases}$ ->

-12y = -48, y = 4, x = -8+11 = 3 -> P(3, 4)

El alumno puede resolverlo y comprobar resultados por otro método.

8.- Determina la ecuación de la recta polar del punto P(3, 4) respecto de la cónica:

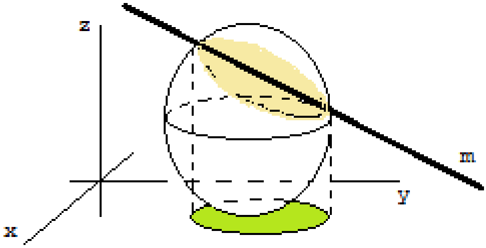
$$C: x^2 - xy + yz - 3xz - z^2 = 0$$

Sol.:

9.- Tengo la Esfera E: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 4 = 0$

y el plano m: $x + y - z - 1 = 0$. La curva intersección entre el plano y la esfera se proyecta ortogonalmente sobre el plano XOY. Estudia la cónica resultado de la proyección, y obtener su ecuación reducida.

Sol.:



Curva intersección:

$$\begin{cases} x2 + y2 + z2 - 2x - 2y - 4z - 4 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases},$$

Eliminamos z entre las dos (No es lo mismo que hacer z = 0):

$$z = x + y -1,$$

$x^2 + y^2 + (x+y-1)^2 -2x -2y -4.(x+y-1) -4 = 0,$

$x^2 + y^2 + (x^2+y^2+1+2xy-2x-2y) -2x -2y - (4x+4y-4) -4 = 0$

$2x^2 + 2y^2 + 2xy -8x -8y + 1 = 0,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad /A/ = \ldots = -29 \ ;$$

A33 = 4-1 = 3 > 0, a11./A/ < 0, y se trata de una elipse real.

Ecuación reducida: I1 = a11 + a22 = 4, I2 = A33 = 3,

I3 = /A/ = -29

Resuelvo: x^2 –I1.x + I2 = 0, $x^2 -4x + 3 = 0$,

resultando: k1 = 3, k2 = 1

k1.x^2 + k2.y^2 = $\frac{-I3}{I2}$ -- > $\mathbf{3x^3 + y^2 = \frac{29}{3}}$

10.- Tengo la cónica C: $5x^2 -3xy + y^2 -3x + 2y -5 = 0$

a) Determina la ecuación de sus ejes
b) Determina la ecuación del diámetro conjugado con la recta r: 4x –y + 5 = 0

Sol.: Clasificación:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -5 \end{pmatrix}$$, /A/ = [-25+9/4 +9/4] –

-[9/4 +5 -45/4] = (-25 + 9/2) –(5-36/4) = -41/2 + 4 = -33/2 ;

$$A33 = \begin{vmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}$$ = 5 -9/4 = 11/4 ; a11./A/ < 0,

Es una Elipse real.

Ejes: Resolvemos a12.x^2 + (a11-a22).x –a12 = 0
-3/2.x^2 + 4.x + 3/2 = 0, -> $3x^2$ -8x -3 = 0,

x^2 -8x -1 = 0 -> k1 = 3, k2 = -1/3 ;

Semi-derivadas: $\frac{1}{2}.f_x(x,y) = \frac{1}{2}.(10x - 3y - 3)$
$\frac{1}{2}.f_y(x,y) = \frac{1}{2}.(2y - 3x + 2\ )$

$(10x - 3y - 3)$ + 3.($2y - 3x + 2) = 0$ -> **x + 3y + 3 = 0**

$(10x - 3y - 3)$ -1/3.($2y - 3x + 2) = 0$ ->

-> 11x -11/3y-11/3 = 0 -- > **3x –y -1 = 0** b)Diámetro conjugado con la recta

r: 4x -y + 5 = 0

NOTAS:

Nos situamos en homogéneas. El punto en el infinito de esta recta r es (1, 4 ,0), donde

v = (1, 4) es un vector director de r, obtenido así:

x = 1 -> y = 9 -> punto A(1, 9)

x = 0 -> y = 5 -> punto B(0, 5); vector BA = (1, 4)

Recordamos que el centro de la cónica es el polo de la recta del infinito, por tanto las rectas polares de los puntos de la recta del infinito pasan por el centro de la cónica, es decir, estas rectas son diámetros de la cónica. Dos diámetros conjugados son aquellos tales que cada uno es la recta polar del polo (punto en el infinito) del otro eje (cada uno pasa por el polo del otro).

Ecuación de la recta polar de P(a, b, c)

Obtenemos los valores: $\frac{1}{2}.f_x(P)$, $\frac{1}{2}.f_y(P)$, $\frac{1}{2}.f_z(P)$

Ecuación: $\frac{1}{2}.f_x(P).x \ + \frac{1}{2}.f_y(P).y \ + \frac{1}{2}.f_z(P).z \ = 0$

En nuestro caso. Hallamos la polar del punto P(1, 4, 0): (esta polar pasará por el centro)

En homogéneas C: $5x^2 -3xy + y^2 -3xz + 2yz -5z^2 = 0$

$$\frac{1}{2}.f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}.(10x - 3y - 3z)$$

$$\frac{1}{2}.f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}.(2y - 3x + 2z\ )$$

$\frac{1}{2}.f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}.(-3x + 2y - 10z\ )$

Valores en P(1, 4, 0): 1/2.fx(P) = -1,

1/2.fy(P) = 5/2, 1/2.fz(P) = 5/2

Ecuación: r': -x + 5/2.y + 5/2.z = 0

r': -2x + 5y + 5 = 0, en cartesianas

NOTA:
La recta obtenida es un diámetro por ser la polar de un punto impropio (punto del infinito), mientras que la recta r dada es 'conjugada' con r', porque ésta es la polar del punto en el infinito de aquella. Pero no hemos aclarado si r es diámetro, ya que para serlo debe ser la polar de un punto del infinito. Y para ser diámetro conjugado con r' debe ser la polar del punto en el infinito de r'. Veamos ésto.

r': -2x + 5y + 5 = 0; Obtengo vector director.

y = 0 -> x = 5/2 -> P(5/2, 0)

y = 1 -> x = 10/2 = 5 -> Q(5, 1), PQ = (5/2, 1),

v = (5, 2); Punto en el infinito A(5, 2, 0)

$\frac{1}{2}.f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}.(10x - 3y - 3z)$

$\frac{1}{2}.f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}.(2y - 3x + 2z\ )$

$\frac{1}{2}.f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}.(-3x + 2y - 10z\ )$

Valores en A(5, 2, 0):

1/2.fx(P) = 22, 1/2.fy(P) = -11/2, 1/2.fz(P) = -11/2

Ecuación: 22.x -11/2.y -11/2.z = 0,

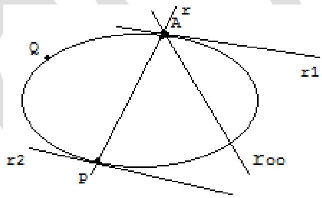
r': 44x -11y -11 = 0, r': 4x –y -1 = 0

que no coincide con aquella. Esta sí es un diámetro.

11.- De una Hipérbola sabemos que la recta r1: 3x –y -2 = 0 es una asíntota, y que la recta r2: x –y + 1 = 0 es tangente en el punto P(2, 3), y que además pasa por el punto Q(2, 1).

Determina la ecuación de esta cónica.

Sol.: En primer lugar obtendremos la familia de las cónicas que cumplen las condiciones de tangencia (asíntota es una tangente en el punto del infinito). Cada condición de tangencia equivale por dos, luego son cuatro condiciones.



Punto A: Es el punto impropio de r1. Vector director de

r1: 3x –y -2 = 0 -- > y = 3x-2, luego la pendiente es m = 3, y entonces v = (1, 3). El punto impropio es A(1, 3, 0), siendo A(1, 3) en cartesianas.

P(2, 3), A(1, 3) -> y-3 = 3.(

r: (y-3) = m.(x-2) pasa por P

Para que en el infinito esta recta r pase por el punto A(1, 3, 0), punto impropio de r1, debe tener la 'dirección' de r1 y por tanto la pendiente de r1, es decir m = 3. Tengo

r: $3x - y - 3 = 0$ (esta contará dos veces)

Las dos cónicas que generan el citado haz son

C1: $(3x - y - 2).(x - y + 1) = 0$

C2: $(3x - y - 3).(3x - y - 3) = 0$

NOTA:
Observa que hemos de tomarlas en pareja que no tengan punto en común. Pero los puntos P y A han de considerarse 'doble' y como distintos y esa es la razón por la que tomamos r.r.

La ecuación del haz es:

$(3x - y - 2).(x - y + 1) + k.(3x - y - 3).(3x - y - 3) = 0$

$(-3x^2 - y^2 + 4xy - x - y + 2) + k.(9x^2 + y^2 - 6xy - 18x + 6y + 9) = 0$

Imponiendo que pase por Q(2, 1) resulta

$-6 + 4k = 0 \rightarrow k = 3/2$

Finalmente C: $21x^2 + y^2 - 10xy - 56x + 16y + 31 = 0$

12.- Dado el haz de cónicas

C(k): $x^2 + k^2.y^2 + (k^2 - k).xy - k^2.y = 0$

determina el lugar geométrico de los centros de estas cónicas.

Sol.: El centro de una cónica viene dado por las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.f_x(x,y)=0 \\ \frac{1}{2}.f_y(x,y)=0 \end{cases} \text{->} \begin{cases} \frac{1}{2}.(2x+(k^2-k).y\ =0 \\ \frac{1}{2}.(2k^2.y+(k^2-k).x-k^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+(k^2-k).y\ =0 \\ (2k^2.y+(k^2-k).x-k^2=0 \end{cases}$$; de la segunda

$$k.(2k.y+(k-1).x-k)=0,\ \begin{cases} k=0,\quad desechada \\ (2k.y+k.x-x-k)=0 \end{cases} \text{->}$$

k.(2y + x -1) = x -> k = $\frac{x}{x+2y-1}$,   y sustituyendo en C(k):

$$x^2+\left(\frac{x}{x+2y-1}\right)^2.y^2+\frac{x}{x+2y-1}.\left(\frac{x}{x+2y-1}-1\right).xy- \\ -\left(\frac{x}{x+2y-1}\right)^2.y=0$$

resultando   (El alumno puede comprobarlo)

C: $2x^2 + 6y^2 + 8xy - 4x - 7y + 2 = 0$

(Hipérbola real)

13.- Determina la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas

r1: y + 2 = 0,   r2: x –y -1 = 0,

y además pasa por el punto Q(2, 5).

Sol.: Recuerda: Las asíntotas son las tangentes en sus puntos del infinito.

