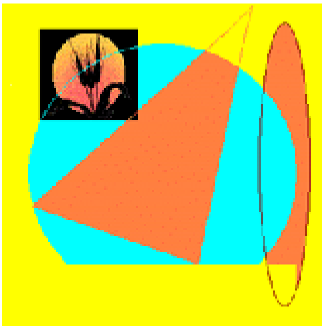
TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 8

Aplicación del Cálculo Diferencial

Representación Gráfica



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado

Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su estudio.

Obra completa:
Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto

Figuras y gráficos del autor

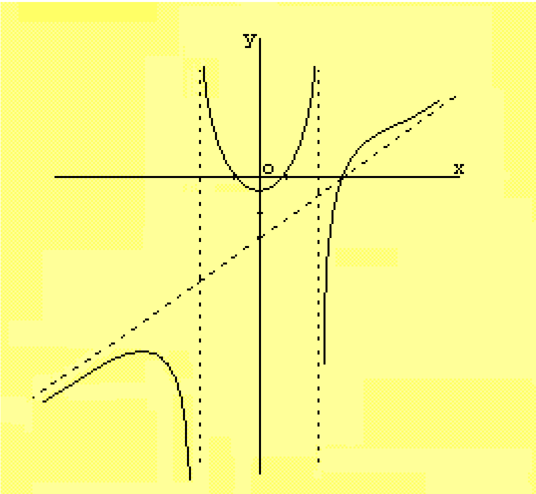
Edita: *El Autor*

Edición Marzo 2019
Editado en España

ISBN:
Depósito Legal:

VOLUMEN 8

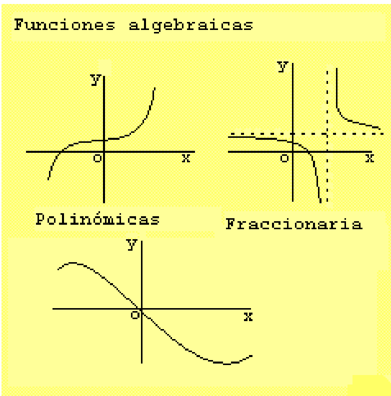
Aplicación del Cálculo diferencial
Representación gráfica



ÍNDICE

Tema 1

Representación de las Funciones básicas algebraicas y las Funciones elementales trascendentes (f.e.t)



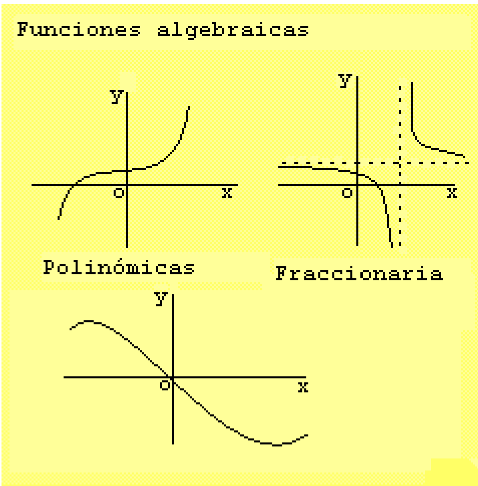
1.1.- Representación gráfica de las funciones básicas algebraicas

Llamamos funciones básicas algebraicas las de la forma:

Polinómica: $y = p(x)$

Racionales: $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Sus gráficas toman la siguiente forma



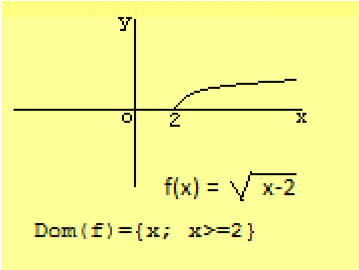
Ejemplo de funciones básicas no algebraicas son la de la forma

$$f(x) = \sqrt{g(x)},\ \ f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

llamadas 'Irracionales'.

Un caso concreto es

f(x) = $\sqrt{x-2}$, en la figura

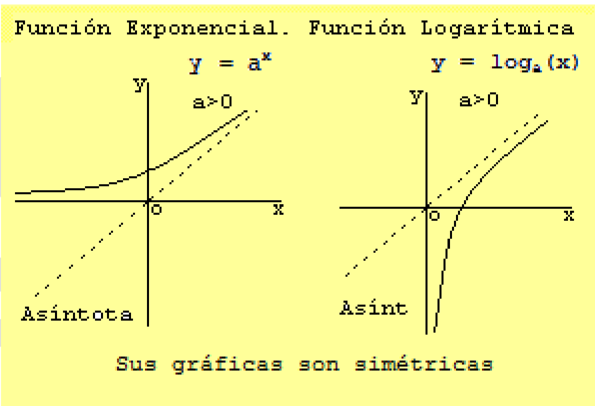


1.2.- Funciones elementales trascendentes

Remitimos al alumno al Volumen 6 donde se definen las funciones básicas-elementales, a las que nos referimos a continuación.

1.2.1.- Exponencial: $y = a^x$

Logarítmica: $y = \ln(x), \quad y = \log_a(x)$



En la figura mostramos sus gráficas. Téngase en cuenta que la función logarítmica

$y = \log_a(x)$ es la recíproca de la exponencial $y = a^x$. Cuando a = e resulta el neperiano ln(x).

Observa que la exponencial $y = a^x$ crece en todo su recorrido. En consecuencia no contiene extremos relativos. Lo mismo su recíproca $y = \log_a(x)$. Hay que hacer notar que la exponencial no corta al eje ox, y al eje oy lo corta en (0,1), conforme al hecho de que $a^0 = 1$.

La logarítmica corta a ox en (1,0), conforme al hecho de que $\log_a(1) = 0$, cualquiera sea a>0. Este punto es simétrico del punto (0,1).

Ejemplos:

a) Base a = 3: $y = a^2 = 9$, $y = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

$$y = a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{81}$$

$$y = a^{-1/2} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Base $a = \frac{1}{5}$: $y = a^3 = \frac{1}{125}$, $y = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

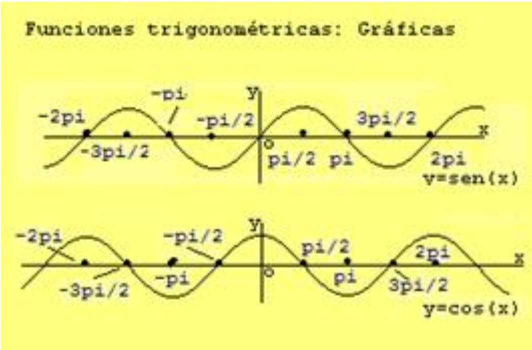
$$y = a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

$$y = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{5}$$

1.2.2.- Trigonométricas:

A) $y = sen(x)$

$y = \cos(x)$



Observa los extremos locales que se dan para los siguientes valores de x, máximo o mínimo:

sen(x): En pi/2, 3pi/2, …, -pi/2, -3pi/2, …,

cos(x): En 0, pi, 2pi, …, -pi, -2pi, …,

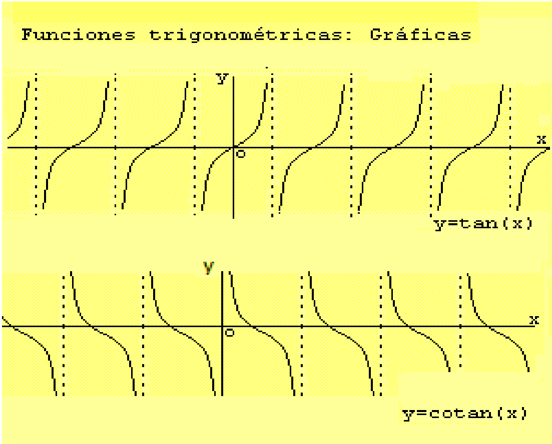
B) $y = \tan(x)$, $y = \cot a(x)$

Sus gráfica la vemos en la siguiente figura

Observa que no tienen extremos locales.

tan(x) siempre crece en los intervalos donde está definida.

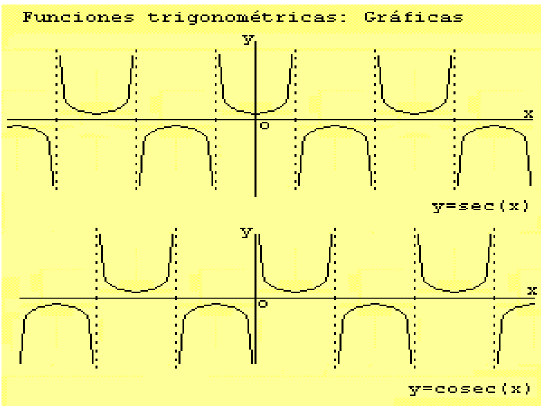
Corta al eje ox allí donde sen(x) = 0, y la asíntota vertical allí donde cos(x) = 0.



cota(x) siempre decrece donde está definida.

No tiene extremos locales. Corta al eje ox allí donde cos(x) = 0. Las asíntotas verticales allí donde sen(x) = 0.

C) $y = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, $\quad y = \mathrm{cose}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)}$



No corta al eje ox. Tiene mínimo local donde cos(x) tiene máximo, y tiene máximo donde cos(x) tenga mínimo. Asíntotas verticales donde cos(x) = 0.

No corta al eje ox. Tiene mínimo local donde sen(x) tiene máximo, y tiene máximo donde sen(x) tenga mínimo. Asíntotas verticales donde sen(x) = 0.

Ejemplos:

a) Cuando ángulo a = 60º

sen(60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos(60º) = $\frac{1}{2}$,

tan(60º) = $\frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, cota(60º)= $\frac{2}{2.\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

sec(60º) = 2 , cose(60º) = $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{3}$

b) Practica lo mismo cuando a = 30º, y cuando a = 45º

c) Practica lo mismo cuando a = $\frac{pi}{2}$ $rad.$, y cuando a = $\frac{pi}{6}$ $rad.$

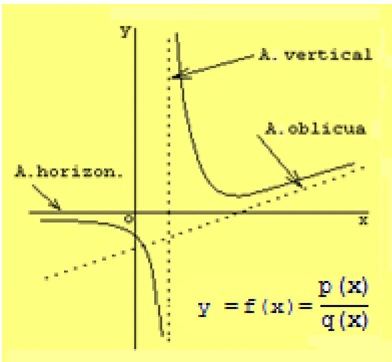
$$$$oOo$$$$

Tema 2

Conceptos y Elementos básicos para la Representación gráfica.

Representación gráfica.

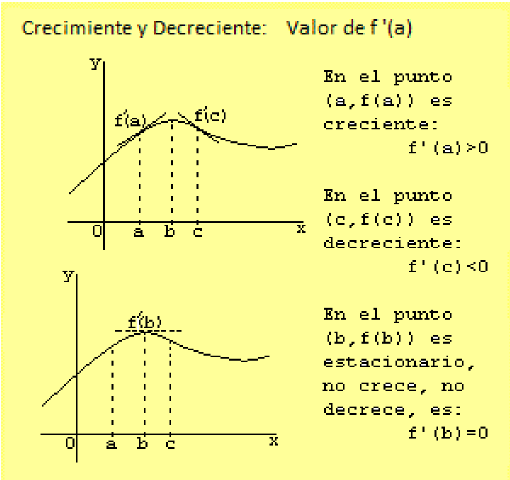
Problemas de optimización



2.1.- Crecimiento-Decrecimiento

Definiciones:

La función 'crece' en x = a si en un entorno U(a,h) de 'a', cuando $\Delta x > 0$ también es $\Delta y > 0$.



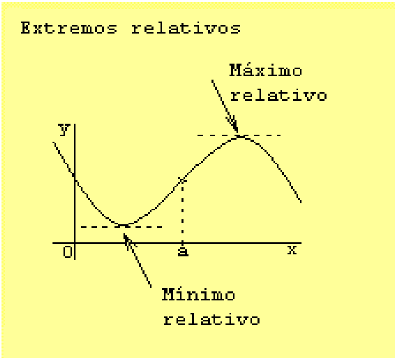
La función 'decrece' en x=a si en un entorno U(a,h) de 'a', cuando $\Delta x > 0$ es $\Delta y < 0$.

2.2.- Extremos relativos. Extremos absolutos

Definiciones: Observa la figura

Aclaramos los siguientes conceptos.

Un mínimo relativo en la gráfica es como 'un valle', mientras que un máximo relativo es como 'una cumbre' ó 'una cresta'.



En términos Matemáticos y con rigor se definen como sigue.

Recordamos qué es un entorno:

Un entorno abierto de 'a', de radio r, es el conjunto de puntos
U(a, r) = {x; abs(x-a) < r}

Un entorno cerrado de 'a', de radio r, es el conjunto de puntos
U(a, r) = {x; abs(x-a) <= r}

NOTA: Indistintamente hablaremos de extremo local y de extremo relativo.

MÍNIMO relativo:

"f(x) tiene un mínimo relativo en x=a si existe un entorno U(a,h) de 'a' tal que f(x) > f(a) cuando x está en U(a,h)"

MÁXIMO relativo:

“f(x) tiene un máximo relativo en x=a si existe un entorno U(a,h) de ‘a’ tal que f(x) < f(a) cuando x está en U(a,h)”

MÍNIMO absoluto:
“f(x) tiene un mínimo absoluto (estricto) en x=a si f(x) > f(a) para todo x de Dom(f)”.

MÁXIMO absoluto:
“f(x) tiene un máximo absoluto (estricto) en x=a si f(x)<f(a) para todo x de Dom(f)”

NOTA:
Los valores x = a donde se dan los extremos locales se calculan fácilmente haciendo aplicación de las derivadas como vemos a continuación.

2.2.1.- Condición necesaria para la existencia de extremos locales

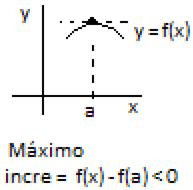
Sea y = f(x). Teniendo en cuenta la definición de extremos locales y observando las gráficas, en los dos casos ocurre que, si (a,f(a)) es un extremo local, la derivada f’(a) se anula:

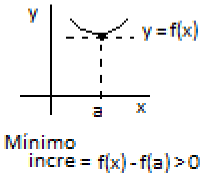
$$f'(a) = 0$$

En el caso del máximo el valor de f’(x) pasa de ser creciente a ser decreciente, y por continuidad en x = a su valor es cero. En el caso de mínimo pasa de decreciente a creciente, y en x = a su valor es cero.

Conclusión:

Condición necesaria para que f(x) tenga extremo local en x = a es que f'(a) = 0.





Cuando tengo máximo: Δy = f(x)-f(a) < 0 para todo x en (a-h,a+h).

La formalización de estas afirmaciones la tenemos en el Teorema de Fermat.

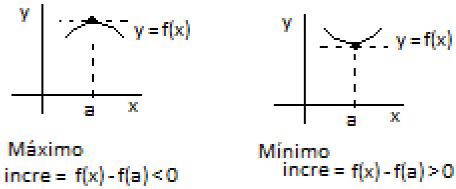
2.2.2.- Condición suficiente para extremos locales

En el punto 4.3, se muestra la aplicación del desarrollo de Taylor al análisis de los extremos. Brevemente tenemos lo siguiente.

Cuando el punto P(a, f(a)) sea un punto crítico, es decir que f'(a) = 0, entonces queda

$$\Delta y = f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots + o(h^2)$$

Para un valor de h tal que |h| sea suficientemente pequeño, el signo de Δy es el mismo de $\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2$, y por tanto el mismo que el de f''(a). Tenemos así los siguientes criterios:



Cuando tengo máximo: Δy = f(x) - f(a) < 0, y por tanto ha de ser f''(a) < 0.

Cuando tengo mínimo: Δy = f(x)-f(a) > 0, y por tanto ha de ser f''(a) > 0.

Resumen: $\begin{cases} f''(a) > 0 \rightarrow Mínimo \\ f''(a) \ < 0 \rightarrow Máximo \end{cases}$

Ejemplo:

Calcula el vértice de las siguientes parábolas:

a) $2x^2 + 2y - 8 = 0$, b) $2y - 2x^2 + 8 = 0$

c) $2y^2 + 2x - 8 = 0$ d) $-2y^2 + 2x + 8 = 0$

Res.: a) V(0,4), ….. c) V(4,0)

2.2.3.- Cálculo del máximo o mínimo absolutos:

Caso A:
Supongamos que su dominio es un intervalo cerrado: Dom(f) = [a, b], y que f(x) es continua en su dominio.
Obtenemos los extremos relativos, sean los puntos x = a1, x = a2, ..., x = ak donde la derivada se anula. En algunos tendrá un máximo, en otros

tendrá un mínimo. Incluimos además los puntos x = a, x = b, extremos del intervalo.

Calculamos el valor de f(x) en estos puntos:
{f(a), f(a1), f(a2), ..., f(ak), f(b)}"

Tomo el mayor de estos valores, sea $f(a_k)$. Entonces su Máximo absoluto lo toma en $x = a_k$

Para el Mínimo absoluto tomamos el menor de los valores, sea $f(a_k)$, y el minimo lo toma en $x = a_k$.

Caso B:
Su dominio es un intervalo abierto: (a, b], [a, b), (a, b), (-∞, b], (a, +∞), ...

Suponemos que f(x) es continua en su dominio, así como sus derivadas f(x)', f(x)''.

En estos casos tendríamos que hacer límite hacia aquel extremo en el cual el intervalo es abierto, y tener en cuenta el valor de este límite. Puede ocurrir que sí sea alcanzable, caso de límite finito, o inalcanzable en el caso de límite $+\infty, -\infty$

2.3.- Recta tangente a la gráfica de f(x) en un punto.

En el Vol. 7 se hace un estudio detallado sobre la interpretación geométrica de la derivada en un punto, demostrando que la pendiente de la recta tangente en el punto P(a, f(a)) de la curva toma el valor m = f '(a).

Sea un punto P(a, f(a)) de la curva.

Defi.:
La recta r: $y = mx + n$, es tangente a la gráfica de f(x) si existe un entorno U(a, h) de x = a, tal que se cumpla alguna de estas cuatro situaciones:

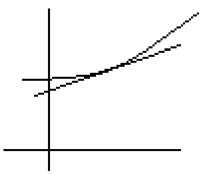
a) $f(x) < mx + n$, para todo x de U(a,h); en este caso tenemos Convexidad en x = a

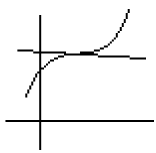
b) $f(x) > mx + n$, para todo x de U(a,h); en este caso tenemos Concavidad en x = a

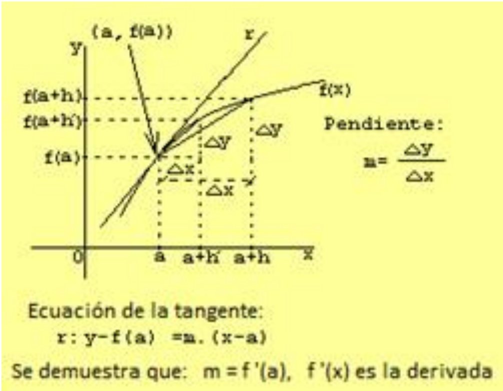
c) $f(x) < mx + n$ para los valores x de U(a,h) tales que $x < a$, y $f(x) > mx + n$ para los valores x de U(a,h) tales que $x > a$. En este caso la gráfica pasa de convexa a cóncava. (Inflexión)

d) $f(x) > mx + n$ para los valores x de U(a,h) tales que $x < a$, y $f(x) < mx + n$ para los valores x de U(a,h) tales que $x > a$. La gráfica pasa de cóncava a convexa. (Inflexión)

El Alumno identificará cada caso:





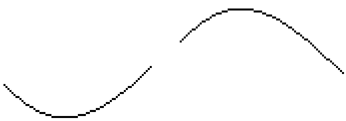


El alumno tendrá ocasión de verlo en alguna de las gráfica expuestas.

2.4.- Teoremas relacionados con la continuidad y la derivabilidad

Si bien las gráficas nos muestran intuitivamente la veracidad de las afirmaciones que hacemos, en Matemáticas tiene enorme interés la formalización de las referidas afirmaciones. Estos son los Teoremas.

Teorema de Fermat
Sea f(x) definida y derivable en [a, b], con derivada f '(x) continua en (a, b). Si f(x) tiene máximo local en xo, entonces
f '(xo) = 0.



Dem.: Existe un entorno I(xo-h, xo+h), h > 0, tal que
$\frac{f(x)-f(xo)}{h} > 0$, para todo x$\epsilon I,\ x < xo$

$$\frac{f(x)-f(xo)}{h} < 0 \text{ , para todo x}\epsilon I, \ x > xo$$

Haciendo h -> 0 llegamos a que f ’(xo) ≤ 0, y f’(xo)≥ 0. Conclusión: f ’(xo) = 0

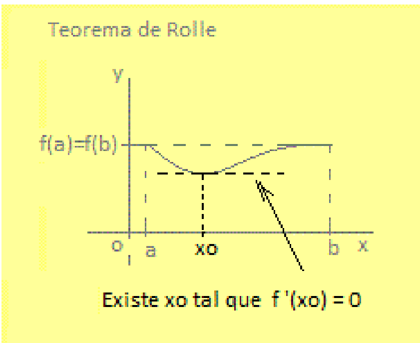
Análogamente, si tiene en xo un mínimo local:

$$\frac{f(x)-f(xo)}{h} < 0 \text{ , para todo x}\epsilon I, \ x < xo$$

$$\frac{f(x)-f(xo)}{h} > 0 \text{ , para todo x}\epsilon I, \ x > xo$$

Corolario:
Condición necesaria para que f(x) tenga extremo local en xo es que f ’(xo) = 0.

Teorema de Rolle:
Sea f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a,b). Si f(b) = f(a), entonces existe un punto xoϵ(a,b) en el cual f’(xo) = 0.



Sería suficiente observa su gráfica.
Dem.: Existirán puntos c, d en (a, b) tales que f(c) < f(d) ó f(c) > f(d), de lo contrario f(x) sería constante en (a, b) y entonces

f ’(x) = 0 para todo x de (a, b).

Supongamos f(c) < f(d). Entonces puede ocurrir:

a) c < d, existe xo en (c, d), y un entorno U(xo) sobre el cual f ’(x) > 0. Esto es, f(x) crece.
b) c > d, existe xo en (d, c), y un entorno U(xo) sobre el cual f ’(x) < 0. Esto es, f(x) decrece.

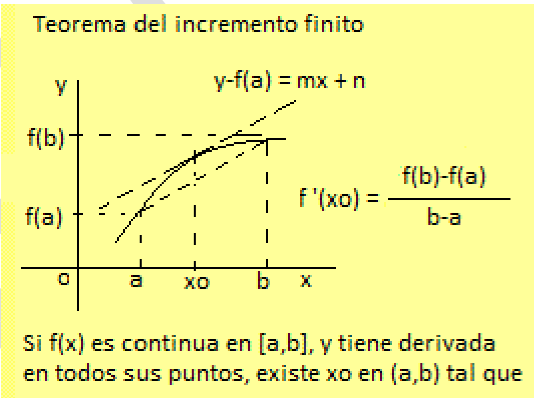
Puesto que f(b) = f(a), y por continuidad, tiene que existir xo en (a, b) tal que f ’(xo) = 0.

Teorema de Lagrange o de los Incrementos finitos:

Si f(x) es continua en [a, b] y tiene derivada continua en (a, b), entonces existe xo en (a, b) tal que se cumple

$$f'(xo) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dem.:



Puede considerarse Corolario del Teorema de Cauchy, o viceversa, considerar el de Cauchy como la generalización de este de Fermat.

Construimos la siguiente función

$$g(x) = [f(x)-f(a)].(b-a) – [f(b)-f(a)].(x-a)$$

Evidentemente cumple las condiciones del Teorema de Rolle:

$g(b) = 0 = g(a)$, y por tanto existe xo en (a,b) tal que $g'(xo) = 0$.

$g'(x) = (b-a).[f'(x)]-[f(b)-f(a)]$ -- >

$g'(xo) = f'(xo).(b-a) – [f(b)-f(a)]$, de donde

siendo $g'(xo) = 0$, obtengo

$$f'(xo) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema de Cauchy o generalización del Teorema de Lagrange

Si f(x) y g(x) son continuas en [a, b] y tienen derivada continua en (a, b), entonces existe xo en (a, b) tal que se cumple

$$\frac{f'(xo)}{g'(xo)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dem.: Supongamos la parametrización

x = x(t), t en [t1, t2], y tal que x(t1) = a, x(t2) = b, con lo cual llegamos a funciones

F(t) = f(x(t)), G(t) = g(x(t))

Por el Teorema de Fermat tenemos

$$F'(to) = \frac{F(t2)-F(t1)}{t2-t1} \;,\quad G'(to) = \frac{G(t2)-G(t1)}{t2-t1}$$

Entonces

$$\frac{F\prime(to)}{G\prime(to)} = \frac{F(t2)-F(t1)}{G(t2)-G(t1)} \text{ -> } \frac{f'(xo).x\prime(to)}{g'(xo).x\prime(to)} = \frac{f(x(t2))-f(x(t1))}{g(x(t2))-g(x(t1))}$$

Por lo tanto, existe xo = x(to) tal que

$$\frac{f\,\prime\,(xo)}{g\,\prime(xo)} = \frac{f(b)-g(a)}{g(b)-g(a)}$$

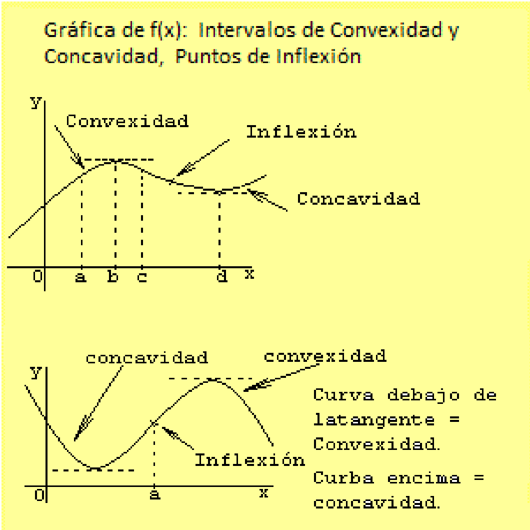
2.5.- Convexidad, Concavidad, Inflexión

NOTA: El punto de observación de la gráfica lo fijamos en el ‘imaginario’ punto más alto del eje de ordenadas oy.

Suponemos que f(x), f ’(x) y f ’’(x) son continuas en su Dom(f)

INTERVALO de Convexidad:

Def.:
Es un intervalo I(a, b) abierto de R tal que, en todo punto xo de I existe un entorno U(xo, h) en R, tal que para cada x de U el valor f(x) queda por debajo de la tangente en xo.



INTERVALO de Concavidad:

Def.:
Es un intervalo I(a, b) de R tal que, en todo punto xo de I existe un entorno U(xo, h) en R, tal que para cada x de U el valor f(x) queda por encima de la tangente en xo.

Observa lo siguiente:

Bajo condiciones de continuidad.

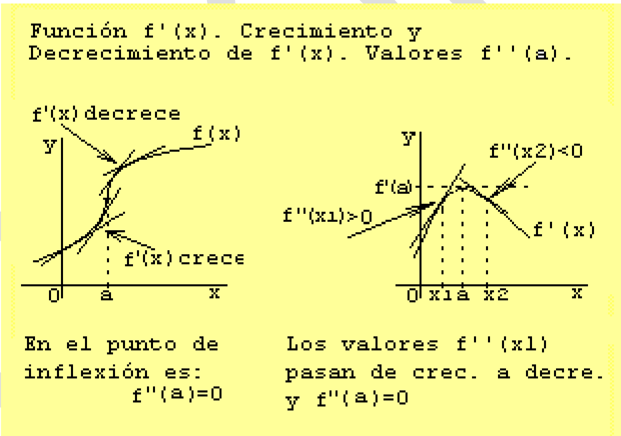
Si en el intervalo I de convexidad, cuando el valor x avanza (incremento > 0) de izquierda a derecha, el signo de f ’(x) pasa de f ’(x) > 0 a f ’(x) < 0, entonces en algún valor x = xo dentro de I se cumplirá f ’(xo) = 0. Se trata de un máximo en xo.

Si en el intervalo I de concavidad, cuando el valor x avanza (incremento > 0) de izquierda a derecha, el signo de f'(x) pasa de f'(x) < 0 a f'(x) > 0, entonces en algún valor x = xo dentro de I se cumplirá f'(xo) = 0. Se trata de un mínimo en xo.

PUNTO de Inflexión:

Def.:
Son los puntos que separan dos intervalos consecutivos: Convexidad -> concavidad, ó Concavidad –> convexidad'.

Es aquel punto donde la gráfica 'pasa' de convexa a cóncava, o de cóncava a convexa.

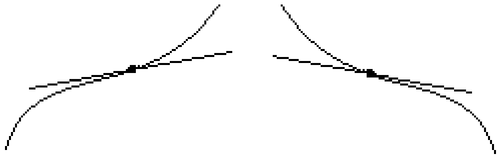


Son puntos P(a, f(a)) de la gráfica en los que la función derivada y = f'(x) cambia de 'creciente' a 'decreciente', ó de 'decreciente' a 'creciente', y por tanto son puntos donde la derivada de f'(x) se anula, es decir que

f''(a) = 0.

En ese punto la gráfica de y = f'(x) tiene tangente horizontal, pendiente cero.

En un punto de inflexión la recta tangente 'cruza' la curva:



Conclusión: Condición necesaria

Los puntos de inflexión se corresponden con los puntos (c, f(c)) de la gráfica en los que

$$f''(c)=0$$

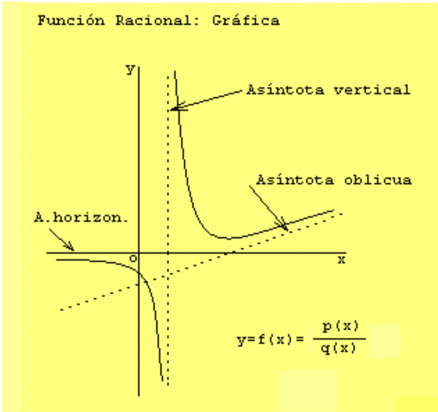
2.6.- Funciones fraccionarias: Representación

Son las de la forma y = f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde p(x), q(x) son polinomios.

DOMINIO de f:

Def.:
Dom(f) = {x € R; f(x) es un valor real}
Léase: 'Conjunto de los valores reales de x tales que su imagen f(x) es un valor real'

Cuando q(x) = 0, el valor de la fracción no está bien definido y en este caso f(x) no es un valor real. Continúa la siguiente explicación.



Obtenemos Dom(f) como sigue:

Resolvemos la ecuación q(x) = 0. Sean a1, a2, ... sus soluciones (tengamos en cuenta que q(x) es un polinomio).

Ahora puede ocurrir una de estas dos cosas:

a) p(ai) <> 0. Entonces $\frac{p(ai)}{0}$ No es un valor real, y por tanto el valor ai No está en Dom(f).

b) p(ai) = 0. En este caso, tanto q(x) como p(x) admiten el factor (x-ai). Entonces simplificamos la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ todo lo posible dividiendo por (x-ai).

Hecho esto, llamando p1(x), q1(x) a los polinomios resultantes, puede ocurrir:

- q1(ai) <> 0, y entonces el valor ai sí está en Dom(f).

- $q1(ai) = 0$, y entonces $f(ai) = \frac{p1(ai)}{0}$, por lo que el valor ai No está en Dom(f).

Conclusión:

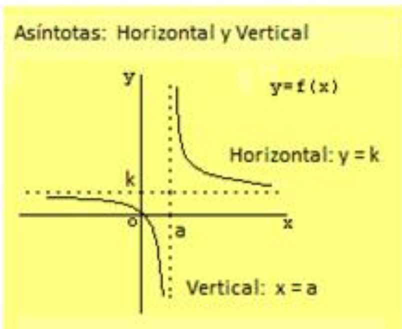
Dom(f) = R – {a1,a2,...}, donde los ai son aquellos donde f(ai) no es un valor real.

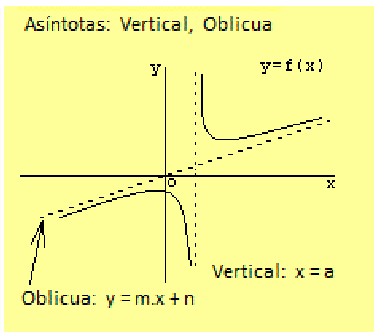
Para obtener su gráfica con algún detalle es necesario aplicar el cálculo de derivadas, como se deduce del estudio de los puntos anteriores.

2.7.- Asíntotas

Introducción:

Si observamos la gráfica vemos que tiene una 'rama' que, cuando x se hace 'grande' (arbitrariamente grande) la curva se aproxima a la recta r (paralela a ox, horizontal) tanto como queramos (sin llegar a tocarla). Decimos que r es una asíntota horizontal.





También ocurre con la recta s (paralela a oy, vertical), de modo que cuando x -- > a, por la izquierda, la gráfica se aproxima a ‘s’ tanto como queramos (sin llegar a tocarla), y lo mismo si nos aproximamos por la derecha. Decimos que s es una asíntota vertical.

Decimos que esta recta r es una asíntota oblicua.

Definiciones y su cálculo:

NOTA:
En lo que sigue el símbolo ∞ representará tanto +∞ como -∞, y cuando escribimos x --> k queremos indicar tanto x --> k por la izquierda como por la derecha.

Asíntota Horizontal:
Tiene asíntota horizontal si el siguiente límite es finito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ = \ k$$

En caso afirmativo, obtengo la recta y = k

Asíntota Vertical:

Tiene asíntota vertical en x = k si el siguiente límite es $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to k} f(x) \ = \ \pm\infty$$

donde debemos entender límite por la izquierda $\lim_{k^-} f(x)$ ó límite por la derecha $\lim_{k^+} f(x)$

En caso afirmativo la asíntota es la recta

x = k.

Asíntota Oblicua:

Es una recta de la forma y = m.x + n, para la que se cumple que la gráfica se aproxima a ella tanto como deseemos sin llegar a tocarla.