Sus puntos impropios son (puntos en la recta del infinito):

r1: -> v1 = (0, 1) -> A1(0, 1, 0)

r2: -> v2 = (1, 1) -> A2(1, 1, 0)

Recta que pasa por A1 y A2, por tratarse de puntos de la recta del infinito, es z = 0 (recta del infinito). Este detalle me obliga a operar en homogéneas:

$$r1: y + 2z = 0, \quad r2: x - y - z = 0$$

El haz de cónicas viene dado por C1 + k.C2 = 0,

donde C1: $(y + 2z).(x - y - z) = 0$, C2: $z^2 = 0$

$$(y + 2z).(x - y - z) + k.z^2 = 0,$$

Imponiendo que pasa por Q(2, 5, 1), en homogéneas:

$$(7).(-4) + k = 0 \quad \to k = 28$$

C: $-y^2 + xy + 2xz - 3yz + 26z^2 = 0$, en homogéneas,

C: $-y^2 + xy + 2x - 3y + 26 = 0$, $y^2 - xy - 2x + 3y - 26 = 0$

14.- Determina el lugar geométrico de los polos de la recta

r: $x + y + 1 = 0$ respecto de la familia de cónicas:

$$C(k): ky^2 - 2xy + 2y + (2-k) = 0$$

Sol.: Pasamos a homogéneas: r: $x + y + z = 0$

$$C(k): ky^2 - 2xy + 2yz + (2-k)z^2 = 0$$

NOTA:
Las coordenadas del polo de una recta $ax + by + cz = 0$ vienen dadas por las soluciones de las siguientes igualdades, que dan lugar a un sistema de dos ecuaciones:

$$\frac{\frac{1}{2}.f_x(\dots)}{a} = \frac{\frac{1}{2}.f_y(\dots)}{b} = \frac{\frac{1}{2}.f_z(\dots)}{c}$$

Hallo las semi-derivadas:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.fx(x,y,z) = -y \\ \frac{1}{2}.fy(x,y,z) = ky - x + z \\ \frac{1}{2}.fz(x,y,z) = y + (2-k)z \end{cases},$$

$$\frac{-y}{1} = \frac{-x+ky+z}{1} = \frac{y+(2-k)z}{1} \text{ -> } \begin{cases} -y = -x + ky + z \\ -x + ky + z = y + (2-k)z \end{cases}$$

Para pasar a cartesianas hago z = 1:

$$\begin{cases} -y = -x + ky + 1 \\ -x + ky + 1 = y + (2-k) \end{cases} \text{ -> } \begin{cases} -x + ky + 1 = -y \\ -x + ky + 1 = y + (2-k) \end{cases}$$

0 = 2y + 2-k ,   k = 2y + 2 -> -x + 2.(y+1).y + 1 = -y

C : $-x + 2y^2 + 3y + 1 = 0$, Es la parábola

$x = 2y^2 + 3y + 1$,   (eje paralelo a ox)

15.- Sea la Cónica C: $x^2 + y^2 -4xy + 2x = 0$

a) Determinar la Ecuación tangencial de la cónica.
b) Determina la Ecuación de la involución de rectas conjugadas con vértice el punto V(2, -1)
c) Halla la recta conjugada de la recta r:
   2x + 3y -1 = 0

Sol.:   NOTAS teoría:

Sea una cónica cualquiera

A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$, $X.A.X^t = 0$, donde X^t

es vector columna traspuesta de X vector fila.

Sean dos rectas (en homogéneas)

r1: ax + by + cz = 0, r2:a'x + b'y + c'z = 0

Sabemos que 'dos rectas r1, r2 son conjugadas si cada una pasa por el polo de la otra.

Se ha demostrado que si B = Adjunta(A), la condición para que r1 y r2 sean conjugadas es que

$$(a,b,c).B.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0$$

TANGENCIA:
Una recta r1 es tangente a la cónica si es conjugada consigo mismo. Por consiguiente, la condición para que r1 sea tangente es que

$(a, b, c).B.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$, llamada 'Ecuación tangencial de la cónica'.

a) En nuestro problema:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Adj(A) = ('Sustituir cada elemento por su adjunto algebraico') =

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, y la Ecuación tangencial de la cónica es

$$(a,b,c).\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \text{ -- >}$$

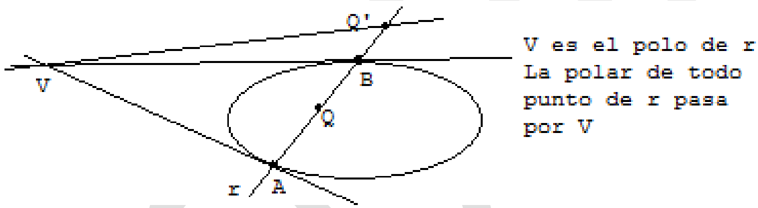
$b^2 + 2ac + 4bc + 3c^2 = 0$, donde (a, b, c) representan los coeficientes de la recta.

INVOLUCIONES asociadas a la cónica:

a) Involución subordinada a una recta:

Si r es una recta no tangente a la cónica, queda definida una ‘Involución de puntos conjugados respecto de la cónica’, determinada por r así:

Dado el punto Q, su conjugado es el punto Q’ corte de r con la polar de Q. Los puntos dobles de este involución son los puntos A, B de corte de r con la cónica. Observa la figura.



Involución subordinada a un punto:

Fijado un punto V no perteneciente a la cónica, queda determinada una ‘Involución de rectas conjugadas respecto de la cónica’. Si en esta involución existiesen ‘autoconjugadas’ (rayos dobles), estas son las tangentes a la cónica desde V.

Se ha demostrado que, si r: $y = m.x + b$, y r’: $y = m'.x + b'$, son conjugadas por esta involución determinada por el punto

V(x0, y0), se cumple

$$m \,.\, m'.(A33.x0^2 - 2.A13.x0 + A11) + (m + m').(A23.x0 +$$

$$+ A13.y0 - A33.x0y0 - A12) + (A33.y0^2 - 2.A23.y0 + A22) = 0$$

Los valores Aij los obtenemos al calcular Adj(A).

b) En nuestro problema: De la adjunta calculada en a) obtenemos: A33 = -3, A13 = -1, A11= 0, A23 = -2, A12 = 0, A22 = -1, que sustituyéndolos en la anterior, y teniendo en cuenta que V(2, -1), queda

$8.m \cdot m' + 9.(m + m') + 8 = 0$

c) Para la recta r: $2x + 3y - 1 = 0$, $m = -2/3$, y queda:

$-16/3.m' + 9.(-2/3 + m') + 8 = 0$ ->

$-16.m' + (-18 + 27m') + 24 = 0$, $11.m' + 6 = 0$,

$m' = -6/11$ -- > **r': $y + 1 = \frac{-6}{11} \cdot (x - 2)$**

B) De Valores y vectores propios: Diagonalización de Matrices, Clasificación y ecuación reducida de Cuádricas

1.- Calcular los valores propios y vectores propios de la cuádrica dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Además: Determina la base respecto de la dual la matriz que la representa es triangular y escribe dicha matriz.

Sol.: Valores propios:

$$\left|\begin{pmatrix} 0-k & -1 & -1 \\ -2 & 1-k & -1 \\ -2 & 2 & 2-k \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ -> } -k^3 + 3k^2 - 4 = 0,$$

Por Ruffini obtengo: k1 = -1, k2 = 2, k3 = 2

Vectores propios asociados:

$$\text{k1 = -1: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -> } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \text{ -> }$$

Puesto que el rango es 2, sólo dos ecuaciones son l.i. Las dos primeras lo son ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \text{ -- > }$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \text{ -> } \begin{cases} -3z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \text{ -> } y = x,$$

Vector: v1 = (1, 1, 0)

k2 = 2: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> $\begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ -2x + 2y \ \ = 0 \end{cases}$->

$\begin{cases} -2x - y - z = 0 \\ y = x \end{cases}$ -> $\begin{cases} y = x \\ z = -3x \end{cases}$, x libre,

x = 1 -> v2 =(1, 1, -3)

k3 = 2: Nos daría el mismo resultado anterior. Los vectores propios No forman base de V_3, por lo que tengo que añadir a los obtenidos otro vector v3 que sea l.i. con ellos (su existencia en todo caso está garantizada por el Teorema de Steinitz, si bien en este caso parece evidente su existencia).

El vector v3 = (1, 0, 0) lo cumple. Por tanto tomo la base

B'={v1, v2, v3}

Obtengo la matriz respecto de esta base B':

Respecto de la base B de origen:

f(v1) = -v1, f(v2) = 2v2

f(v3) = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -2, -2)$

Respecto de la nueva base B':

f(v1) = (-1,0,0), f(v2) = (0,2,0)

f(v3) = x.v1 + y.v2 + z.v3 -- >

(0, -2, -2) = x.(1,1,0) + y.(1,1,-3) + z.(1,0,0) -- >

$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ -2 = x + y \\ -2 = -3y \end{cases}$ -> y= 2/3, $\begin{cases} x + z = -\frac{2}{3} \\ x = -2 - \frac{2}{3} = -\frac{8}{3} \end{cases}$,

z = -2/3 + 8/3 = 2, -> f(v3) = (-8/3, 2/3, 2) en B'

Matriz A' = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, respecto la base B'

2.- Estudiar para qué valores de a, b la siguiente matriz es diagonalizable, obteniendo sus valores y vectores propios

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Sol.: $\left|\begin{pmatrix} 5-k & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & b \\ 3 & 0 & a-k \end{pmatrix}\right|$ = 0 -- >

(5-k).(-1-k).(a-k) = 0 -> k1 = 5, k2 = -1, k3 = a

Según valores de a, tengo los siguientes casos.

Caso: a ≠ -1, 5 . En este caso A es diagonalizable porque los v.p. son distintos.

Vectores propios en este caso:

k = 5 -> v1 = (2.(5-a), b, 6)
k = -1 -> v2 = (0, 1, 0)
k = a -> v3 = (0, b, 1+a)

Caso: a = 5 -> k1 = 5 doble, k2 = -1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Para que A sea diagonalizable ha de cumplirse, para cualquier v.p. ki con multiplicidad mi, que

el rango de $\begin{pmatrix} 5-ki & 0 & 0 \\ 0 & -1-ki & b \\ 3 & 0 & 5-ki \end{pmatrix}$ ha de ser = 3-mi.

Para k1 = 5: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos, ya que $\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Pero 3 - 2 = 1, y concluimos que, si a = 5 No es diagonalizable, cualquiera que sea el valor de b.

Caso: a = -1 -> k1 = 5, k2 = -1 doble.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, A-(-1).I = $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango de $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; necesariamente ha de intervenir el parámetro b:

$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ = 6.b; Si b $\neq$ 0 el rango es 2, y en este caso no será diagonalizable ya que 3 - 2 = 1.

Si b = 0, entonces rango = 1, y en este caso sí es diagonalizable.

3.- Para la siguiente matriz comprobar que se cumple el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: El citado teorema dice que toda matriz satisface su ecuación característica.

Ecuación caracterírtica: $|A - k.I| = 0;$

$$\left|\begin{pmatrix} 1-k & 1 & -2 \\ -1 & -2-k & 0 \\ 3 & 0 & 1-k \end{pmatrix}\right| = \ldots\ldots = -k^3 - 4k - 13 = 0$$

Debe verificarse: $-A^3 - 4.A - 13.I = 0$ (matriz)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix},\quad A^3 = \begin{pmatrix} -17 & -4 & 8 \\ 4 & -5 & 0 \\ -12 & 0 & -17 \end{pmatrix},$$

$$4.\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo tengo

$$-\begin{pmatrix} -17 & -4 & 8 \\ 4 & -5 & 0 \\ -12 & 0 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -4 & -8 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ Sí lo cumple como afirma el teorema.

4.- Estudia si es o no diagonalizable la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.: El alumno será capaz de comprobar los siguientes resultados:

Valores propios: k1 = 0, k2 = 3, k3 = -7

Vectores propios: k1 -> v1 = (2, 1, -2)

k2 -> v2 = (1, 0, 1)
k3 -> v3 = (1, 4, -1)

Comprobamos si se cumple: 3 – mi = ran(A-ki.I), donde mi es la multiplicidad.

k1 -> ran(A-0.I) = ran(A) = 2,
k2 -> ran(A-3.I) = 2,
k3 -> ran(A+7.I) = 2,

y aquella condición se cumple para los tres v.p., y concluimos que sí es diagonalizable.

5.- Estudiar el carácter de la cuádrica determinada por la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.: En primer lugar calculamos sus valores propios:

$$|A - k.I| = 0 \text{ -> } \left|\begin{pmatrix} 1-k & -1 & 0 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 3 & 1 & 2-k \end{pmatrix}\right| = \ldots\ldots\ldots =$$

= $k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0$ -> k1=1, k2= 2, k3= 2

Se cumple: rango = signatura = n

tomando el valor 3 todos los valores, luego es 'Definida positiva'.

Nota: Signatura = nº de valores propios positivos.