Este hecho nos lleva a que

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{f(x)} - (\mathrm{m.x} + \mathrm{n})) = 0, \text{ o bien}$$
$$\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{f(x)} - (\mathrm{m.x} + \mathrm{n})) = 0,$$

Suponiendo que sí tenemos dicha recta, el hecho

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{f(x)} - (\mathrm{m.x} + \mathrm{n})) = 0 ,$$

nos lleva, dividiendo por x, a que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \left(\mathrm{m} + \frac{n}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \mathrm{m}\right) = 0$$

ya que $\frac{n}{x}$ --> 0, y por tanto: m = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$,
(pendiente de la recta)

Conocido el valor m de la pendiente, para obtener n tengamos en cuenta que ha de ser

$$\mathrm{n} = \lim_{x\to\infty}(\mathrm{f(x)} - \mathrm{m.x})$$

En el caso de que m y n sean valores reales hemos obtenido la

Asíntota: y = m.x + n

2.8.- Proceso a seguir en la Representación gráfica de y = f(x)

En general, salvo casos específicos donde la simple observación de la expresión f(x) puede aconsejar otro procedimiento, se sigue el proceso que indicamos.

Proceso a seguir:

-Dominio de definición de f(x)
-Corte con los ejes de coordenadas

-Análisis y Cálculo de sus asíntotas
-Cálculo de sus extremos, para lo cual debemos utilizar la primer derivada.
-Intervalos de convexidad y concavidad, y puntos de inflexión: Para lo cual debemos utilizar además la segunda derivada.

Con este trabajo la curva debe quedar perfilada por completo. Es posible que alguno de estos 'pasos' no sea necesario.

Ejemplos resueltos

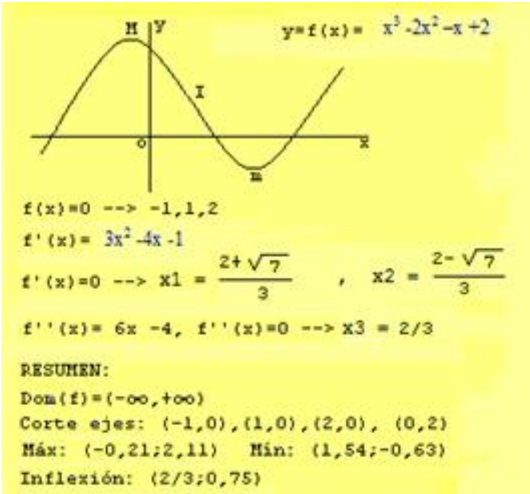
1.- $f(x)= x^3 -2x^2 -x +2$

Dom(f) = R, por ser polinómica

Corte con los ejes:

x = 0, nos da y = 2, Punto (0,2)
y = 0, nos lleva a resolver

$$x^3 -2x^2 -x +2 = 0$$



Puesto que $\lim_{x\to-\infty}(f(x)) = -\infty$, y $\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = +\infty$, junto con el hecho de que tiene máximo > 0 y mínimo < 0, concluimos que corta a ox en tres puntos, aunque no podamos calcular sus abscisas.

Los Extremos los obtenemos así:

$$f(x)' = 3x^2 -4x -1, \qquad 3x^2 -4x -1 = 0$$

Discriminante: $b^2 - 4ac = 16 +12 = 28 > 0$,
lo que indica que sí tiene dos soluciones reales.

Si x1, x2 (supongo x1 < x2) son sus dos soluciones, queda por comprobar en qué caso estamos de los siguientes:

- f(x1) > 0, f(x2) < 0, entonces la gráfica es la presentada

- f(x1) > 0, f(x2) > 0, entonces solo corta una vez al eje ox

- f(x1) < 0, f(x2) < 0, entonces solo corta una vez a ox

La gráfica no tiene asíntotas.

Intervalos de convexidad y concavidad:

$$f(x)'' = 6x - 4, \quad 6x - 4 = 0, \; x = 2/3$$

$(-\infty, 2/3)$ convexidad

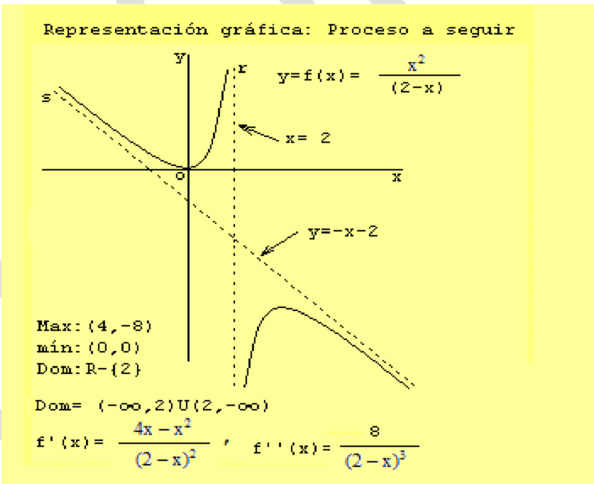
$(2/3, +\infty)$ concavidad

2.- $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$

En la gráfica las asíntotas son:

r: $x = 2$

s: $y = -x - 2$



Los restantes cálculos necesarios los realizará el alumno.

ACTIVIDADES y Problemas resueltos

1.- Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

b) $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}$

Sol.:

a) Puntos de corte con ox: y = 0 ->

$2x^3 - 3x^2 - 36x = 0$

Obtengo: x = 0,

$2x^2 - 3x - 36 = 0$ --> $x = \frac{3+\sqrt{297}}{4} = 5'06$

$x = \frac{3-\sqrt{297}}{4} = -3'56$

puntos: (0, 0), (5’06, 0), (-3’56, 0)

Corte con oy: x = 0 --> y = 0, punto: (0, 0)

Extremos relativos: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$,

$6x^2 - 6x - 36 = 0$, $x^2 - x - 6 = 0$ --> x = -2, 3

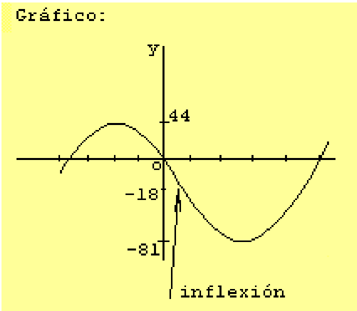
f(-2) = 44, f(3) = -81,

$f''(x) = 12x - 6$,
$f''(-2) = -5 < 0$ --> máximo (-2,44)
$f''(3) = 5 > 0$ --> mínimo (3,-81)

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0$,

$12x - 6 = 0$, $x = 1/2$,
$f(1/2) = -74/4 = -18'5$

Punto inflexión (0'5, -18'5)



b) Cortes con ox: $x^2 - 3x - 4 = 0$ --> x= -1, 4

Puntos: (-1,0), (4,0)

Corte con oy: x = 0 --> y = -4/-6 = 2/3 = 0'66

Punto: (0,0'66)

Polos (Asíntotas verticales):

$x^2 + x - 6 = 0$ --> x = 2, -3

En los puntos de abscisa x = 2, x = -3 no está definida.

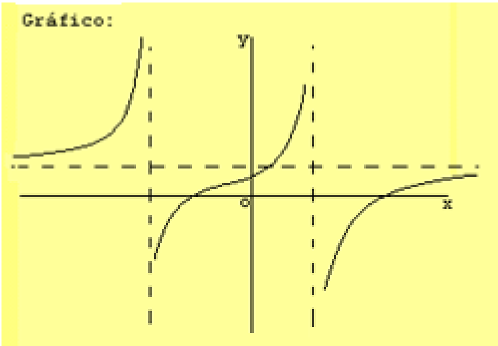
Dom(f): (-oo,-3), (-3,2), (2,+oo)

Asíntota horizontal:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6} = 1$, es la recta y = 1

Extremos relativos: f ’(x) = $\frac{4x^2-4x+22}{(x^2+x-6)^2}$

La ecuación f’(x)= 0 no tiene soluciones racionales (y parece que tampoco las tiene reales, sus soluciones serán complejas no reales)



2.- Representa las siguientes funciones:

c) $y = 5^x$
d) $y = 5^{-x}$

3.- Representa las siguientes funciones:

a) $y = \log_5(x)$

4.- Representa las siguientes funciones:

a) y = sen(2x)
b) y = cos(2x)

5.- Representa las siguientes funciones:

a) y = tan(2x)
b) y = cota(2x)

6.- Representa las siguientes funciones:

a) y = sec(x)
b) y = cose(x)

7.- Dada la función f(x) = $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4}$, se pide:

a) Asíntotas verticales y oblicuas

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) Extremos relativos
d) Representación aproximada

Sol.: a)

Las asíntotas verticales las tiene donde se anule el denominador (los polos de f(x)).

$x^2 - 4 = 0$ --> x= -2, x= 2

Son las rectas: x + 2 = 0, x -2 = 0

Asíntota oblicua: Es de la forma y = mx + n

m = lím($\frac{f(x)}{x}$, cuando x --> oo, = 1

n = lím(f(x) –m.x), cuando x --> oo, = -3

Es la recta: y = x – 3

b)

Para contestar a b) y c) necesito f'(x) y resolver f'(x) = 0

$$f'(x) = \frac{(x^2-4).(3x^2-6x-1) - (x^3-3x^2-x+3).(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-11x^2+18x+4}{(x^2-4)^2}$$

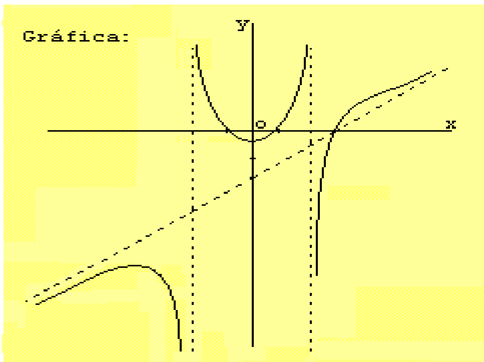
La ecuación f'(x) = 0 No tiene soluciones racionales (enteras y fraccionarias). No la resolvemos. Haremos la representación aproximada teniendo en cuenta cortes con los ejes y las asíntotas.

d) Cortes con oy: x= 0 --> y= 3/-4 = -3/4, punto (0,-0'75)

Cortes con ox: y= 0 --> $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ -->

x = -1, 1, 3, puntos: (-1,0), (1,0), (3,0)

Representación:



8.- Dada la función f(x) = $\frac{3x^2+4x-4}{2x-3}$

se pide:

a) Asíntota oblicua
b) Asíntotas verticales
c) Intervalos de monotonía y extremos
d) Representación aproximada

Sol.:

a) m = $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ = 3/2 n = $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - m.x)$ = 17/4

Es la recta: y = 3/2.x + 17/4

b) 2x –3 = 0 --> x= 3/2

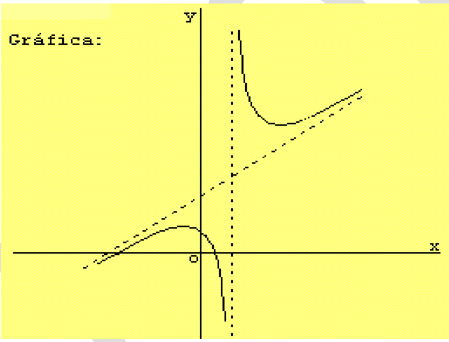
Es la recta: x = 3/2

c) f '(x)= $\frac{(2x-3).(6x+4)-(3x^2+4x-4).2}{(2x-3)^2}$ = … = $\frac{6x^2 - 18x - 4}{(2x-3)^2}$

f '(x) = 0, $3x^2$ –9x –4 = 0 --> x = $\frac{9+\sqrt{105}}{6}$ = 3'21

x = $\frac{9-\sqrt{105}}{6}$ = -0'21

Representación:



9.- Representa f(x) = $\frac{x^2}{x-2}$

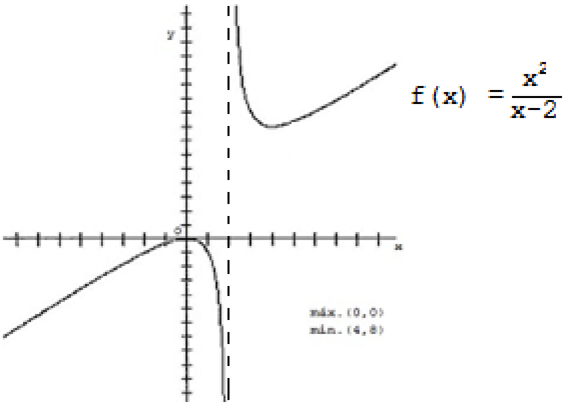
Sol.: Corte con oy: x = 0 -> y = 0 -> (0;0)

Corte ox: y = 0 -> $\frac{x^2}{x-2}$ = 0 -> x = 0 -> (0;0) f ’(x) = $\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, f’(x) = 0 -> $\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

x = 0 -> f(0) = 0 -> P(0;0)
x = 4 -> f(4) = 8 -> Q(4,8)

Asíntota vertical: x = 2,
Asíntota horizontal: y = m.x + n
m = $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ = $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-2x}$ = 1,
n = $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1.x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right) = 2$

Recta r : y = x + 2



10.- Representa f(x) = $\frac{x^3}{1-x^2}$

Sol.: Corte con oy: x = 0 -> y = 0 -> (0;0)

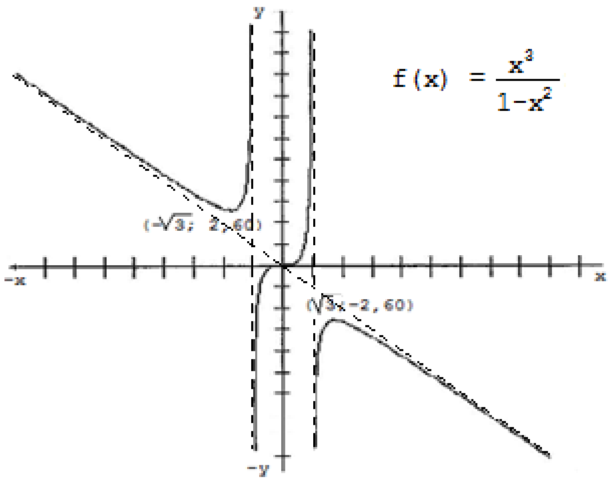
Corte oon xo: y = 0 -> ….. -> (0;0)

f '(x) = ... = $\frac{5x^2-3x^4}{(1-x^2)^2}$, f'(x) = 0 -> $x^2.(5-3x^2) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \; doble \rightarrow tangencia \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3} \end{cases}$$

Observa la gráfica

Asíntotas Verticales: $1 - x^2 = 0$ -> $\begin{cases} x = \;\; 1 \\ x = -1 \end{cases}$



A.Oblicua: m = $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-x^3} =$ -1

n = $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0$

Recta y = -x

11.- Representa f(x) = $\frac{x^2+1}{x}$

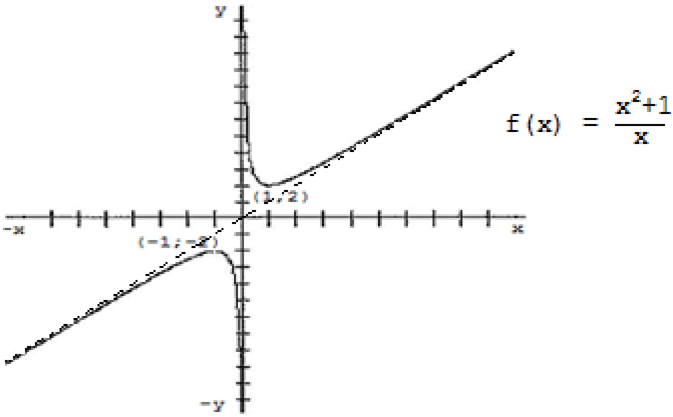
Sol.: x = 0 -> y no definido, no corta a oy y = 0 -> $\frac{x^2+1}{x}$ = 0, x^2 + 1 = 0, x^2 = -1, sin solución real -> no corta al eje ox

Asíntota Vertical: x = 0

Oblicua: m = $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1$

n = $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

Recta y = x



Extremos locales: f '(x) = …. = $\frac{x^2-1}{x^2}$,

f '(x) = 0 -> x = 1, x = -1 ;

x = 1 -> (1;2), x = -1 -> (-1;-2)

12.- Representa f(x) = $\frac{x-1}{x+1}$

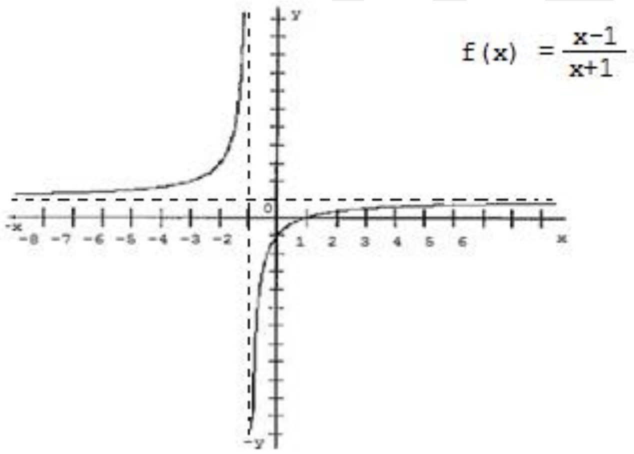
Sol.: x = 0 -> y = -1 -> (0;-1)

y = 0 -> x – 1 = 0 -> (1;0)

f '(x) = … = $\frac{2}{(x+1)^2}$, f'(x) = 0 , sin soluciones. No tiene extremos.

Asíntota vertical: x + 1 = 0 -> x = -1

Oblicua: m = $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = … = $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x} = 0$
es asíntota horizontal.
n = $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0.x)$ = … = $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1} = 1$
Recta y = 1



13.- Representa f(x) = $\frac{x^2}{2-x}$
Sol.: x = 0 -> y = 0 -> (0;0)
y = 0 -> x = 0 -> (0;0)

f '(x) = … = $\frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$, f'(x) = 0 -> x^2 -4x = 0,

x.(x -4) = 0 -> $\begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$
x = 0 -> (0;0) mínimo local,

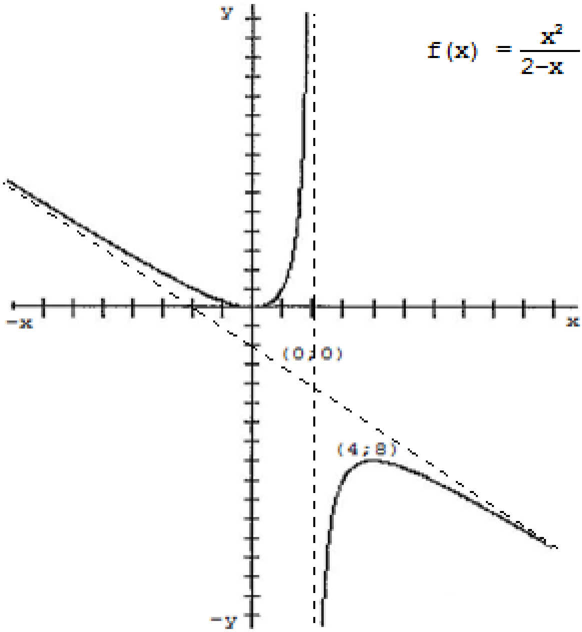
x = 4 -> y = -8 -> (4;-8) máximo local

Asíntota vertical: 2 – x = 0 -> x = 2

Oblicua: m = $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ = … = $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}$ = -1

n = $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ = … = $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2-x}$ = - 2

Recta y = -x -2



14.- Representa f(x) = $\frac{6x}{x^2+1}$

Sol.: x = 0 -> y = 0 -> (0;0)

y = 0 -> (0;0)

f ’(x) = … = $\frac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$, f’(x) = 0 -> 1 –x^2 = 0,

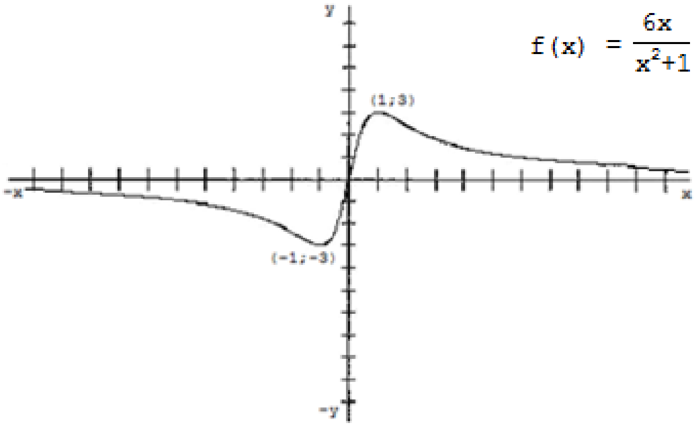
x = +1, x = -1

f(1) = 3 -> (1;3), f(-1) = -3 -> (-1;-3)

Asíntota vertical: x^2 + 1 = 0, sin solución real.

Oblicua: Obtengo m = 0, n = $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2+1} = 0$

Recta y = 0



15.- Representa f(x) = $\frac{x^2-5x+4}{x-5}$

Sol.: x = 0 -> y = -4/5 -> (0;$\frac{-4}{5}$)

y = 0 -> x^2 -5x +4 = 0, -> $\begin{cases} x = 1 \to (1;0) \\ x = 4 \to (4;0) \end{cases}$

f’(x) = … = $\frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}$, f’(x) = 0 -> $\begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \end{cases}$

x = 7 -> f(7) = 9 -> mínimo (7;9)

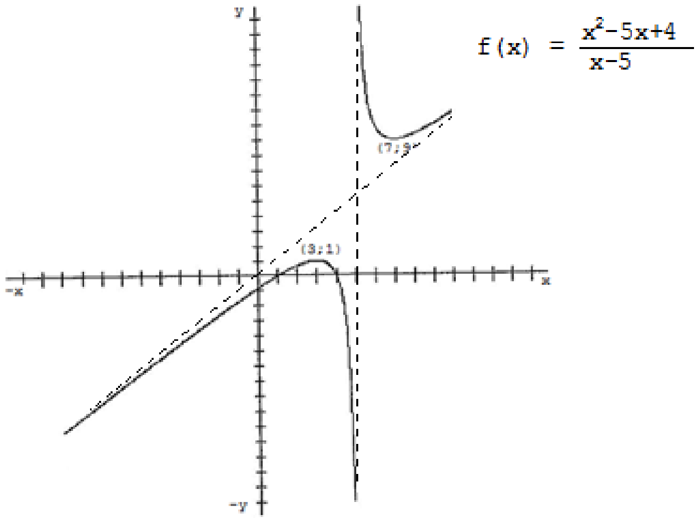
x = 3 -> f(3) = 1 -> máximo (3;1)

Asíntota vertical: x -5 = 0 -> x = 5

Oblicua: m = $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ = … = $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x}$ = 1

n = $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ = … = $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x-5}$ = 0

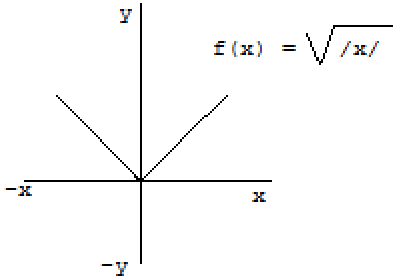
Recta y = x



16.- Representa f(x) = $\sqrt{|x|}$

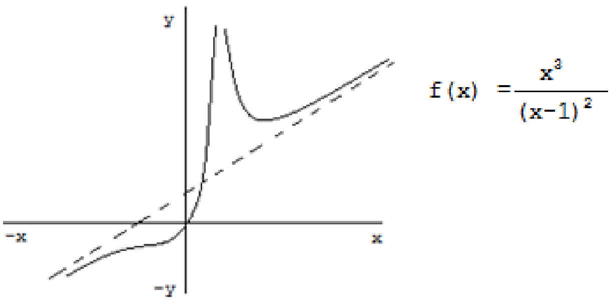
Sol.: Observa que f(x) = $\begin{cases} x, & para\ x \geq 0 \\ -x, & para\ x < 0 \end{cases}$

Nada más hay que decir.

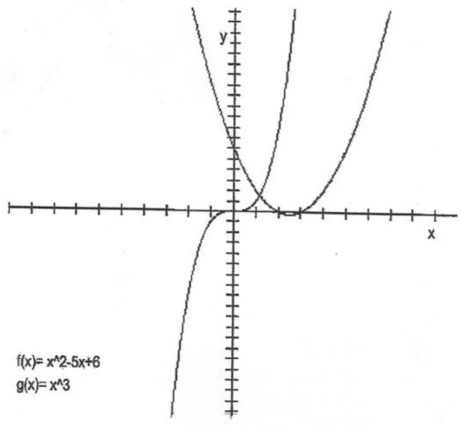


17.- Represente f(x) = $\frac{x^3}{(x-1)^2}$

Sol.: El alumno comprobará lo que muestra la gráfica



18.- Analiza la gráfica siguiente:



2.9.- Aplicación a la Resolución de problemas de Optimización

Se trata de problemas donde, por ejemplo, la superficie, o el volumen, de un cuerpo depende, como es lógico, de los valores que tomen, por ejemplo, la altura, o el radio de su base, etc.

Uno o dos de estos valores se toman como variables independientes de los que depende la variable dependiente ‘superficie’, o ‘volumen’.

Se trata de encontrar para qué valor de la variable independiente la superficie es máxima (problema de maximización), o que el volumen sea mínimo (problema de minimización).

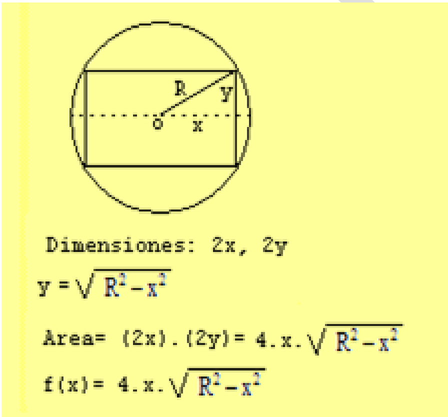
Con ayuda de la derivada primera de f(x) encontramos el valor ‘a’, o valores, de x en los cuales se produce máximo o mínimo. Con ayuda de la segunda derivada decidimos si en x= a se produce máximo o mínimo.

Ejemplos/Problemas

1.- De entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, determina las dimensiones de aquel que tenga área máxima.

Sol.: Tenemos la función que nos da el área del rectángulo inscrito

$$f(x)= 4.x.\sqrt{R^2 - x^2}$$



f'(x)= 4. $\sqrt{R^2 - x^2}$ + 4x.1/2.(-2x)/ $\sqrt{R^2 - x^2}$

f'(x)= [$4.(R^2 - x^2) - 4x^2$]/ $\sqrt{R^2 - x^2}$

f'(x)= $(-8x^2 + 4R^2)/\sqrt{R^2 - x^2}$

f'(x) = 0 --> $-8x^2 + 4R^2 = 0$ --> $x^2 = 1/2.R^2$ -->

$x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R.\sqrt{2}}{2}$

Si R = 18, x = $9.\sqrt{2}$,

y = $\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{162} = \sqrt{81.2} = 9.\sqrt{2}$

Se trata de un Cuadrado.

Para estos valores el área será máxima, ya que el mínimo se produce cuando la superficie es cero.

Para comprobar que es un máximo calculo sus derivadas:

$$f'(x) = \frac{-8x^2+4.R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{R^2-x^2}.(-16x) - \left(-8x^2+4.R^2\right).\frac{-2x}{2.\sqrt{R^2-x^2}}}{(R^2-x^2)} =$$

$$= \frac{-16x.\left(R^2-x^2\right)+x.(-8x^2+4R^2)}{(R^2-x^2).\sqrt{R^2-x^2}}$$

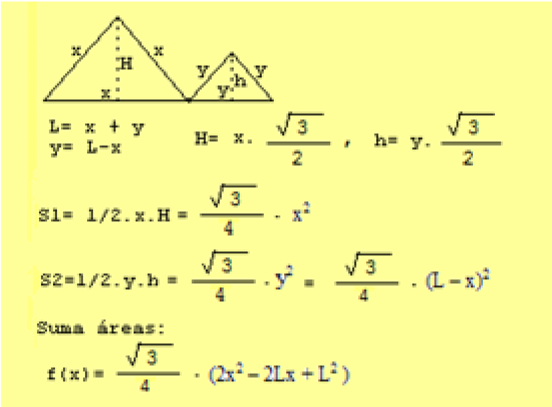
$$= \frac{-12.R^2.x + 8.x^3}{(R^2-x^2).\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{[-12.R^2 + 8.x^2].x}{(R^2-x^2).\sqrt{R^2-x^2}} \quad ;$$

sustituyendo el valor x = $9.\sqrt{2}$ tengo

$$f''(9.\sqrt{2}) = \frac{[-12.18^2+8.81.2].9.\sqrt{2}}{(18^2-81.2).\sqrt{\ }} = \frac{[-3888+1296].9.\sqrt{2}}{(324-162).\sqrt{162}} < 0$$

por tanto $f''(9.\sqrt{2}) < 0$ -- > máximo

2.- Tengo una cuerda de L cm largo. Desea partirla en dos trozos y construir con cada uno un triángulo equilátero. ¿Por qué punto de la cuerda he de hacer el corte con la condición de que la suma de las áreas sea mínima?.



Sol.: La función que nos da la suma de sus áreas es

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}.(2x^2 - 2L.x + L^2)$$

$$f\,'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}.(4x - 2L); \quad f'(x) = 0 \dashrightarrow x = \frac{L}{2}$$

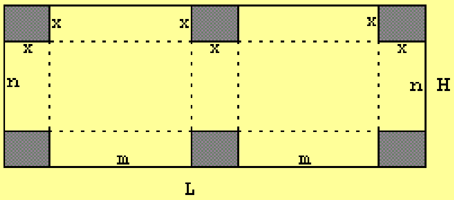
Esto nos dice que debo separarlas en dos partes iguales.

3.- Con una pieza de cartulina de L cm largo por H cm ancho deseo construir una caja con tapa, separando cuadrados como se indica en la figura. ¿Qué valor debe tener x (en la figura) para que el volumen sea máximo?.

Sol.: La función que nos da el volumen es

$$f(x) = \frac{1}{2}.(L-3x).(H-2x).x$$

Caja con tapa



L= 3.x + 2.m

H= 2.x + n

$$V= m.n.x \;\text{-->}\; V= \frac{(L-3x)}{2} . (H-2x).x = \\ = 1/2.(L-3x).(H-2x).x$$

f(x)= 1/2.(L-3x).(H-2x).x

$f\,'(x) = -3/2.(H-2x).x + (L-3x)/2.(-2).x + (L-3x)/2.(H-2x)$

$f\,'(x) = [3x^2 -3.H.x/2] +[3x^2 -L.x] + 1/2.[L.H-3.H.x-2.L.x+6x^2]$

$f\,'(x) = 9x^2 +(-3.H/2 –L –3.H/2-L).x + L.H/2$

$f\,'(x) = 9x^2 +(-3.H-2.L).x + L.H/2$

Si L = 100 y H= 40, queda

$$f'(x)= 9x^2 –320x +2000$$

$f\,'(x) = 0$ --> $9x^2 –320x +2000= 0$

$$x = \frac{320\pm\sqrt{320^2-4.9.2000}}{2.9} = \frac{320\pm 174{,}356}{18} \;\text{-- >}$$

x1 = 27,464

x2 = 8,091

Para decidir en cuál de estos valores se cumple un máximo, o mínimo, necesitamos la f''(x).

f''(x) = 18x –320

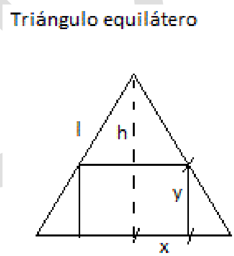
f''(x1) = 18.27,464 –320 >0, --> máximo
f''(x2) = 18.8,091 – 320 <0, --> mínimo

4.- Dimensiones de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero de lad L.

Sol.: Observa la figura

S(x,y) = 2xy; Escribo z = 2xy

Relación entre x e y:



Por triángulos semejantes tenemos

$$\frac{\frac{L}{2}-x}{x} = \frac{y}{h-y} \rightarrow \quad \frac{L-2x}{2x} = \frac{y}{h-y} \quad \text{-- >}$$

(L-2x).(h-y) = 2xy -- > L.h-2xh –L.y +2xy = 2xy,

L.h -2x.h –L.y = 0 -- > h.(L-2x) = L.y

Sabemos que h = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .L

$\frac{\sqrt{3}}{2}$.L.(L-2x) = L.y -- > $\sqrt{3}$.L.(L-2x) = 2L.y

y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.(L-2x) ; Por tanto z = $\sqrt{3}$ .x.(L-2x),

z'$_x$ = $\sqrt{3}$.(L-2x) + $\sqrt{3}$ .x.(-2) = -4. $\sqrt{3}$.x + $\sqrt{3}$.L,

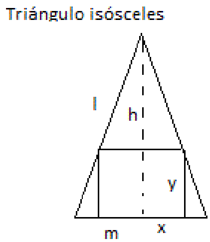
z'$_x$ = 0 -- > x = $\frac{L}{4}$, y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.(L - $\frac{L}{2}$) = $\sqrt{3}$. $\frac{L}{4}$

(Observa que 'y' es 1/2 de la altura h)

5.- Rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de lados l y base m.

Sol.- Observa la figura

S(x,y) = 2x.y ; Escribo z = 2x.y ;



Relación entre x e y; Por semejanza de triángulos tengo

$\frac{\frac{m}{2}-x}{x} = \frac{y}{h-y}$ -- > (m-2x).(h-y) = 2xy,

m.h –m.y -2x.h = 0 -- > y = $\frac{m.h-2h.x}{m}$ = h.$\frac{m-2x}{m}$

Por tanto

$$z = 2x.\frac{m.h-2h.x}{m}$$

$z'_x = 2.\frac{m.h-2h.x}{m} + \frac{2x}{m}.(-2h) = \frac{-8.h.x+2.m.h}{m}$

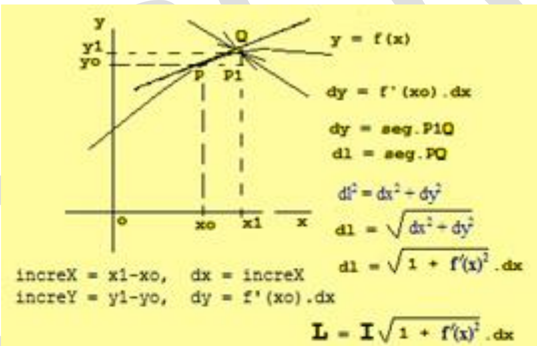
$z'_x = 0$ implica $0 = 2.h.m - 8.h.x$,

$8.h.x = 2.h.m$, $\quad x = \frac{m}{4}$,

$y = h.\frac{m-\frac{m}{2}}{m} = \frac{h}{2}$,

2.10.- Curvas en el Plano: Longitud de un arco de curva

2.10.1.- En cartesianas $\qquad y = f(x)$



Deseamos obtener la longitud del arco de curva correspondiente al intervalo [a,b]. Es decir, cuando la variable x recorre este intervalo obtenemos un “trozo” de la curva que llamamos “arco” de dicha curva, y cuya longitud (finita) deseamos calcular.

En cada punto P(xo, yo) de la curva, en un entorno “pequeño” V(xo, yo), el incremento de arco dl sobre la curva puede ser “aproximado” por el segmento dT sobre la tangente a la curva en P.

Entonces dT = $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(xo)^2} \,.\, dx$

y por tanto

$$dl \approx \sqrt{1 + f'(xo)^2} \,.\, dx$$

Cuando hacemos dx -> 0 los valores dl y dT tienden a coincidir.
Cuando nos movemos por la curva pasando del punto (x; f(x)) al punto (x+dx; f(x+dx)), y realizamos la suma de los valores dT = $\sqrt{1 + f'(x)^2} \,.\, dx$, obtenemos una aproximación de la suma de los arcos dl de la curva. La suma de estos arcos nos da la longitud del arco total.

Tenemos así

$$L = \sum dl \;\cong\; \sum dT$$

En el límite cuando dx -> 0 llegan a coincidir, de modo que

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(xo)^2} \,.\, dx$$

2.10.2.- Curva dada en coordenadas paramétricas

La curva puede venir dada mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

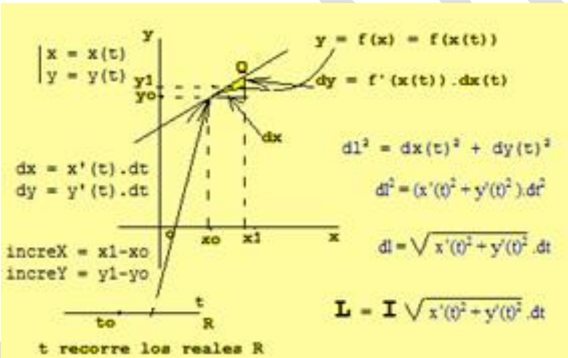
(t recorriendo R)

Deseamos la longitud del arco de curva correspondiente al intervalo [a,b] de la variable t.

El segmento dT sobre la tangente se expresa ahora así:

dT = $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.dt, en cada punto (x(t),y(t)) de la curva, y por tanto

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,.dt$$



2.10.3.- Curva en coordenadas polares

A) El radio-vector r es constante

$\begin{cases} x = r.\cos(u) \\ y = r.sen(u) \end{cases}$, u en radianes

x'(u) = -r.sen(u), y'(u) = r.cos(u)

x'(u)^2 + y'(u)^2 = r^2, y por tanto dl = r.du , L = $\int_a^b r.du$

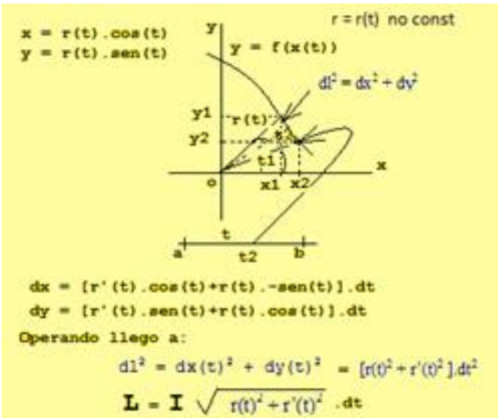
B) Caso general: El parámetro t es el ángulo que el radio vector forma con el semieje +ox

$\begin{cases} x(t) = r(t).\cos(t) \\ y(t) = r(t).\operatorname{sen}(t) \end{cases}$, t recorriendo R

Derivamos respecto de t y obtenemos la expresión

$x'(t)^2 + y'(t)^2$,(ver Apéndice) llegando a que

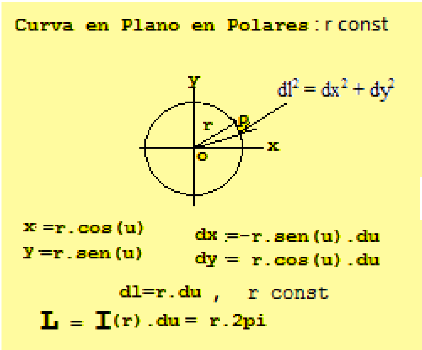
dl = $\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}.dt$, L = $\int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}.dt$



Cuando r(t) es constante (que no depende de t) tenemos:

dl = $\sqrt{0 + r^2}.dt$ = r.dt

L = $\int_a^b r.dt$, donde $0 \le t < 2.pi$, t en radianes



2.10.4.- Ejemplos: Aplicación a algunos casos concretos

1.- **Longitud de la circunferencia**

Ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}.dx$

$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $1+y'^2 = R^2/(R^2-x^2)$, $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$

Para el cuadrante x > 0, y > 0 Tenemos

$l' = R.\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}.dx = \frac{R}{R} \ . \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}}.dx$ = (hago $\frac{x}{R}$ = = sen(t))

$= \int \frac{1}{\cos(t)}.\cos(t).R.dt$ = R.t = R.$(arcSen\left(\frac{x}{R}\right)]_0^R$ =

= R.$(\frac{pi}{2} - 0)$ = R. $\frac{pi}{2}$, por tanto L = 4.l' = 2.pi.R

(Resultado conocido de Geometría descriptiva)

2.- Longitud de la Elipse

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, y = $\frac{b}{a}.\sqrt{a^2-x^2}$

y'= $\frac{b}{a}.\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, 1 + y'(x)^2 = … = $\frac{(b^2-a^2).x^2+a^4}{a^2.(a^2-x^2)}$

El cuadrante de la elipse x > 0, y > 0 tiene longitud

L' = $\frac{1}{a}.\int_0^a\sqrt{1+f'(x)^2}.dx = \frac{1}{a}.\int_0^a\sqrt{\frac{(b^2-a^2).x^2+a^4}{(a^2-x^2)}}.dx$

La resolución de esta integral es sumamente difícil.

NOTA: Si tomamos la elipse como una deformación de la circunferencia con radio R = $\sqrt{a.b}$, cabe aproximar la longitud de la elipse así: L = 2.pi. $\sqrt{a.b}$

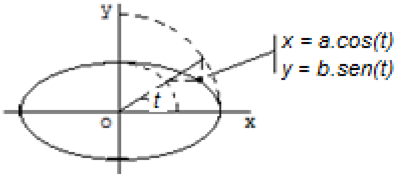
Veamos otra forma.

El tratamiento clásico para la Elipse es el siguiente.

Parametrización de la Elipse:

$$\begin{cases} x = a.\cos(t) \\ y = b.sen(t) \end{cases}$$

dl^2 = dx^2 + dy^2 = [a^2.sen^2(t) + b^2.cos^2(t)].dt^2



L’ = $\int_0^{\frac{pi}{2}} \sqrt{\mathrm{a2.sen2(t)} + \mathrm{b2.cos2(t)}}\,.dt$ = (*)

(la transformamos como sigue)

$\mathrm{a2.sen2(t)} + \mathrm{b2.cos2(t)} = a^2.sen^2(t) + b^2.(1 - sen^2(t))$ =

= $b^2 + (a^2 - b^2).sen^2(t) \quad = \; b^2\,.[1 + \frac{a^2-b^2}{b^2}\,.sen^2(t)]$

haciendo $k^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$ tengo

(*) = $b\,.\int_0^{\frac{pi}{2}} \sqrt{1 + k^2.sen^2(t)}\,.dt$

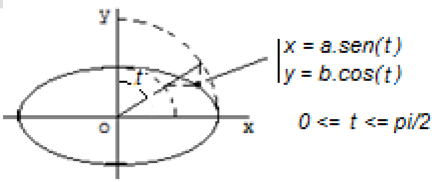
Esta integral es del tipo elíptico y su valor se obtiene mediante Tablas tabuladas.

Según otros autores:

Con el fin de obtener un resultado adaptado a las Tablas tabuladas parametrizamos del siguiente modo.

Modificamos el origen del ángulo y su sentido del recorrido.

$$\begin{cases} x = a.\mathrm{sen(t)} \\ y = b.cos(t) \end{cases}$$



$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [a^2.cos^2(t) + b^2.sen^2(t)].dt^2$

dl = $\sqrt{a^2.cos^2(t) + b^2.sen^2(t)}.dt$

(la transformamos como sigue)

$a^2.(1 - sen^2(t) + b^2.sen^2(t) = a^2+(b^2 - a^2).sen^2(t) =$

$= a^2.[1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}).sen^2(t)]$ Hago $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$

con lo cual   dl = $a.\sqrt{1 - k^2.sen^2(t)}\,.dt$

Por tanto L = $4.a.\int_0^{pi/2}\sqrt{1 - k^2.sen^2(t)}\,.dt$

NOTA: Esta integral $\int_0^{\frac{pi}{2}}\sqrt{1 - k^2.sen^2(t)}\,.dt$ es llamada ‘Segunda especie de Legendre’, y , al igual que la ‘Primera especie de Legendre’ $\int_0^{\frac{pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2.sen^2(t)}}\,.dt.$

Sus valores han sido tabulados en las llamadas Tablas.

Según resultado proporcionado en el Manual de Fórmulas y Tablas de Matemáticas (Murray R. Spiegel, vér Bibliografía), aplicando las citadas tablas resulta

$$\int_0^{\frac{pi}{2}}\sqrt{1 - k^2.sen^2(t)}\,.dt \cong \frac{pi}{2.a}\,.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

y por consiguiente

L = $4.a.\int_0^{pi/2}\sqrt{1 - k^2.sen^2(t)}\,.dt \cong 4.a.\frac{pi}{2.a}\,.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} =$

$= 2.pi.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,   L $\cong 2.pi.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

ACTIVIDADES Resueltas o semi-resueltas

1.- Halla la función derivada de las siguientes:

$f(x) = \ln(x^2+1) \to f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f(x) = \ln^3(3x) \to f'(x) = 3.\ln^2(3x).\frac{3}{3x}$

$f(x) = \log_a(3x^2+5) \to f'(x)= \frac{6x}{3x^2+5}.\ln(a)$

$f(x) = x^2.\ln(3x+5) \to f'(x) =$

$= 2x.\ln(3x+5)+x^2.\frac{3}{3x+5}$

2.- Deriva las siguientes:

$f(x) = e^{4x^2+3x+5} \to f'(x) = e^{4x^2+3x+5}.(8x+3)$

$f(x) = a^{x^2+x+2} \to f'(x) =$

$= a^{x^2+x+2}.(2x+1).\ln(a)$

$f(x) = x^3.2^x.e^x \to f'(x) = 3x^2.2^x.e^x +$

$+ (2^x.\ln(2)).x^3.e^x + e^x.x^3.2^x$

$f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x) = \frac{h(x).g'(x)-g(x).h'(x)}{h(x)^2} =$

$= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

3.- Calcula la derivada de las siguientes:

$f(x) = x^{x+1} \to \ln(f(x)) = (x+1).\ln(x) \to$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1.\ln(x) + (x+1).\frac{1}{x} \to$

$f'(x) = x^x.[x.\ln(x) + (x+1)]$

$f(x)= (x^5)^{x^2+1} \to \frac{f'(x)}{f(x)} = (2x).\ln(x^5)+(x^2+1).\frac{5x^4}{x^5}$

$$f'(x) = (x^5)^{x^2}.[2x^2.\ln(x^5) + 5.(x^2+1)]$$

4.- Deriva las siguientes funciones:

$f(x) = \cos(2x+1)$ -> $f'(x) = -sen(2x+1).2$

$f(x) = \ln(sen(x))$ -> $f'(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$

$f(x) = \tan(x^2+x+1)$ -> $f'(x) =$

$= \sec(x^2+x+1).(2x+1)$

$f(x) = arcSen(2x)$ -> $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

$f(x) = arcCos(x^2+1)$-> $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$

(Pero téngase en cuenta que Im(cos(x))= [-1,1], y por tanto arcCos(x^2+1) solo está definida en x = 0)

$f(x) = arcTan(\sqrt{x})$ -> $f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2.\sqrt{x}}$

$f(x) = arcTan(3x^2)$ -> $f'(x) = \frac{6x}{1+9.x^4}$

$f(x) = \sqrt{\frac{1-sen(x)}{1+\text{sen}(x)}}$ -> $f'(x) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-sen(x)}{1+sen(x)}}} \cdot \frac{(1+sen(x)).(-\cos(x))-(1-sen(x)).\cos(x)}{(1+sen(x))^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+sen(x)}}{2.\sqrt{1-sen(x)}} \cdot \frac{-2.\cos(x)}{(1+sen(x))^2}$$

$f(x) = arcSec(x^2)$ -> $f'(x) = \frac{2x}{x^2.\sqrt{x^4-1}}$

$f(x) = x^{sen(3x)}$ -> $\ln(f(x)) = sen(3x).\ln(x)$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3.\cos(3x).\ln(x) + sen(3x).\frac{1}{x} \ ,$$

$$f'(x) = \frac{x^{sen(3x)}}{x} \ .[3.x.\cos(3x).\ln(x) + sen(3x)]$$

5.- Localiza el punto Q de la curva

$f(x) = 6x^2 + 9x - 2$, en el cual la recta

tangente a ella es paralela al eje ox.

Sol.: $f'(x) = 12x + 9$, $f'(a) = 12.a + 9$, y si ha de ser paralela a ox tendrá pendiente $m = 0$.

$12.a + 9 = 0$ -> $a = -3/4$

Sustituyendo tengo $f(-3/4) = \ldots..$

6.- Estudia la monotonía de las siguientes:
(Derivas y obtienes los puntos donde $f'(x)=0$)

a) $f(x) = 6x^3 - 8x$
b) $f(x) = (x-2).(x+1).(x+3)$
c) $f(x) = sen(x) - x$
d) $f(x) = \cos(x) + x$
e) $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$

Res.: a) Es creciente en los intervalos

$(-\infty, \frac{-2}{3})$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$

b) Creciente en: $(-\infty, \frac{-2-\sqrt{19}}{3})$, $(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}, +\infty)$

Decreciente en: $(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3})$

c) f'(x) = cos(x) – 1; puesto que cos(x)-1<=0

para todo x, es decreciente siempre.

e) f'(x) = -sen(x) +1; puesto que

–sen(x)+1 >= 0, es creciente siempre.

e) Creciente en: $(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{3})$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}, +\infty)$

Decreciente en: $(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$

7.- Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3x$
b) $f(x) = (x^2-1).(x^2+3)$
c) $f(x) = -x^3 +6x^2 +15x +4$
d) $f(x) = x^3-3x^2+4x+1$
e) f(x) = x.ln(x)
Res.: a) Mínimo P(-3/2,-9/4)
b) Mínimo P(0,-3)
c) Mínimo P(-1,-4), Máximo Q(5,104)
d) No tiene extremos
e) Mínimo P($e^{-1}, -e^{-1}$)

8.- Determina los valores de a, b, c, d, de modo que la curva

$$f(x) = ax^3 +bx^2 +cx +d$$

tenga un máximo en M(0,4) y un mínimo en m(2,0).

Res.: a = 1, b = -3, c = 0, d = 4

9.- Determina los valores de b, c, d, de modo que la curva

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo cuando x = 4, un mínimo cuando x=0 y pase por P(1,1).

Res.: b = 6, c = 0, d = -6

10.- ¿Qué dimensiones debe tener una finca rectangular de 3600 m^2 para cercarlo mediante una valla de longitud mínima.

Res.: Debe ser cuadrado de lado 60 m

11.- Una finca situada junto al camino debe ser vallada de modo que: El lado junto al camino cuesta 80 eur/m, y el resto a 10 eur/m. Determina qué dimensiones tiene aquella de área máxima que podemos cercar con 28800 euros.

Res.: Dimensiones: 160 m por 720 m

12.- Necesito inscribir un rectángulo en una circunferencia de radio R = 12 m. ¿Qué medidas tiene aquel de área máxima?

Res.: Cuadrado de lado $l = 12\sqrt{2}$

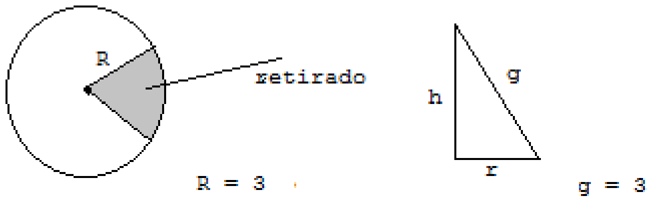
13.- Necesito inscribir un triángulo isósceles en una circunferencia de radio R = 12 m. ¿Qué medidas tiene aquel de área máxima?

Res.: Equilátero de lado $l = 12\sqrt{3}$

14.- Una zona ajardinada tiene forma de sector circular. Su perímetro es P = 2.r + l, donde l es la longitud del arco. Sabemos que P = 20 m. ¿Para qué valor del radio r la superficie es máximo? . Después calcula el ángulo.

Res.: Radio r = 5 m. Ángulo g = 2 rad.

15.- Nos disponemos a construir una boya formada por dos conos (rectos) soldados por su base. Cada cono ha de ser construido tomando dos placas metálicas circulares de radio R = 3 m. Calcula las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo (Calcula: Radio de la base y la altura h)



$V = \frac{1}{3}.(\pi.r^2).h = \frac{1}{3}.(\pi.r^2).\sqrt{9-r^2}$

Res.: $r = \sqrt{6}$, $h = \sqrt{3}$

16.- Un pliego de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm, y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener el citado pliego para que el gasto de papel sea mínimo?

Res.: Dim. : 5 cms por 10 cms

17.- Determina los intervalos de convexidad y concavidad de las siguientes:

a) $f(x) = x^2-6x+8$
b) $f(x) = x^3 -3x^2-2x+5$
c) $f(x) = sen(x)$ en $[0, 2\pi]$
d) $f(x) = cos(x)$ en $[0, 2\pi]$
e) $f(x) = e^x$
f) $f(x) = ln(x)$

Res.: CRITERIO: Las gráficas son observadas desde el punto más bajo del eje oy.

a) Convexa en ($-\infty$, $+\infty$), vista desde abajo
b) Convexa en: (1, $+\infty$) ; cóncava en: ($-\infty$, 1)
c) Cóncava en: $(0, \pi)$; convexa en: $(\pi,\ 2\pi)$
d) Cóncava en:$(0, \frac{\pi}{2})$, y $(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$; convexa en:$(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$
e) Convexa en: ($-\infty$, $+\infty$)
f) Cóncava en: (0, $+\infty$)

18.- Determina los puntos de inflexión de las siguientes, cuando los tenga:

a) $f(x) = x^2-6x+8$
b) $f(x) = x^3 -3x^2-2x+5$, $f(x) = x^3-2x^2+4$
c) $f(x) = sen(x)$ en $[0, 2\pi]$
d) $f(x) = cos(x)$ en $[0, 2\pi]$
e) $f(x) = e^x$
f) $f(x) = ln(x)$

Res.: a) No tiene; b) Punto P(1,1);
Punto $Q(\frac{2}{3}, \frac{92}{27})$; c) Punto $P(\pi, 0)$;

d) Puntos $P(\frac{\pi}{2} , 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; e) No tiene; f) No tiene

19.- Sea $f(x) = x^3 -2x^5 +5$. Calcula:
a) El valor real de f(1,0003)
b) Calcula f(1,0003) aplicando la diferencial

Sol.: a) f(1,0003) = ….. = 3,9979

b) Por la diferencial:

$$f(1{,}0003) \cong f(1) + df(1; 0{,}0003) = (*)$$
$$f(1) = 4$$

$df(x0;dx) = f'(x0).dx = (3x0^2-10x0^4).dx$

$df(1; 0{,}0003) = (-7).0{,}0003 = -0{,}0021$

$(*) = 4 -0{,}0021 = 3{,}9979$, y vemos que las

4 primeras cifras decimales coinciden.

20.- Halla la ecuación de las tangentes a la Elipse

$12x^2 +36y^2 – 432 = 0$ que pasan por P(3,-3)

Sol.: (Texto nº: 8.23) El haz de rectas con vértice en P tiene ecuación:

$(y+3) = m.(x-3)$

Puntos de corte (tangencia): $\begin{cases} y = mx - 3(m+1) \\ 3x^2 + 9y^2 - 108 = 0 \end{cases}$ ->

$3x^2 +9.(mx-3(m+1))^2 -108 = 0$,

$3x^2 +9.[m^2x^2 +9.(m^2+2m+1) -6.m.(m+1)x] – 108 = 0$,

$(3+9m^2).x^2 -54.m.(m+1).x + [81.(m^2+2m+1)–108]= 0$,
(Este problema se resolverá utilizando la derivación)

21.- Determina las ecuaciones de las tangentes y las normales a la Hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$ en el punto de abscisa x = 5.

Sol.: La recta normal es aquella perpendicular a la tangente en el mismo punto de la curva.

22.- Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola:
$y^2 = 2px$, en el punto P(9, 6)

Sol.: La recta normal es aquella perpendicular a la tangente en el mismo punto de la curva.

23.- Determina el valor de la tangente del ángulo que forman las rectas tangentes a la Elipse: $3x^2 + 5y^2 = 8$,

y la parábola: $y^2 = x$, en el punto común situado en el cuarto cuadrante.

Sol.: Indicación: Halla el punto común resolviendo

$$\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 8 \\ y^2 = x \end{cases} \rightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$$

Determina las dos rectas citadas, sean r y s, y aplicando los conocimientos de geometría calcula el menor de los ángulos que forman.

24.- Determina la ecuación de la parábola

$y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por

P(1, 3), y es tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante.

Sol.: Bisectriz: $y = x$, $m = 1$

Derivando: $y' = 2ax + b$, y ha de cumplirse que $y'(0) = 1$, y por tanto: $b = 1$

Si pasa por P: $3 = a + 1 + c$

Además del enunciado se deduce que pasa por (0, 0):

$0 = c$, por tanto: $a = 2$

Tengo: $y = 2x^2 + x$

25.- Dada la parábola $y = -x^2 + 5x - 4$, calcula el área del triángulo limitado por los ejes ox, oy y la tangente a la parábola en el punto P(3,2)

Sol.: Derivando: $y' = -2x + 5$, $m = y'(3) = -1$

Recta tangente: $(y-2) = -(x-3)$, $y = -x + 5$

Corte con los ejes: Con ox: $y = 0 \to x = 5$, A(5,0)

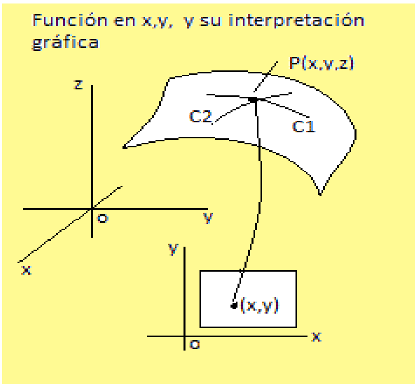
Con oy: $x = 0 \to y = 5$, B(0, 5)

Área = $1/2.5.5 = \frac{25}{2}$

$$$$oOo$$$$

Tema 3

Funciones z = f(x,y), dos variables independientes
Funciones implícitas
Superficies en el Espacio



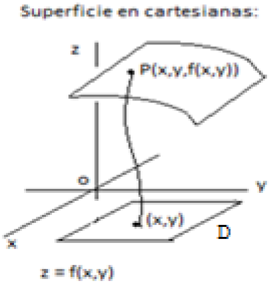
3.1.- Función z = f(x,y), dos variables independientes: Superficies en el espacio

A) En Cartesianas:

Tenemos un recinto D en el plano oxy y una “Ley” que a cada punto (x1,y1) de D le asocia un valor real z1:

f: D --- > R

(x,y) -- > z = f(x,y)



D = [a, b]x[c, d] del plano OXY.

Decimos que D es el dominio de f(x, y).

La representación gráfica de z = f(x,y) es una superficie en el espacio: Puntos P(x,y,z) del espacio donde (x,y) recorren D y z satisface la relación

$$z = f(x,y)$$

B) En Coordenadas paramétricas (también llamadas ‘curvilineas’)

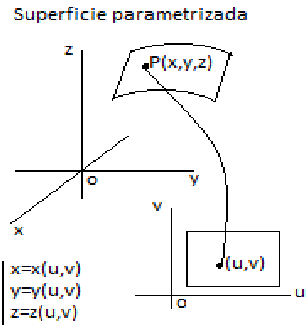
Las llamamos así cuando incluso las variables independientes x, y las ‘sometemos’ a la dependencia de dos ‘variables independientes’, que ahora designamos por u, v, de modo que tenemos relaciones como las siguientes:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad \text{(u,v) recorriendo un recinto}$$

D = [a,b]x[c,d] en el plano ouv.

Si en z = f(x,y) sustituyo x, y, z por las anteriores llagamos a una expresión

z(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) -> g(u,v) = 0



Curvas sobre la superficie en un punto P:

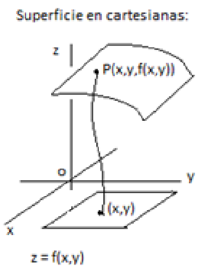
Si fijo un valor v = vo, y al parámetro u lo llamo t (como es habitual), sobre el plano ouv tengo un segmento de recta, y al recorrerla su imagen sobre la superficie es una curva que pasa por el punto (P(x(uo,vo),y(uo,vo),z(uo,vo)).

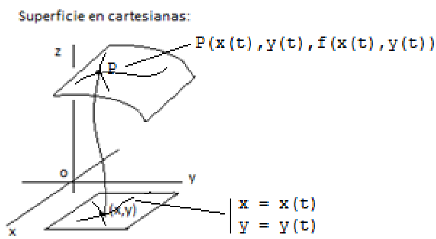
Puesto que el valor de v queda fijo, las anteriores ecuaciones paramétricas podemos expresarlas así:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ que pasa por P(xo,yo,zo) correspondiente a t = to.

También, si teníamos z = f(x,y), entonces

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}, \quad \begin{cases} xo = x(to) \\ yo = y(to) \\ zo = f(xo, yo) \end{cases}$$





Cuando modificamos las expresiones $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ obtenemos como resultado otra curva, que pasará por el mismo punto si t = to nos da el mismo punto que antes. En otro caso será una curva que no pasa por aquel, sino por otro punto proporcionado por dicho valor t = to.

3.2.- Derivadas sucesivas. Derivadas parciales.

3.2.1.- Derivadas sucesivas:

Como estamos indicando consiste en 'derivar' la función derivada 'actual'. Así, si tengo la 'primer derivada'

y = f'(x), al derivar ésta obtengo la 'segunda derivada'

$y = f''(x)$, si derivo de nuevo tengo la derivada de orden tres

$f^{(3}(x)$, y repitiendo … $f^{(n}(x)$

Volviendo a derivadas parciales tenemos

$f_x'(x,y)$, y derivo de nuevo esta expresión, obtengo

$f_{xx}''(x,y)$, si derivo respecto de x

$f_{xy}''(x,y)$, si derivé la primer vez respecto de x, y la segunda respecto de y.

Del mismo modo obtenemos

$f_{yx}''(x,y)$, si he derivado la primer vez respecto de y, y la segunda respecto de x.

$f_{yy}''(x,y)$, si derivo de nuevo respecto de y.

Sobre la superficie $z = f(x,y)$ tenemos un tipo especial de "curvas" obtenidas como sigue.
NOTA: Podremos escribir f_x, f_{yx}, ….

3.2.2.- Derivadas parciales. Diferencial total

Dada una función o expresión en dos variables independientes $f(x,y)$, si hago $y = b$ tengo la función $g(x) = f(x,b)$ con una sola variable. Del mismo modo, si hago $x = a$ obtengo la función $h(y) = f(a,y)$ con una sola variable. Tanto la expresión $g(x)$ como la expresión $h(y)$ sabemos derivarlas: La primera respecto de x, la segunda respecto de y.

Definiciones:
Llamamos derivadas parciales de f(x,y), en el punto (a,b), a las dos siguientes funciones

f_x'(x,b) = g'(x)
f_y'(a,y) = h'(y)

Si hacemos que b sea un valor cualquiera de la variable y, y por tanto puedo escribir 'y' en lugar de b, tengo la siguiente expresión con las dos variables x,y:

f_x'(x,y), derivada parcial respecto de x

y del mismo modo obtengo la expresión

f_y'(x,y), derivada parcial respecto de y

En la práctica las obtenemos teniendo en cuenta esto:

f_x'(x,y) : "Derivamos f(x,y) considerando 'y' como constante, y derivando respecto de x"

f_y'(x,y) : "Derivamos f(x,y) considerando 'x' como constante, y derivando respecto de y"

Diferencial total de z = f(x,y):

Sea z = f(x,y).

En un punto P(a,b,c) de la superficie, donde c = f(a,b), y para un entorno D(P,r) donde r es suficientemente pequeño, el incremento de z viene dado por

$$(z-c) = f_x(P).(x-a) + f_y(P).(y-b) + o(r),$$

donde o(r) representa un infinitésimo respecto de r ($\lim_{r\to 0}\frac{o(r)}{r} = 0$

Despreciando este valor o(r) tenemos lo que llamamos 'Diferencial total' de z = f(x,y), siendo su expresión

$$dz(p) = f_x(P).(x-a) + f_y(P).(y-b)$$

donde debemos detallar que:

$$\begin{cases} dx = \ x - a \ \ (por\ ser\ x\ indepen.) \\ dy = y - b \ \ (por\ ser\ y\ indepen.) \\ dz \ \approx z - c \ \ (por\ ser\ z\ depend.) \end{cases}$$

En el punto 3.3 vemos cómo utilizamos estos conceptos.

Una de las aplicaciones de mayor interés de las derivadas parciales consiste en obtener la 'recta tangente' a una curva sobre la superficie en un punto P(xo,yo,zo) de ésta. Esta aplicación la tenemos al calcular el valor del área de una superficie (Vol. 9, Aplicación del Cálculo Integral).

Ejemplos:

1.- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy + 5x - 3y$

$f_x'(x,y) = 2x - 3y + 5$

(Recuerda que la derivada de una constante es cero, y el 0 no se escribe)

$f_y'(x,y) = 2y - 3x - 3$

2.- Sea la función $z = \sqrt{\boldsymbol{R^2 - x^2 - y^2}}$

que resulta de la ecuación de la superficie Esférica:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Obtenemos:

$$z_x = \frac{-2x}{2.\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$z_y = \frac{-2y}{2.\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

(Las utilizaremos más adelante)

3.- Sea z = $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a.b}}.\sqrt{\mathrm{a}^2.\mathrm{b}^2-\mathrm{b}^2.\mathrm{x}^2-\mathrm{a}^2.\mathrm{y}^2}$

que resulta de la ecuación de la superficie del

Elipsoide:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, de donde

$z^2 = c^2.(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2) = \frac{c^2}{a^2.b^2}.(a^2.b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)$

de donde z = ….

Sus derivadas parciales son

$$z_x = \frac{c}{a.b}.\frac{1}{2}.\frac{-2b.x}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}} = \frac{c}{a}.\frac{-x}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}}$$

$$z_y = \frac{c}{a.b}.\frac{1}{2}.\frac{-2a.y}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}} = \frac{c}{b}.\frac{-x}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}}$$

(Las utilizaremos más adelante)

4.- Sea z = c.($\frac{\mathrm{x2}}{\mathrm{a2}}+\frac{\mathrm{y2}}{\mathrm{b2}}$)

que resulta de la ecuación de la superficie del

Paraboloide elíptico:

$$\frac{\mathrm{x2}}{\mathrm{a2}}+\frac{\mathrm{y2}}{\mathrm{b2}}=\frac{z}{c}\ , \qquad z = c.\left(\frac{\mathrm{x2}}{\mathrm{a2}}+\frac{\mathrm{y2}}{\mathrm{b2}}\right)$$

Tengo $\qquad z_x = \frac{\mathbf{2}c}{a^2}.\boldsymbol{x}\ ,\ z_y = \frac{\mathbf{2}c}{b^2}.y$

NOTA: Hacemos notar lo siguiente

- Si fijamos un valor z = k obtenemos la ecuación de una elipse

$$\frac{\mathrm{x2}}{\mathrm{a2}}+\frac{\mathrm{y2}}{\mathrm{b2}}=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{c}}$$

que, si llamo $a' = \sqrt{\frac{k}{c}}\ .a,\quad b' = \sqrt{\frac{k}{c}}\ .b$

podemos escribir así

$$\frac{\mathrm{x2}}{\mathrm{a'}^2}+\frac{\mathrm{y2}}{\mathrm{b'}^2}=1,$$ y por tanto sus semiejes son

$$a' = \sqrt{\frac{k}{c}}\ .a,\quad b' = \sqrt{\frac{k}{c}}\ .b$$

3.2.3.- Función implícita. Derivación implícita

Sea una expresión f(x, y) = 0 donde la variable y

es dependiente de x, pero que no está despejada:

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 2y - 25 = 0$$

Derivamos respecto de x, teniendo en cuenta que ‘y’ depende implícitamente de x. Tenemos

$$f_x'(x,y) = 4x + 2yy' - 3y - 3xy' + 2y' = 0$$

y'.(2y-3x+2) + 4x -3y = 0 , de donde

$$y' = \frac{-4x+3y}{-3x+2y+2}$$

En el Apéndice 1 volvemos a estudiar este concepto y aplicaciones significativas.

Ejemplo:
Dada $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3xy + 2y - 25$

Obtener la recta tangente en los puntos de abscisa x = 2.

Sol.: Derivando respecto de x:

$$4x + 2yy' - 3y - 3xy' + 2y' = 0 \; \text{-- >} \; y' = \frac{-4x+3y}{-3x+2y+2}$$

$$x = 2 \; \text{->} \begin{cases} y1 = 2+\sqrt{21} \\ y2 = 2-\sqrt{21} \end{cases} \text{-- >} \begin{cases} \mathrm{p1}\left(2;\ 2+\sqrt{21}\right) \\ \mathrm{p2}(2;\ 2-\sqrt{21}) \end{cases}$$

$$y'(p1) = \frac{-2+3.\sqrt{21}}{2.\sqrt{21}}, \quad y'(p2) = \frac{-2-3.\sqrt{21}}{-2.\sqrt{21}} = \frac{2+3.\sqrt{21}}{2.\sqrt{21}}$$

Rectas tangentes:

$$r1: (y-(2+\sqrt{21})) = \frac{-2+3.\sqrt{21}}{2.\sqrt{21}} .(x-2)$$

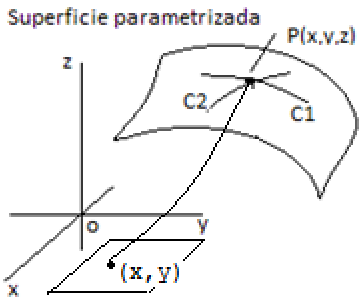
$$r2: (y-(2-\sqrt{21})) = \frac{2+3.\sqrt{21}}{2.\sqrt{21}} .(x-2)$$

3.3.- Curvas sobre la superficie en un punto Tangentes a la superficie en P. Plano tangente a la superficie en P

3.3.1.- Curvas sobre la superficie en un punto

Sea la superficie S definida por f(x,y,z) = 0.