6.- Dadas las siguientes cuádricas exprésalas como suma de cuadrados (Método de reducción de Lagrange):

a) $f(x, y, z) = 2xy + 4xz + y^2 - 2yz$

b) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Sol.: a) $f(x, y, z) = 2xy + 4xz + y^2 - 2yz =$

$= y^2 + 2y.(x-z) + (x-z)^2 - (x-z)^2 + 4xy =$

$= [y + (x-z)]^2 - (x-z)^2 + 4xz = [y+x-z]^2 - x^2 - z^2 + 2xz + 4xz =$

$= [y+x-z]^2 - x^2 - z^2 + 6xz = [y+x-z]^2 - 9x^2 - z^2 + 6xz + 8x^2 =$

$= [y+x-z]^2 - (3x+z)^2 + 8x^2$;

Haciendo

$x' = y + x - z, \quad y' = 3x + z, \quad z' = x$

queda: $g(x', y', z') = x'^2 - y'^2 + 8z'^2$, que matricialmente sería

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $f(x, y, z) = (x, y, z). \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$= (y,\ x-4z,\ -4y+z).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xy + y.(x-4z) +$
$z.(-4y+z) =$ xy + xy-4yz -4yz + z^2 = 2xy -8yz + z^2 ;

f(x, y, z) = z^2 2xy -8yz = z^2 + 2y.(x-4z) =

(Recordamos un resultado interesante: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab = 4ab$)

= $z^2 + \frac{1}{2}.[(y+x-4z)^2 - (y-x+4z)^2] =$

= $z^2 + \frac{1}{2}.(x+y-4z)^2 - \frac{1}{2}.(-x+y+4z)^2$

7.- Reducir las siguientes formas cuadráticas en suma de cuadrados por el método de los valores propios:

a) f(x, y, z) = $3x^2 -4xy +6y^2$
b) g(x, y, z) = $7x^2 -2xy +5y^2 +5x^2 -2xz +2yz$

Sol.: a) Matricialmente

$$f = (x, y, z).\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ o bien}$$

$$f = (x, y).\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ -2 & 6-k \end{vmatrix} = (3-k).(6-k) - 4;$$

$k^2 -9k + 14 = 0$ -> k1 = 2, k2 = 7

Vectores propios:

k1 -> $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> v1 = (2, 1)

k2 -> v2 = (-1, 2)

La nueva base que garantiza la diagonalización es la que resulta de normalizar estos vectores (por ser reales y distintos sabemos que son ortogonales):

/v1/ = $\sqrt{5}$ -> u1 = ($\frac{2.\sqrt{5}}{5}$,$\frac{\sqrt{5}}{5}$) ,
/v2/ = $\sqrt{5}$ -> u2 = ($\frac{-\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2.\sqrt{5}}{5}$)

Tomo la matriz P = $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$

La nueva matriz sabemos que tomará la forma

A' = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Vamos a comprobar que la fórmula del cambio de base en las formas cuadráticas funciona correctamente:

$A = P.A'.P^t \Leftrightarrow A' = P^t.A.P$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4.\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-7\sqrt{5}}{5} & \frac{14\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{4.\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-7\sqrt{5}}{5} & \frac{14\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, y queda comprobada.

b)g(x, y, z) = $7x^2 - 2xy + 5y^2 + 5x^2 - 2xz + 2yz$

En este caso la matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Valores propios: $/A\text{-}k.I/ = -k^3 + 17k^2 - 92k + 160$;

$k^3 - 17k^2 - 92k - 160 = 0$, por Ruffini obtengo

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -17 & 92 & -160 \\ 4 & & 4 & -52 & 160 \\ \hline & 1 & -13 & 40 & 0 \\ 5 & & 5 & -40 & \\ \hline & 1 & -8 & 0 & \end{array}$$

Soluciones: $k1 = 4$, $k2 = 5$, $k3 = 8$

Vectores propios:

$k1 \to v1 = (0, 1, -1)$, $k2 \to v2 = (1,1,1)$, $k3 \to v3 = (2,-1,-1)$

Normalizados tengo

$$u1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \quad u2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad u3 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$$

La nueva matriz respecto de esta base es

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$, y la relación entre esta y la matriz A de partida es

$$A = P.A'.P^t, \iff A' = P^t.A.P,$$ donde

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Nota: Hemos dado P^t por comodidad, siendo P la traspuesta de esta, es decir, las columnas de P son los vectores u_i de la nueva base ortonormal

B' ={u1,u2,u3}.

La nueva expresión de la f.c. es

$$g(x, y, z) = 4x^2 +5y^2 +8z^2$$

8.- En la base canónica B = {e1 = (1, 0), e2 = (0, 1)} una forma cuadrática tiene la expresión

$$f(x, y) = 4x^2 + 8y^2 -6xy$$

Determinar su nueva expresión respecto de la base

B'= {v1 = (1, 1), v2 = (-1, 1)}

Sol.: En la teoría hemos demostrado, y en algún problema anterio hemos hecho la comprobación, que si A es la matriz en la base canónica y A' en la nueva base, se cumple

$$f(x, y) \text{ -> } (x, y).A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x', y') \text{ -> } (x', y').A'.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Deducimos rápidamente la Matriz del cambio:

v = (x', y') = x'.(1,1) + y'.(-1,1) =

= x'.[e1+e2] + y'.[-e1+e2] = (x'-y').e1 +(x'+y').e2 -- >

$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$ -- > (x, y) = (x', y').$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde las filas son

los vectores de B' expresados en B.

o bien: (x, y) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, donde las columnas son los vectores de B' expresados en B.

NOTA:
Vemos cómo interviene el hecho de tomar vector-fila ó vector-columna.

Tomamos el criterio de vector-columna (por la derecha).

Matriz del cambio: P = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y tenemos

(x, y) = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, por ejemplo: v1 = (1, 0), v2 = (0, 1) en B', y entonces

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = (1, 1) = v1 en B

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = (-1, 1) = v2 en B

En las Formas bilineales: $X^t = P.X'$, $Y^t = P.Y'$

(X^t es la traspuesta de X, y su efecto es 'escribir el vector fila' en lugar de vector columna)

Tengo

$$X^t.A.Y = (P.X')^t.A.(P.Y') = X'^t.(P^t.A.P).Y'$$

y por tanto

$$A' = P^t.A.P$$

donde P es la matriz cuyas columnas son los vectores de la nueva base expresados respecto la antigua (aquí la canónica, y operando 'vector columna por la derecha': (x, y) = P.$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$).

En nuestro caso:

Tenemos A = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, P = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, P^t = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

A' = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$, -- > f(x, y) = $6x^2 + 8xy + 18y^2$

Una comprobación: Tomo el vector w = (3, 1) en la base B:

$$f(w) = (3, 1).\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (9, -1).\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 26$$

Expreso w en la base B': $(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ -- >

$\begin{cases} 3 = x' - y' \\ 1 = x' + y' \end{cases}$ -- > 2x' = 4, x'= 2, y'= -1

$$g(w) = (2, -1).\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (8, -10).\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 26$$

9.- Comprobar que las siguientes matrices tienen los mismos vectores propios y sin embargo no son semejantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol.:

NOTA Teórica:

Def.: Por definición, decimos que dos matrices A y B son semejantes si existe otra matriz P tal que $B = P^{-1}.A.P$

Esta propiedad es transitiva: Sea P tal que

$B = P^{-1}.A.P$, y Q tal que $C = Q^{-1}.B.Q$;

Tenemos

$C = Q^{-1}.(P^{-1}.A.P).Q = (Q^{-1}.P^{-1}).A.(P.Q) =$

$= (P.Q)^{-1}.A.(P.Q)$, de modo que se cumple:

'A y B son semejantes y B y C son semejantes lleva a que A y C son semejantes'

Se ha demostrado que si A y B son semejantes, entonces tienen los mismos v.p. Pero no se cumple el recíproco, y es lo que prueba este problema.

Pasamos a comprobarlo.

Valores propios de A: k1 = 5, k2 = 1 doble

Vectores propios: k1 -> v1 = (1,2,1),

k2 -> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> x + y + z = 0, y obtego

v2 = (1,-1,0), v3 = (1,1,-2)

Tomo la nueva base B' = {v2, v3, v1}, y la matriz del cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalización de A:

$A' = P^{-1}.A.P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

Semejanza: Si B fuese semejante con A lo sería también con A'. Veamos que esto no se cumple:

Suponemos comprobado que sus v.p. son: k1 = 5, k2 = 1 doble.

Subespacio de vectores propios asociado a k2:

$$k2 = 1 \dashrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

El rango de esta matriz es 2. Para que B sea diagonalizable ha de cumplirse que

3 – (multiplicidad de k2) = rango, pero: 3 - 2 = 1, y por tanto no se cumple.

Conclusión: B no es diagonalizable y en consecuencia no es semejante con A.

10.- Clasifica la siguiente cuádrica y determina su centro, si lo tiene:

C: $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xy + 6xz - 8yz + 6x + 8y - 2z + 3 = 0$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, /A/ = \ldots. = 736$$

$$A44 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 44\ ,\ \ A'33 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} =$$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 < 0;$

Se trata de una Hipérbola de una hoja.

Centro: Obtenemos las semi-derivadas y las igualamos a cero, obteniendo un sistema cuyas soluciones son las coordenadas del centro:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.fx(\ldots) = \frac{1}{2}.(2x - 4y + 6z + 6) = 0 \\ \frac{1}{2}.fy(\ldots) = \frac{1}{2}.(-4x - 4y - 8z + 8) = 0 \\ \frac{1}{2}.fz(\ldots) = \frac{1}{2}.(6x - 8y + 2z - 2) = 0 \end{cases}$$

Se obtienen: $x = \frac{27}{11}$, $y = \frac{15}{11}$, $z = \frac{-10}{11}$

11.- Determina la ecuación de la Superficie engendrada por la siguiente recta al girar alrededor del eje oz:

$$r: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$$

Sol.: Obtendremos las ecuaciones paramétricas.

De r tenemos: $\begin{cases} x + 2 = -2y \\ y = -z - 2 \end{cases}$ -> $\{x = -2 -2.(-z-2),$

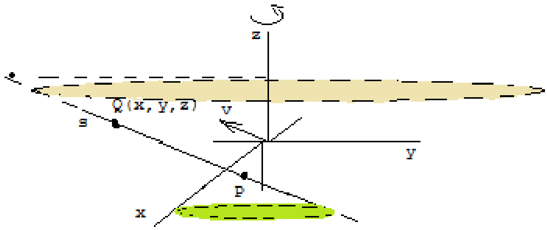
$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = t \end{cases}$$ (parametrización de la recta

con parámetro t). Debemos encontrar una relación entre x, y, z

$\begin{cases} x^2 + y^2 = (2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 \\ z = t \end{cases}$ -- > $x^2 + y^2 =$

$= (4z^2 + 4 + 8z) + (z^2 + 4 + 4z)$ -- > $x^2 + y^2 = 5z^2 + 12z + 8,$

Cuádrica: $x^2 + y^2 -5z^2 -12z -8 = 0$



12.- Clasifica la cuádrica y determina su Ecuación reducida:

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 -4xz + 2y -2z -1 = 0$

Sol.: La expresamos matricialmente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ldots., \ /A/ = 1, A_{44} = -2,$$

$A'_{33} = 2$; $a11.A_{44} = -2 < 0$ -> Hiperboloide de una hoja.