Si fijamos un valor y = b, tal que (x,b) está en D, la función z = f(x,b) es de una variable independiente, y su gráfica es una curva C1 sobre la superficie anterior. Es la curva que produce sobre la superficie la intersección de ésta con el plano y = b.

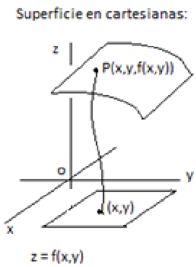


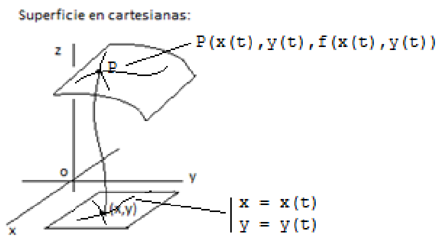
Si fijamos un valor x = a, tal que (a, y) está en D, la función z = f(a, y) es de una variable independiente, y su gráfica es una curva C2 sobre la superficie anterior. Es la curva que produce sobre la superficie la intersección de ésta con el plano x = a.

Más general: Si en el plano OXY tengo la curva

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, que para t = to pasa por $\begin{cases} xo = x(to) \\ yo = y(to) \end{cases}$, su imagen sobre la superficie es la curva

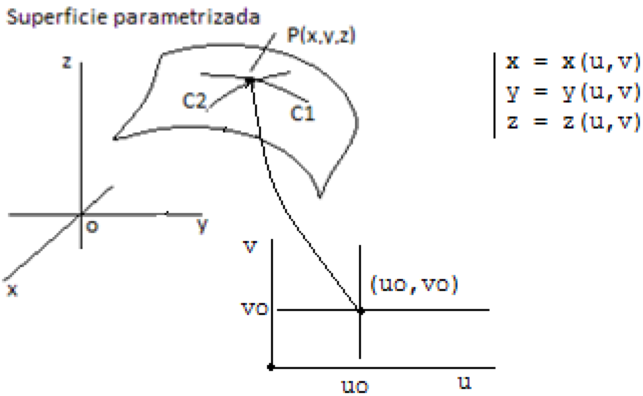
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$, que pasa por P(xo,yo,f(xo,yo))





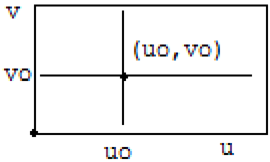
Si la superficie viene definida en paramétricas

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$, (u,v) recorriendo $D < R^2$



Si fijo un valor u = uo y v variable, sobre D tengo una línea plana. Si fijo v = vo y u variable, obtengo otra curva.

Cada una de éstas dan sobre S su curva imagen



Otra forma:

Si de alguna forma defino sobre D una curva

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \text{ t recorriendo [t1,t2]}$$

su imagen sobre S es la curva C: $\begin{cases} x = x\big(u(t), v(t)\big) \\ y = y\big(u(t), v(t)\big) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$

En lo que sigue veremos cómo obtener la tangente a una de estas curvas, en un punto P(xo, yo, zo)

3.3.2.- Rectas tangentes en P. Plano tangente en P

Hemos visto en el punto anterior, fijado un punto P(a,b,f(a,b)) de la superficie, por este punto pasan infinitas curvas como hemos descrito, y como tales curvas tienen su recta tangente en P. Observa la figura.

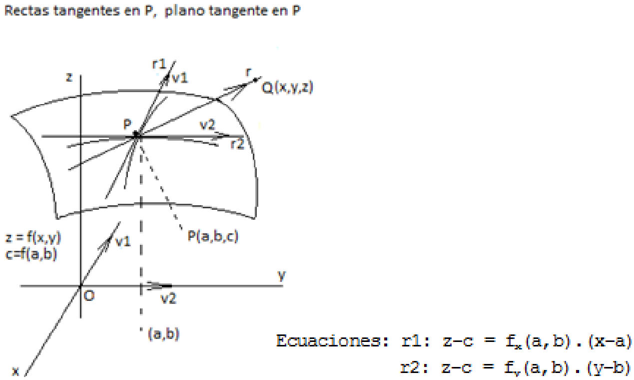
Fijamos el punto P(a,b,c) donde c = f(a,b)

Si y = b tengo z = f(x,b), que es función con una sola variable cuya imagen es la curva C sobre la superficie S. Entonces, recordando el concepto de diferencial, tengo

$dz = f_x(a,b).dx$, ó bien: $z - c = f_x(a, b).(x - a)$, que es la ecuación de una recta

r1: z-c = f_x(a,b).(x-a),

con pendiente m1 = f_x(a,b), y que pasa por P(a,b,f(a, b))



Del mismo modo, si fijo el valor x = a, obtengo

otra recta: **r2: z-c = f_y(a,b).(y-a)**,

con pendiente m2 = f_y(a,b), también pasando por P(a, b, f(a,b))

Conclusión: Rectas tangentes

Curva C1: z = f(x,b)

Tangente r1: z = f(a,b) + f_x(a,b).(x-a)

que también puedo expresar $\frac{z-c}{f_x(a,b)} = \frac{x-a}{1}$,

siendo

v1 = (1, 0, f_x(a, b)) un vector director

Curva C2: z = f(a,y)

Tangente r2: z = f(a,b) + f_y(a,b).(y-b) que también puedo expresar $\frac{z-c}{f_y(a,b)} = \frac{y-b}{1}$, siendo

v2 = (0, 1, f_y(a, b)) un vector director

Plano tangente en P:

A continuación demostramos que el plano tangente a la superficie S en el punto P tiene por ecuación:

$$z = f(a,b,f(a,b)) + f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b).(y-b)$$

o bien

$$z-c = f_x(a,b).(x-a) + f_y(a,b).(y-b)$$

Demostración:

Evidentemente este plano ha de contener a las rectas r1, r2 obtenidas antes, y por tanto, los vectores v1, v2 son un par de generadores del subespacio director de este plano.

Dicho lo anterior, para un punto Q(x, y, z) cualquiera del plano, vectorialmente tenemos

$$OQ = OP + PQ$$

Entonces

$(x,y,z) = (a,b,c) + k.(1,0,f_x(P)) + h.(0,1,f_y(P))$

de donde obtengo

$$\begin{cases} x = a + k \\ y = b + h \\ z = c + k.f'_x(P) + h.f'_y(P) \end{cases}$$

y de aquí

$k = x-a, \quad h = y-b,$

$z = c + f'_x(P).(x-a) + f'_y(P).(y-b)$

$z-c = f'_x(P).(x-a) + f'_y(P).(y-b)$

(*)

Observa:

Sobre la recta r1 tengo:

$(x, b, z) = (a, b, c)+ (x-a, 0, f\ 'x(P).(x-a))$

o bien , sacando factor $(x – a)$

$(x,b,z) = (a,b,c) + (1, 0, f'x(P)).(x-a)$

(*)

Sobre la recta r2 tengo:

$(x,y,z) = (a,b,c) + (0, y-b, f'y(P).(y-b))$

o bien

$(x,y,z) = (a,b,c)+ (0, 1, f'y(P)).(y-b)$

Sobre la recta r genérica del plano tangente tengo, vectorialmente:

$(x,y,z) = (a,b,c) + (1,0,f_x'(P)).(x-a) + (0,1,f_y'(P)).(y-b)$

de donde:

$(x-a,y-b,z-c) = (x-a,0,f_x'(P).(x-a)) + (0,y-b,f_y'(P).(y-b))$ ->

$(x-a,y-b,z-c) = (x-a,y-b,f_x'(P).(x-a)+ f_y'(P).(y-b))$

de donde:

$z-c = f_x'(P).(x-a)+ f_y'(P).(y-b)$

que coincide con la expresión (*)

3.4.- Extremos locales, Puntos críticos. Su cálculo

3.4.1.- Extremos locales sobre una superficie

Definiciones:
Sea función con dos variables z = f(x,y), con dominio D < R^2.
En lo que sigue escribimos c = f(a,b)

Recordando el concepto de entorno de un punto P(a,b) de R^2, podemos suponer que dicho entorno sea de la forma U(P,r) = Disco de radio r con centro en P.

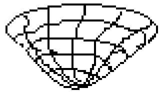
Máximo relativo (estricto):

También llamados extremos locales y/o puntos críticos.

El punto Q(a,b,c) es un máximo relativo si existe un entorno U(P,r) de P(a,b) en D, tal que f(x,y) < f(a,b) siempre que (x,y) esté en U(a+k,b+h).

Mínimo relativo (estricto):

El punto Q(a,b,c) es un mínimo relativo si existe un entorno U(P,r) de P(a,b) en D, tal que f(x,y) > f(a,b) siempre que (x,y) esté en U(a+k,b+h).



Observa: Bajo las condiciones de continuidad que suponemos se cumplen, si en el punto P(a,b,c) tiene un máximo o un mínimo, cuando nos aproximamos a P siguiendo cualquiera de las curvas que pasan por él, en P cambia el signo de la pendiente de la recta tangente a la citada curva, y esto significa que $f_x(P) = 0$ y $f_y(p) = 0$. Es decir, llegaremos a que la condición necesaria para la existencia de extremo local es que

$$\begin{cases} f_x(P) = 0 \\ f_y(P) = 0 \end{cases}$$

3.4.2.- Condición necesaria para la existencia de extremos locales. Puntos críticos

Sea Q(a, b, c) imagen de P(a, b), es decir c = f(a, b).

Si Q(a,b,c) es un máximo local, las curvas C1, C2 descritas más arriba tienen también un máximo en Q, y por tanto se ha de cumplir

$f'_x(P) = 0$, $f'_y(P) = 0$

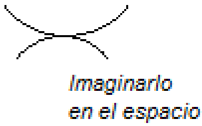
Decimos que Q es un punto crítico.

Del mismo modo si Q(a,b,c) es un mínimo local.

Puntos Críticos y Casuística:

Cuando Q es un punto crítico: $f'_x(P) = 0$, $f'_y(P) = 0$, pueden ocurrir los siguientes casos:

-Máximo local, que puede relativo ó ser absolutos
-Mínimo local, que puede relativo ó ser absolutos
-Puntos de ensilladura, que no es máximo ni mínimo (Tiene la forma de la silla de montar a caballo)



para el caso de 'ensilladura'

3.4.3.- Condición suficiente

La demostración de lo siguiente resulta como corolario del estudio realizado en el Tema 4 sobre el desarrollo de Taylor para z = f(x, y) y su aplicación al análisis de los extremos locales. Aplicamos aquí aquellos resultados.

Corolario de aquel estudio son los siguientes criterios:

Sea P(a, b, c) un punto crítico, c = f(a, b), $f'_x(P) = 0$, $f'_y(P) = 0$

Tenemos el llamado (determinante) Hessiano:

$$H(P) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{vmatrix} = f_{xx}(P).f_{yy}(P) - f_{xy}(P).f_{yx}(P) =$$

(Teniendo en cuenta que, bajo condiciones de continuidad

$$f_{yx}(P) = f_{xy}(P) \quad)$$

$$= f_{xx}(P).f_{yy}(P) - 2.f_{xy}(P)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos en el referido estudio tenemos lo siguiente.

Si H(P) > 0, entonces queda bien definido máximo o mínimo, cumpliéndose que :

a)$f_{xx}(P) < 0$ -- > tiene máximo en P

b)$f_{xx}(P) > 0$ -- > tiene mínimo en P

Si H(P) < 0, No tiene máximo ni mínimo, será un posible punto de ensilladura.

Ejemplos / Problemas resueltos

1.- La Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con centro en (0,0,0)

Nota:

El resultado será: Máx.(0,0,R), Mín.(0,0,-R)

Lo demostramos.

Despejo z

z = f(x,y) = $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, semiesfera superior

z = f(x,y) = $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, semiesfera inferior

Tomo z = $\sqrt{\boldsymbol{R^2 - x^2 - y^2}}$

Derivadas parciales de primer orden

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Resuelvo el sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Obtengo: x = 0, y = 0

Sustituyendo estos valores en la expresión z = f(x,y) resulta

z = R

y por tanto el punto crítico de la superficie P1(0,0,R)

Derivadas de segundo orden

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(-1)-(-x).\frac{1}{2}.\frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

$$= -\frac{[(R2-x2-y2)+x2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]} = -\frac{[R2-y2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(0)-(-y).\frac{1}{2}.-\frac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

$$= \frac{\left[-\frac{y2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} = \frac{-y^2}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

Por continuidad se cumple $f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(-1)-(-y).\frac{1}{2}.-\frac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

$$= -\frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\frac{y2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} = -\frac{[(R2-x2-y2)+y2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

$$= - \frac{[R2-x2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

En el punto P1(0, 0, R): $f_{xx}(0,0) = -\frac{R^2}{R.R^2} = \frac{-1}{R}$,

$f_{xy}(0, 0) = 0$, $f_{yx}(0, 0) = 0$

$f_{yy}(0, 0) = -\frac{R^2}{R.R^2} = \frac{-1}{R}$

Por los resultados obtenidos tengo el Hessiano

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} = = \frac{1}{R^2}$$

H(0,0) > 0 nos dices que sí tiene en (0,0,R) un extremo local.

Puesto que $f_{xx}(0,0) = \frac{-1}{R} < 0$, tenemos un máximo.

Para z **= -** $\boldsymbol{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$**,** evidentemente las derivadas parciales coinciden con las obtenidas antes cambiando el signo.

Derivadas parciales de primer orden

$$f_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Resuelvo el sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Obtengo: x = 0, y = 0

Sustituyendo estos valores en la expresión z = f(x,y) resultan los valores

z = -R

y por tanto este punto crítico de la superficie es: P2(0,0,-R)

Derivadas de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(-1)-(-x).\frac{1}{2}.\frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

$$= \frac{[(R2-x2-y2)+x2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]} = \frac{[R2-y2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(0)-(-y).\frac{1}{2}.-\frac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{\mathrm{y}2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} = \frac{\mathrm{y}^2}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

Por continuidad se cumple $f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(-1)-(-y).\frac{1}{2}.-\frac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} =$$

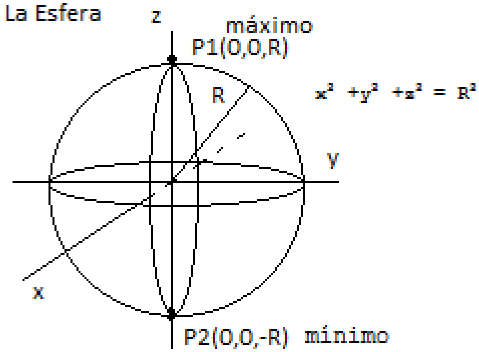
$$= \frac{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\frac{y2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right]}{R^2-x^2-y^2} = \frac{[(R2-x2-y2)+y2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

$$= \quad \frac{[R2-x2]}{\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}.(R^2-x^2-y^2)\right]}$$

En el punto P2(0,0,-R): $f_{xx}(0,0) = -\frac{R^2}{R.R^2} = 1/R$,

$f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{yx}(0,0) = 0$

$f_{yy}(0,0) = -\frac{R^2}{R.R^2} = 1/R$



Por los resultados obtenidos tengo el Hessiano

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} = = \frac{1}{R^2}$$

H(0,0) > 0 nos dices que sí tiene en (0,0,-R) un extremo local.

Puesto que $f_{xx}(0,0) = \frac{1}{R} > 0$, tenemos un mínimo.

2.- Caso del Elipsoide, por ejemplo

$$4x^2 + 9y^3 + 4z^2 = 36$$

Nota:

Lo resolvemos en el caso general. Sabemos que el resultado será: Máx.(0,0,c), Mín.(0,0,-c)

Lo demostramos tomando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tengo

$$z = \frac{c}{a.b} . \sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}$$, de donde

$$z2 = c2.\left(1 - \frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2}\right) = \frac{c2}{a2.b2}.\left(a2.b2 - b2x2 - a2y2\right)$$

de donde $z = \frac{c}{a.b}.\sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}$

Téngase en cuenta que al hacer la raíz cuadrada tenemos dos posibles resultados.

Tomamos la que acabamos de indicar que representa la superficie en el Semiespacio positivo (por encima del plano z = 0)

Sus derivadas parciales son

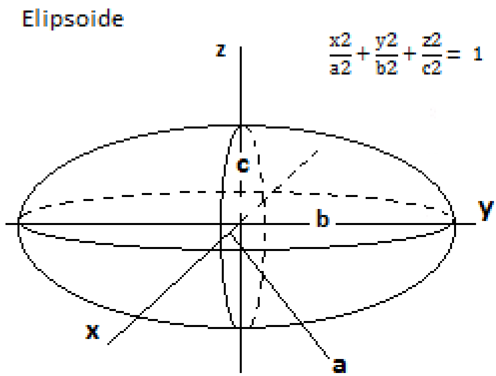
$$f_x(x,y) = \frac{c}{a.b}.\frac{1}{2}.-2b^2x = -\frac{b.c}{a}.\frac{x}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \ldots = -\frac{a.c}{b}.\frac{y}{\sqrt{a^2.b^2-b^2.x^2-a^2.y^2}}$$

El sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

nos da x = 0, y = 0. El valor de z = c, y por tanto P(0,0,c) es un punto crítico.



Derivadas parciales de segundo orden:

(El alumno completará los cálculos siguiendo la pauta dada en el caso de la esfera)

$f_{xx}(x,y) = \ldots. =$

$$= -\frac{cb}{a}\cdot\frac{[(a^2b^2 - a^2y^2)]}{\left[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2).\sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}\right]}$$

En el punto P(0,0):

$$f_{xx}(P) = \ldots = -\frac{cb}{a}\cdot\frac{1}{ab} = -\frac{c}{a^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \ldots = -\frac{ca}{b}\cdot\frac{[(a^2b^2 - b^2x^2)]}{\left[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2).\sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}\right]}$$

En el punto P(0,0):

$$f_{yy}(P) = \ldots = -\frac{ca}{b}\cdot\frac{1}{ab} = -\frac{c}{b^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \ldots = -\frac{cb}{a}\cdot\frac{[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + a^2xy)]}{\left[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2).\sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}\right]}$$

En el punto P(0,0):

$f_{xy}(P) = \ldots = -\frac{cb}{a} . \frac{1}{ab} = -\frac{c}{a^2}$

$f_{yx}(x,y) = \ldots = -\frac{ca}{b} . \frac{[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + a^2xy)]}{[(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2).\sqrt{a^2.b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}]}$

En P(0,0):

$f_{yx}(P) = \ldots = -\frac{ca}{b} . \frac{1}{ab} = -\frac{c}{b^2}$

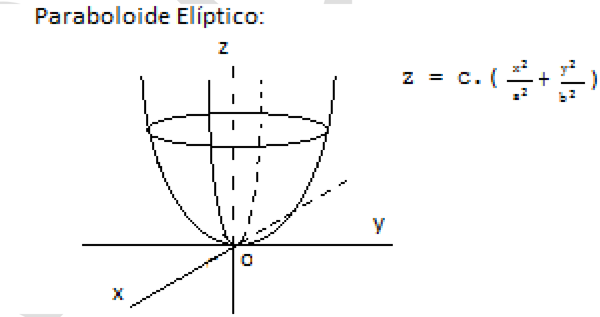
Para el Hessiano tenemos

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{-c}{b^2} & \frac{-c}{b^2} \\ \frac{-c}{a^2} & \frac{-c}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{c2}{(ab)^2} - \frac{c2}{(ab)^2}$$

3.- Sea $z = c.\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$

que resulta de la ecuación de la superficie del Paraboloide elíptico:

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} - \frac{z}{c} = 0 \ \text{->} \ z = c.\left(\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2}\right)$$



Tengo

$f_x(x,y) = \frac{2c}{a^2}.x \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{2c}{b^2}.y$

El sistema $\begin{cases} \frac{2c}{a^2}.x = 0 \\ \frac{2c}{b^2}.y = 0 \end{cases}$ nos da el punto crítico

P(0,0,0) de la superficie.

Derivadas de segundo orden

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2c}{a^2} \;,\; f_{xy}(x,y) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{2c}{b^2} \;,\; f_{yx}(x,y) = 0$$

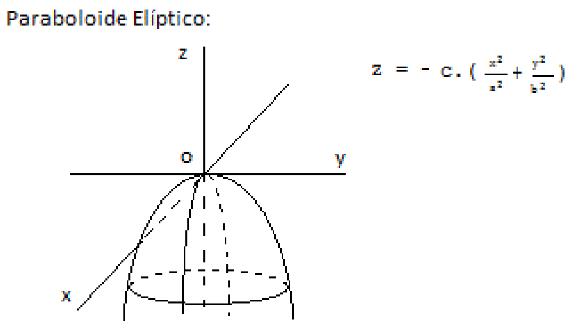
Hessiano $\quad H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{2c}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2c}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{4c^2}{(ab)^2} > 0$

Puesto que $f_{xx}(0,0) > 0$, tiene Mínimo en P(0,0)

4.- Sea $z = -c.\left(\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2}\right)$

que resulta de la ecuación de la superficie del Paraboloide elíptico:

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} + \frac{z}{c} = 0 \;\text{->}\; z = -c.\left(\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2}\right)$$



Tengo

$$f_x(x,y) = \frac{-2c}{a^2}.x \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{-2c}{b^2}.y$$

El sistema $\begin{cases} \frac{-2c}{a^2}.x = 0 \\ \frac{-2c}{b^2}.y = 0 \end{cases}$ nos da el punto crítico

P(0,0,0) de la superficie.

Derivadas de segundo orden

$f_{xx}(x,y) = \frac{-2c}{a^2}$, $f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = \frac{-2c}{b^2}$, $f_{yx}(x,y) = 0$

Hessiano $\quad H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{-2c}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2c}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{4c^2}{(ab)^2} > 0$

Puesto que $f_{xx}(0,0) < 0$, tiene Máximo en P(0,0)

NOTA:
En el caso que nos ocupa al estudiar los extremos locales de z = f(x,y), que define una superficie, cuando tenemos la diferencial de segundo orden

$$d^2z = f_{xx}(P).h^2 + f_{yy}(P).k^2 + 2.f_{xy}(P).h.k$$

es como tener la cuádrica

$$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy - z^2 = 0$$

Matricialmente

$$(x, y, -1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los Hessianos son

$H1 = a11$, $H2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$, $H3 = -H2$

Al estudiar las Cuádricas llegamos a estos resultados:

Si H1 > 0, H2 > 0, H3 > 0 --> Definida positiva

Si H1 < 0, H2 > 0, H3 < 0 --> definida negativa

En la práctica nos fijamos solamente en la expresión

$$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy$$

y en el Hessiano $H2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$

Esta es la razón por la que, en los casos prácticos que nos ocupan, el criterio queda así:

H2 > 0 --> Tiene un extremo estricto

H1 < 0 -- > Máximo (definida negativa)
H1 > 0 -- > Mínimo (definida positiva)

H2 < 0 --> Indefinida, o punto de ensilladura

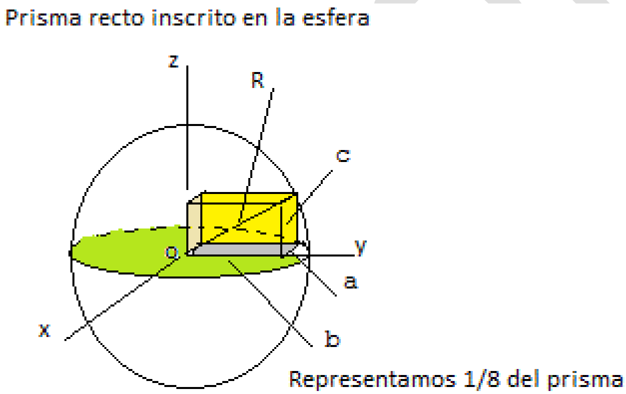
5.- Inscribe en la esfera un paralelogramo de volumen máximo.

Sol.-

Consideramos sólo 1/8 del volumen buscado. Si este es máximo también lo será el total.

Ecuación de la esfera: $x^2+y^2+z^2 = R^2$

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$



Según la figura, las aristas del prisma las representamos por x, y, z, y su volumen viene expresado por la función de tres variables ligadas por la condición $x^2+y^2+z^2 = R^2$, quedando x, y como independientes, así:

$V(x,y,z) = x.y.z = x.y.\ \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$V'_x = y.\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} + x.y.\frac{1}{2}.\frac{-2x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} =$

$= y.\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - \frac{x^2.y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}$

$V'_y = x.\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} + x.y.\frac{1}{2}.\frac{-2y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} =$

$= x.\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} - \frac{x.y^2}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}$

$\begin{cases} V'_x = 0 \\ V'_y = 0 \end{cases}$ *implica* $\begin{cases} y.\left(R^2-(x^2+y^2)\right) - x^2.y = 0 \\ x.(R^2-(x^2+y^2)) - x.y^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2.y - y^3 + R^2.y = 0 \\ -2x.y^2 - x^3 + R^2.x = 0 \end{cases}, \begin{matrix} -2x^2 - y^2 + R^2 = 0 \\ -2y^2 - x^2 + R^2 = 0 \end{matrix},$

de donde: $y^2 = R^2 - 2x^2$, que sustituyo en la otra:

$2.(R^2 - 2x^2) - x^2 + R^2 = 0$, $3x^2 = R^2$, $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$,

$y^2 = R^2 - \frac{2}{3}.R^2 = \frac{1}{3}.R^2$, $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$,

$z^2 = R^2 - \frac{1}{3}.R^2 - \frac{1}{3}.R^2 = \frac{1}{3}.R^2$, $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$

6.- Calcula los extremos locales de

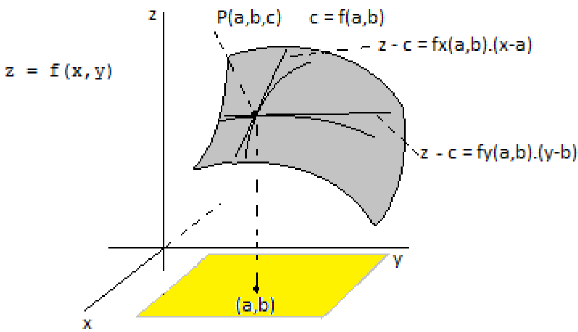
a) $\begin{cases} x2 + y2 + z = 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x2 + y2 + z = k \\ z \geq 0 \end{cases}$

$$$oOo$$$

Tema 4

Desarrollos en Serie de Taylor



4.1.- Derivadas sucesivas. Derivadas parciales

Repasamos brevemente lo que vimos en el punto 3.2

Derivadas sucesivas:

Si tengo $y = f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 3x + 6$, por ejemplo, derivo y obtengo

$$f'(x) = 20x^3 - 21x^2 + 4x - 3$$

Derivo de nuevo este resultado y obtengo

$$f''(x) = 60x^2 - 42x + 4 \quad \text{(segunda derivada)}$$

Derivo de nuevo y obtengo

$$f^{(3}(x) = 120x - 42, \quad \text{(tercer derivada)}$$

y así sucesivamente.

Derivadas parciales:

Cabe hablar de derivadas parciales en el caso de funciones con más de una variable independiente.

Si tengo $z = f(x,y)$, al hacer $y = b$ resulta $g(x) = f(x,b)$, y del mismo modo si hago $x = a$ resulta $h(y) = f(a,y)$.

En el primer caso derivamos respecto de x

$g'(x) = f_x(x,b)$, en el segundo

$h'(y) = f_y(a,y)$.

Si hago que 'b' sea un valor real cualquiera 'variable', y por tanto volvemos a la variable y, obtenemos, finalmente la expresión de la que llamamos 'derivada parcial respecto de x'

$$f_x(x,y)$$

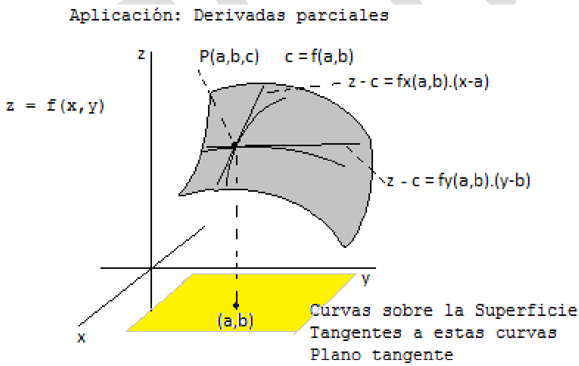
y del mismo modo, si cambio el valor 'a' por x, tenemos la expresión de la 'derivada parcial respecto de y'

$$f_y(x,y)$$

Ejemplos:

En el caso de una superficie z = f(x,y), interesa observar la figura donde se muestran las curvas

C1: z = f(x,b), C2: z = f(a,y)



Casos concretos:

El alumno debe seguirlos al detalle

1.- $z = 5x^3y^2 - 8x^2y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 10$

Derivadas parciales

$z_x = f_x(x,y) = 15x^2y^2 – 16xy^3 + 8x$

$z_y = f_y(x,y) = 10x^2y -24x^2y^2 -6y$

2.- $f(x,y) = 4x^2y.sen(x) + 5xy.cos(2x)$

$f_x(x,y) = [8xy.sen(x) + 4x^2y.cos(x)] + [5y.cos(2x) - 10xy.sen(2x)] = ...$

$f_y(x,y) = \ldots$

3.- $f(x,y) = 2.sen^2(xy) – 3.cos(xy).sen(y)$

$f_x(x,y) = 4.sen(xy).cos(xy).y + 3.sen(xy).y.sen(y) =$

$= 4.y.sen(xy).cos(xy) + 3.y.sen(y).sen(xy)$

$f_y(x,y) = 4.sen(xy).cos(xy).x +$

$+ 3.sen(xy).x.sen(y) -3.cos(xy).cos(y) =$

$= 4.x.sen(xy).cos(xy) +3.x.sen(xy).sen(y) –3.cos(xy).cos(y)$

4.2.- Desarrollo de Taylor de f(x)

4.2.1.- Caso de función polinómica y = P(x)

Fijado un valor x = a, es fácil expresar el P(x) como suma de potencias de (x-a):

$$P(x) = a0 +a1.(x-a) +a2.(x-a)^2 + \ldots +an.(x-a)^n$$

Los coeficientes ai podemos obtenerlos por dos métodos diferentes.

A) Divisiones sucesivas por (x-a):

a0 = P(a) = Resto de P(x):(x-a)

El cociente de P(x):(x-a) es

$$C1(x) = a1 + a2.(x-a) + \dots + an.(x-a)^{n-1}$$

a1 = C1(a) = Resto de C1(x):(x-a)

El cociente de C1(x):(x-a) es

$$C2(x) = a2 + a3.(x-a) + \dots + an.(x-a)^{n-2}$$

De nuevo: a2 = C2(a) = Resto de C2(x):(x-a)

y así sucesivamente, llegaremos al cociente

$C_{(n-1)}(x) = a_{(n-1)} + an.(x-a)$

$a_{(n-1)}$ = Resto de $C_{(n-1)}(x)$:(x-a), quedando el cociente Cn(x) = an

B) Derivadas sucesivas:

$a_0 = P(a)$

$P'(x) = a1 + 2.a2.(x-a) + 3.a3.(x-a)^2 + \dots + n.an.(x-a)^{n-1}$

a1 = P'(a)

Derivada segunda

P''(x) = 2.a2 + 3.2.a3.(x-a) +4.3.a4.(x-a)^2 + … +
+ n.(n-1).an.(x-a)$^{n-2}$

a2 = $\frac{P''(a)}{2}$

Derivada tercera

P$^{(3}$(x) = 3.2.a3 + 4.3.2.a4.(x-a) +5.4.3.a5.(x-a)
+ … + n.(n-1)(n-2).an.(x-a)$^{n-3}$

a3 = $\frac{P^{(3}(a)}{3!}$

Si seguimos obtenemos a4 = $\frac{P^{(4}(a)}{4!}$, ….

y del mismo modo ak = $\frac{P^{(k}(a)}{k!}$ para todo k.

Por este método obtengo

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{P^{(2}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{P^{(k}(a)}{k!}.(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

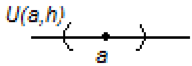
válida en un entorno U(a; h) de x = a.

4.2.2.- Caso de y = f(x) cualquiera

Sea f(x) definida en el intervalo I = [c,d], continua y derivable en (c,d) con derivadas sucesivas al menos hasta orden n.

Sean x = a, p(a,b) en la gráfica de f(x), con b = f(a)

Para los valores x = c, dentro de un entorno U(a;h) incluido en I,



podemos expresarlo así:

$$f(c) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(c-a) + \frac{f^{(2}(a)}{2!}.(c-a)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(k}(a)}{k!}.(c-a) + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(c-a)^n + T_n(a,h,c)$$

donde al término $T_n(a,h,c)$ lo llamamos 'Término complementario', y es necesario tenerlo en cuenta siempre que f(x) no sea polinómica.

Analizamos el carácter de este término complementario:

$$T_n(a,h,c) = f(c) - [f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(c-a) + \frac{f^{(2}(a)}{2!}.(c-a)^2 + \ldots$$

$$+\frac{f^{(k}(a)}{k!}.(c-a) + \cdots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(c-a)^n\ ]$$

Para c = a se anula: $T_n(a,h,c) = 0$

Es fácil observar que también se anulan en c = a las derivadas sucesivas de $T_n(a,h,c)$.
Se cumplen las condiciones necesarias para aplicar un resultado obtenido por L'Hopital, según el cual, en esta condiciones

$$\lim_{c\to a}\left(\frac{T_n(a,h,c)}{(c-a)^n}\right) = 0$$

lo cual significa que $T_n(a,h,c)$ es un infinitésimo respecto de $(c-a)^n$.

Si en lugar de c consideramos un valor cualquiera x dentro de un entorno U(a; h), tenemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f^{(2}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots$$

$+\frac{f^{(k}(a)}{k!}.(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^{n}$ + $T_n(a,h,x)$

Si llamo h = x-a, el incremento $\Delta y(p)$ lo expresamos así

$\Delta y(p)$ = + $\frac{f'(a)}{1!}.h+\frac{f^{(2}(a)}{2!}.h^{2}+\cdots+\frac{f^{(k}(a)}{k!}.h^{k}+\cdots+$
$+\frac{f^{(n}(a)}{n!}.h^{n}$ + $T_n(a,h,x)$

Observa que:
$T_n(a,h,x)$ = f(x)- f(a) $-\frac{f'(a)}{1!}.h-\frac{f^{(2}(a)}{2!}.h^{2}-$
$-$ ... - $\frac{f^{(k}(a)}{k!}.h^{k}-\cdots-\frac{f^{(n}(a)}{n!}.h^{n}$

Formas para el Término complementario:

Al utilizarla en la resolución de problemas, es suficiente saber que $T_n(a,h,x)$ es un infinitésimo respecto de $(x-a)^n$, es decir que

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{Tn(a,h,x)}}{(x-a)^{n}} = 0$$

Expongo el formato que me parece el más práctico para el término complementario.

Forma de Lagrange:

Tenemos en cuenta que la función de $T_n(x) = T_n(a,h,x)$ se anula en x = a, y lo mismo sus derivadas hasta el orden n, y que lo mismo le ocurre a la función $g(x) = (x-a)^n$,

$T_n(a,h,x)$ = f(x) - f(a) $-\frac{f'(a)}{1!}.(x-a)-\frac{f^{(2}(a)}{2!}.(x-a)^{2}-$

$$- \; ... - \frac{f^{(k}(a)}{k!}.(x-a)^k - \cdots - \frac{f^{(n}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

$$\frac{\text{Tn(x)}}{(x-a)^n} = \frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f(a)}{(x-a)^n} \; \frac{f'(a)}{1!.(x-a)^{n-1}} - \frac{f^{(2}(a)}{2!.(x-a)^{n-2}} -$$
$$- \; ... - \frac{f^{(k}(a)}{k!.(x-a)^{n-k}} - \cdots - \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

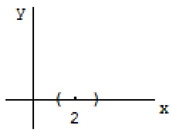
Llegamos a que

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}$$

donde c es un valor dentro del intervalo U, que suele tomarse de la forma: c = a+$\theta . h$, 0 < $\theta < 1$

Ejemplos:
Desarrollo de Taylor de las siguientes:

1.- f(x) = $2x^3 + 5x^2 - 4x - 8$



$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}.(x-2) + \frac{f^{(2}(2)}{2!}.(x-2)^2 + \frac{f^{(3}(2)}{3!}.(x-2)^3$$

f(2) = … = 20,

f’(x) = $6x^2$ +10x -4 -> f’(2) = … = 40

f’’(x) = 12x + 10 -> f’’(2) = 34

f’’’(x) = 12 -> f’’’(2) = 12

$$f(x) = 20 + 40.(x-2) + \frac{34}{2}.(x-2)^2 + \frac{12}{6}.(x-2)^3$$

$$f(x) = 20 + 40.(x-2) + 17.(x-2)^2 + 2.(x-2)^3$$

2.- $f(x) = 3.\cos(x)$, $a = \frac{pi}{2}$

$f(a) = 3.0 = 0$

$f'(x) = -3.\text{sen}(x) \rightarrow f'(a) = -3$
$f''(x) = -3.\cos(x) \rightarrow f''(a) = 0$
$f^{(3}(x) = 3.\text{sen}(x) \rightarrow f^{(3}(a) = 3$

$$3.\cos(x) = 0 - 3.(x-\frac{pi}{2}) + 0.(...) + \frac{3}{6}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^3 - \ldots$$

$$3.\cos(x) = -3.(x-\frac{pi}{2}) + \frac{1}{2}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^3 - \ldots$$

4.3.- Aplicación al análisis de los extremos locales de y = f(x)

Sea y = f(x) que suponemos continua en un entorno (a-h, a+h) de x = a.

En el punto anterior hemos obtenido su desarrollo de Taylor válido para $x \in (a-h, a+h)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots + o(h^2)$$

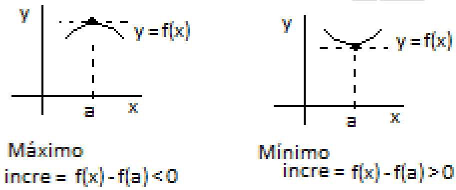
donde $o(h^2)$ representa un valor que es infinitésimo respecto a h^2:

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$$

Cuando el punto P(a, f(a)) sea un punto crítico, es decir que f'(a) = 0, entonces queda

$$\Delta y = \text{f(x)–f(a)} = \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots + o(h^2)$$

Para un valor de h tal que |h| sea suficientemente pequeño, el signo de Δy es el mismo de $\frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2$, y por tanto el mismo que el de f''(a). Tenemos así los siguientes criterios:



Cuando tengo máximo: Δy = f(x)-f(a) < 0, y por tanto ha de ser

f''(a) < 0.

Cuando tengo mínimo: Δy = f(x)-f(a) > 0, y por tanto ha de ser

f''(a) > 0.

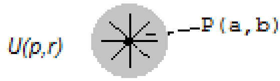
Resumen: $\begin{cases} f''(a) > 0 \rightarrow Mínimo \\ f''(a) \ < 0 \rightarrow Máximo \end{cases}$

4.4.- Desarrollo en serie de Taylor de z = f(x.y)

Sea z = f(x, y) definida en el dominio cerrado D < R^2, con derivadas parciales continuas hasta al menos de orden n.

Sean p(a,b) en D, q(a,b,c) en la gráfica de f(x,y), con c = f(a, b).

U(p, r) es un entorno de p en D. Este entorno es un disco abierto con centro en (a, b) y radio r de modo que queda incluido en D.



Hemos de recordar que $f''_{xy}(p)$ y $f''_{yx}(p)$ coinciden cuando f(x, y) es continua en un entorno de P como es nuestro caso.

El desarrollo de Taylor nos dice que, para (x,y) ∈ U(P, r),

$$f(x,y) = f(p) + \frac{1}{1!}.[f'_x(p).(x-a) + f'_y(p).(y-b)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}.[f''_{xx}(p).(x-a)^2 + 2.f''_{xy}(p).(x-a).(y-b) + f''_{yy}(p).(y-b)^2] +$$

$$+ \ldots + T(p,r,x,y)$$

donde el término complementario T(p,r,x,y) es un infinitésimo respecto de $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Esto significa que

$$\lim_{r\to 0} \frac{T(p,r,x,y)}{r^2} = 0$$

Lo representaremos por $o(r^2)$

Observa que $\Delta z(q)$ = f(x,y) – f(a,b) =

$$+ \frac{1}{1!}.[f'_x(p).(x-a) + f'_y(p).(y-b)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}.[f''_{xx}(p).(x-a)^2 + 2.f''_{xy}(p).(x-a).(y-b) + f''_{yy}(p).(y-b)^2] +$$

$$+ \ldots + T(p,r,x,y)$$

4.5.- Aplicación al análisis de los extremos locales de f(x,y)

Decimos que P es punto crítico si se cumple la condición necesaria de extremo, es decir:

$$f'_x(p) = 0, \quad f'_y(p) = 0,$$

Entonces, si P(a,b,c) es un punto crítico tenemos $f'_x(p) = 0$, $f'_y(p) = 0$, y para el incremento $\Delta z(q)$ queda

$$\Delta z(q) \ = \ f(x,y) - f(a,b) =$$

$$= + \frac{1}{2!}.[f''_{xx}(p).(x-a)^2 + 2.f''_{xy}(p).(x-a).(y-b) + f''_{yy}(p).(y-b)^2] + \ldots + o(r^2)$$

Deseamos analizar el signo de $\Delta z(q)$

Llamo h = x-a, k = y-b y expresamos

$$\Delta z(q) \ =$$

$$= + \frac{1}{2!}.[f''_{xx}(p).h^2 + 2.f''_{xy}(p).h.k + f''_{yy}(p).k^2] + \ldots + o(r^2) \qquad (1)$$

Si el radio r del entorno U(p, r) tiende a cero, también h, k -- > 0.

Teniendo en cuenta que el signo del valor de la expresión

$$[f''_{xx}(p).h^2 + 2.f''_{xy}(p).h.k + f''_{yy}(p).k^2] \qquad (2)$$

'domina' el signo del miembro derecha del desarrollo (1), el signo de $\Delta z(q)$ será el mismo que el de (2).

La expresión (2) podemos expresarla como producto de matrices

$$(h, k).\begin{pmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) \\ f''_{xy}(p) & f''_{yy}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

El alumno puede comprobarlo realizando el producto.

Llamamos hessiano al determinante de la matriz cuadrada, y escribimos

$$H(p) = \left|\begin{pmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) \\ f''_{xy}(p) & f''_{yy}(p) \end{pmatrix}\right| = f''_{xx}(p). f''_{yy}(p) - f''_{xy}(p)^2$$

Ahora observamos:

Si $H(p) > 0 \dashrightarrow f''_{xx}(p). f''_{yy}(p) - f''_{xy}(p)^2 > 0$, de donde

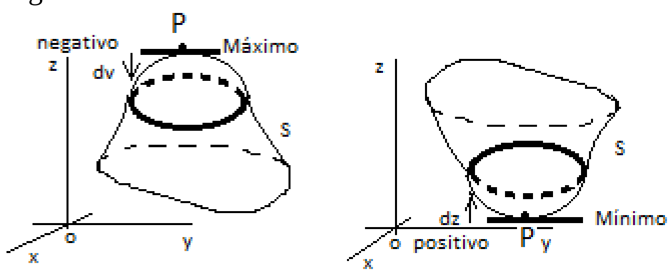
$f''_{xx}(p). f''_{yy}(p) > f''_{xy}(p)^2$, y por tanto ha de producirse uno de estos dos caso:

$a)\ f''_{xx}(p) > 0\ ,\ \ f''_{yy}(p) > 0$ -- > Mínimo

$b)\ f''_{xx}(p) < 0\ ,\ \ f''_{yy}(p) < 0$ -- > Máximo

H(p) < 0 -- > Incertidumbre

Observa la figura.



NOTA: Véase un estudio más refinado en el Apéndice 2, punto B.

El alumno pondrá toda su atención en los siguientes ejemplos.

Ejemplos resueltos:

Estudia los extremos locales de las siguientes en el punto indicado.

1.- Sea $z = y^2 - 4x^2y + 3x^4$,   en P(0,0)

Sol.: $z_x = -8xy + 12x^3$, $z_y = 2y - 4x^2$

$z_{xx} = -8y + 36x^2$, $z_{yy} = 2$

$z_{xy} = -8x$, $z_{yx} = -8x$

$H_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

2.- Sea z = xy, en p(0,0)

Sol.: $z_x = y$, $z_y = x$

$z_{xx} = 0$, $z_{yy} = 0$

$z_{xy} = 1$, $z_{yx} = 1$

$H_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ -> Es indefinida

3.- Sea $z = x^4 + y^2 + y^4$, en P(0,0)

Sol.: .: $z_x = 4x^3$, $z_y = 2y + 4y^3$

$z_{xx} = 12x^2$, $z_{yy} = 2 + 12y^2$

$z_{xy} = 0$, $z_{yx} = 0$

$H_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

4.- Sea $z = x + y$,

sobre $D=\{(x,y);\ x^2+y^2 <= 0\}$

5.- Sea $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$,

sobre $D=\{(x,y);\ x^2+y^2 <= 0\}$

6.- Sea $z = (x^2 + y^2)^2 - 2.(x^2 + y^2)$, como superficie de revolución de la curva

$$\begin{cases} z = x^4 - 2x^2 \\ y = 0 \end{cases},\quad \text{con eje oz}$$

En P(0,0) resulta $H_p = \ldots.. = 16$

$$$$oOo$$$$

Tema 5

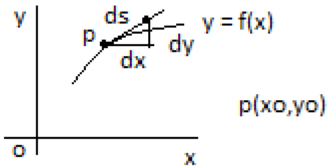
Diferencial de arco, Curvatura

Diferencial direccional, ... , Gradiente

5.1.- Diferencial de arco

Sea una curva que puede venir expresada en forma explícita: y = f(x), en forma paramétrica, o en forma implícita: f(x,y) = 0. No nos interesamos por el caso de venir en polares.

Definición:



Dada una curva y = f(x), llamamos 'Diferencial del arco' a la variable ds definida por la igualdad

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\text{ , en el punto } p(x_0,y_0)$$

Observa que ds es función de las variables dx, dy

Puesto que dy = $f'(x_0).dx$,

$$dx^2 + f'(x_0)^2.dx^2 = (1 + f'(x_0)^2).dx^2\ ,$$

y entonces

$$ds = \sqrt{1 + f'(x_0)^2}\,.\,dx$$

Si la curva viene dada en paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ \text{y}\ \begin{cases} xo = x(to) \\ yo = y(to) \end{cases},$$

entonces ds = $\sqrt{x'(to)^2 + y'(to)^2}\ .dt$

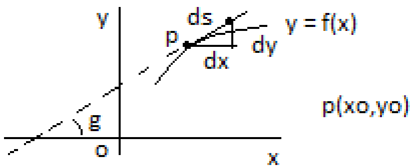
Si la curva viene dada por la expresión implícita f(x, y) = 0, entonces

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{f'_x(p)}{f'_y(p)}\right)^2}\ .dx\,,\ \text{ó bien}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{f'_y(p)}{f'_x(p)}\right)^2}\ .dy$$

Observando la siguiente figura tenemos también

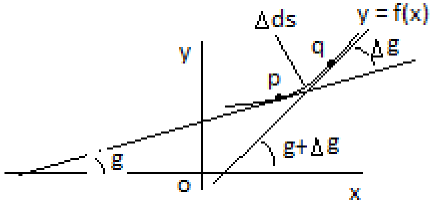
cos(g) = $\frac{dx}{ds}$,   sen(g) = $\frac{dy}{ds}$, de donde $\begin{cases} dx = ds.\cos(g) \\ dy = ds.sen(g) \end{cases}$



5.2.- Curvatura en un punto de la curva. Radio de curvatura

Como en muchas ocasiones ocurre en Matemáticas una cosa es la definición de un concepto y otra el cálculo de su valor (en el caso de ser medible). Por lo tanto, en cada caso, adjuntamos también la fórmula que nos da su valor.

Es importante observar la figura



En la figura tenemos las rectas tangentes a la curva en el punto p fijo, y en el punto q -- > p. El punto q se aproxima a p. Fijado el punto p(xo, yo), el ángulo g también queda fijado.

Def.:
En el punto p(xo, yo), llamamos curvatura de la curva y = f(x), al valor

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta g}{\Delta s}\right)$$

llamamos radio de curvatura en p(xo,yo) al valor inverso de la curvatura

$$R = \frac{1}{|K|}$$

Cálculo de K:
Si la curva viene dada por y = f(x), entonces

$$K = \frac{f''(p)}{\sqrt{(1+f'(p)^2)^3}}$$

Si la curva viene dada por $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, siendo

p(xo,yo) = p(x(to), y(to)), entonces

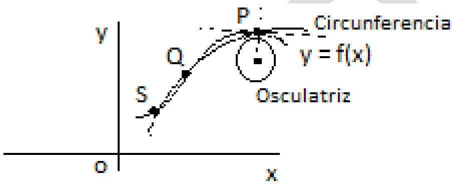
$$K = \frac{\begin{vmatrix} x'(to) & y'(to) \\ x''(to) & y''(to) \end{vmatrix}}{\sqrt{(x'(to)^2+y'(to)^2\,)^3}}$$

Si la curva viene dada por f(x, y) = 0, entonces

$$K = \frac{\begin{vmatrix} f''_{xx}(p) & f''_{xy}(p) & f'_x(p) \\ f''_{yx}(p) & f''_{yy}(p) & f'_y(p) \\ f'_x(p) & f'_y(p) & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(f'_x(p)^2+f'_y(p)^2\right)^3}}$$

5.3.- Circunferencia osculatriz en un punto

Observa la figura



Def.:
Llamamos circunferencia osculatriz, en el punto P(xo,yo), a la 'circunferencia límite' que resulta al considerar las circunferencias que pasan por P, Q, S, puntos de la curva, cuando S y Q tienden a confundirse con P.

El resultado es la circunferencia de radio R = $\frac{1}{|k|}$ (radio de curvatura en p), con centro en la recta normal (perpendicular) a la recta tangente en p.

El centro de esta circunferencia lo llamamos 'Centro de curvatura', cuyas coordenadas vienen dadas por las siguientes fórmulas

$$\begin{cases} x_c = xo - \dfrac{f'(p).(1+f'(p)^2)}{f''(p)} \\ y_c = yo + \dfrac{1+f'(p)^2}{f''(p)} \end{cases}$$, donde y = f(x),

yo = f(xo)

Ejemplos:

Calcula el valor K de la curvatura en el punto que se indica. Calcula también el radio R de la curvatura.

1.- $f(x) = x^4 -4x^3 -18x^2$, en p(0,0)

Sol.: Fórmula: $K = \frac{f''(p)}{\sqrt{(1+f'(p)^2)^3}}$

$f'(x) = 4x^3 -12x^2 -36x$ -- > $f'(p) = 0$

$f''(x) = 12x^2 -24x -36$ -- > $f''(p) = -36$

$1+f'(p)^2 = 1$ -> $(1+f'(p)^2)^3 = 1$ -- > $\sqrt{(1+f'(p)^2)^3} = 1$

$K = -\frac{36}{1} = -36$ -- > R = 36

2.- $x^2 + xy + y^2 = 3$, en p(1,1)

Sol.:

Fórmula: $$K = \frac{\begin{vmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) & f_x(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) & f_y(p) \\ f_x(p) & f_y(p) & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(f_x(p)^2+f_y(p)^2\right)^3}}$$

$f_x(x,y) = 2x + y$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 1$,

$f_y(x,y) = x + 2y$, $\quad f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{yx}(x,y) = 1$

Dando valores:

$f_x(p) = 3$, $f_y(p) = 3$,

$$\sqrt{\left(f_x(p)^2 + f_y(p)^2\right)^3} = \sqrt{18^3} = \sqrt{2^3.3^6} = 2.3^3.\sqrt{2} = 54.\sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0+9+9]-[18+0+18] = -18$$

$$K = \frac{-18}{54.\sqrt{2}} = \frac{-1}{3.\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{6} \;\text{->}\; R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3.\sqrt{2}$$

3.- $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, en el punto correspondiente a to = 1

Sol.: Fórmula: $K = \dfrac{\begin{vmatrix} x'(to) & y'(to) \\ x''(to) & y''(to) \end{vmatrix}}{\sqrt{(x'(to)^2 + y'(to)^2\,)^3}}$

$x'(t) = 2t$, $\quad x''(t) = 2$, $\quad$ -> $x'(to) = 2$

$y'(t) = 3t^2$, $y''(t) = 6t$, -- > $y'(to) = 3$, $\quad y''(to) = 6$

$$\sqrt{(x'(to)^2 + y'(to)^2\,)^3} = \sqrt{(4 + 9\,)^3} = 13.\sqrt{13}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6, \;\text{-- >}\; K = \frac{6}{13.\sqrt{13}} = \frac{6.\sqrt{13}}{169} \;\text{-- >}$$

$$R = \frac{13.\sqrt{13}}{6}$$

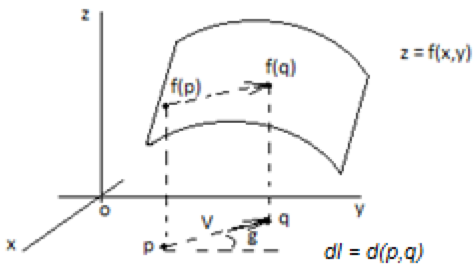
5.4.- Derivada direccional: Derivada en una dirección dada

Sea z = f(x,y) función con dos variables independientes x, y.

Def.:
Llamamos 'derivada direccional en P' al valor del siguiente límite

$$\lim_{dl\to 0}\frac{f(q)-f(p)}{dl}, \quad \text{y lo representamos}$$

mediante $\frac{dz}{dl}(p)$, y dl = d(p,q) = /v/



Cuando z = f(x,y) es diferenciable en p(xo,yo), se cumple

$$\frac{dz}{dl}(p) = \frac{dz}{dx}(p).\cos(g) + \frac{dz}{dy}(p).sen(g) \,, \tag{1}$$

donde g es el ángulo que determina el vector v con el semieje +ox (observa la figura).

Comprobación de esta última igualdad:

Sabemos que dz(p) = z_x(p).dx + z_y(p).dy =

= (Teniendo en cuenta que dx = dl.cos(g), dy = dl.sen(g)) =

= z_x(p).dl.cos(g) + z_y(p).dl.sen(g) =

= [z_x(p).cos(g) + z_y(p).sen(g)].dl ,

de donde

$$\frac{dz}{dl}(p) = z_x(p).\cos(g) + z_y(p).\text{sen}(g) \qquad (2)$$

NOTA:
En caso de tres variables independientes

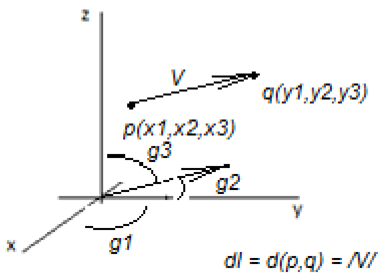
z = f(x1,x2,x3),

bajo la hipótesis de ser diferenciable en p, definimos

$$\frac{dz}{dl}(p) =$$

$$= \frac{dz}{dx1}(p).\cos(g1) + \frac{dz}{dx2}(p).cos(g2) + \frac{dz}{dx3}(p).cos(g3)$$

donde los ángulos g1, g2, g3 son los ángulos que forma el vector V con cada uno de los semiejes positivos de coordenadas



Ejemplos: (Corroborativos)

1.- Dada $z = f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$, halla su derivada en el punto p(1; 0) en la dirección que forma ángulo de 120º con +ox.

Sol.: $z_x(x,y) = 4x$, $z_y(x,y) = -6y$

Dando valores: $z_x(p) = 4$, $z_y(p) = 0$

$$\cos(120º) = -\cos(60º) = \frac{-1}{2}$$
$$\mathrm{sen}(120º) = \mathrm{sen}(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{dz}{dl}(p) = 4.-\frac{1}{2} = -2$$

(#)

2.- Dada $z = x^2 - xy - 2y^2$, halla su derivada en el punto p(1; 2) en la dirección que forma ángulo de 60º con +ox.

Sol.: $z_x(x,y) = 2x - y$, $z_y(x,y) = -x - 4y$

Dando valores: $z_x(p) = 0$, $z_y(p) = -9$

$$\cos(60º) = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{sen}(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{dz}{dl}(p) = -9.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.- Dada $z = x^3 -2x^2y + xy^2 +1$, halla su derivada en el punto p(1; 2) en la dirección que lleva desde P al punto Q(4; 6).

Sol.: $z_x(x,y) = 3x^2 -4xy + y^2$,

$z_y(x,y) = -2x^2 + 2xy$

Dando valores: $z_x(p) = 3 -8 + 4 = -1$

$z_y(x,y) = -2 + 4 = 2$

V = PQ = (3,4) -> g = arcTan(4/3) = 53,13º

cos(g) = 0,6, sen(g) = 0,8

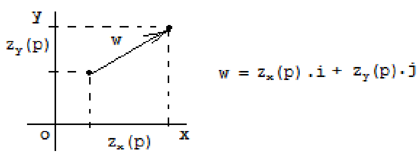
$$\frac{dz}{dl}(p) = -0{,}6 + 1{,}6 = 1 \qquad (\#)$$

5.5.- Gradiente de z = f(x,y) en un punto p

Def.:

Llamamos 'Gradiente' de z = f(x, y), en un punto p(xo, yo) del plano OXY, al vector W cuyas proyecciones sobre los ejes ox, oy coinciden con el valor de sus derivadas parciales en p, esto es:

$$W = f_x(p).e1 + f_y.e2$$



Es habitual designarlo mediante grad(f(x,y); p), ó bien $\text{grad}(z)_p$

NOTA:

a) Observa que la derivada direccional nos da un valor real (un escalar). El gradiente es un vector.

b) La dirección del vector gradiente en p nos da la dirección de la velocidad máxima de crecimiento de la función z = f(x, y) en p. Esto significa que, en la derivada direccional, cuando la dirección v coincide con la dada por el gradiente, el valor $\frac{dz}{dl}(p)$ es máximo, y este valor viene dado por

$$\sqrt{z_x(p)^2 + z_y(p)^2}$$

(véase ejemplo 3)

Ejemplos:

1.- Determina el gradiente de $z = f(x,y) = x^2y$ en el punto p(1;1) de la superficie.

Sol.: $f_x(x,y) = 2xy$, $f_y(x,y) = x^2$

Dando valores: $f_x(p) = 2$, $f_y(p) = 1$

grad(f(x,y); p) = 2.e1 + e2

2.- Calcula el gradiente de $z = x^3 + y^3 - 3xy$, en el punto p(2;1)

Sol.: $z_x(p) = (3x^2-3y]_p = 9$,

$z_y(p) = (3y^2-3x]_p = -3$

$grad(z)_p = w = 9.i - 3.j$

3.- Calcula la magnitud de la elevación máxima de la superficie

$$z = x^2 + 4y^2 \text{ , en el punto } p(2; 1; 8)$$

$z_x(p) = (2x]_p = 4$, $z_y(p) = (8y]_p = 8$

$grad(z)_p = w = 4.i + 8.j$,

$$/w/ = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4.\sqrt{5} = 8{,}944$$

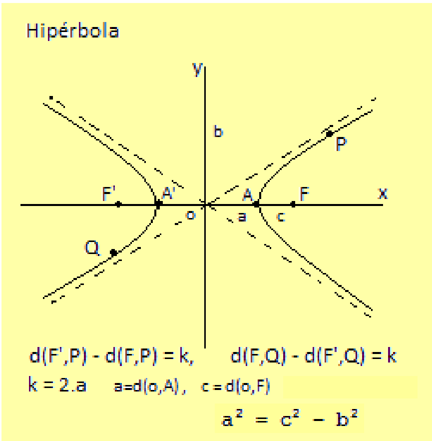
Ángulo: u = arcTan(8,944) = 83º37'

$$$$oOo$$$$

Tema 6

Estudio de Curvas predefinidas de interés

Otras Curvas predefinidas No tan comunes



6.1.- Estudio de la Circunferencia: Análisis de sus elementos

Puesto que y que las ideas básicas son conocidas por el estudio de Geometría básica (Vol.4), aquí obviamos repetirlo.

Centro O(0, 0): Ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Centro O(a, b): Ecuación

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 , \qquad (1)$$

que desarrollada nos lleva a la Ecuación Cartesiana

$$x^2 + y^2 + C.xy + D.x + E.y + F = 0 \qquad (2)$$

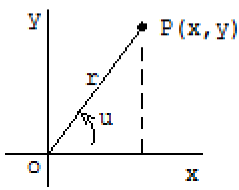
donde, en este caso de la circunferencia, C = 0

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ t recorre [t1, t2]}$$

Un caso concreto de expresión en función de un parámetro consiste en tomar t = ángulo (figura).

Coordenadas polares:

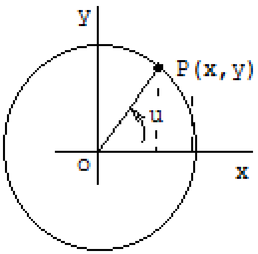


$$\left| \begin{array}{l} x = r.\cos(u) \\ y = r.\mathrm{sen}(u) \end{array} \right.$$

El ángulo u tiene su origen en el semieje +ox

Para la circunferencia:

Tomando t = u = ángulo con origen en el semieje +ox. (figura)



$$\begin{cases} x = r.\cos(u) \\ y = r.\operatorname{sen}(u) \end{cases}$$

donde u ∈ [0, 2.pi], u en radianes,y r es el radio de la circunferencia.

Tangente en un punto p(a, b):

Tomo su ecuación cartesiana en el caso general

$$x^2 + y^2 + D.x + E.y + F = 0$$

Derivo implícitamente respecto de x

$$2x + 2y.y_x + D + E.y_x = 0 \to y_x = \frac{-(2x+D)}{2y+E}$$

En un punto P(a, b) de la circunferencia la pendiente de la recta tangente es

$$m(p) = y_x(p) = \frac{-(2.a+D)}{2.b+E} \quad ,$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y - b = \frac{-(2.a+D)}{2.b+E}.(x-a)$$

Dado el valor x = a necesito conocer el varo b:

Dada la abscisa x = a, vamos a calcular el valor de la ordenada b. Por tratarse de una circunferencia vamos a obtener dos valores

Tengo $a^2 + y^2 + D.a + E.y + F = 0$
$y^2 + E.y + (a^2 + D.a + F) = 0$,

de donde obtengo dos valores: b1, b2, de modo que tengo dos puntos (a, b1), (a, b2), y por tanto dos rectas tangentes con la misma pendiente.

Corte con una recta:

Sean Circunferencia C y recta r. Sus puntos comunes los obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x2 + y2 + D.x + E.y + F = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Despejo 'y' de la recta y lo llevo a la primera. Operando llegamos a una ecuación de segundo grado en x, supongamos

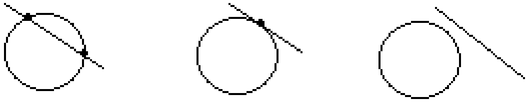
$$A.x^2 + B.x + C = 0$$

En primer lugar debo analizar su discriminante

$D = B^2 - 4.AC$, del que podemos obtener

alguno de los siguientes casos:

$$\begin{cases} D > 0 \rightarrow Dos\ puntos\ de\ corte \\ D = 0 \rightarrow Dos\ puntos\ de\ corte\ que\ coinciden \\ D < 0 \rightarrow No\ se\ cortan \end{cases}$$



Ejemplos:

1.- Dada la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 -2x -4y -20 = 0$$

a) Determina su centro
b) Calcula la recta tangente en el punto con ordenada positiva correspondiente a $x = 2$
c) Analiza la posición relativa con la recta
$r: 2x + 3y - 4 = 0$
d) Estudia: Rectas tangentes que sean paralelas a la recta $y = -2x$

Sol.: Indicación:

$$0 = x^2 + y^2 -2x -4y -20 = (x^2 -2x +1) + (y^2-4y +4) -5 -20 =$$

$$= (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \dashrightarrow \text{centro}(1, 2),\ R = 5$$

(El alumno trabajará las restantes)

Actividad para el alumno

2.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos:

A(5,1), B(1,4), C(-1,1)

3.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los dos puntos:

A(5,1), B(1,4)

y es tangente a una recta de la forma

$$r: y = -x + b$$

6.2.- **Estudio de las Cónicas:** Análisis de sus elementos

En el Vol.4 dedicado a la Geometría descriptiva se estudian las Cónicas en toda su extensión y detalle. Recomiendo su consulta. A pesar de ello las reseñamos aquí, pero la deducción de sus ecuaciones podemos verlo allí.

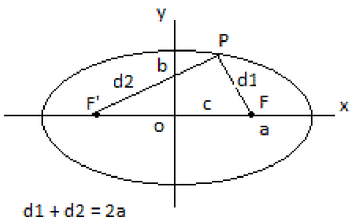
LA ELIPSE

Def.:

Fijamos dos puntos F y F’ del plano, que llamaremos focos, y fijamos un valor k mayor que d(F, F’).

‘Llamamos Elipse al lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de sus distancias a los puntos F y F’ sea igual a k’. Esto es:

$$d(P,F) + d(P,F') = k$$



Elementos y parámetros:

-Los focos: Son los puntos fijos F y F’

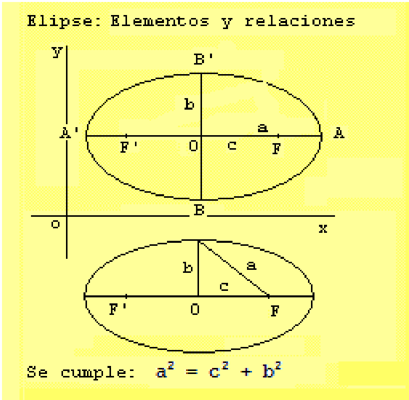
-La recta focal: Recta que pasa por F y F’

-Su centro: C(x0,y0),punto medio del segmento FF’

-Sus ejes de simetría: La recta que contiene los focal (eje focal), y la perpendicular a ésta que pasa por el centro (eje secundario).

-Los puntos de corte de la elipse con sus ejes: A,A' sobre el eje focal, B,B' sobre el eje secundario.

Parámetros:



-La medida de sus semiejes: a = d(A,O) sobre el eje focal, y b = d(B,O) sobre el eje secundario

-La distancia Semifocal: c = d(O,F) = d(O,F')

-La excentricidad: e = c/a, (Siempre será e < 1, ya que c < a)

Cuando c = a será e = 1, y la elipse se convierte en el segmento F'F).

Cuando c = 0, e = 0, b = a, la elipse se convierte en la circunferencia de radio r = a.

Relación entre los parámetros: Se cumplen

$$a^2 = c^2 + b^2, \qquad 2.a = k$$

Para comprobar esta última basta considerar el punto P(a, 0) y realizar la suma de sus distancias a F y F'.

Ecuación: La ecuación de la Elipse con centro en (x0, y0) y ejes de simetría paralelos a los de coordenadas es

$$\frac{(x-x0)^2}{a^2}+\frac{(y-y0)^2}{b^2}=1$$

Véase en el Vol.4 la ecuación general de una cónica cualquiera y la deducción de la ecuación en el caso de la Elipse. Allí lo hacemos con todo detalle.

Desarrollando la anterior nos lleva a la ecuación general

$$A.x^2 + B.y^2 + D.x + E.x + F = 0$$

donde A > 0, B > 0.