Ecuación reducida:

NOTA:
Para una Cuádrica se ha llegado a demostrar que la ecuación reducida es de la forma

$$k1.x^2 + k2.y^2 + k3.z^2 + \frac{|A|}{A_{44}} = 0 \text{ ,}$$

donde k1, k2, k3 son las soluciones de la llamada ‘Ecuación secular’:

$$/A_{44} - k.I/ = 0$$

En nuestro caso

$$0 = \begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 0 & 2-k & 0 \\ -2 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = [(1-k).(2-k).(3-k)] -$$

-[4.(2-k)] = (2-k).[(1-k).(3-k) -4] = …. ->

k1 = 2, k2 = 2+$\sqrt{5}$, k3 = 2-$\sqrt{5}$

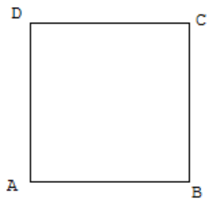
Los tomo ordenados de mayor a menor (por aplicar un criterio):

k1 = 2+$\sqrt{5}$, k2 = 2, k3 = 2-$\sqrt{5}$

Finalmente: $(2+\sqrt{5}).x^2 + 2.y^2 + \left(2-\sqrt{5}\right).z^2 + \frac{-1}{2} = 0$

C) Método vectorial: Demostración de algunas propiedades geométricas

1.- A, B, C y D son los vértices de un cuadrado. Tomo los vectores u = AB, v = CB, w = BD. Determina los ángulos: (u^3w), (2v^w), (-2u^3v)



Res.: (u^3w) = 135º, (2v^w) = 225º, (-2u^3v) = 90º

2.- Tomo los vectores u, v, w, del anterior. Calcula (* es el producto escalar):

(2u)*(-3v), (-u)*(2w), (-2w)*(4v)

Res.: (2u)*(-3v) = -6.(u*v) = 0,

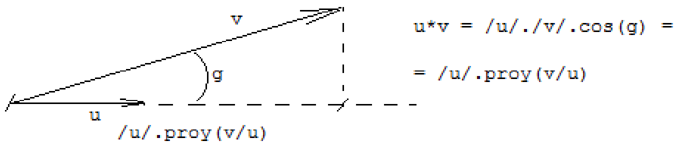
(-u)*(2w) = -2.(u*w) = -2./u/./w/.cos(135º) = -2.($\frac{-\sqrt{2}}{2}$). /u/./w/ =

= $\sqrt{2}$ ./u/./w/,

(-2w)*(4v) = -8./w/./v/.cos(135º) = -8.$\frac{-\sqrt{2}}{2}$. /w/./v/ = 4.$\sqrt{2}$. /w/./v/,

3.- Sabemos que la proyección (ortogonal) de v sobre u mide 5 veces el módulo de u (es decir, mide 5 unidades tomando /u/ como unidad de medida). Calcula u*v

Res.:



u*v = /u/.proy(v/u) = /u/.(5./u/) = 5./u/^{2}

4.- Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades (u, v, w son vectores):

a) (u+v-w)*(u+v+w) = (u+v)^2 –w^2

b) (u-v-w)*(u+v+w) = u^2 –(v+w)^2

5.- Sabemos que (u+v)^2 = 25, (u-v)^2 = 9, donde u, v son vectores. Calcula: u*v

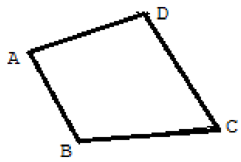
Res.: $\begin{cases} 25 = (u+v)*(u+v) = \cdots = u^2 + v^2 + 2.(u*v) \\ \quad 9 = (u-v)*(u-v) = u^2 + v^2 - 2.(u*v) \end{cases}$

de donde: 16 = 4.(u*v) -> u*v = 4

6.- Sean cuatro puntos cualesquiera del plano: A, B, C, D .
Comprueba que:

$$AB*CD + AC*DB + AD*BC = 0$$

Res.:



u = AB,   v = AC, w = AD

CD = AD-AC = w-v
DB = AB-AD = u-w
BC = AC-AB = v-u

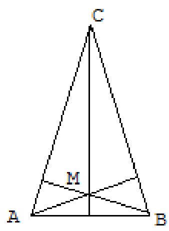
AB*CD + AC*DB + AD*BC = u*(w-v) + v*(u-w) + w*(v-u) =

 = u*w-u*v + v*u-v*w + w*v-w*u = 0,

ya que el producto a*b es conmutativo para todo par de vectores a, b.

7.- Vectorialmente, demuestra que las tres alturas de un triángulo (cualquiera) se cortan en un mismo punto.

Res.:



Llamo: u = AB, v = AC, w = AM

Por el resultado obtenido en 6 (anterior) sabemos que

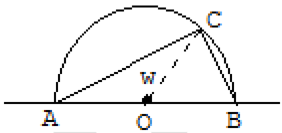
AB*CM + AC*MB + AM*BC = 0

Por ortogonalidad sabemos que AM*BC = 0, AB*CM = 0, y por tanto AC*MB = 0, con lo cual la altura desde B pasa por M.

Conclusión: Las tres alturas concurren en M.

8.- Vectorialmente, demuestra que cualquier triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto (tiene un ángulo de 90º).

Res.: v = OB, w = OC, OA = -v



CA = CO + OA = -w –v = - (v + w),

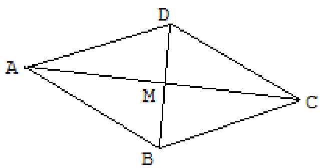
CB = CO + OB = -w + v = v - w,

CA*CB = -(v+w)*(v-w) = -[v*v –v*w + w*v –w*w] =

= -[/v/^{2} -/w/^{2}] = 0, ya que /v/ = /w/ = radio

9.- Vectorialmente, demuestra que las diagonales de un rombo son ortogonales.

Res.: u1 = AB, u2 = AD,



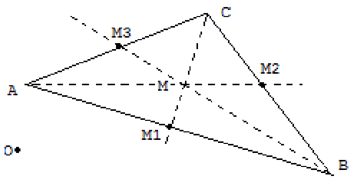
v = AC = u1+u2, w = BD = BA + AD = -u1+u2

v*w = (u1+u2)*(-u1+u2) = $-/u1/^2$+u1*u2-u2*u1 + $/u2/^2$ = … = 0,

ya que /u1/ = /u2/ por ser rombo.

10.- Propiedad de las medianas

Sea el triángulo de la figura en el hemos trazado sus tres medianas, suponiendo probado que concurren en un punto:



A(a1,b1), B(a2,b2), C(a3,b3)

OM2 = ((a2+a3)/2,(b2+b3)/2)

OM3 = ((a1+a3)/2,(b1+b3)/2)

AM2 = OM2-OA = ((a2+a3-2a1)/2,(b2+b3-2b1)/2)

BM3 = OM3-OB = ((a1+a3-2a2)/2,(b1+b3-2b2)/2)

OM = OA +k1.AM2

OM = OB +k2.BM3

OM = (a1, b1) + (k1.$\frac{a2+a3-2a1}{2}$, $k1.\frac{b2+b3-2b1}{2}$)

OM = (a2, b2) + (k2.$\frac{a1+a3-2a2}{2}$, $k2.\frac{b1+b3-2b2}{2}$) , de donde

$$\begin{cases} 2\mathrm{a1} + \mathrm{k1}.(a2 + a3 - 2a1) = 2\mathrm{a2} + \mathrm{k2}.(\mathrm{a1} + \mathrm{a3} - 2\mathrm{a2}) \\ 2b1 + k1.(b1 + b3 - 2a2) = 2\,b2 + k2.(b1 + b3 - 2b2) \end{cases}$$

Suponiendo que hemos tomado como eje ox la recta que soporta el lado AB (lo cual no resta validez al resultado) tengo: b1 = 0, b2 = 0, con lo cual queda

$$\begin{cases} 2a1 + k1.(a2 + a3 - 2a1) = 2a2 + k2.(a1 + a3 - 2a2) \\ k1.b3 = k2.b3 \end{cases} \quad ->$$

k2 = k1 , y entonces:

2a1 +k1.(a2+a3-2a1) = 2a2 +k1.(a1+a3-2a2)

2.(a1-a2) = k1.(a1+a3-2a2 –a2 –a3 + 2a1)

2.(a1-a2) = k1.(3a1 – 3a2) -> k1 = 2/3,

independiente de los vértices, y k2 = 2/3.

Evidentemente habríamos obtenido también k1 = 2/3, k3 = 2/3.

Conclusión:

El punto M es común a las tres medianas y se encuentra, en la mediana, a 2/3 del vértice y a 1/3 del punto medio del lado opuesto.

11.- En base ortonormal, determina las coordenadas del baricentro del triángulo ABC, siendo A(0; 4), B(2; 6), C(8; 0).

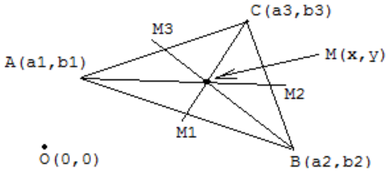
Res.: Obtengo G($\frac{10}{3}$; $\frac{10}{3}$)

Recuerda que el baricentro es el punto común a las tres medianas.

Fórmula: Supongo demostrado que el baricentro M se encuentra a 2/3 de cada uno de los vértices (verlo en Vol.5). Entonces

OM = OA+ 2/3.AM2 -> $\begin{cases} x = a1 + \frac{2}{3}.\left(\frac{a2+a3-2a1}{2}\right) \\ y = b1 + \frac{2}{3}.\left(\frac{b2+b3-2b1}{2}\right) \end{cases}$,

de donde: $\begin{cases} x = \frac{a1+a2+a3}{3} \\ y = \frac{b1+b2+b3}{3} \end{cases}$



AM2 = ((a2+a3-2a1)/2,(b2+b3-2b1)/2)
BM3 = ((a1+a3-2a2)/2,(b1+b3-2b2)/2)
CM1 = ((a1+a2-2a3)/2,(b1+b2-2b3)/2)

12.- En base ortonormal B = {u1, u2}, calcula la distancia

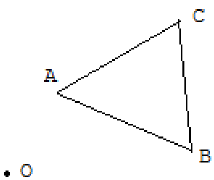
d(A, B), siendo AB = 5.u1-12.u2

Res.: d(A,B) = $\sqrt{AB * AB} = \cdots = \sqrt{169} = 13$, ya que

AB*AB = (5u1-12u2)*(5u1-12u2) = 25 + 144 = 169

13.- Vectorialmente y utilizando distancias, comprueba si los puntos A(-1; 3), B(0; 5), C(3; 1) forman triángulo rectángulo (Base ortonormal).

Res.:



OA = -u1 + 3u2, OB = 5u2, OC = 3u1 + u2

u = AB = OB-OA = u1 + 2u2,

v = AC = OC-OA = 4u1-2u2

w = BC = OC-OB = 3u1 + 4u2

u*v = (u1+2u2)*(4u1-2u2) = 4./u1/^{2} -2.(u1*u2) +

$+8.(u2*u1) -4./u2/^2 = 0$

Luego en A el ángulo es de 90º -- > es rectángulo.

Por distancias: $/u/^2 = (u1+2u2)*(u1+2u2) = /u1/^2 + 4./u2/^2 =$

$= 1 + 4 = 5$

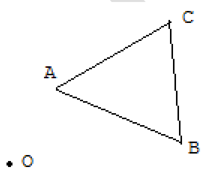
$/v/^2 = (4u1-2u2)*(4u1-2u2) = 16./u1/^2 +4./u2/^2 = 16 + 4 = 20$

$/w/^2 = (3u1+4u2)*(3u1+4u2) = 9./u1/^2 +16./u2/^2 = 9 + 16 = 25$

Vemos que: $/w/^2 = /u/^2 + /v/^2$ -- > Sí es rectángulo.

14.- Vectorialmente y utilizando distancias, comprueba si los puntos A(0; 4), B(0; 8), C(6; 5) forman triángulo isósceles (Base ortonormal).

Res.:



OA = 4u2, OB = 8u2, OC = 6u1+5u2

u = AB = OB-OA = 4u2,
v = AC = OC-OA = 6u1+ u2
w = BC = OC-OB = 6u1-3u2

Concluimos que No es isósceles, pues las distancias son las tres distintas.

Demostramos que G^t coincide con G^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(g1) & -sen(g1) & 0 \\ sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COMPLEMENTO / Refuerzo

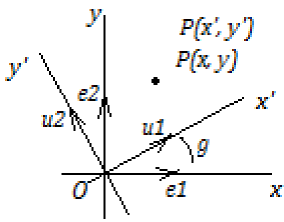
1.- Cambio de Sistema de referencia en el Plano

Cambio de Sistema de referencia (s.d.r.) de S (O; {e1, e2}) a S' (O; {u1, u2}). Llamo B = {e1, e2} y B' = {u1, u2}, que consideramos ortonormales, estando relacionadas mediante

u1 = a11.e1 + a12.e2

u2 = a21.e1 + a22.e2

Sea un punto P representado en las dos referencias.