Recta tangente en un punto:

Sea la elipse: $\frac{(x-x0)^2}{a^2}+\frac{(y-y0)^2}{b^2}=1$

$$b^2.(x\text{-}xo)^2 + a^2.(y\text{-}yo)^2 = a^2.b^2$$

Escribo $A = b^2$, $B = a^2$

$$A.(x\text{-}xo)^2 + B.(y\text{-}yo)^2 = A.B$$

Derivo implícitamente respecto de x

$2.A.(x\text{-}xo) + 2.B.(y\text{-}yo).y_x = 0$,

En un punto P(a’, b’) la pendiente es

$m(p) = y_x(p) = \frac{-A.(a'-xo)}{B.(b'-yo)}$, y la recta tangente

$$(y\text{-}b') = \frac{-A.(a'-xo)}{B.(b'-yo)} \,.\, (x-a')$$

Dado el valor x = a' debo calcular el valor b' de modo que (a', b') sea punto de la elipse:

$$A.(a'\text{-}xo)^2 + B.(y\text{-}yo)^2 = A.B \dashrightarrow$$

$$(y\text{-}yo)^2 = \frac{A.[B-(a'-xo)^2]}{B}\,, \qquad \text{de donde}$$

$$(y\text{-}yo) = \pm\sqrt{\frac{A.[B-(a'-xo)^2]}{B}} \dashrightarrow b' = yo \pm \ldots$$

Corte con una recta:

Sea la elipse $\frac{(x-x0)^2}{a^2} + \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$, que la expreso en la forma A.(x-xo)^2 + B.(y-yo)^2 = A.B, y la recta r: ax + by + c = 0

La recta la escribo así:

ax +b.(y-yo) + (c + b.yo) = 0, y haciendo

d = c + b.yo, escribo

$$y\text{-}yo = \frac{-(ax+d)}{b}$$

Sustituyo en la elipse y obtengo

$$A.(x\text{-}xo)^2 + B.\frac{(ax+d)^2}{b^2} = A.B\,, \text{ de donde}$$

$$b^2.A.(x\text{-}xo)^2 + B.(ax+d)^2 = b^2.A.B\,,$$

que nos lleva a (renombrando los coeficientes)

$Ax^2 + Bx + C = 0$, cuyo discriminante analizamos:

$D = B^2 - 4.A.C$, y como sabemos, dependiendo del signo de D podemos anticipar el resultado como en el caso de la circunferencia.

Ejemplo: El alumno intentará resolver las siguientes cuestiones.

Sea la Elipse $9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 = 0$

a) Obtener su forma reducida y su forma canónica:

$$\frac{(x - x0)^2}{a^2} + \frac{(y - y0)^2}{b^2} = 1$$

b) Ecuación de la recta tangente en P(2,b') donde b' sea la ordenada positiva.

c) Analiza la posición relativa con la recta

$$r: x + y - 6 = 0$$

d) Estudia: Rectas tangentes que sean paralelas a la recta $y = -x$

Sol.: Ayuda: $0 = 9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 =$

$= 9.(x^2 - 2x) + 16.(y^2 - 4y) - 71 =$

$= 9.(x^2 - 2x + 1) + 16.(y^2 - 4y + 4) - 9 - 64 - 71 =$

$= 9.(x - 1)^2 + 16.(y - 2)^2 - 144$ -- >

$9.(x - 1)^2 + 16.(y - 2)^2 = 144$ (E. reducida)

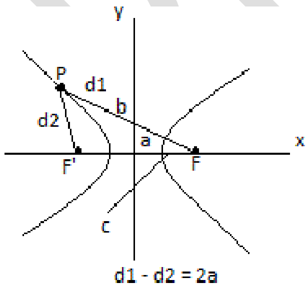
El alumno continuará

La HIPÉRBOLA

Def.:
Fijamos dos puntos F y F' del plano que llamamos focos, y una constante k < d(F, F').

"Llamamos Hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos F y F' es igual a k':

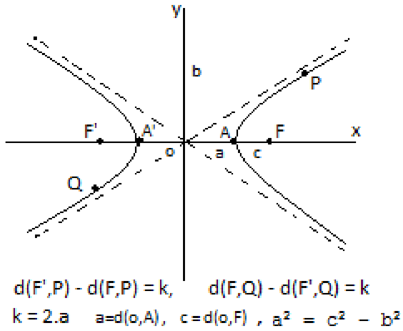
abs[d(P,F) - d(P,F')] = k



Elementos y parámetros:
-Los focos: F, F'
-Su centro: O(x0, y0), que es el punto medio del segmento F'F.

-Sus ejes de simetría: Eje focal, que es la recta que pasa por F y F', y Eje secundario que es la perpendicular al eje focal por el centro O

-Los puntos de corte con su eje focal: A, A'
Observa que no corta a su eje secundario, y por eso se le llama también 'eje imaginario'.



Parámetros:

-La medida de su Semieje focal: a = d(A,O)

-La distancia Semifocal: c = d(O, F) = d(O, F')

-La medida del Semieje imaginario: Es el valor b, tomado sobre el eje imaginario a partir de C, y tal que cumple: $a^2 = c^2 – b^2$.

-La excentricidad: e = c/a (e>1, ya que c>a)

Cuando e = 1, a = c, la hipérbola se convierte en dos rectas paralelas.

Relaciones entre los parámetros:

-Se cumplen las relaciones:

$$a^2 = c^2 – b^2, \qquad k = 2.a$$

Para comprobar esta última basta considerar el punto P(a, 0) y realizar la resta de sus distancias a F y F'.

Ecuación: La ecuación de la Hipérbola con centro en (x0, y0) y ejes de simetría paralelos a los de coordenadas es

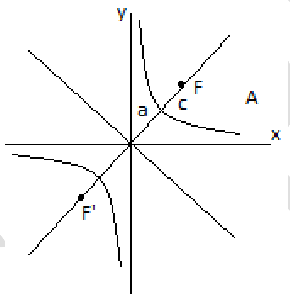
$$\frac{(x-x0)^2}{a^2} - \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1, \text{ ó } -\frac{(x-x0)^2}{a^2} + \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$$

Véase en el Vol.4 la ecuación general de una cónica cualquiera y la deducción de la ecuación en el caso de la Hipérbola. Allí lo hacemos con todo detalle.

Desarrollando la anterior nos lleva a la ecuación general

$$A.x^2 - B.y^2 + D.x + E.x + F = 0, \text{ donde } A > 0, B > 0.$$

Hipérbola equilátera:



a = d(o,A), c= d(o,F)

Se caracteriza por el hecho de que sus ejes de simetría coinciden con los ejes de coordenados, y que su ecuación es

$$x.y = 1$$

Sus asíntotas son las rectas: $y = x$, $y = -x$

Recta tangente en un punto:

En lo que sigue tomaremos la expresión

$$\frac{(x-x0)^2}{a^2} - \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{y su desarrollo}$$

$$A.x^2 - B.y^2 + D.x + E.x + F = 0, \text{ donde } A > 0, B > 0.$$

Sea la hipérbola: $\frac{(x-x0)^2}{a^2} - \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$ -- >

$b^2.(x\text{-}xo)^2 - a^2.(y\text{-}yo)^2 = a^2.b^2$

Escribo $A = b^2$, $B = a^2$

$$A.(x\text{-}xo)^2 - B.(y\text{-}yo)^2 = A.B$$

Derivo implícitamente respecto de x

$2.A.(x\text{-}xo) - 2.B.(y\text{-}yo).y_x = 0$,

En un punto P(a’,b’) la pendiente es

$$m(p) = y_x(p) = \frac{A.(a'-xo)}{B.(b'-yo)}$$, y la recta tangente

$$(y\text{-}b') = \frac{A.(a'-xo)}{B.(b'-yo)} \, .(x-a')$$

Dado el valor x = a’ debo calcular el valor b’ de modo que (a’,b’) sea punto de la hipérbola:

$$A.(a'\text{-}xo)^2 - B.(y\text{-}yo)^2 = A.B \text{ -- >}$$

$(y\text{-}yo)^2 = \frac{-A.[B-(a'-xo)^2]}{B}$ -- > de donde

$(y\text{-}yo) = \pm\sqrt{\frac{-A.[B-(a'-xo)^2]}{B}}$ -- > b’ = yo $\pm$ ...

Corte con una recta:

Sea la elipse $\frac{(x-x0)^2}{a^2} - \frac{(y-y0)^2}{b^2} = 1$, que la expreso en la forma

$A.(x\text{-}xo)^2 - B.(y\text{-}yo)^2 = A.B$, y la recta r: $ax + by + c = 0$

La recta la escribo así:

$ax + b.(y\text{-}yo) + (c + b.yo) = 0$, y haciendo

$d = c + b.yo$, obtengo $y\text{-}yo = \frac{-(ax+d)}{b}$

Sustituyo en la hipérbola

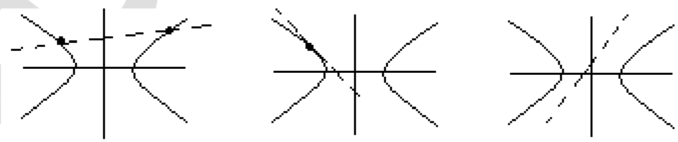
$A.(x\text{-}xo)^2 - B.\frac{(ax+d)^2}{b^2} = A.B$, de donde

$b^2.A.(x\text{-}xo)^2 - B.(ax+d)^2 = b^2.A.B$, que nos

lleva a (renombrando los coeficientes)

$Ax^2 + Bx + C = 0$, cuyo discriminante analizamos:
$D = B^2 - 4.A.C$, y como sabemos, dependiendo

del signo de D podemos anticipar el resultado como en el caso de la circunferencia:



Ejemplo: El alumno intentará resolver las siguientes cuestiones.

Sea la Hipérbola $9x^2 - 16y^2 -18x + 64y -199 = 0$

a) Obtener su forma reducida y su forma canónica:

$$\frac{(x - x0)^2}{a^2} - \frac{(y - y0)^2}{b^2} = 1$$

b) Ecuación de la recta tangente en P(2,b') donde b' sea la ordenada positiva.

c) Analiza la posición relativa con la recta

r: $x + y – 6 = 0$

d) Estudia: Rectas tangentes que sean paralelas a la recta $y = -x$

Sol.: Ayuda: $0 = 9x^2 - 16y^2 -18x +64y -199 =$

$= 9.(x^2 -2x) - 16.(y^2 -4y) – 71 =$

$= 9.(x^2 -2x + 1) - 16.(y^2 -4y +4)– 9 + 64-199 =$

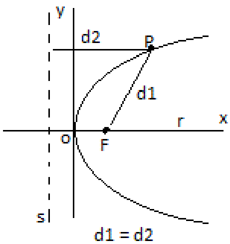
$= 9.(x -1)^2 - 16.(y -2)^2 – 144$ ->

$9.(x -1)^2 - 16.(y -2)^2 = 144$ (E. reducida)

El alumno continuará

PARÁBOLA

Def.:
Fijamos una recta r y en ella un punto F que llamaremos foco. (La recta r va a ser el eje de simetría de la parábola). Fijamos también una recta s perpendicular a r. Se cortarán en un punto A.



"Llamamos Parábola al lugar geométrico de los puntos P(x, y) del plano que equidistan del punto F y de la recta s, es decir, que cumplen

$$d(P,F) = d(P,s)$$

Si tengo p(x, y), F(xo,yo), s: ax +by +d = 0,

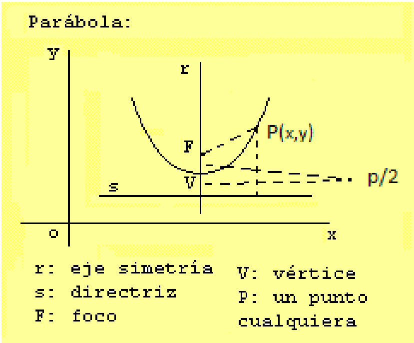
entonces la anterior igualdad nos da

$$\sqrt{(x-xo)^2+(y-yo)^2} = \frac{|axo+b.yo+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Elementos de la parábola:

-Eje de simetría: Es la recta r fijada
-Recta directriz: Llamamos así a la recta s fijada (perpendicular a r por A)

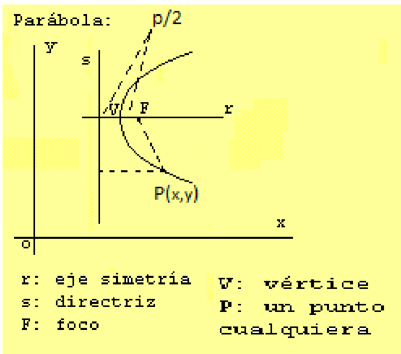
-Foco F: Es el punto fijado en la recta r
-Vértice V: Es el punto de corte de la
parábola con su eje de simetría r



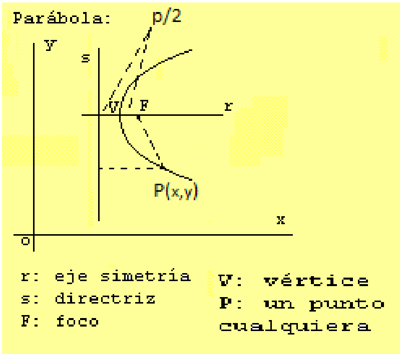
Sea A el punto de corte del eje de simetría con la recta directriz s.

De la gráfica se deduce que el vértice V es el punto medio del segmento FA.

Parámetro p:



-Es el valor de la distancia d(F, s) desde el foco a la directriz, y lo representaremos por p.



Ecuación:

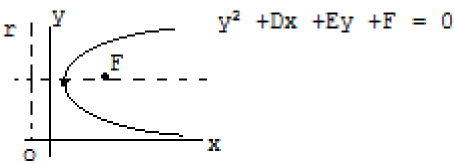
Véase en el Vol.4 la ecuación general de una cónica cualquiera y la deducción de la ecuación en el caso de la Parábola. Allí lo hacemos con todo detalle.

Por definición tenemos

$$\sqrt{(x-x0)^2+(y-y0)^2}=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

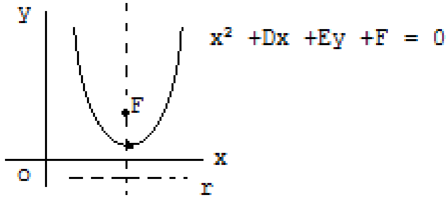
Desarrollando la anterior nos lleva a la ecuación general:

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$



cuando el eje de simetría es paralelo al eje ox.

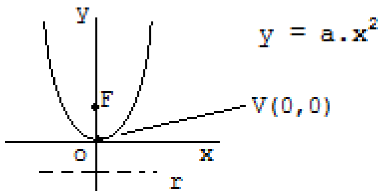
Si el eje de simetría es paralelo al eje oy queda: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$



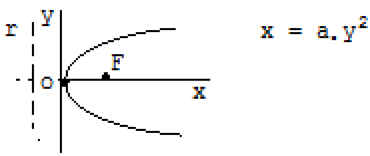
Otra tipo de Ecuación:

Observando la figura se entenderá lo siguiente.

Si el eje de simetría coincide con oy y el vértice con el origen de coordenadas: V(0,0), entonces su ecuación toma la forma: $y = a.x^2$



Si el eje de simetría es ox, entonces: $x = a.y^2$

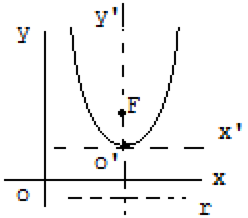


Sea el caso: Eje de simetría paralelo a oy y vértice V(xo, yo)

Vamos a comprobar que también es válida una ecuación de la forma:

$$(y-yo) = a.(x-xo)^2$$

En efecto, observa la siguiente figura donde se muestra un cambio de coordenadas entre (x,y) y (x',y')



$$y' = a.x'^2$$

$$(y-yo) = a.(x-xo)^2$$

Cambio: $\begin{cases} x = x' + xo \\ y = y' + yo \end{cases}$ -> $\begin{cases} x' = x - xo \\ y' = y - yo \end{cases}$

$$(y\text{-}yo) = a.(x\text{-}xo)^2$$

Recta tangente en un punto:

Sea la parábola: $(y\text{-}yo) = a.(x\text{-}xo)^2$

Derivo respecto de x: $y' = 2.a.(x\text{-}xo)$

En un punto P(a', b') la pendiente es

$m(p) = y'(p) = 2.a.(a'\text{-}xo)$, y la recta tangente

$(y\text{-}b') = 2.a.(a'\text{-}xo)\,.\,(x - a')$

Dado el valor x = a' debo calcular el valor b' de modo que (a', b') sea punto de la parábola.

En este caso es fácil: $b' = yo + a.(a'\text{-}xo)^2$

NOTA:
Si tenemos otro tipo de ecuación el proceso es análogo.

Corte con una recta:

Sea la parábola $(y-yo) = a.(x-xo)^2$ y la recta $Ax + By + C = 0$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (y - yo) = a.(x - xo)^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

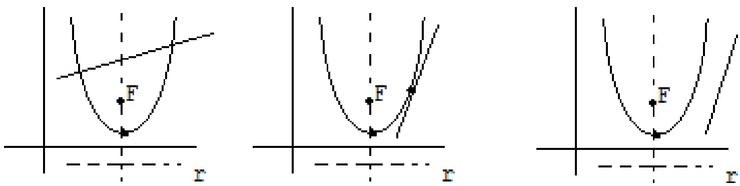
Llegamos como siempre a la ecuación de segundo grado

$Ax^2 + Bx + C = 0$,

cuyo discriminante analizamos:

$D = B^2 - 4.A.C$, y, como sabemos, dependiendo

del signo de D podemos anticipar el resultado como en el caso de la circunferencia:



Ejemplo: El alumno resolverá lo siguiente

Sea la parábola $9x^2 -18x + 27y -45 = 0$

a) Obtener su forma reducida

$(y-yo) = a.(x-xo)^2$, donde (xo, yo) es su vértice.

b) Ecuación de la recta tangente en $P(2, b')$ donde b’ sea la ordenada positiva.

c) Analiza la posición relativa con la recta

$$r: x + y - 6 = 0$$

Sol.: Ayuda: $0 = 9x^2 - 18x + 27y - 45 = 9.(x^2 - 2x) + 27y - 45 =$

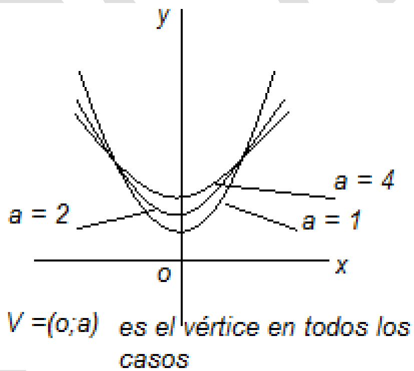
$= 9.(x^2 - 2x + 1) + 27y - 9 - 45 = 9.(x-1)^2 + 27.(y-2) \rightarrow$

$$(x-1)^2 = 3.(y-2), \quad V(1,2)$$

El alumno continuará

6.3.- La Catenaria

La catenaria

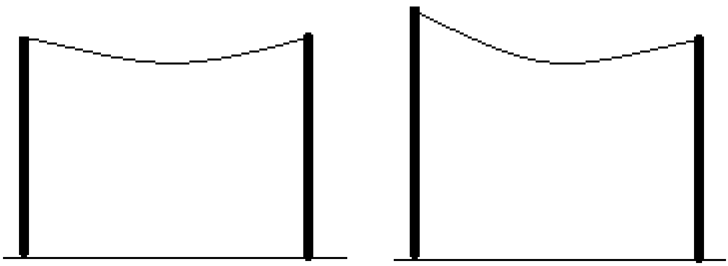


Una **catenaria** es una curva ideal que representa físicamente la curva generada por una cadena, o hilo, sin rigidez flexional, suspendida de sus dos extremos y sometida a su propio y único peso, que se supone distribuido uniformemente. La cuerda se encuentra suspendida por sus extremos.

Un claro ejemplo son los cables del tendido eléctrico sujetos por sus extremos y liberados de modo que soporta el peso de su propia masa:

La condición de equilibrio de un cable sometido a su propio peso vertical lleva a un problema de equilibrio en el plano (la catenaria es siempre una curva plana si se puede despreciar la rigidez flexional del cable). De la condición de equilibrio local de cada punto se desprende la siguiente ecuación diferencial para la pendiente de la catenaria, que relaciona las tensiones en los extremos de un tramo y el peso del mismo:

$$\frac{d^2y}{d^2\,x} = \frac{p}{T_h} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (1)$$



Donde:

p = peso por unidad de longitud, que se supone constante.
Th= tensión horizontal en los extremos del cable.

Veremos que la solución a (1) es:

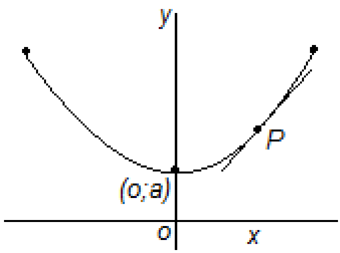
$$y(x) = \frac{T_h}{p} \cdot \cosh\left(\frac{p}{T_h} \cdot (x - C_1)\right) + C_2$$

Si hago a = $\frac{T_h}{p}$, queda y(x) = $a.\cosh\left(\frac{x-C1}{a}\right)+C2$ (2)

La solución para de la ecuación anterior para un cable suspendido de dos puntos a la misma altura y cuyo punto mínimo es, tomando su mínimo en el punto (0,a) resulta ser:

En el sistema de condiciones que muestra la gráfica:

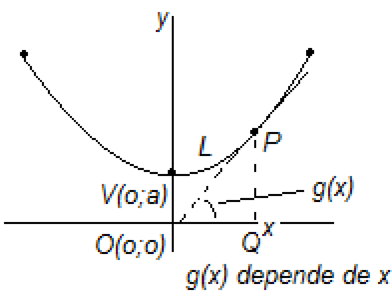
Vértice en (0,a) , eje de simetría oy



Obtenemos

$$y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}.\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right) \quad (3)$$

Observando la gráfica



Si V indica el vértice y P es un punto de la curva hacia la derecha del vértice, tenemos:

L (del arco VM) = a.senh(x/a)

S (área OVPQ) = a.L = a^2.senh(x/a)

Radio curvatura = y^2/a

Si hacemos el desarrollo de Taylor del segundo miembro de (3) obtenemos que

$$y(x) \cong a\,.\left[\left(1+\frac{C2}{a}\right)+\frac{1}{2}\,.\frac{(x-C1)^2}{a^2}\right]+o(x^4) \qquad (4)$$

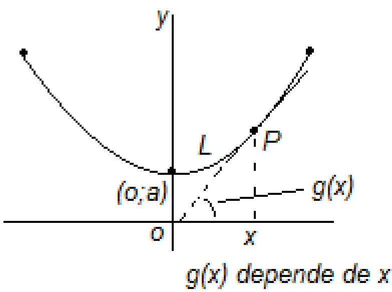
El corchete con el factor a es una parábola, mientras que $o(x^4)$ es un infinitésimo respecto del corchete.

La conclusión es que la catenaria dada por la ecuación (3) puede ser aproximada por la parábola

$$y = a + \frac{x^2}{a} \qquad (5)$$

La gráfica de la parábola va siempre por debajo de la gráfica de la catenaria, aunque próximas.

Otras relaciones interesantes son:



En el caso de un cable suspendido en puntos de la misma altura, con el origen de arco en su mínimo tenemos:

L = a.senh(x/a),   longitud del arco z = dy/dx = senh(x/a),

inclinación (tangente de la inclinación en x)

Consecuencia de la anterior es

Ty = Th.senh(x/a),   tension vertical

La tensión total del hilo es:

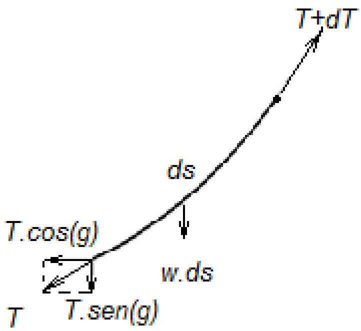
$$T = \sqrt{T_y^2 + T_h^2} = T_h \, . \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

de donde, teniendo en cuenta que Th = a.p, obtengo T = p.y

MOSTRAMOS EL proceso para deducir la ecuación de la catenaria:

En realidad lo que hacemos es deducir la ecuación diferencial (1).

Lo hacemos teniendo en cuenta el equilibrio de las dos fuerzas actuantes: La tensión =fuerza horizontal, el peso de su masa = fuerza vertical



Tenemos

$$F_h = T\,.\cos\big(g(x+\Delta x)\big) - T\,.\cos\big(g(x)\big) = \;\; 0$$

$$F_y = T\,.\,sen\big(g(x+\Delta x)\big) - T.\,sen\big(g(x)\big) \;\; = \;\; \int_{s1}^{s2} w.\,ds$$

donde:

g(x) = ángulo formado por la catenaria (la recta tangente) y la horizontal.

T(x) = tensión total del cable para cada punto

w = peso por unidad de longitud

La primera nos lleva a que T.cosh(g) = const

Eligiendo el sistema de referencia adecuado, la segunda puede ser expresada así:

Th = T.cos(g)

w.(s-so) = T.sen(g)

de donde: $\tan(g) = \frac{w}{T_h}\,.\,(s - so)$

Haciendo intervenir la relación entre valor de la tangente del ángulo de la pendiente (recta tangente con el eje ox) y la longitud del arco, tengo

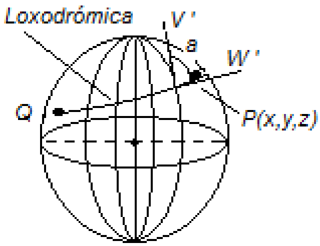
$$\tan(g) = \frac{dy}{dx}$$

$$s = so + \int_{x0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, .dx$$

de donde $\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_h} \, . \int_{x0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, .dx$

Derivando esta última obtenemos la ecuación (1)

6.4.- La Loxodrómica que une dos puntos



Def.: Es la línea que una dos puntos P y Q de tal modo que forme con cada meridiano el mismo ángulo a.

Es la línea que da el camino más corto entre dos puntos del globo terráqueo. Es el llamado rumbo por parte de los navegantes.

Operamos vectorialmente.

Esfera:

OP = R.(cos(v).cos(u), cos(v).sen(u), sen(v))

Tenemos un meridiano cuando hacemos u = u1 = const.:

V = R.(cos(v).cos(u1), cos(v).sen(u1), sen(v)) (1)

Para una curva sobre la esfera

W = R.(cos(v(t)).cos(u(t)), cos(v(t)).sen(u(t)), sen(v(t))),
t recorriendo [t1; t2]

Tomamos como parámetro t = v, con lo

W = R.(cos(v).cos(u(v)), cos(v).sen(u(v)), sen(v)) (2)

Vector tangente al meridiano (1):

$V_v' =$ R.(-sen(v).cos(u1), -sen(v).sen(u1), cos(v))

Vector tangente a la curva (2)

W_v' = R.(-sen(v).cos(u(v))-cos(v).sen(u(v)).u’,

-sen(v).sen(u(v))+cos(v).cos(u(v)).u’, cos(v))

Los convierto en vectores unitarios:

V’*V’ = R^2.$[sen^2(v).\cos^2(u1) + sen^2(v).sen^2(u1) + \cos^2(v)]$ =

= R^2 -- > $|V'| = R$

W'*W' = R^2.([$sen^2(v).\cos^2\big(u(v)\big) + \cos^2(v).sen^2\big(u(v)\big).u'^{\,2} -$

$-2.sen(v).cos(u(v)).cos(v).sen(u(v)).u'$] +

+ [$sen^2(v).sen^2\big(u(v)\big) + \cos^2(v).\cos^2\big(u(v)\big).u'^2 +$

+ $2.sen(v).sen\big(u(v)\big).\cos(v)\,.\cos\big(u(v)\big)\,.u'$] + $cos^2(v)$ =

= R^2.([$sen^2(v).\cos^2\big(u(v)\big) + sen^2(v).sen^2\big(u(v)\big)$] +

+ [$\cos^2(v).sen^2\big(u(v)\big) + \cos^2(v).\cos^2\big(u(v)\big)].u'^2$ + $\cos^2(v)$) =

= R^2.[$sen^2(v) + \cos^2(v).u'^2 + \cos^2(v)] = R^2.[1 + \cos^2(v).u'^2$]

$$|W_v'| = R.\sqrt{1 + \cos^2(v).u'^2}$$

Necesito ahora V'*W':

a)
$\big(-sen(v).\cos\big(u(v)\big)\big).\big[-sen(v).\cos\big(u(v)\big) - \cos(v)\,.sen\big(u(v)\big).u'\big]$
= $sen^2(v).\cos^2\big(u(v)\big) + sen(v).\cos\big(u(v)\big)\,.\cos(v)\,.sen\big(u(v)\big).u'$

b)
$(sen(v).sen\big(u(v)\big))$.
.[$-sen(v).sen\big(u(v)\big) + \cos(v)\,.\cos\big(u(v)\big)\,.u'$] =
= $sen^2(v).sen^2\big(u(v)\big) - sen(v).sen\big(u(v)\big).\cos(v)\,.\cos\big(u(v)\big)\,.u'$

c) cos(v).cos(v) = $\cos^2$(v)

Sumando a) + b) + c) nos queda

$$V'*W' = R^2.[sen^2(v) + \cos^2(v)] = R^2$$

Por tanto, el producto escalar $\frac{V'}{|V'|} * \frac{W'}{|W'|}$ nos da:

$$\frac{V'}{|V'|} * \frac{W'}{|W'|} = \frac{V'*W'}{R.R.\sqrt{1+\cos^2(v).u_v'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(v).u_v'^2}}$$

Tengamos en cuenta la definición de producto escalar:

v*w = /v/./w/.cos(v^w)

Puesto que en nuestro caso v = $\frac{V'}{|V'|}$, w = $\frac{W'}{|W'|}$ y éstos tienen /v/ = 1, /w/ = 1, nos queda

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(v).u_v'^2}} = \cos(V' \wedge W')$$

Para los puntos de la Loxodrómica este ángulo ha de ser constante, y por tanto también el valor del coseno.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(v).u_v'^2}} = const. \text{ --> } cos^2(v).u_v'^2 = const. \text{ --> }$$

$$u_v' = \frac{k}{\cos(v)} \text{ --> } u = \int \frac{k}{\cos(v)}\,.dv = k.\int \sec(v)\,.dv =$$

= k.ln$(sec(v) + tan(v))$. Tomamos k = 1

Curva Loxodrómica:

W = R.(cos(v).cos(u(v)), cos(v).sen(u(v)), sen(v))

donde: u(v) = $\ln(sec(v) + tan(v))$

6.5.- Otras Curvas predefinidas. Cálculos

A) Folium de Descartes:

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$

Mostramos la gráfica (1) en el caso a = 1

En polares

$$r(t) = \frac{3a.sen(t).cos(t)}{sen^3(t)+cos^3(t)}$$

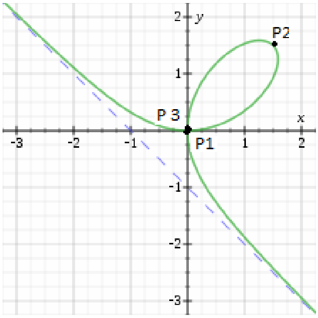
x(t) = r(t).cos(t)
y(t) = r(t).sen(t)

Representación: t = 0 -- > x = 0, y = 0 -- > P1(0,0)

t= pi/4 -- > $x = \frac{3.a.\sqrt{2}/2.\sqrt{2}/2}{\frac{2}{8}.\sqrt{2}+2/8.\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a/2}{2/4.\sqrt{2}} = \frac{3a}{2}$

$y = \frac{3.a.\sqrt{2}/2.\sqrt{2}/2}{\frac{2}{8}.\sqrt{2}+2/8.\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a/2}{\frac{2}{4}.\sqrt{2}} = \frac{3a}{2}$, -> P2($\frac{3a}{2}$, $\frac{3a}{2}$)

t = $\frac{pi}{2}$ -- > x = 0, y = 0, -- > P3(0,0)



(1)

Asíntota oblicua: Es de la forma y = m.x + n

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \ldots = \frac{sen(t)}{\cos(t)}$$

m = $\lim_{x(t)\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$; Veamos cuándo x(t) -- > ∞

x(t) = $\frac{3a.sen(t).cos(t)}{sen^3(t)+cos^3(t)}$.cos(t) -- > ∞ cuando $sen^3(t) + cos^3(t) = 0$

$sen^3(t) = -cos^3(t)$ -- > sen(t)= $\sqrt[3]{-cos(t)^3}$ = -cos(t)

lo cual ocurre cuando t = pi-pi/4 = 3pi/4,

t = 2pi- $\frac{pi}{4}$ = $\frac{7.pi}{4}$

Entonces m = $\lim_{t\to\frac{3pi}{4}} \frac{sen(t)}{\cos(t)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ = -1

Obtenemos el mismo valor si -- > $\frac{7.pi}{4}$

Valor de n:

n = $\lim_{t\to 3pi/4}[\,y(t) - m.x(t)]$=

$$\lim_{t\to\frac{3pi}{4}} \quad r(t).[sen(t) + \cos(t)] =$$

$$= \lim_{t\to 3pi/4} \; \frac{3a.[sen(t)^2.\cos(t)+sen(t).\cos(t)^2]}{sen^3(t)+cos^3(t)} =$$

$$= \lim_{t\to 3pi/4} \; \frac{3a.sen(t).[sen(t).\cos(t)+1-sen(t)^2]}{sen^3(t)+\cos(t)^3} =$$

$$= \lim_{t\to 3pi/4} \; \frac{3a.[sen(t).\cos(t)+1-sen(t)^2]}{sen^2(t)+\cos(t)^3/sen(t)} =$$

tomando valores obtengo

$$\frac{3a[\frac{\sqrt{2}}{2}.-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1]}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.(-1)} = \frac{3a[\frac{-2}{4}-\frac{2}{4}+1]}{0} = \frac{0}{0}$$, indeterminación

Aplicamos Técnicas de nivel superior como es la 'Regla de H'Lópital' para límites, que afirma:

"El límite de un cociente es igual al límite del cociente formado por las derivadas de los términos del cociente:

$$\lim_{t\to 3pi/4} \frac{3a[2sen(t).\cos(t)^2-sen(t)^3+\cos(t)^3-2\cos(t).sen(t)^2]}{3.sen(t)^2.\cos(t)-3.\cos(t)^2.sen(t)} =$$

(ordenando)

$$= \lim_{t\to 3pi/4} \frac{3a[-sen(t)^3+\cos(t)^3+2sen(t).\cos(t)^2-2\cos(t).sen(t)^2]}{3.sen(t)^2.\cos(t)-3.\cos(t)^2.sen(t)} =$$

(sustituyendo valores)

$$= \frac{3a[\frac{4\sqrt{2}}{8}+\frac{-2\sqrt{2}}{8}+\frac{-2\sqrt{2}}{8}+\frac{4\sqrt{2}}{8}]}{-3.\frac{2}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}-3.\frac{2}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3a[\frac{4\sqrt{2}}{8}]}{-6.\frac{\sqrt{2}}{8}-6.\frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{12a\frac{\sqrt{2}}{8}}{-12.\frac{\sqrt{2}}{8}} = -a,$$

Si a = 1 queda la recta: y = -x -1

B) Cisoide de Diocles:

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \quad 0 <= x < a$$

Representación: $y = +- \frac{x.\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$,

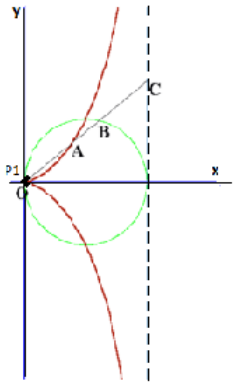
Corte con ejes: x = 0 -- > y = 0, -- > P1(0,0)

y = 0 -- > x.$\sqrt{x}$ = 0 -> x = 0, -- > P1(0,0)

Asíntotas: Vertical:

$\lim_{x\to a^-} \left(x.\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right) = a.\sqrt{\frac{a}{a-a}} = a.\frac{a}{0} = a.\infty = \infty$

Lo es la recta x = a



C) Estrofoide:

$$y^2 = x^2.\left(\frac{a+x}{a-x}\right), \quad -a< x <a$$

Representación:

$$y = +- x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

Corte con los ejes: x = 0 -- > y = 0, -- > P1(0,0)

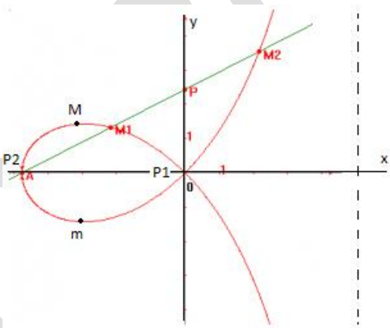
y = 0 -- > x = 0, -- > P1(0,0)

ó $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ = 0, a+x = 0, x = -a, -- > P2(-a,0)

Asíntota horizontal:

m = $\lim_{x\to+\infty} \frac{x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}{x}$ = $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ = $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{a/x+1}{a/x-1}}$ = $\sqrt{-1}$, que no es real. No tiene asíntota horizontal.

Puesto que $\lim_{x\to\infty} x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ = ∞, tiene Rama infinita.



Asíntota vertical: Observa que tiene un polo en x = a

$\lim_{x\to a^-} \left(x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$ =$\lim_{x\to a^-} \left(x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)$ = a.$\sqrt{\frac{a+a}{a-a}}$ = a.$\sqrt{\frac{2a}{0}}$ = ∞

Lo es la recta x = a

Extremos relativos: $y = x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

$y' = f'(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + x.\frac{(a-x)-(a+x).(-1)}{2.(a-x)^2.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}} =$

$= \ [\frac{a+x}{a-x}.2.(a-x)^2 + x.2.a] \ / \ [2.(a-x)^2.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\ ] =$

$= [2.(a^2-x^2) + 2a.x] \ / \ [2.(a-x)^2.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\ ];$

$2.(a^2-x^2) + 2a.x = 0 \text{ -> } -2x^2 + 2a.x + 2.a^2 = 0,$

$x^2 - a.x + a^2 = 0 \text{ -> } x = \begin{cases} \frac{a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2} \\ \frac{a-\sqrt{a^2+4a^2}}{2} \end{cases}$

$x = \frac{a+\sqrt{5a^2}}{2}$, $x = \frac{a-\sqrt{5a^2}}{2}$

Si a = 5, $x = \frac{5+5.\sqrt{5}}{2} = 5.\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{5-5.\sqrt{5}}{2} = 5.\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -5.0{,}6180339\ldots = -3{,}0901699...$

que corresponde al máximo M.

Si repeto el estudio tomando $y = -x.\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, obtendré el valor

$x = -3{,}0901699...$, correspondiente al mínimo m.

D) Leniscata de Bernoulli:

Ecuación: $(x^2+y^2)^2 = a^2.(x^2-y^2)$

En paramétricas:

$$r^2(t) = 2.a^2.\cos(2t)$$

$$r(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}$$

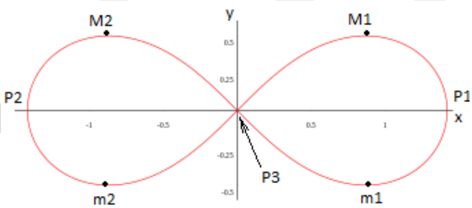
$$x(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}\ .\cos(t)$$

$$y(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}\ .\text{sen}(t)$$

Representación:

Corte con ox: $y(t) = 0 \dashrightarrow \text{sen}(t) = 0$ ó $\cos(2t) = 0$;

$\text{sen}(t) = 0 \dashrightarrow t = 0,\ t = pi,\ t = 2pi$



Puntos: $t = 0 \dashrightarrow x = a.\sqrt{2},\ \ y = 0 \dashrightarrow P1(a.\sqrt{2}, 0)$

$t = pi \dashrightarrow\ x = -a.\sqrt{2},\ \ y = 0 \dashrightarrow P2(-a.\sqrt{2}, 0)$

$t = 2pi \dashrightarrow x = a.\sqrt{2},\quad \dashrightarrow P1$

$\cos(2t) = 0 \dashrightarrow 2t = pi/2,\ \ t = pi/4;$

$2t = 3pi/2,\ \ t = 3pi/4$

Puntos:

$t = pi/4 \dashrightarrow x = a.\sqrt{2.0}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,\quad y = 0 \dashrightarrow P3(0, 0)$

t = 3pi/4 -- > x = ... = 0,   y = 0 -- > P3(0, 0)

Extremos relativos:

$$r(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}$$

$x(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}\ .\cos(t)$

$y(t) = a.\sqrt{2.\cos(2t)}\ .\text{sen}(t)$

Condición necesaria: $\frac{dy(t)}{dx(t)} = 0$

$y'(t) = a.\frac{-4.sen(2t)}{2.\sqrt{2.\cos(2t)}}.\text{sen}(t) + a.\sqrt{2.\cos(2t)}.\cos(t)$ =

= $a.[-2.\text{sen}(2t).\text{sen}(t)+ 2.\cos(2t).\cos(t)]/\sqrt{2.\cos(2t)}$ =

= $a.[-4.sen(t)^2.\cos(t)+ 2.(\cos(t)^3 - sen(t)^2.\cos(t))]/\sqrt{2.\cos(2t)}$ =

= $a.[-6.sen(t)^2.\cos(t) + 2.\cos(t)^3]/ \sqrt{2.\cos(2t)}$ =

= $a.\cos(t).[-6.\text{sen}^2(t) + 2\cos^2(t)]/ \sqrt{2.\cos(2t)}$ =

= $2a.\cos(t).[1 -4.\text{sen}^2(t)]/ \sqrt{2.\cos(2t)}$

$x'(t) = ... = 2a.\text{sen}(t).[1 -4.\cos^2(t)]/ \sqrt{2.\cos(2t)}$

$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos(t)}{sen(t)}.\frac{1-4.sen(t)^2}{1-4.\cos(t)^2}$

Hacemos y'(x) = 0 -- > $\begin{cases} \cos(t) = 0 \\ \text{ó} \\ 1 - 4.sen(t)^2 = 0 \end{cases}$

cos(t) = 0 -- > t = pi/2, t = 3pi/2

Puntos: x(t) = a.$\sqrt{2.\cos(2t)}$ .cos(t)

y(t) = a.$\sqrt{2.\cos(2t)}$ .sen(t)

t = pi/2 -- > x = a.$\sqrt{-2}.\,0$ = 0, y = a. $\sqrt{-2}.\,1$ no real

t = 3pi/2 -- > x = 0, y = a. $\sqrt{-2}.\,(-1)$ no real

(1-4.sen^2(t)) = 0 -- > sen^2(t) = 1/4 -- > sen(t) = $\pm\,\frac{1}{2}$

sen(t) = 1/2 -- > t = pi/6, t = pi-pi/6 = 5pi/6

sen(t) = -1/2 -- > t = pi+pi/6 = 7pi/6,

t = 2pi-pi/6 = 11.pi/6,

Puntos:

t = pi/6 -- > x = a.$\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{a.\sqrt{3}}{2}$

y = ... = ... = a/2 -- > M1($\frac{a.\sqrt{3}}{2}, a/2)$

t = 5.pi/6 -- > x = a.$\sqrt{2.1/2}$.($\frac{-\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{-a\sqrt{3}}{2}$

y = a.$\sqrt{2.1/2}$. $\frac{1}{2}$ = $\frac{a}{2}$ -- > M2($\frac{-a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}$)

t = 7pi/6 -- > x = a.$\sqrt{2.1/2}$.($\frac{-\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{-a\sqrt{3}}{2}$

y = a.$\sqrt{2.1/2}$. $\frac{-1}{2}$ = $\frac{-a}{2}$ -- > m2($\frac{-a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-a}{2}$)

t = 11.pi/6 -- > x = -- > x = a.$\sqrt{2.1/2}$.($\frac{\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

y = a.$\sqrt{2.1/2}$. $\frac{-1}{2}$ = $\frac{-a}{2}$ -- > m1($\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-a}{2}$)

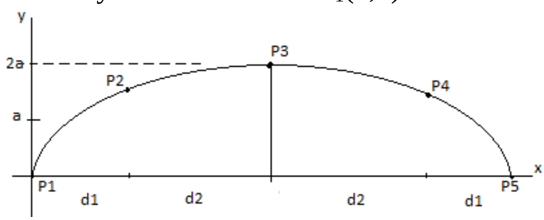
E) Cicloide:

$$\begin{cases} x = a.\left(t - \mathrm{sen}(t)\right) \\ y = a.(1 - \cos(t)) \end{cases}, \quad 0 <= t <= 2.pi$$

Algunos detalles para su representación:

t = 0 -> x = 0,

y = 0 -> P_1(0,0)



t = pi/2-- > x = a.(pi/2-1),

y = a -- > P_2(a.(pi/2-1), a)

t = pi -- > x = a.pi,

y = 2.a -- > P_3(a.pi, 2.a)

t = 3.pi/2 -- > x = a.(3pi/2+1)
y = a
--> P_4(a.(3pi/2+1), a)

t = 2.pi -- > x = a.2pi
y = 0 -- > P_5(a.2pi, 0)

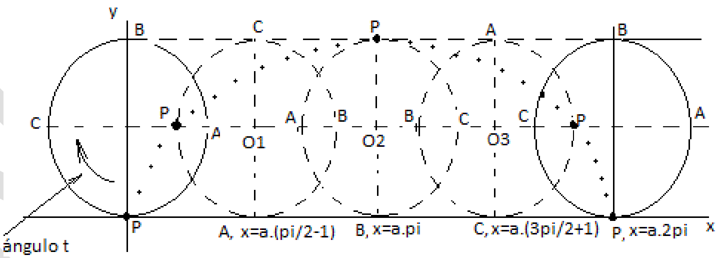
Observa además los siguientes detalles:

a)Entre P1 y P2, la amplitud del intervalo de x es a.(pi-2)/2 -- > d1
b)Entre P2 y P3 es: a.pi – a.(pi-2)/2 = a.(pi+2)/2 -> d2

c)Entre P3 y P4 es: a.(3.pi+2)/2 – a.pi = a.(pi+2)/2 -> d2

d)Entre P4 y P5 es: 2.a.pi – a.(3.pi+2)/2 = a.(pi-2)/2 -> d1

Observa cómo se produce el trazado de esta curva. En una moneda (radio a) marcamos e punto P del borde. Hacemos rodar la moneda, evitando el deslizamiento, y el punto P va dejando su rastro que es la llamada Cicloide.



En la siguiente detallamos además cómo se controla el valor del ángulo t.

Extremos relativos:
Condición necesaria: dy(t) / dx(t) = 0

$$\frac{y\prime(t)}{x\prime(t)} = \frac{a.sen(t)}{a.(1-\cos(t)} = \frac{sen(t)}{(1-\cos(t)},$$

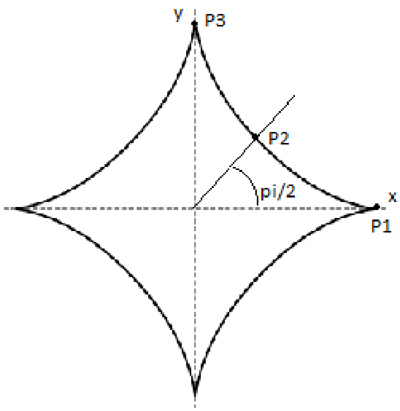
sen(t) = 0 y 1-cos(t) <> 0 -- > t = pi

Punto: t = pi -- > x = ... = a.pi
y = ... = 2,a -- > M(api,2a)

F) Hipocicloide (astroide)

$x = a.\cos^3(t)$
$y = a.sen^3(t)$, donde 0 <= t <= pi/2,

o bien $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



k = 4

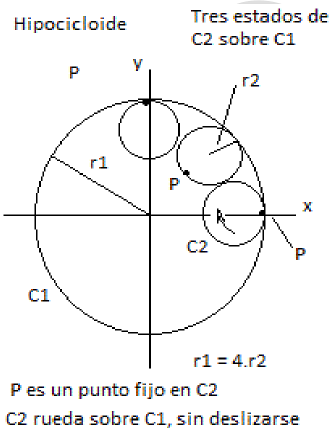
Representación:
t = 0 -- > x = a, y = 0 -- > P1(a,0)

t = pi/4 -- > x = $a.(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{2a\sqrt{2}}{8} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$y = ... = \frac{2a\sqrt{2}}{8} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \text{-- > } P2\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$$

t = pi/2 -- > x = 0, y = a -- > P3(0, a)
El resto lo obtenemos aprovechando las simetrías.

En la siguiente figura, Observa cómo se produce el trazado de la Hipocicloide.
En la moneda C2 hemos marcado el punto P y la hacemos rosar, por el interior de la circunferencia directriz C1 sin deslizarse. El punto P describe la curva.



G) Otras curvas de la misma familia:

En general la ecuación es

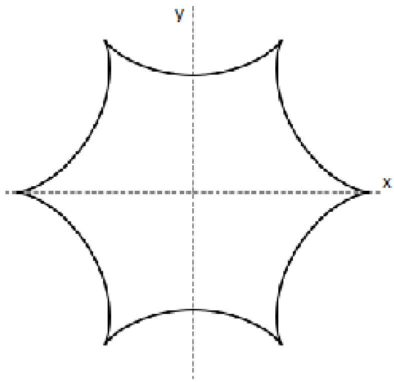
$$\begin{cases} x = (r_1 - r_2).\cos(t) + \ r_2.\cos\left(t.\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right) \\ y = (r_1 - r_2).sen(t) + r_2.sen(t.\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)) \end{cases}$$

Llamo $k = r_1/r_2$

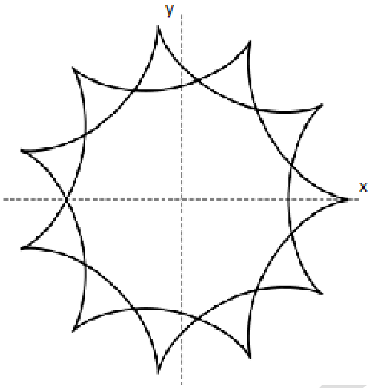
Cuando $k = 4$, $r_1 = 4.r_2$, resulta la Astroide, cuya ecuación en cartesianas es: $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

Observa las siguientes figuras

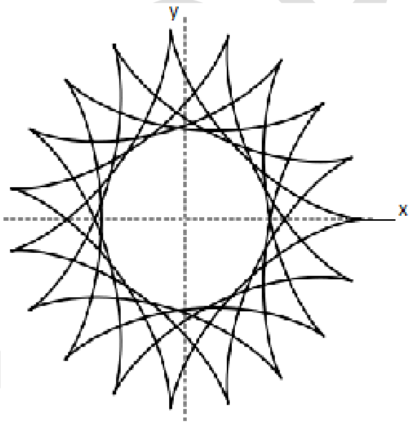
Cuando k es racional la curva es algebraica.
Si k es irracional, la curva da infinitas vueltas dentro de la circunferencia directriz C_1



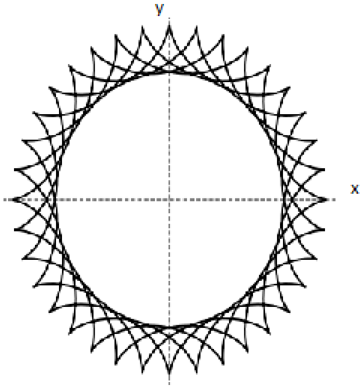
k = 6



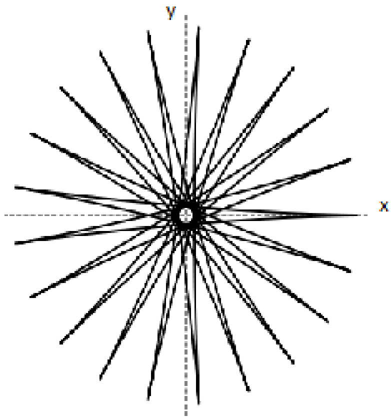
k = 5.5



k = 3.8

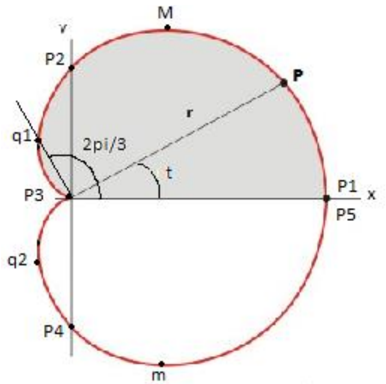


k = 7.2



k = 2.1

H) ***Cardioide:*** *También llamada "caracol de Pascal"*



r(t) = a.(1+cos(t)), 0 <= t <= 2.pi

Detalles para su representación:

x(t) = r(t).cos(t) = a.(1+cos(t)).cos(t)

y(t) = r(t).sen(t) = a.(1+cos(t)).sen(t)

t = 0 –> x = 2.a, y = 0 -> P_1(2a,0)

t = $\frac{pi}{2}$ -> x = 0, y = a -> P_2(0,a)

t = pi -> x = 0, y = 0 -> P_3(0,0)

t = 3. $\frac{pi}{2}$ -> x = 0, y = -a-> P_4(0,-a)

t = 2.pi -> x = 2.a, y = 0 -> P_5(2a,0)

Extremos relativos:

Condición necesaria: $\frac{dy(t)}{dx(t)} = 0$

$$\frac{y'(t)}{x\prime(t)} = \frac{a.[2.\cos(t)^2+\cos(t)-1]}{-a.sen(t).[2.\cos(t)+1]} = \frac{[2.\cos(t)^2+\cos(t)-1]}{-.sen(t).[2.\cos(t)+1]}$$

Hago x = cos(t), y resuelvo: $2x^2 + x - 1 = 0$; Obtengo x = 1/2, x = -1.

He de exigir que no se anule el denominador

cos(t) = 1/2 -- > t = pi/3, t = 2pi-pi/3 = 5pi/3

cos(t) = -1 -- > t = pi, y entonces se anula de denominador, por lo que este valor no vale.

Puntos: t = pi/3 -- > x = ... = a.3/4

$$y = ... = \frac{3.a.\sqrt{3}}{4} \text{ -- > } M(\frac{a.3}{4}, \frac{a.3.\sqrt{3}}{4})$$

$t = 5.\frac{pi}{3}$ -- > $x = ... = \frac{3.a}{4}$

$$y = ... = \frac{-3a.\sqrt{3}}{4} \text{ -- > } m(\frac{a.3}{4}, \frac{-a.3.\sqrt{3}}{4})$$

Extremos Secundarios q1, q2:

Condición dx(t) / dy(t) = 0

$$\frac{x\prime(t)}{y\prime(t)} = \frac{-a.sen(t).[2.\cos(t) + 1]}{a.[2.\cos(t)^2 + \cos(t) - 1]} = \frac{-sen(t).[2.\cos(t) + 1]}{[2.\cos(t)^2 + \cos(t) - 1]},$$

-sen(t).[2.cos(t) + 1] = 0 -- > sen(t) = 0, ó 2.cos(t) + 1 = 0, y que no se anule el denominador.

sen(t) = 0 -- > t = 0, t = pi, t = 2pi, El valor t = pi anula al denominador, por tanto lo excluimos.

Puntos: t = 0 -> P1(2a,0) ya conocido

t = 2pi -> P5(2a,0) ya conocido

2.cos(t) + 1 = 0 -> cos(t) = -1/2 ->

t = pi-pi/3 = 2pi/3, ó t = pi+pi/3 = 4pi/3

Puntos: t = 2pi/3 -- >

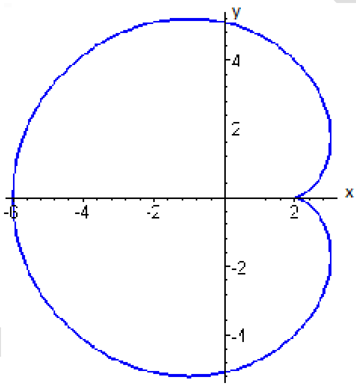
$$x = a.(1-1/2).(-1/2) = -a/4$$

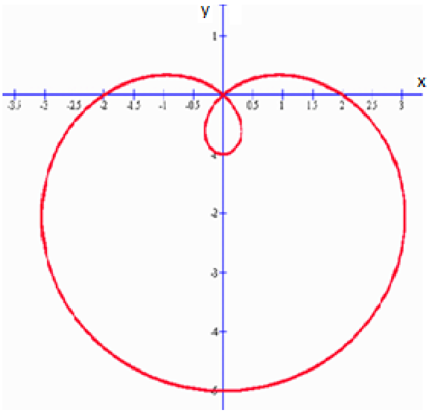
$$y = a.(1-1/2).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a.\sqrt{3}}{4} \text{ -- > } q1(\frac{-a}{4}, \frac{a.\sqrt{3}}{4})$$

t = 4pi/3 -- > x = ... = -a/4,

$$y = a.(1-1/2).(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{-a.\sqrt{3}}{4} \text{ -- > } q2(\frac{-a}{4}, \frac{-a.\sqrt{3}}{4})$$

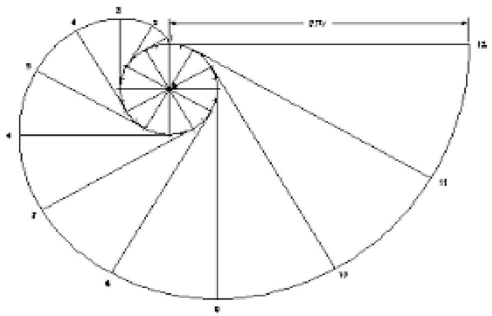
Otras formas de la Cardioide: Observa las siguientes figuras



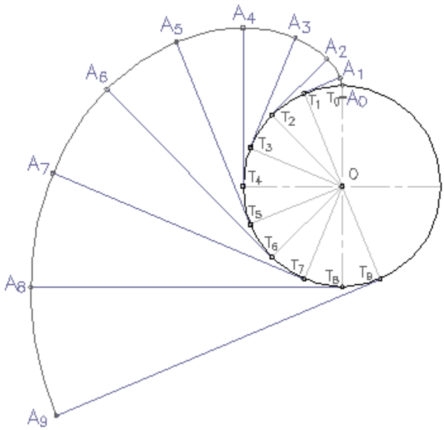


I) Evolvente (desarrollo) de la circunferencia:

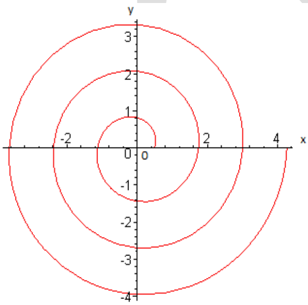
$$\begin{cases} x = a.\left(\cos(t) + t.\operatorname{sen}(t)\right) \\ y = a.\left(\operatorname{sen}(t) - t.\cos(t)\right) \end{cases}, \text{ donde } 0 <= t <= 2.pi$$



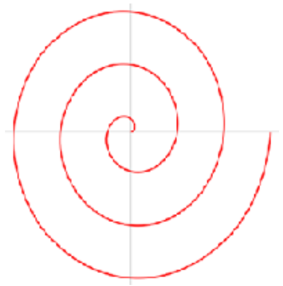
Otra forma:



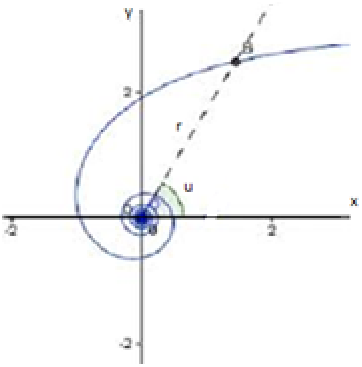
J) Espiral de Arquímedes: r = a.t



Otra forma:

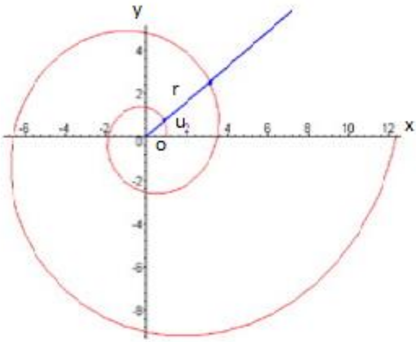


K) Espiral hiperbólica: $\mathbf{r} = \frac{a}{t}$

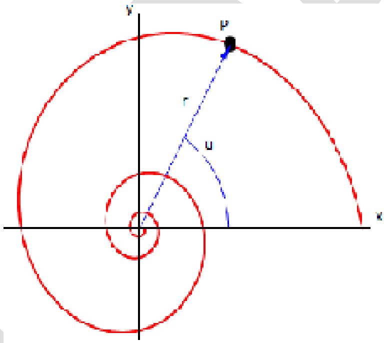


L) Espiral logarítmica:

$$r = e^{at}$$

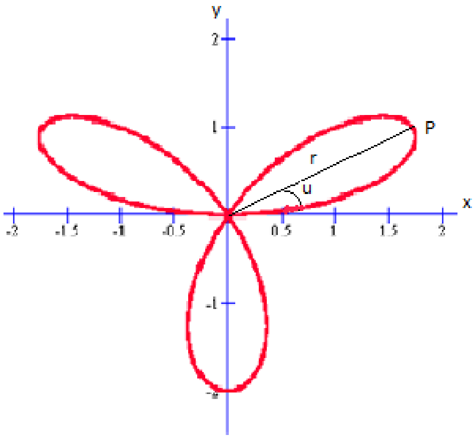


Otra forma:

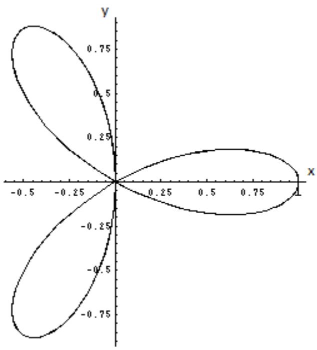


M) Rosa de tres pétalos:

$$r = a.sen(3t)$$

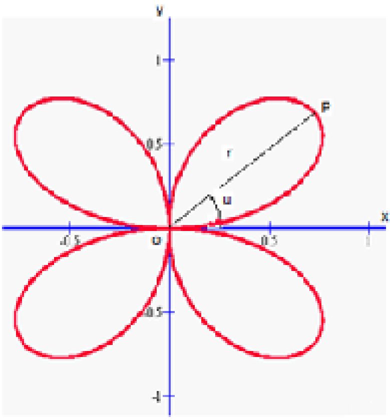


Otra forma:

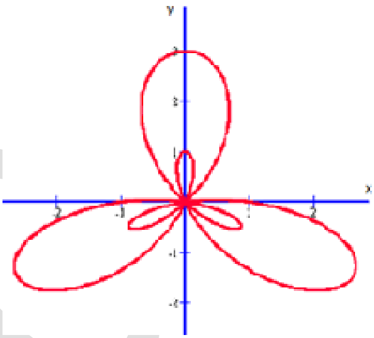


N) Rosa de cuatro pétalos:

r = a.|sen(2t)|



Otra forma:

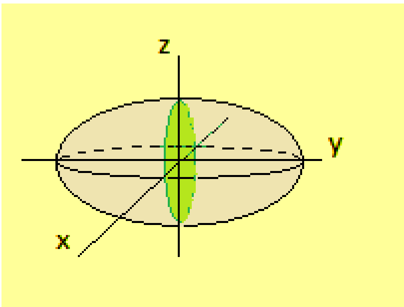


¡ FINAL !

$$$$oOo$$$$

Tema 7

Introducción a las Cuádricas
Superficies predefinidas: Estudio como Cuádricas
Superficies de revolución. Superficies regladas



7.0.- Introducción al Estudio de las Cuádricas

En Matemáticas, llamamos ‘Forma Cuádrica’ a las expresiones

f(x,y,z) = 0 que, en coordenadas cartesianas, toman la forma:

$$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + 2a12xy + 2a13xz +$$
$$+ 2a23yz + a14x + a24y + a34z + a44 = 0$$

Representan una superficie en el espacio.

En el Apéndice 2 hacemos un estudio más profundo de las Cuádricas.

En el Vol.12 se hace un estudio Completo y profundo de este tipo de superficies utilizando las llamadas ‘coordenadas homogéneas’.

Dicho lo anterior pasamos a estudiar los siguientes casos muy comunes.

7.1.- Estudio de la Esfera y sus partes

La Esfera con centro en el origen: O(0,0,0)

Como cuádrica su ecuación es

$$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + a44 = 0, \quad \text{donde } a11 = a22 = a33, \qquad (1)$$

y por tanto puedo pasar a la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{-a_{44}}{a_{11}}, \text{ y haciendo } R^2 = \frac{-a_{44}}{a_{11}} \qquad (1')$$

tenemos la forma habitual de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Observa que a11 y a44 han de tener distinto signo de modo que el cociente $\frac{-a_{44}}{a_{11}}$ sea positivo.

Esfera con centro O(xo, yo, zo):

En este caso la ecuación (1) toma la forma

$$a11(x-xo)^2 + a22(y-yo)^2 + a33(z-zo)^2 + a44 = 0, \qquad (2)$$

y si operamos haciendo los cuadrados llegamos a una expresión de la forma

$$b11.x^2 + b22.y^2 + b33.z^2 + 2b12.xy + 2b13.xz +$$

$$+ b23.yz + b44 = 0, \qquad (2')$$

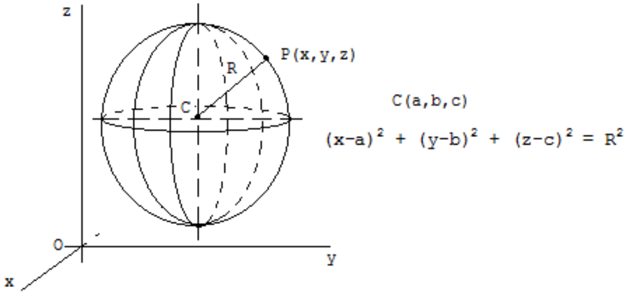
donde evidentemente b11, b22 y b33 coinciden con a11, a22 y a33.

A) En coordenadas Cartesianas

Para lo que sigue nos quedamos con las expresiones

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (4)$$



Plano tangente a la esfera en un punto P(x0, y0, z0):

En el caso de una superficie cualquiera f(x,y,z) = 0, la ecuación del plano tangente es

$$f_x(P).(x-x0) + f_y(P).(y-y0) + f_z(P).(z-z0) = 0 \qquad (5)$$

Si la tenemos definida de forma explícita

$z = f(x,y)$, equivalente a $z-f(x,y) = 0$, entonces $f_z(P) = 1$, y aquella

queda así

$$- f_x(P).(x-x0) – f_y(P).(y-y0) + (z-z0) = 0$$

o bien como suele ser habitual

$$(z-z0) = f_x(P).(x-x0) + f_y(P).(y-y0) \qquad (5')$$

En el caso de la esfera:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tenemos

$f_x(p) = 2.(xo-a)$, $f_y(p) = 2.(yo-b)$, $f_z(p) = 2.(zo-c)$, y la expresión (5) queda así

$$(xo-a).(x-x0) +(yo-b).(y-y0) +(zo-c).(z-z0) = 0 \qquad (6)$$

Corte de la esfera con un plano:

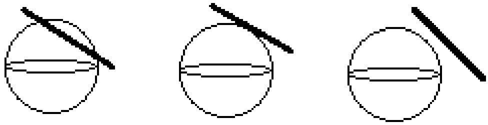
Sea un esfera:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 ,$$

y un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Lógicamente se pueden presentar los siguientes casos:



Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

En la segunda hago

0 = Ax +By +Cz +D = A(x-a) +B(y-b) +C(z-c) + (D+A.a+B.b+C.c),

de donde C.(z-c) = -[A(x-a) + B(y-b) + (D+A.a+B.b+C.c)]

Hago g(x,y) = - 1/C . [A(x-a) + B(y-b) + (D+A.a+B.b+C.c)],

con lo cual (z-c) = g(x, y) , que lo llevo a la ecuación de la esfera:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + g(x,y)^2 = R^2 ,$$

que nos da una relación entre x, y:

$$h(x,y) = 0$$

Tenemos así el sistema con parámetros x, y

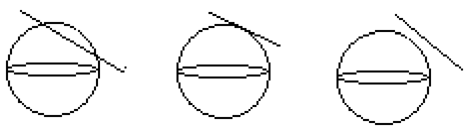
$$\begin{cases} h(x,y) = 0 \\ (z = c + g(x,y) \end{cases} \qquad (8)$$

La primera, h(x,y) = 0, es la proyección sobre el plano XOY de la sección C realizada por el plano en la esfera.

Si de h(x, y) = 0 puedo despejar y = h2(x), llevándola a la segunda del sistema anterior, obtengo las ecuaciones paramétricas de la curva C, sección del plano con la esfera, siendo x el parámetro:

$$\begin{cases} x = h1(x) = x \\ y = h2(x) \\ z = h3(x) = c + g\big(x, h2(x)\big) \end{cases} \qquad (9)$$

Corte de la esfera con una recta:



Sean esfera y una recta, y formamos es sistema

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Lógicamente se pueden presentar los siguientes casos:

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

En la segunda y tercera hago lo siguiente.

0 = Ax +By +Cz +D = A(x-a) +B(y-b) +C(z-c) + (D+A.a+B.b+C.c),

Despejo C.(z-c) y hago

g1(x,y) = - 1/C . [A(x-a) + B(y-b) + (D+A.a+B.b+C.c)],

con lo cual (z-c) = g1(x, y)

En el segundo plano

0 = A'x +B'y +C'z +D' = A'(x-a) +B'(y-b) +C'(z-c) +
+(D'+A'.a+B'.b+C'.c)

0 = A'(x-a) + B'(y-b) + C'.g1(x,y) + (D'+A'.a+B'.b+C'.c)

de donde despejo
B'.(y-b) = - [A'(x-a) + C'.g1(x,y) + (D'+A'.a+B'.b+C'.c)]

y haciendo
g2(x,y) = - 1/B' . [A'(x-a) + C'.g1(x,y) + (D'+A'.a+B'.b+C'.c)],

tengo (y-b) = g2(x, y) .