OP = x.e1 + y.e2

OP = x'.u1 + y'.u2

Tengo:

x.e1 + y.e2 = x'.u1 + y'.u2 =

= x'.(a11.e1 + a12.e2) + y'.(a21.e1 + a22.e2) =

= (x'.a11 + y'.a21).e1 + (x'.a12 + y'.a22).e2 -- >

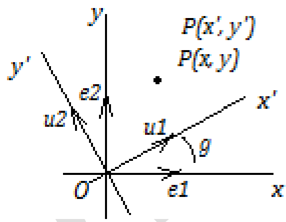
$$\begin{cases} x = x'.a11 + y'.a21 \\ y = x'.a12 + y'.a22 \end{cases}$$

o bien, matricialmente:

$$(x, y) = (x', y') \cdot \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$$

Giro del s.d.r. en el plano:

Realizo el giro G con centro en O y amplitud g, de tal forma que el eje Ox pasa a Ox', el eje Oy pasa a Oy'.



OP = x.e1 + y.e2

OP = x'.u1 + y'.u2

Sean las expresiones de la base B' en la base B:

u1 = a11.e1 + a12.e2

u2 = a21.e1 + a22.e2

x' = OP * u1 = (x.e1 + y.e2) * (a11.e1 + a12.e2) = a11.x + a12.y

y' = OP * u2 = (x.e1 + y.e2) * (a21.e1 + a22.e2) = a21.x + a22.y

Por otro lado

a11 = u1 * e1 = cos(g)

a12 = u1 * e2 = sen(g)

Por tanto: u1 = cos(g).e1 + sen(g).e2

a21 = u2 * e1 = - sen(g)

a22 = u2 * e2 = cos(g)

Por tanto: u2 = - sen(g).e1 + cos(g).e2

Volviendo a (1) tengo

$$\begin{cases} x' = \cos(g)\,.\,x + sen(g).\,y \\ y' = -sen(g).\,x + \cos(g)\,.\,y \end{cases}$$

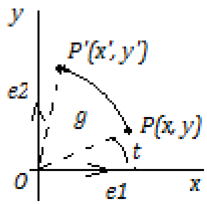
Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Giro de un punto en el plano

Vamos a ver cómo ocurre en el cado del giro con centro en O en el que la imagen de P(x, y) es P'(x',y')

En este caso el sistema de referencia queda fijo.



OP = x.e1 + y.e2

OP' = x'.e1 + y'.e2

x = OP * e1 = cos(t), y = sen(t)

x' = OP' * e1 = cos(t + g) = cos(t).cos(g) – sen(t).sen(g) =

$= \cos(g).x - \text{sen}(g).y$

$y' = \text{sen}(t + g) = \text{sen}(t).\cos(g) + \cos(t).\text{sen}(g) =$

$= \cos(g).y + \text{sen}(g).x$

$$\begin{cases} x' = \cos(g).x - sen(g).y \\ y' = sen(g).x + \cos(g).y \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observa que esta matriz es la traspuesta (también inversa) de la obtenida en el cambio de sistema de referencia.

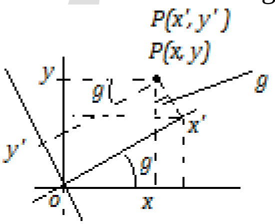
Observa que esta matriz es la traspuesta (también inversa) de la obtenida en el cambio de sistema de referencia, matriz (1)

Otra forma:

Giro del s.d.r. de referencia en el plano:

Observando la siguiente figura quedan justificada la relación entre las coordenadas (x, y), (x', y') de un punto P del plano.

Giro en sentido contrario a las agujas del reloj.



$x = x'.\cos(g) - y'.\text{sen}(g)$
$y = x'.\text{sen}(g) + y'.\cos(g)$

Expresado en forma de matriz (vector fila) (x, y) = (x', y').$\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$

Haciendo las traspuestas

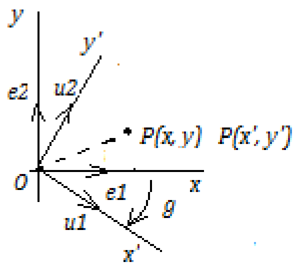
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que la inversa de la matriz coincide con la traspuesta nos queda

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observa que coincide con (1). Esto es así porque también aquí lo que realmente hacemos es un cambio de sistema de referencia.

Giro de un punto mediante un giro del s.d.r. en el plano



OP = x.e1 + y.e2
OP = x'.u1 + y'.u2
x' = OP * u1 = (x.e1 + y.e2) * u1 = x.(e1*u1) + y.(e2*u1) =
= cos(g).x + cos(pi/2 + g).y = cos(g).x - sen(g).y

y' = PO * u2 = (x.e1 + y.e2) * u2 = x.(e1*u2) + y.(e2*u2) =
= cos(pi/2 – g).x + cos(g).y = sen(g).x + cos(g).y

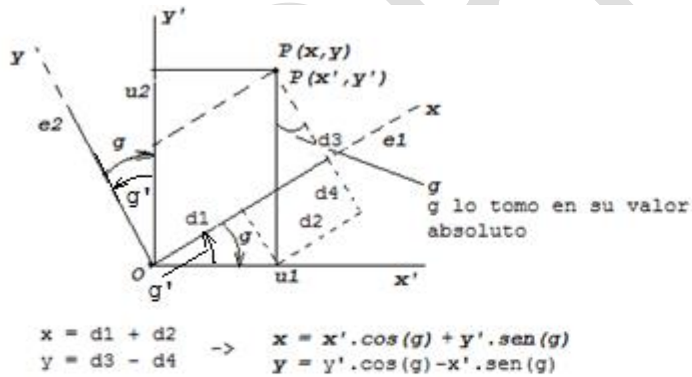
Por tanto, matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El mismo resultado anterior.

Giro: Caso de otra posición relativa:

El giro g se hace en el sentido de las agujas del reloj.



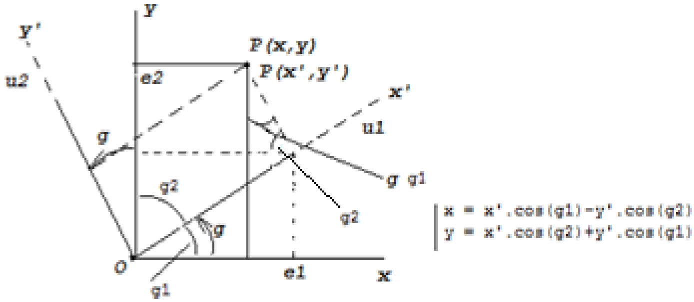
$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

$$(x', y') = (x, y).\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & cos(g) \end{pmatrix}$$

Giro expresado mediante los cosenos directores

Giro en sentido contrario a las agujas del reloj.

Me propongo expresarlo en función de los cosenos directores: cos(g1), cos(g2) de la recta ox’ conforme se muestra en la siguiente figura.



Teniendo en cuenta que sen(g1) = cos(90-g1) = cos(g2) nos queda

$$\begin{cases} x = x'.\cos(g1) - y'.\cos(g2) \\ y = x'.\cos(g2) + y'.\cos(g1) \end{cases}$$

donde cos(g1), cos(g2) son los cosenos directores de la recta Ox’ respecto del sistema de referencia S inicial.

Matricialmente

$$(x, y) = (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g1) & cos(g2) \\ -cos(g2) & \cos(g1) \end{pmatrix}$$

Realización práctica: Datos:

-Sistema de partida S = {O; ox, oy}, ortonormal y con la base canónica de vectores

B = {e1 = (1,0); e2 = (0,1)}

-Sistema destino S' = {O; ox', oy'}, ortonormal, que puede estar relacionado con el primero de tres formas posibles:

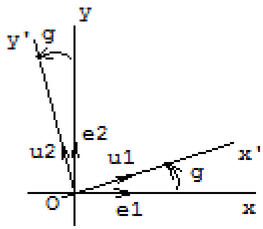
a) Conocemos la base B' = {u1, u2} asociada con S' es ortonormal y que viene dada por

$$\begin{cases} u1 = c11.e1 + c12.e2 \\ u2 = c21.e1 + c22.e2 \end{cases}$$

b) Conocemos la ecuación de la recta ox' respecto del sistema S

c) Conocemos el ángulo g que forma el eje ox' con el eje ox.

Resolución:
Caso a:



cos(g) = e1*u1 = c11 -- >

$$\begin{cases} \cos(g1) = c11 \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - c11^2} \end{cases}$$

Caso b:

Sea ox': ax + by = 0

Obtengo un vector director: x = b, y = -a

$$v = (b,-a) \text{ -- > } w = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\cos(g) = e1*w = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ -- >}$$

$$\begin{cases} \cos(g1) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}} \end{cases}$$

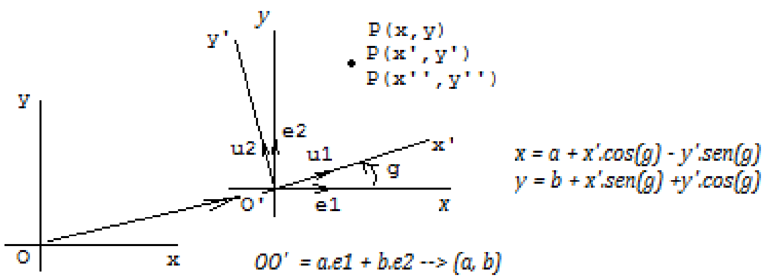
Observa: $\cos(g2) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Caso c:
En este caso lo tenemos muy sencillo

$$\begin{cases} \cos(g1) = \cos(g) \\ \cos(g2) = sen(g1) = \sqrt{1-\cos(g)^2} \end{cases}$$

2.- Movimiento: Traslación más giro

Al giro mostrado en la figura la traslación añade la suma del vector que traslada el origen O al origen O': OO' = (a, b)



Tengo

$$(x, y) = (a, b) + (x', y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

O bien

$$(x - a,\ y - b) = (x',\ y').\begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix}$$

y multiplicando por la derecha con la inversa

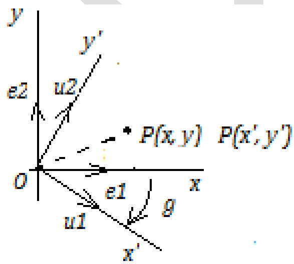
$$(x - a,\ y - b)\ .\ \begin{pmatrix} \cos(g) & -\,sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} = (x',\ y')$$

o bien tomando las traspuestas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & sen(g) \\ -sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

que es similar a la obtenida antes

3.- Giro en el espacio ligado a un plano



OP = x.e1 + y.e2
OP = x’.u1 + y’.u2

x’ = OP * u1 = (x.e1 + y.e2) * u1 = x.(e1*u1) + y.(e2*u1) =
= cos(g).x + cos(pi/2 + g).y = cos(g).x - sen(g).y

y’ = PO * u2 = (x.e1 + y.e2) * u2 = x.(e1*u2) + y.(e2*u2) =
= cos(pi/2 – g).x + cos(g).y = sen(g).x + cos(g).y

Por tanto, matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g) & -sen(g) \\ sen(g) & \cos(g) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observa que coincide con el resultado

4.- En el Espacio: Cambio de Sistema de referencia

Datos:

-Sistema de partida S = {O; ox, oy, oz}, ortonormal y con la base canónica

B = {e1 = (1,0,0); e2 = (0,1,0); e3 = (0,0,1)}

-Sistema destino S' = {O; ox', oy', oz'}, ortonormal, del que conocemos su relación con el sistema S de alguna de las siguientes formas:

a) Conocemos la base B' = {u1, u2, u3} asociada con S', ortonormal, dada por

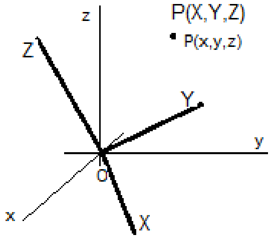
$$\begin{cases} \mathrm{u1} = \mathrm{c11.e1} + \mathrm{c12.e2} + \mathrm{c13.e3} \\ \mathrm{u2} = \mathrm{c21.e1} + \mathrm{c22.e2} + \mathrm{c23.e3} \\ u3 = c31.e1 + c32.e2 + c33.e3 \end{cases}$$

b) Conocemos la expresión del plano x'Oy' respecto del sistema S

Caso a)

OP = x.e1 + y.e2 + z.e3

OP = X.u1 + Y.u2 + Z.u3



Entonces

$$x.e1 + y.e2 + z.e3 = X.u1 + Y.u2 + Z.u3 =$$

$= X.(\mathrm{c11.e1} + \mathrm{c12.e2} + \mathrm{c13.e3}) + Y.(\mathrm{c21.e1} + \mathrm{c22.e2} + \mathrm{c23.e3}) + Z.(c31.e1 + c32.e2 + c33.e3) =$

$= (X.c11 + Y.c21 + Z.c31).e1 + (X.c12 + Y.c22 + Z.c32).e2 +$

$+ (X.c13 + Y.c23 + Z.c33).e3,$ y por tanto

$$\begin{cases} x = \mathrm{X.c11} + \mathrm{Y.c21} + \mathrm{Z.c31} \\ y = \mathrm{X.c12} + \mathrm{Y.c22} + \mathrm{Z.c32} \\ z = \mathrm{X.c13} + \mathrm{Y.c23} + \mathrm{Z.c33} \end{cases}$$

y matricialmente

$$(x, y, z) = (X, Y, Z) . \begin{pmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$(X, Y, Z) = (x, y, z) . \begin{pmatrix} c11 & c12 & c13 \\ c21 & c22 & c23 \\ c31 & c32 & c33 \end{pmatrix}^{-1} \qquad (2)$$

Caso b):

Cambio de s.d.r. mediante un giro G compuesto por tres giros

Deseamos pasar del Sistema S(O; x, y, z) al Sistema S'(O; x', y', z')

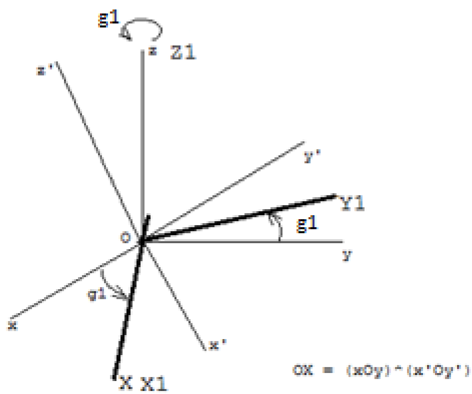
Sea OX la recta común a los planos de coordenadas xOy, x'Oy'.

Sea m: ax + by + cz = 0 el plano x'Oy' expresado en el sistema S.

Giro g1: Eje de giro el eje Oz, ángulo de giro g1 por el que el eje Ox pasa a la recta OX.

Obtendré cos(g1):

El eje ox pasa a la recta OX , pasando así al nuevo sistema de ejes (O; X1, Y1, OZ1). El plano X1OY1 es ortogonal con Oz, por serlo con OZ1.



Calculamos la recta OX intersección de los dos planos xOy, x'Oy' (xOy es el plano z = 0, por lo que OX está en z = 0).

Para la recta OX tengo

OX: $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ -- > $\begin{cases} ax + by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Obtengo vector director de OX haciendo:

x = b -- > y = -a -- > p1(b, -a, 0)
x = 0 -- > y = 0 -- > p2(0, 0, 0) , y obtengo

v = (b, -a, 0) , en la base B(e1, e2, e3), y su módulo |v| = $\sqrt{a^2 + b^2}$
Un vector director de Ox es e1

El producto escalar v*e1 = |v| . cos(g1) = $\sqrt{a^2 + b^2}$. cos(g1)

y por otro lado v*e1 = b , por tanto b = $\sqrt{a^2 + b^2}$. cos(g1), de donde

cos(g1) = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

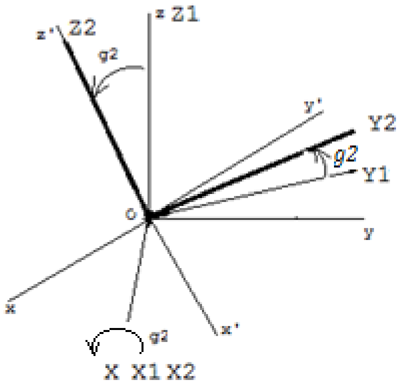
Resumen: cos(g1) = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Giro g2: Eje de giro es la recta OX , que es el eje OX1 del sistema de ejes (O; X1, Y1, Z1) , y ángulo g2 de modo que el eje Oz pasa a coincidir con el eje Oz', resultando el nuevo sistema de ejes (O; X2, Y2, Z2), donde OX2 coincide con OX1 y OZ2 coincide con Oz'.

Obtendré cos(g2):

El eje Oz pasa al eje Oz', el eje OY1 pasa al eje OY2.

Puesto que OX1 queda fijo, los nuevos ejes OZ2 y OY2 son ortogonales con OX1, es decir yacen sobre el plano ortogonal con OX.



Por otro lado, puesto que OZ2 coincide con Oz', el eje OY2 está sobre el plano x'Oy', y por tanto es la recta común a los planos X1OY1, x'Oy'.

Necesito el vector director w de la recta Oz' expresado en la base B(e1, e2, e3). El eje Oz' es ortogonal con el plano x'Oy' : ax + by +cz = 0, y por tanto nos vale el vector w = (a, b, c), en la base B(e1, e2, e3). Su módulo es

$$/w/ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Producto escalar w*e3 = |w|.|e3|.cos(g2) = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. cos(g2)

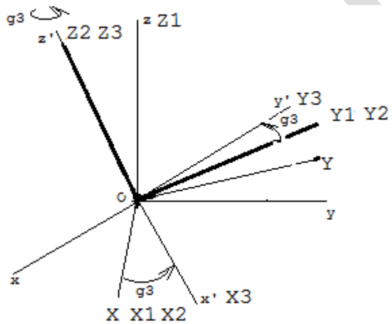
Por otro lado w*e3 = c, y por tanto c = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. cos(g2)

de donde cos(g2) = $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Resumen: $\cos(g2) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Giro g3: Eje de giro es el eje OZ2 (oz') y ángulo g3 de modo que la recta OX pase al eje Ox', y necesariamente la recta OY2 pasa al eje Oy'.

Obtendré cos(g3):



El ángulo g3 es el que forman la recta OX con la recta ox', que son conocidas ya que OX es la intersección de los planos xOy, x'Oy' y fue calculada al obtener g1, la segunda es el eje ox' del nuevo sistema de referencia.

Volviendo atrás:

Plano x'Oy': ax + by + cz = 0 , recta OX: $\begin{cases} ax + by = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Vimos que el vector director de OX es v = (b, -a, 0) , expresado en la base B(e1, e2, e3), y su módulo $|v| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Un vector director de Ox' es u1 expresado en B(e1, e2, e3).

Sea $\mathrm{u1} = \mathrm{c11.e1} + \mathrm{c12.e2} + \mathrm{c13.e3}$, cuyo módulo es

$$|u1| = \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$$

Teniendo en cuenta el producto escolar v*u1 = |v|.|u1|. cos(g3) =

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}} \cdot \cos(g3)$$

Por otro lado sabemos que v*u1 = b.c11 – a.c12, y por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}} \cdot \cos(g3) = b.c11 - a.c12,$$ de donde

$$\cos(g3) = \frac{b.c11 - a.c12}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$$

Resumen: $$\cos(g3) = \frac{b.c11 - a.c12}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{c11^2+c12^2+c13^2}}$$

Entonces, el giro G que deseamos realizar es el resultado de la composición de los tres giros anteriores (operando de derecha a izquierda):

Si operamos por columnas: $G = g_3.g_2.g_1$
Conocidos los tres ángulos tomamos las matrices de transformación obtenidas en el punto 4.3:

Obteniendo las nuevas coordenadas (x’, y’, z’) en función de las originales (x, y, z).

Continuamos:

Giro g1: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Giro g2: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Realizando g1 y a continuación g2 tengo

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro g3: Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

(Comprobadas)

Como en 4.3, realizamos la composición de los tres giros:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

=

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Productos: g3*g2*g1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix}.$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix}.$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} & \text{Col. 3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & \\ & & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & & \\ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \\ & & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Primer col. *Segunda col.* *Tercer col.*

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ \\ \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ \\ sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ \\ -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) \\ \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) \qquad -sen(g2)\cos(g1) \qquad \cos(g2) \end{pmatrix}$$

$$.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)

SEPARATA:

A modo de ejercicio lo realizamos de otro modo en las siguientes líneas. El lector puede saltarlo si no desea martirizar su intelecto.

Introducción: Teorema de rotación de Euler

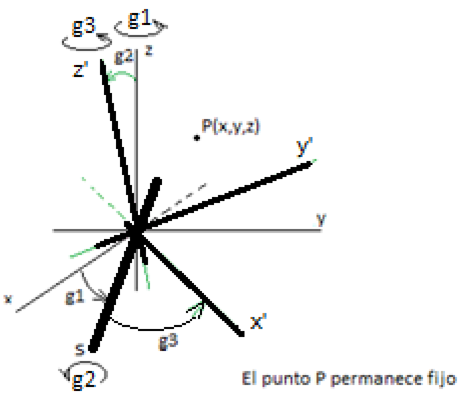
Este Teorema afirma: Todo giro G del Sistema de referencia R, alrededor de un eje s que pasa por O(0, 0, 0), puede ser descompuesto como producto de tres giros cuyos ejes sean alguno de los ejes coordenados.

El convenio adoptado consiste en hacer

-Giro con eje OZ
-Giro con eje el nuevo eje OX'
-Giro con eje el nuevo eje coordenado OZ'

Frente a otros convenios, este es designado mediante ZXZ.

Ángulos de Euler:



Se llaman 'ángulos de Euler' a los ángulos g1, g2, g3 mostrados en la figura. Algunas de las equivalencias encontradas en los textos consultados son:

Opción 1: $\alpha \equiv g1, \quad \gamma \equiv g2, \quad \beta \equiv g3$
Opción 2: $\alpha \equiv g1, \quad \beta \equiv g2, \quad \gamma \equiv g3$

Opción 3: $\varphi \equiv g1, \quad \theta \equiv g2, \quad \Psi \equiv g3$
Opción 4: $\Psi \equiv g1, \quad \theta \equiv g2, \quad \Phi \equiv g3$

Ángulos de Euler para un cambio de Sistema de referencia en el Espacio

Cambio de Sistema de referencia del s.d.r. S (O; {e1, e2, e3} al s.d.r. S' (O; {u1, u2, u3}, donde las bases B = {e1, e2, e3} y B' = {u1, u2, u3} de vectores son ortonormales.

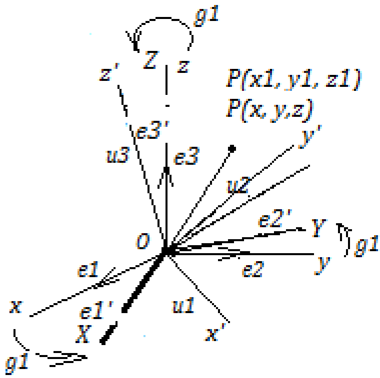
Las bases intermedias pasando de B hasta B' se suponen también ortonormales.

OX es la recta común a los dos planos Oxy , Ox'y'. Los giros a realizar son:

- Giro G1 con eje oz, ángulo g1 = [ángulo determinado por Ox , OX]
- Giro G2 con eje OX, ángulo g2 = [ángulo determinado por Oz, Oz']
- Giro G3 con eje Oz', ángulo g3 = [ángulo determinado por OX, Ox']

Giro G1: Eje oz, ángulo g1

El eje Ox pasa a OX, Oy pasa a OY.



OP = x.e1 + y.e2 + z.e3

OP = x1.e1' + y1.e2' + z1.e3' , donde {e1', e2', e3'} lo determinamos como sigue.

Expresamos : e1' = a11.e1 + a12.e2 + a13.e3

e2' = a21.e1 + a22.e2 + a23.e3

e3' = a31.e1 + a32.e2 + a33.e3

x1 = OP*e1' = (x.e1 + y.e2 + z.e3)*(a11.e1 + a12.e2 + a13.e3) = a11.x + a12.y + a13.z

Del mismo modo

y1 = OP*e2' = …………………… = a21.x + a22.y + a23.z

z1 = OP*e3' = …………………… = a31.x + a32.y + a33.z (1)

Calculamos los valores a_{ij}

a11 = e1' * e1 = cos(g1)

a12 = e1’ * e2 = cos(pi/2 – g1) = … = sen(g1)

a13 = e1’ * e3 = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e1’ = cos(g1).e1 + sen(g1).e2

a21 = e2’ *e1 = cos(pi/2 + g1) = … = - sen(g1)

a22 = e2’ * e2 = cos(g1)

a23 = e2’ * e3 = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e2’ = - sen(g1).e1 + cos(g1).e2

a31 = e3’ * e1 = … = 0
a32 = e3’ * e2 = … = 0
a33 = e3’ * e3 = cos(0) = 1

Por tanto: e3’ = e3

Volviendo a las expresiones (1) tengo:

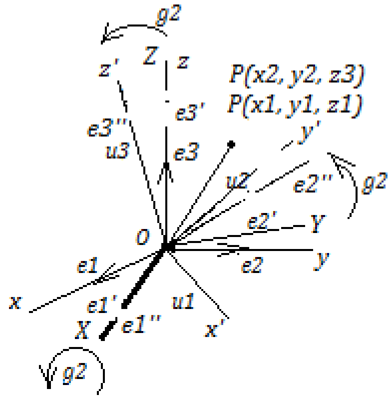
x1 = cos(g1).x + sen(g1).y
y1 = - sen(g1).x + cos(g1).y
z1 = z

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(Comprobada)}$$

Giro G2: Eje OX, ángulo g2

El eje OZ pasa al eje Oz’ de u3, el eje e2’ pasa al eje de e2’’ .



OP = x1.e1' + y1.e2' + z1.e3'

OP = x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'' , donde {e1'', e2'', e3''} lo determinamos como sigue.

Expresamos : e1'' = a11.e1' + a12.e2' + a13.e3'
e2'' = a21.e1' + a22.e2' + a23.e3'
e3'' = a31.e1' + a32.e2' + a33.e3'

Entonces:

x2 = OP*e1'' = (x1.e1' + y1.e2' + z1.e3')*(a11.e1'+ a12.e2' + a13.e3') = a11.x1 + a12.y1 + a13.z1

Del mismo modo

y2 = OP*e2'' =………..= a21.x1 + a22.y1 + a23.z1

z2 = OP*e3'' = ………. = a31.x1 + a32.y1 + a33.z1 (2)
Por otro lado tengo (Los ejes OX, OY, OZ son ortogonales entre sí)

a11 = e1'' * e1' = cos(0) = 1 ,

a12 = e1’’ * e2’ = cos(pi/2) = 0
a13 = e1’’ * e3’ = cos(pi/2) = 0

Por tanto: e1’’ = e1’

Tengo (Observa que el vector e1’ es ortogonal al plano OYZ, y que e2’’ está sobre este plano)

a21 = e2’’ *e1’ = cos(pi/2) = 0
a22 = e2’’ * e2’ = cos(g2)
a23 = e2’’ * e3’ = cos(pi/2 - g2) = … = sen(g2)

Por tanto: e2’’ = cos(g2).e2’ + sen(g2).e3’

Tengo (Observa que e1’ es ortogonal al plano OYZ, y que e3’’ está sobre este plano)

a31 = e3’’ *e1’ = cos(pi/2) = 0
a32 = e3’’ * e2’ = cos(pi/2 + g2) = … = - sen(g2)
a33 = e3’’ * e3’ = cos(g2)

Por tanto: e3’’ = - sen(g2).e2’ + cos(g2).e3’

Volviendo a las expresiones (2) tengo:

x2 = x1
y2 = cos(g2).y1 + sen(g2).z1
z2 = - sen(g2).y1 + cos(g2).z1

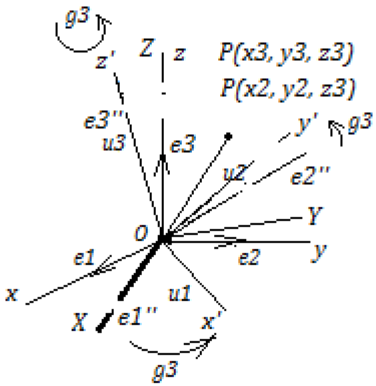
Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

(Comprobada)

Giro G3: Eje OZ’ , ángulo g3

El eje OX pasa al eje Ox’ de u1, el eje de e2’’ pasa al eje Oy’ de u2.



OP = x2.e1’’ + y2.e2’’ + z2.e3’’

OP = x3.u1 + y3.u2 + z3.u3 ,

La base {u1, u2, u3} es la base del sistema S’ de llegada. Desde el punto de vista teórico nos interesa expresarla en la base {e1’’, e2’’, e3’’ }

Expresamos : u1 = a11.e1’’ + a12.e2’’ + a13.e3’’
u2 = a21.e1’’ + a22.e2’’ + a23.e3’’
u3 = a31.e1’’ + a32.e2’’ + a33.e3’’

Entonces:

x3 = OP*u1 = (x2.e1’’ + y2.e2’’ + z2.e3’’)*(a11.e1’’ + a12.e2’’ + a13.e3’’) = a11.x2 + a12.y2 + a13.z3

Del mismo modo

y3 = OP*u2 = …… = a21.x2 + a22.y2 + a23.z2

z3 = OP*u3 = …… = a31.x2 + a32.y2 + a33.z2, (3)

Por otro lado tengo

a11 = u1 * e1'' = cos(g3) ,
a12 = u1 * e2'' = cos(pi/2 – g3) = … = sen(g3)
a13 = u1 * e3'' = cos(pi/2) = 0

Por tanto: u1 = cos(g3). e1'' + sen(g3).e2''

Tengo (Observa que los vectores e1'' y u2 son coplanarios, ya que OX es la intersección de Oxy con Ox'y')

a21 = u2 *e1'' = cos(pi/2+ g3) = - sen(g3)
a22 = u2 * e2'' = cos(g3)
a23 = u2 * e3'' = cos(pi/2) = 0

Por tanto: u2 = - sen(g3).e1'' + cos(g3).e2''

Tengo (Observa que el vector u3 es ortogonal con el plano Ox'y' , y por tanto lo es con e1'' . El vector e2'' es ortogonal con e3'' y por tanto lo es también con u3)

a31 = u3 *e1'' = cos(pi/2) = 0
a32 = u3 * e2'' = cos(pi/2) = 0
a33 = u3 * e3'' = cos(0) = 1

Por tanto: u3 = e3''

Por tanto, volviendo (3)

x3 = cos(g3).x2 + sen(g3).y2
y3 = - sen(g3).x2 + cos(g3).y2
z3 = z2

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas (x3, y3, z3) son las coordenadas en el sistema S', y debemos escribir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

Resumen:

Giro g1: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Giro g2: Matricialmente (vector columna)

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Realizando g1 y a continuación g2 tengo

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro g3: Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

(Comprobadas)

Realizamos la composición de los tres giros:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Productos: G3*G2*G1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3) & 0 \\ -sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(g3) & sen(g3)\cos(g2) & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3) & \cos(g3)\cos(g2) & \cos(g3)sen(g2) \\ 0 & -sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \cos(g1) & sen(g1) & 0 \\ -sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Col. 1 Col. 2 Col. 3

$$\begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix}$$

Entonces

X ’ =

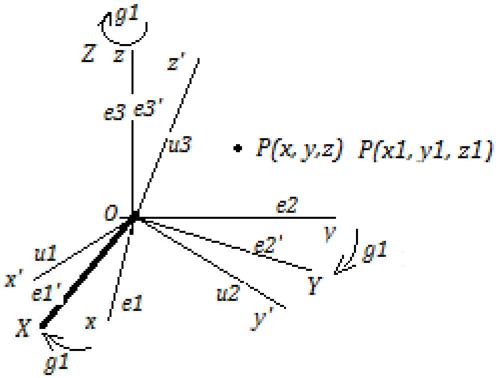
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{Primer col.} & \textit{Segunda col.} & \textit{Tercer col.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos(g3)\cos(g1) - sen(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & \cos(g3)\,sen(g1) + sen(g3)\cos(g2)\cos(g1)/ & sen(g3)sen(g2) \\ -sen(g3)\cos(g1) - \cos(g3)\cos(g2)\,sen(g1)/ & -sen(g3)sen(g1) + \cos(g3)\cos(g2)\cos(g1) & \cos(g3)\,sen(g2)/ \\ sen(g2)sen(g1) & -\,sen(g2)\cos(g1) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \mathrm{X} \end{array}$$

(/ separa elementos dentro de la fila)

Los ángulos g1, g2, g3, son los llamados “ángulos de Euler”.

B) Rotación en el Espacio mediante el cambio de s.d.r.

Giro G1:



OP = x.e1 + y.e2 + z.e3
OP = x1.e1’ + y1.e2’ + z1.e3’

x1 = OP*e1’ = (x.e1 + y.e2 + z.e3) * e1’ =

= x.(e1*e1’) + y.(e2*e1’) + z.(e3*e1’) =

= cos(g1).x + cos(pi/2 + g1).y + 0.z = cos(g1).x – sen(g1).y

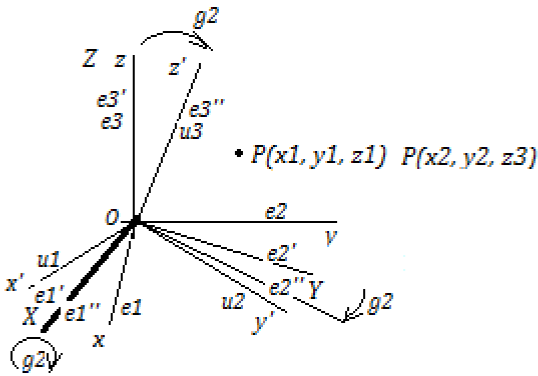
y1 = OP*e2’ = (x.e1 + y.e2 + z.e3) * e2’ =
= x.(e1*e2’) + y.(e2*e2’) + z.(e3*e2’) =
= cos(pi/2 – g1).x + cos(g1).y + 0.z = sen(g1).x + cos(g1).y

z1 = OP*e3’ = (x.e1 + y.e2 + z.e3) * e3’ =
= x.(e1*e3’) + y.(e2*e3’) + z.(e3*e3’) = 0.x + 0.y + cos(0).z = z

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g1) & -sen(g1) & 0 \\ sen(g1) & \cos(g1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Giro G2:



OP = x1.e1' + y1.e2' + z1.e3'

OP = x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'' ,

Entonces: (Los ejes OX, OY, OZ son ortogonales entre sí)

x2 = OP*e1'' = (x1.e1' + y1.e2' + z1.e3')*e1'' =
= x1.(e1'*e1'') + y1.(e2'*e1'') + z.(e3'*e1'') =
= cos(0).x1 + cos(pi/2).y1 + cos(pi/2).z1 = x1

y2 = OP*e2'' = (x1.e1' + y1.e2' + z1.e3')*e2'' =
= x1.(e1'*e2'') + y1.(e2'*e2'') + z1.(e3'*e2'') =
= cos(pi/2).x1 + cos(g2).y1 + cos(pi/2 + g2).z1 =
= 0.x1 + cos(g2).y1 – sen(g2).z1

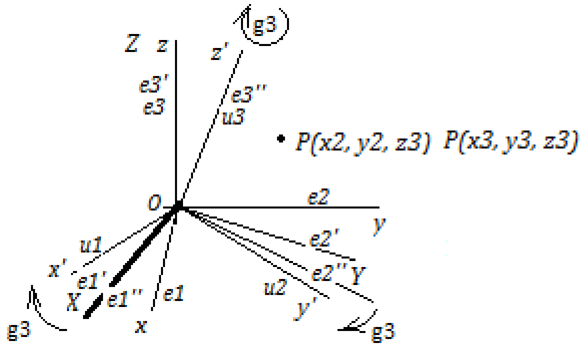
z2 = OP*e3'' = (x1.e1' + y1.e2' + z1.e3')*e3'' =

= x1.(e1'*e3'') + y1.(e2'*e3'') + z1.(e3'*e3'') =
= cos(pi/2).x1 + cos(pi/2 – g2).y1 + cos(g2).z1 =
= 0.x1 + sen(g2).y1 + cos(g2).z1

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(g2) & -sen(g2) \\ 0 & sen(g2) & \cos(g2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix}$$

Giro G3:



OP = x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3''

OP = x3.u1 + y3.u2 + z3.u3 ,

La base {u1, u2, u3} es la base del sistema S' de llegada.

Entonces: (Observa que e1' es ortogonal al plano OYZ, y que e3'' está sobre este plano, y también que OY y OZ son ortogonales)

x3 = OP*u1 = (x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'') * u1 =
= x2.(e1'' * u1) + y2.(e2'' * u1) + z2.(e3'' * u1) =
= cos(g3).x2 + cos(pi/2 + g3).y2 + cos(pi/2).z2 =
= cos(g3).x2 – sen(g3).y2 + 0.z2

y3 = OP*u2 = (x2.e1'' + y2.e2'' + z2.e3'') * u2 =

= x2.(e1'' * u2) + y2.(e2'' * u2) + z2.(e3'' * u2) =
= cos(pi/2 –g3).x2 + cos(g3).y2 + cos(pi/2).z2 =

= sen(g3).x2 + cos(g3).y2 + 0.z2

(Observa que los vectores e1’’ y u2 son coplanarios, ya que OX es la intersección de Oxy con Ox’y’)

(Observa que el vector u3 es ortogonal con el plano Ox’y’ , y por tanto lo es con e1’’ . El vector e2’’ es ortogonal con e3’’ y por tanto lo es también con u3)

z3 = OP*u3 = (x2.e1’’ + y2.e2’’ + z2.e3’’) * u3 =
= x2.(e1’’ * u3) + y2.(e2’’ * u3) + z.(e3’’ * u3) =
= cos(pi/2).x2 + cos(pi/2).y2 + cos(0).z2 = z2

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & -sen(g3) & 0 \\ sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas (x3, y3, z3) son las coordenadas de P en el sistema S’, y debemos escribir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(g3) & -sen(g3) & 0 \\ sen(g3) & \cos(g3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

Álgebra y Geometría Analítica
Autor: Francisco Granero Rodríguez
Edita: McGraw-Hill (Ediciones La Colina, S.A. (España))
Edición de 1985

Lecciones de Álgebra
5ª Edición, Madrid 1960
Julio Rey Pastor

Elementos de Matemáticas
4ª Edición
Julio Rey Pasto y A. de Castro
S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)
Madrid 1967

Análisis Matemático, Volúmenes I, II, III
Octava Edición 1969
Autores: Julio Rey Pastor
Pedro Pi Calleja
César A. Castro
Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires (Argentina)

Análisis Numérico, Teoría y Problemas
Autor: Francis Scheid
Editorial: McGraw-Hill, 1972, México

Cálculo Numérico Fundamental
Autor: B.P. Demidovich
I.A. Maron
Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid

Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático
Autor: B. Demidovich y Otros
Traducido: Antonio Molina García (Ingeniero)
Editorial: Paraninfo, Madrid, 1969

Introducción a la Teoría Analítica de Números
(Introduction to Analytic Number Theory)
Autor: Tom M. Apostol
Traducción: José Plá Carrera
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1980

Análisis Matemático
Autor: Tom M. Apostol
Edita: Editorial Reverté, S.A., BARCELONA, 1960

La Sinfonía del Infinito (y ya en el paraíso de Euler)
(99 lecciones de Análisis Matemático)
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Edita: Ediciones Universidad de Salamanca y
Norberto Cuesta Dutari, Salamnca 1981

Geometría Básica
Autor: Pedro Abellanas
(Copyright by the Author)
Editorial Romo, S.L., Madrid, año: 1969

Álgebra
Autor: Serge Lang (Universidad de Colombia)
Traducción: Milagros Ancochea
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1971

Álgebra Moderna
Autor: A. Lentin y J. Rivaud
Traducción: Emilio Motilva Ylarri
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1965

Ejercicios de Álgebra Moderna
Autor: A. Lentin y J. Rivaud
Traducción: Emilio Motilva Ylarri
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1965
Lecciones de Álgebra Moderna
Autor: P. Dubreil, M.L. Dubreil-Jacotin
Traducción: R. Rodríguez Vidal
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1971

Álgebra Superior (Higher Algebra)
Autor: H.S. Hall, M. A., y S.R. Knight, B.A.
Traducción: Rafael García Díaz
Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México,
Reimpresión de 1969

Teoría Algebraica de Números
Autor: Pierre Samuel
Traducción: Manuel Udina Abelló y Mª José Castello Esnal
Ediciones Omega, S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

Elementos de álgebra abstracta
Autor: A. Clark
Traducción: A. López-Lago y J. Margaref Roig
Editorial Alhambra, S.A., Madrid 1974

Álgebra Moderna
Autor: I.N. Herstein
Traducción: Federico Velasco Coba
Editorial F. Trillas, S.A., México 1970

Curso de Álgebra Moderna
Autor: Peter Hilton y Yel-Chiang Wu
Editorial Reveté, S.A., Barcelona, año: 1977
Álgebra Binaria de Boole, y sus Aplicaciones a la Informática
Autor: Raoul de Palma
Traducción: Rafael Romero Mercadal
Editorial: Marcombo, S.A. de Boixareu Editores, Barcelona, año: 1973
Introducción al Álgebra Conmutativa
(Introduction to Conmutative Algebra)
Autor: M.F. Atiyah y I.G. Macdonald
Traducción: Griselda Pascual Xufré
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1973

Teoría de Galois
Autor: Emil Artin
Traducción: R. Rodríguez Vidal

Editorial Vicens-vives, año: 1970
(Colección de Matemáticas “Nuevo Límite)

Álgebra Lineal
Autor: Daniel Hernández Ruipérez
Ediciones Universidad de Salamanca, año: 1990

Geometría Vectorial
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Editorial Alhambra, S.A., Madrid 1968

Geometría Diferencial Clásica
Autor: Dirk J. Struik
Traducción: L. Bravo Gala
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1966

Geometría Métrica (Curso de ..), Tomo I – Fundamentos
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, 13ª Edición 1977
Geometría Métrica (Curso de ..), Tomo II- Complementos
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, Novena Edición 1970

Geometría Descriptiva
Autor: Fernando Izquierdo Asensi
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1979

Geometría Descriptiva Superior y Aplicada
Autor: Fernando Izquierdo Asensi
Editorial Dossat, S.A., Madrid, Año: 1975

Traté de Mathématiques Speciales: 3 GÉOMÉTRIE
Autores: G. Cgnac, E.Ramis, J.Commeau
Editorial: MASSON y Cie., 1971, Francia

Cálculo Integral (Aplicado a la Física t Técnica)
Tomo I (Curso de Análisis Matemático para Ingenieros)
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, año: 1970

Análisis Estadístico Aplicado
Autor: Sixto Ríos
Paraninfo, Madrid, año: 1976

Cálculo Diferencial
Autor: Henri Cartan
Traducción: Amadeo Guasch
Editorial Omega S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

Formas Diferenciales
Autor: Henri Cartan
Traducción: Amadeo Guasch
Editorial Omega S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

Notas sobre geometría diferencial (Notes on differential geometry)
Autor: Noel j. hicks
Traducción: Francisco Pañella y otros
Editorial Hispano Europea, Barcelona (España), año: 1974
Representaciones Lineales de los Grupos Finitos
Autor: Jean-Pierre Serre
Traducción: Sebastián Xambó
Editorial Omega S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1970

Topología
Autor: E.M. Patterson
Traducción: Lino Álvarez Valdés y Fernando Vicente
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1961

Topología general y algebraica
Autor: Wolfgang Franz
Traducido por: Juan Ochoa Mélida
Selecciones Científicas, Madrid, año: 1968

Programación Lineal
Autor: Laureano F. Escudro
Ediciones Deusto, S.A. Año: 1976

Teoría elemental de las funciones analíticas de una
o varias variables complejas
Autor: Henry Cartan (Profesor Ciencias de París)
Traducción: Antonio Pardo Fraile (Catedrático de Matemáticas de
I.N. de E. Medias
Edita: Selecciones Científicas, 1968

Análisis Matemático II, Topología y Cálculo Diferencial
Autor: Jose Antonio Fernández Viñas
Edita: Tecnos, Segunda edición 1992

Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático I
Autor: J.A. Fernádez Viñas
Edita: Tecnos, Cuarta edición 1992

ANALYSE (Matemático)
COLLECTION U, M.P. Premiere annee et speciales, t.1
Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra
Edita: Librairie Armand Colin, París 1967

ANALYSE (Matemático)
COLLECTION U, M.P. Deuxieme annee et speciales, t.2
Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra
Edita: Librairie Armand Colin, París 1967

Álgebra Superior
Autor: H.S. Hall (del Christ's College, Cambridge), y
S.R. Khight (del Trinity College, Cambridge)
Traducción: Rafael García Díaz
Editado: UTEHA (Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana),
México, 1969

Ejercicios de Álgebra Superior
Autor: H.S. Hall (del Christ's College, Cambridge), y S.R. Khight (del
Trinity College, Cambridge)
Traducción: Rafael García Díaz
Editado: UTEHA (Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana)
México, 1969

Álgebra Lineal (incluyendo Teoría de Conjuntos),
y Problemas resueltos
Autor: Alberto Luzárraga
Editado por el autor, Barcelona 1968
Teoría de Conjuntos y Temas Afines (Teoría y Proble.)
Autor: Seymour Lipschutz
Editorial: Libros McGraw-Hill, 1969,México
Serie compendios SCHAUM

Teoría de Conjuntos y Grafos
Autor: … Lipchit ,
Editado: McGraw-Hill, México 1970

Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas
Autor: Murray R. Spiegel (Profesor de Matemáticas del Rensselaer Polytechnic Institute)
Traducido: Orlando Guerrero Ribero

NOTACIÓN y Nomenclatura. Valores:

Símbolo Significado

* Producto escalar

. Producto

^ Potencia

sqr(a) Raíz cuadrada

rad(a) Raíz cuadrada

rad(a;n) Radical con índice n

rad(a;n/m) Radical con índice n/m

∈ significa 'pertenece a'

∞ infinito

exp(x) Exponencial: exp(x) = e^x

exp(x;a) Exponencial de base a>0:

exp(x;a) = a^x

ln(x) Logaritmo neperiano:

y = ln(x) <--> x = e^y

log(x;a) Logaritmo base a>0:

y = log(x;a) <--> x = a^y

≅ aproximado

Δ incremento

< menor que, > mayor que, Ej.: $x < y$, $x > y$

Valores:

π = 3,1415927...   (número pi, en radianes)

pi = 3,1415927...   (número pi, en radianes)

e = 2,7182818...   (número e, base de ln(x))

sen(0) = 0   cos(0) = 1

sen(pi/6) = $\frac{1}{2}$ cos(pi/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

sen(pi/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(pi/3) = $\frac{1}{2}$

sen(pi/2) = 1,   cos(pi/2) = 0