Hasta aquí he obtenido

$$\begin{cases} (z-c) = \ g1(x,y) \\ (y-b) = \ g2(x,y) \end{cases} \qquad (8)$$

Lo llevo a la ecuación de la esfera y obtengo el sistema

$$\begin{cases} (x-a)^2 \ + g2(x,y)^2 \ + \ g1(x,y)^2 = R^2 \\ \quad (y-b) = \ g2(x,y) \\ \quad (z-c) = \ g1(x,y) \end{cases}$$

(9)

Entre las dos primeras (en x, y) resolvemos obteniendo los valores que lo satisfacen:

-Dos pares: (x1, y1), (x2, y2)

-Un solo par: (x1, y2) doble

-Ningún par

De la tercera obtengo el valor de z. Obtengo así:

-Dos puntos distintos

-Dos puntos coincidentes

-Ningún punto

Si la recta viene dada vectorialmente:

Sea

r: (x,y,z) = (p1, p2, p3) + k.(v1, v2, v3)

$$\begin{cases} x = p1 + v1.k \\ y = p2 + v2.k \\ z = p3 + v3.k \end{cases}$$

(10)

Tengo la esfera: $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 \ + \ (\mathrm{y}-\mathrm{b})^2 \ + \ (\mathrm{z}-\mathrm{c})^2 \ = \ \mathrm{R}^2$

Sustituyo en ésta aquellas igualdades de (10), y obtengo una expresión de segundo grado en k:

$$A.k^2 + B.k + C = 0 \qquad (11)$$

Resolviendo obtengo los posibles dos puntos de corte.

Ejemplos:

1.- Tomo la esfera $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$, y la recta

$$r: \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

a) Calcula los puntos de corte
b) Calcula el plano tangente en uno de los puntos obtenidos

Sol.: Vector director de r: y libre, y = 0 -- > x = 0 -- > z = -1 -- > Q1(0,0,-1)

y = 2 -- > x = 3 -- > z = 4 -- > Q2(3,2,4) -- >

v = (3,2,5), tengo: $\begin{cases} x = 3.k \\ y = 2.k \\ z = -1 + 5.k \end{cases}$, que sustituyo en la esfera:

$(3k-1)^2 + (2k-2)^2 + (5k-2)^2 = 25$

$(9k^2 -6k+1) + (4k^2 -8k+4) + (25k^2 -20k+4) = 25$

$38k^2 -34k -16 = 0$ -- > $19k^2 -17k -8 = 0$

Discriminante: $D = B^2 -4AC = 289 +608 = 897$

$$k1 = \frac{17+29{,}950}{38} = 1{,}236, \quad k2 = 0{,}446$$

Puntos de corte: k1 -- > $\begin{cases} x = 3{,}708 \\ y = 2{,}472 \\ z = 5{,}180 \end{cases}$ -- >

A(3,708; 2,472; 5,180),

k2 -- > B(1,338; 0,892; 1,230)
(Puntos de corte con la esfera)

Tomo el punto A: La ecuación del plano tangente en el punto A(xo,yo,zo) toma la forma

(xo-a).(x-x0) + (yo-b).(y-y0) + (zo-c).(z-z0) = 0

donde (a, b, c) es el centro de la esfera.

En nuestro caso
(3,708-1).(x-1) + (2,472-2).(y-2) + (5,180-1).(z-1) = 0

m: 2,708.(x-1) +0,472.(y-2) +4,180.(z-1) = 0

2.- Tomo la esfera $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$, y la recta
r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{0}$

a) Calcula los puntos de corte
b) Calcula el plano tangente en uno de los puntos obtenidos

Sol.: Vector director: v = (1,2,0) -- > $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = -1 \end{cases}$

Obtenemos la ecuación: $5k^2 -4k -20 = 0$

D = 416 -- > k1 = 2,440, k2 = -1,640

Puntos de corte: k1 -- > A(3,440; 4,880; -1)

k2 -- > B(0,640; -3,280; -1)

El alumno obtendrá el plano tangente.

3.- Tomo la esfera $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$,
y el plano m: $x + y - z = 1$

a) Calcula la línea de corte del plano con la esfera.
b) Calcula la proyección (ortogonal) sobre OXY de la línea obtenida en a)

Sol.: Transformo la ecuación de m

$x + y - z -1 = 0 \rightarrow x + y -(z-1) -2 = 0 \rightarrow$
$(z-1) = x + y -2$,

Lo llevo a la esfera

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+y-2)^2 = 25$,
$(x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) + (x^2+y^2+4+2xy-4x-4y) = 25$,

$2x^2 +2y^2 +2xy -6x -8y +9 = 25 \rightarrow$
$x^2 + y^2 + xy-3x-4y -8 = 0$

La curva viene determinada por el sistema

$$C:\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y - 8 = 0 \\ (z-1) = x + y - 2 \end{cases}$$

La primera representa la proyección C' sobre OXY.

Pretendo despejar 'y' de la primera:

$$y^2 + (x\text{-}4)y + (x^2\text{-}3x\text{-}8) = 0$$

D = $(x-4)^2 - 4.(x^2-3x-8) = \ldots = -3x^2 + 4x + 48$

$$y1 = \frac{-(x-4)+\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2}, \; y2 = \frac{-(x-4)-\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2}$$

Si seguimos tendríamos dos 'ramas' de la curva parametrizada cada una de ellas así (allí donde cada una sea posible):

$$CR1:\begin{cases} x = x \\ y = \frac{-(x-4)+\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2} \\ z = -1 + x + \frac{-(x-4)+\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2} \end{cases}$$

$$CR2:\begin{cases} x = x \\ y = \frac{-(x-4)-\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2} \\ z = -1 + x + \frac{-(x-4)-\sqrt{-3x^2+4x+48}}{2} \end{cases}$$

NOTA:
En general, en este tipo de problemas será suficiente llegar a

$$C:\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y - 8 = 0 \\ (z-1) = x + y - 2 \end{cases}$$

B) Parametrizaciones de la Esfera

Una superficie cualquiera, y por tanto también la superficie esférica, puede venir definida así

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \text{ , (u,v)} \in \ D < R^2$$

Podemos operar como lo hacemos en una superficie cualquiera teniendo en cuenta que, por ser esfera se cumple

$$x(u,v)^2 + y(u,v)^2 + z(u,v)^2 = R^2 \text{ , donde R}$$

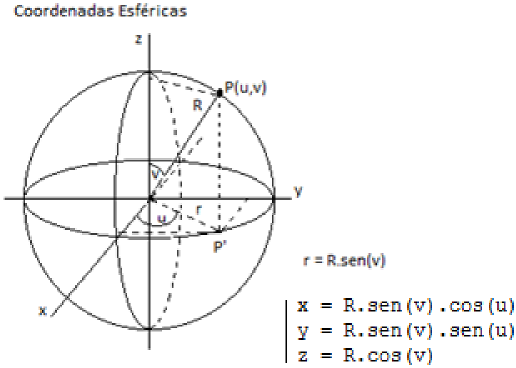
es un valor real fijo.

En el caso de la esfera interesan las llamadas coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas:

Para localizar un punto de la superficie esférica, las coordenadas cartesianas no son las más adecuadas, por varias razones: en primer lugar, porque hay tres coordenadas cartesianas, mientras que la superficie esférica es un espacio bidimensional. En segundo lugar, tratándose de una esfera, el ángulo es un concepto más adecuado que las coordenadas ortogonales.

Todo punto de la esfera está localizado de manera inequívoca por los dos ángulos u y v. Con el valor de un ángulo sobre el plano horizontal (plano del ecuador) y otro vertical (desde un polo), se puede localizar cualquier punto de la esfera.



Las coordenadas cartesianas (x, y, z) en el sistema de coordenadas esféricas (R, u, v) serán:

$$\begin{cases} x = R.sen(v).cos(u) \\ y = R.sen(v).sen(u) \\ z = R.cos(v) \end{cases}$$

donde: -pi/2 < v <= pi/2,   0 < u <= 2pi

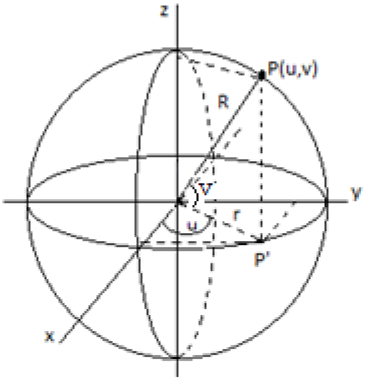
Recíprocamente, a partir de las coordenadas cartesianas, se obtienen las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ v = arcCos\left(\frac{z}{R}\right) \\ u = arcSen\left(\frac{y}{r}\right) = arcSen(\frac{y}{R.sen(v)}) \end{cases}$$

Coordenadas geográficas:

NOTA: Algunos autores llaman ‘Coordenadas geográficas’ a las siguiente, que no deben confundirse con las ‘esféricas’ debido a cómo medimos el ángulo v:

Coordenadas geográficas



r = R.cos(v)

$$\begin{cases} x = R.\cos(v).\cos(u) \\ y = R.\cos(v).\mathrm{sen}(u) \\ z = R.\mathrm{sen}(v) \end{cases}$$

La llamamos 'geográficas' porque los ángulos u,v representan:

-u -- > longitud

-v -- > latitud

Observa que ahora

$$\begin{cases} x = R.cos(v).cos(u) \\ y = R.\cos(v)\,.sen(u) \\ z = R.se\,n(v) \end{cases}$$

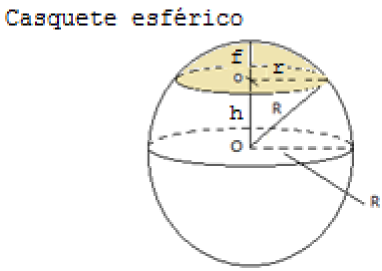
donde: -pi/2 < v <= pi/2,   0 < u <= 2pi

Recíprocamente, a partir de las coordenadas cartesianas, se obtienen las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ v = arcSen\left(\frac{z}{R}\right) \\ u = arcSen(\frac{y}{R.\cos(v)}) \end{cases}$$

C) Partes de la esfera:

Segmento esférico (o casquete):



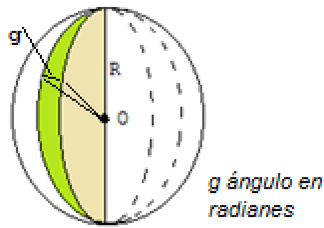
$$f = R-h$$
$$R^2 = h^2 + r^2$$

Sector esférico (Cono esférico):

$$f = R-h$$
$$R^2 = h^2 + r^2$$

A la medida f la llamamos 'flecha', del segmento o del cono.

Cuña esférica:



NOTA:
En el Vol.9, Aplicando el Cálculo Integral, calculamos la superficie y el volumen de la esfera y de sus partes.

7.2.- Estudio como cuádricas: Elipsoide, Hiperboloide, Paraboloide

A) El Elipsoide con centro O(0,0,0) y ejes los de coordenadas

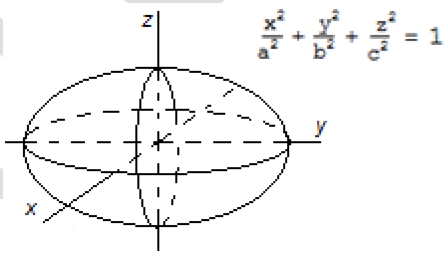
Su ecuación en su forma reducida es

$$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + a44 = 0, \qquad (9)$$

donde ahora al menos una de las igualdades a11 = a22 = a33 no se cumple, pero sí que los coeficientes a_{ii} son todos > 0 salvo $a_{44} < 0$.

Es 'una esfera deformada'.
De su forma reducida se obtiene la 'forma canónica':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Si su centro es C(xo,yo,zo), y ejes paralelos a los de coordenadas, del mismo modo que en el caso de la esfera, la (9) se convierte en

$a11(x-xo)^2 + a22(y-yo)^2 + a33(z-zo)^2 + a44 = 0,$ (10)

y si operamos haciendo los cuadrados llegaríamos a la expresión

$$b11.x^2 + b22.y^2 + b33.z^2 + 2.b14.x + 2.b24.y + +2.b34.z + + b44 = 0, \quad (11)$$

donde (en este caso) b11, b22 y b33 coinciden con a11, a22 y a33.

Llegamos a (11) que no contiene términos en xy, ni xz, ni yz, gracias a que sus ejes son paralelos a los de coordenadas. En otro caso, caso general obtendríamos

$$b11.x^2 + b22.y^2 + b33.z^2 + 2.b12.xy + 2.b13.xz + 2.b23.yz + 2.b14.x + 2.b24.y + +2.b34.z + b44 = 0, \quad (12)$$

que es el caso general de una cuádrica.

En el caso (10) su forma canónica es

$$\frac{(x-xo)^2}{a^2} + \frac{(y-yo)^2}{b^2} + \frac{(z-zo)^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

que puede interesar expresarla así

$$b^2c^2.(x-xo)^2 + a^2c^2.(y-yo)^2 + a^2b^2.(z-zo)^2 = a^2b^2c^2 \quad (13')$$

El estudio de '**Plano tangente',** de **'Corte con un plano'** y de **'Corte con un recta'** se realiza del mismo modo que para el caso de la Esfera.

En los siguientes apartados nos limitamos a hacer alguna referencia a los mismos.

B) El Hiperboloide de una hoja:

Ecuación reducida

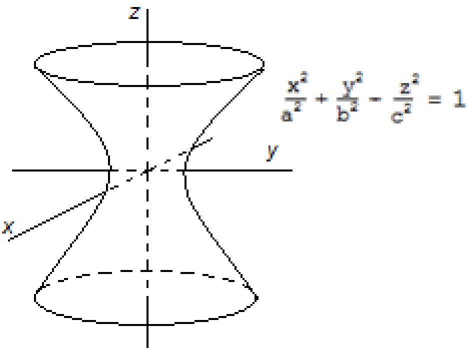
$$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + a44 = 0$$

En este caso además de ser $a_{44} < 0$, uno de los otros coeficientes también será < 0, de modo que su 'forma canónica' es una de las siguientes:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Observa, solo uno de los términos lleva signo negativo.



C) El Hiperboloide de dos hojas:

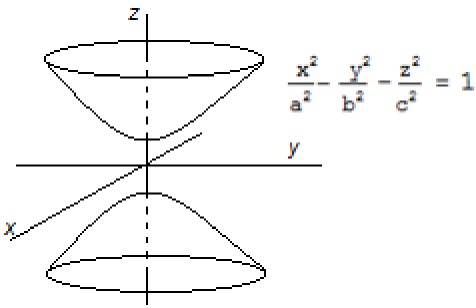
Ecuación reducida

$$a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + a44 = 0, \text{ donde}$$

$a_{44} < 0$, y dos de los otros coeficientes también son negativos, de su 'forma canónica' es una de las siguientes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Observa, dos de los términos llevan signo negativo.
Otro caso

D) Los Paraboloides: Elíptico, Hiperbólico

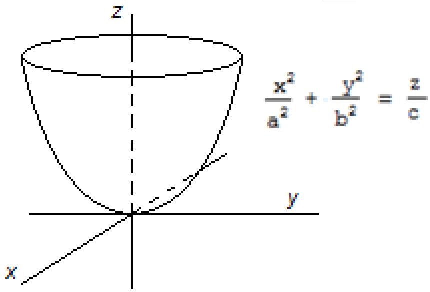
Su ecuación reducida toma una de las siguientes formas

a) $a11x^2 + a22y^2 + a34z + a44 = 0$

b) $a11x^2 + a33z^2 + a24y + a44 = 0$

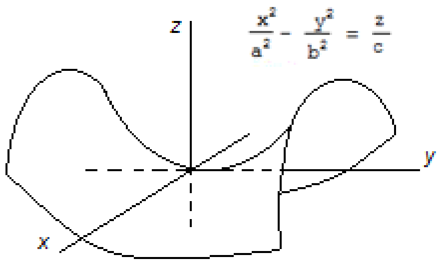
c) $a22y^2 + a33z^2 + a14x + a44 = 0$

Supongamos el caso a):
Si a11, a22 son positivos, y $a44 < 0$, estamos en el caso ‘elíptico’, de modo que al cortar con un plano $z = k$ el resultado es una elipse.



De forma análoga en los casos b) y c), con la diferencia que cortaríamos con planos de la forma:

$y = k$, si estamos en b)
$x = k$, si estamos en c)



NOTA:
Los dos casos siguientes de Cilindros y Conos los estudiamos con detalle en el punto 7.4 donde tratamos las superficies regladas.

E) Los Cilindros: Ecuación reducida

$$a11x^2 + a22y^2 + a34z + a44 = 0,$$

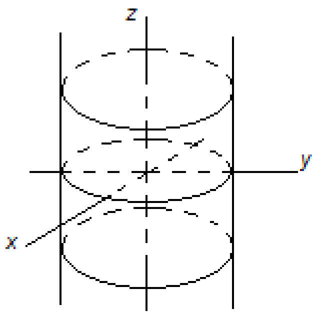
donde a11 = a22 y positivos, mientras que a44 < 0, de modo que al cortar con un plano z = k el resultado es un círculo.

El eje de este cilindro es oz

Lo mismo que en el caso de los paraboloides podemos tener también los siguientes dos casos:

$a11x^2 + a33z^2 + a24y + a44 = 0$, eje oy

$a22y^2 + a33z^2 + a14x + a44 = 0$, eje ox



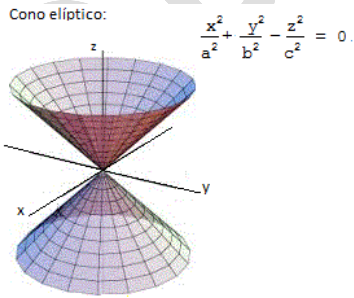
F) Los Conos: Ecuación reducida

$$a11x^2 + a22y^2 + a34z = 0,$$

donde a11, a22 tienen el mismo signo, y distinto que el de a34.

Observa que si z = 0, necesariamente x =0, y =0, es decir, el origen (0,0,0) es un punto de la superficie. Es el vértice del cono.

Si a11 = a22, al cortar con z = k el resultado es un círculo. Es el cono que vemos en Geometría básica. Si son distintos pero con el mismo signo, la sección da como resultado una elipse: Cono elíptico.



Si a11 y a22 tienen distinto signo, entonces un 'corte' con z = k produce una hipérbola: Cono hiperbólico.

Este cono tiene eje de simetría oz

Del mismo modo que en casos anteriores, tenemos también los siguientes dos casos:

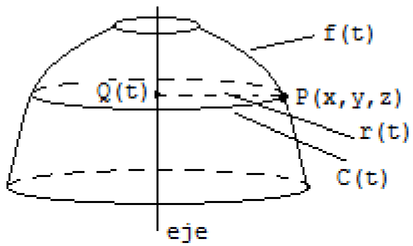
$$a11x^2 + a33z^2 + a24y = 0, \text{ eje oy}$$
$$a22y^2 + a33z^2 + a14x = 0, \text{ eje oz}$$

7.3.- Superficies de revolución

A) Eje paralelo a uno de los ejes coordenados

Tenemos una línea (generatriz), posiblemente curvada (no recta) o posiblemente recta:

$$f(t): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



Cada punto P de la generatriz produce un círculo (paralelo) que yace sobre el plano que pasa por P y es perpendicular al eje. Su radio es

r(t) = d(Q,P)

Ejemplo:

1.- En el plano OYZ tengo la curva $z = f(y) = y^2$

Eje de giro el eje oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Para un valor y = k tengo $z = k^2$, y por tanto tengo los puntos (siguiendo la figura):

$Q(0,0,k^2)$, $P(0,k,k^2)$

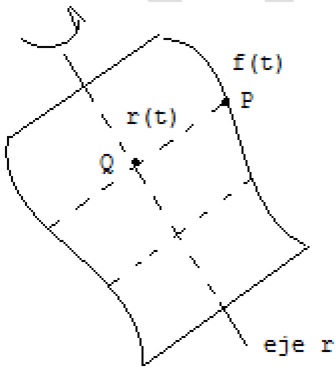
Entonces: r(r) = $\sqrt{k^2} = k$

Los puntos (x, y, z) de este paralelo han de cumplir

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ z = f(k) \end{cases} \text{-- > } z = f(\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

NOTA: Observa que en cualquier punto de la superficie es z = f(k), gracias a que el eje coincide con Oz. Pero no ocurrirá así en general.

B) Caso general



Sea la curva determinada por la intersección de dos superficies

$$C: \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

y el eje de simetría la recta r con vector director v = (a,b,c).

Suponiendo creada la superficie, al seccionarla mediante un plano

$$m: ax + by + cz + d(t) = 0$$

perpendicular al eje de simetría, produce un círculo de radio

$$r(t) = d(P,Q), \quad \text{siendo} \quad Q(xo(t), yo(t), zo(t))$$

el punto de corte del citado plano con el eje de simetría, mientras P es un punto de la superficie que yace también en el plano. Este punto P es común a la superficie y al círculo (paralelo).

El círculo anterior es también el resultado de la intersección de la esfera

$$E: (x-xo)^2 + (y-yo)^2 + (z-zo)^2 = r(t)^2$$

con el plano $\quad m: ax + by + cz + d(t) = 0$

Además: Fijado un punto Q(xo,yo,zo) en eje, todos y cada uno de los paralelos puede ser el resultado de la intersección de una esfera con centro en Q y radio R variable, con un plano variable

$$m: ax + by + cz = d, \quad \text{perpendicular al eje.}$$

Tengo así el siguiente Sistema que debe satisfacer cualquier punto (x, y, z) de la superficie:

$$\begin{cases} (x-xo)^2 + (y-yo)^2 + (z-zo)^2 = R \\ ax + by + cz = d \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Eliminando x,y,z, (utilizando tres y sustituyendo en la cuarta), podemos llegar a una relación

$$f(R, d) = 0 \qquad (2)$$

Sustituyendo en ésta las expresiones de R y d obtenemos

$$\mathrm{f}((\mathrm{x}-\mathrm{xo})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{yo})^2 + (\mathrm{z}-\mathrm{zo})^2,\ \mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{cz} = \mathrm{v}) = 0$$

(Ecuación de la superficie de revolución)

Ejemplos:

1.- Datos: C: $\begin{cases} y^2+z^2-2=0 \\ 2y+3z+1=0 \end{cases}$, eje r: $\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$

Un punto de r es A(1, 0, 0),

Un vector director de r es: w = (1,2,3)

Tengo así el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2 = R \\ x+2y+3z = d \\ y^2+z^2-2=0 \\ 2y+3z+1=0 \end{cases}$$ -- > De la primera resto

la tercera, de la segunda resto la cuarta

$$\begin{cases} (x-1)^2+2=u \\ x-1=v \end{cases}$$ -- > $v^2 + 2 = u$

Por lo tanto, la ecuación de la superficie de revolución es:

$$(x+2y+3z)^2+2 = (x-1)^2+y^2+z^2$$

Operando se llega a

$$3y^2+8z^2+4xy+6xz+12yz+2x+1=0$$
f(x,y,z) = $3y^2+8z^2+4xy+6xz+12yz+2x+1$

2.- En el plano OYZ tengo la curva $z = f(y) = y^2$

Eje de giro el eje oz: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Un punto del eje A(0,0,0)
Un vector director del eje: v = (0,0,1)

Plano (genérico) perpendicular al eje:

$$z + d = 0$$

Esfera (genérica) con centro en A y radio R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Tengo el sistema

$$\begin{cases} x2 + y2 + z2 = R2 \\ z + d = 0 \\ z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{-- > } -d + d^2 = R^2 \text{ -- >}$$

$z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ -- > $\mathbf{z = x^2 + y^2}$

$$f(x,y,z) = \mathbf{x^2 + y^2 - z}$$

3.- Un caso cuyo eje no es paralelo a eje coordenado.

Eje s: $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$ (bisectriz de OYZ)

Curva: $\begin{cases} y = z^2 \\ x = 0 \end{cases}$

Sol.: Punto del eje: A(0,0,0); vector director del eje: v = (0,1,1)

Plano (genérico) perpendicular al eje:

$$m: y + z + d = 0$$

Esfera (genérica) con centro en A:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y + z + d = 0 \\ y = z^2 \\ x = 0 \end{cases}$

De la primera y teniendo en cuenta x = 0:

$z^2 = R^2 - y^2$ -- > $z = \sqrt{R^2 - y^2}$, que lo llevo

a la segunda: $y + \sqrt{R^2 - y^2} = -d$

Elevo al cuadrado

$$y^2 + (R^2 - y^2) + 2y.\sqrt{R^2 - y^2} = d^2$$

$$R^2 + 2y.\sqrt{R^2 - y^2} = d^2$$

Sustituyo las expresiones de R, d:

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 2y.\sqrt{x^2 + z^2} = (y + z)^2$$

$(x^2 + y^2 + z^2) + 2y.\sqrt{x^2 + z^2} = y^2 + z^2 + 2yz$ -- >

$$x^2 + 2y.\sqrt{x^2 + z^2} - 2yz = 0$$

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y.\sqrt{x^2 + z^2} - 2yz$$

7.4.- Superficies regladas

7.4.0.- Introducción: Forma reducida de la recta

Conviene recordar lo siguiente: Toda recta en el espacio puede venir determinada mediante la intersección de dos planos simples como sigue

$$\text{r: }\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$$

Justificación: En general una recta en cartesianas viene expresada mediante dos planos

$$\text{r: }\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Realizo transformaciones en este sistema:

$$\begin{cases} b'.ax + b'.by + b'.cz + b'.d = 0 \\ b.a'x + b.b'y + b.c'z + b.d' = 0 \end{cases} \text{->}$$

$$\begin{cases} (b'.a - b.a')x + (b'.c - b.c').z + (b'.d - b.d') = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{-- >}$$

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{->} \begin{cases} a'.Ax + a'.Cz + a'.D = 0 \\ A.a'x + A.b'y + A.c'z + A.d' = 0 \end{cases} \text{-->}$$

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ A.b'y + (A.c' - a'.C)z + (A.d' - a'.D) = 0 \end{cases} \text{-- >}$$

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \text{-- >(si A y B' son <> 0)} \begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$$

Si alguno de estos es cero queda aún más simple:

Cz + D = 0,   ó   C’z + D’ = 0

Observa que no puede ocurrir que los dos sean cero.

7.4.1.- Superficie reglada

Visto lo anterior, sea una recta definida así:

$$r: \begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases} \qquad (1)$$

Si hacemos que estos coeficientes dependan de un parámetro t, para cada valor de t obtengo una recta. Esta recta ‘se mueve’ en el espacio y ‘llena’ una superficie, así:

$$r(t): \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases}, \text{ t recorriendo R} \qquad (2)$$

Si ahora de (2) elimino el parámetro t obtengo una relación

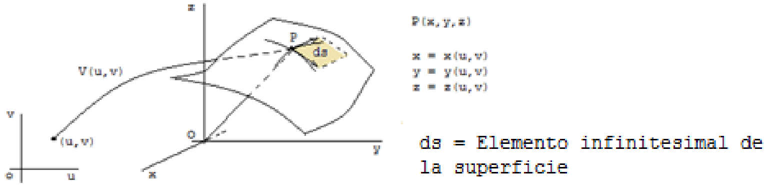
F(x,y,z) = 0 que determina una superficie.

Definición:

Llamamos superficie reglada a toda superficie F(x,y,z) = 0 que pueda ser expresada de la forma (2).

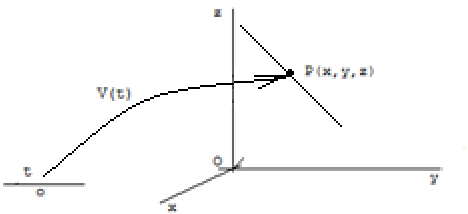
Recordamos que toda superficie puede ser expresada mediante ecuaciones paramétricas dependiendo de dos parámetros (figura):

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \text{ (u,v) recorriendo } R^2$$



Dicho lo anterior, veamos cómo debe quedar definitivamente la expresión paramétrica de una superficie reglada.

Vectorialmente: v(t) = OP = (x(t),y(t),z)



Observa que en (1) la variable z no depende de t

y por tanto: $\begin{cases} x = x(t) = m(t).z + a(t) \\ y = y(t) = n(t).z + b(t) \\ \qquad z = z \end{cases}$ (3)

donde intervienen dos parámetros: t, z

Ejemplo:

$$\begin{cases} x = 2t.z - 3t + 1 \\ y = t.z + 2t - 1 \\ z = z \end{cases}$$

Elimino t. $t = \frac{y+1}{z+2}$ -- > $x = 2.\frac{y+1}{z+2}.z - 3.\frac{y+1}{z+2} + 1$ -- >

x.(z+2) = 2.(y+1).z – 3.(y+1).z + (z+2) -- >

xz +2x = 2yz +2z – 3yz -3z + z + 2 - ->

xz +yz + 2x -2 = 0 -- > F(x,y,z)= xz +yz + 2x -2

F(x,y,z) = 0 es la superficie.

7.4.2.- Plano tangente a la superficie reglada en un punto

Sea $\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \\ z = z \end{cases}$, donde m, n, a, b son función de t

Sea un punto P(xo,yo,zo) correspondiente al valor to de t, y zo de z

El plano tangente lo obtengo mediante el determinante:

$$\begin{vmatrix} x - xo & y - y0 & z - zo \\ x'_t & y'_t & 0 \\ x'_z & y'_z & 1 \end{vmatrix}_{po} = \begin{vmatrix} x - xo & y - yo & z - zo \\ m'.zo + a' & n'.zo + b' & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}_{po} =$$

(Restando a la primera la tercer multiplicada por (z-zo), queda)

$$= \begin{vmatrix} (x - xo) - m.(z - zo) & (y - yo) - n.(z - zo) & 0 \\ m'.z + a' & n'.z + b' & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}_{po} =$$

(Sustituyendo en la primera:

xo = m.zo + a, yo = n.zo + b)

$$= \begin{vmatrix} (x-a-mz) & (y-b-nz) & 0 \\ m'.z+a' & n'.z+b' & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix}_{po} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x-a-mz) & (y-b-nz) \\ m'.z+a' & n'.z+b' \end{vmatrix}_{po},$$ de donde

m: (x-a-mz).(n'.zo + b') – (y-b-nz).(m'.zo + a') = 0

para el valor to de t.

De otra forma:

(y-b(to)-n(to).z) = $\frac{n'(to).zo+b'(to)}{m'(to).zo+a'(to)}.\,(x-a(to)-m(to).z)$

(4)

o bien

(y-(n(to)z+b(t0)))= $\frac{n'(to).zo+b'(to)}{m'(to).zo+a'(to)}.\,(x-(m(to).z+a(to)))$

(4')

Observación:

Para un valor t = to tenemos la recta generatriz

r(to): $\begin{cases} x = m(to).z + a(to) \\ y = n(to).z + b(to) \end{cases}$ -- > $\begin{cases} x - m(to).z + a(to) = 0 \\ y - n(to).z + b(to) = 0 \end{cases}$

y el haz de planos que pasan por r(to) toma la forma

M(u): $y-(n(to).z+b(to))+u.\left(x-\ m(to).z+a(to)\right)=0$

donde u es un parámetro real.

Puesto que $\frac{n'(to).zo+b'(to)}{m'(to).zo+a'(to)}$ es un valor real (cuando esté bien definido),

concluimos que el plano (4') pertenece a este haz de planos.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x = t.z + t + 1 \\ y = 2t.z + 3t - 1 \\ z = z \end{cases}$$ -- > f(x,y,z) = 2xz –yz + 3x-y-3z -4

Obtener el plano tangente en estos dos casos:

a) t = 1, z = 0

b) t = 1, z = 1

Sol.:

$$\begin{cases} m(t) = t \\ a(t) = t + 1 \\ n(t) = 2t \\ b(t) = 3t - 1 \end{cases} \text{->} \begin{cases} m' = 1 \\ a' = 1 \\ n' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}, \text{ t = 1 ->} \begin{cases} m' = 1 \\ a' = 1 \\ n' = 2 \\ b' = 3 \end{cases}$$

z = 0 -- > $\frac{n'(to).z+b'(to)}{m'(to).z+a'(to)} = \frac{2.0+3}{1.0+1} = 3$

z = 1 -- > $\frac{n'(to).z+b'(to)}{m'(to).z+a'(to)} = \frac{2.1+3}{1.1+1} = \frac{5}{2}$

Los planos tangentes son:

(y-b(to)-n(to).z) = $\frac{n'(to).zo+b'(to)}{m'(to).zo+a'(to)}.(x - a(to) - m(to).z)$

m1: y -2 -2.z = 3.(x -2 -1.z) -- > 3x –y –z -4 = 0

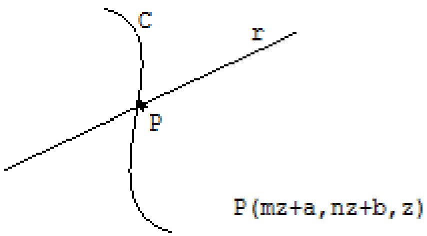
m2: y –2-2.z = 5/2.(x -2 -1.z) -- > 5x -2y –z -6 = 0

7.4.3.- Obtención de la Ecuación de una Superficie reglada

El sistema (1) que determina la recta r, considerado con los cuatro parámetros: m,a,n,b, tomando valores reales, engendra una familia de rectas que llenan el espacio. Lo que tratamos en este apartado es encontrar una relación entre dichos cuatro parámetros de modo que den lugar a un sistema como (2), dependiendo de un solo parámetro.

El problema tiene solución cuando imponemos ciertas condiciones como son: “La recta generatriz (1) se apoya en tres líneas (rectas o no) que llamamos ‘directrices’ de la superficie”

Con el fin de hacerlo comprensible consideremos en primer lugar lo siguiente:



Sea la generatriz r: $\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}$, que suponemos corta a la línea C

$$\text{C: } \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Observando la figura este hecho nos da una relación entre los cuatro parámetros m,a,n,b

Puesto que la generatriz r, en su movimiento, se apoya en C, para cada punto de C también se cumple:

$$\begin{cases} F(mz+a, nz+b, z) = 0 \\ G(mz+a, nz+b, z) = 0 \end{cases}$$, de donde eliminando z

obtenemos una relación f(m,a,n,b) = 0.

Por tanto, si la generatriz r se apoya en tres líneas obtenemos tres relaciones de este tipo, y entre ellas podremos despejar tres de los parámetros en función de uno de ellos. Llevando estos al sistema (1) obtenemos el sistema (2).

Resumiendo:

Sea el caso en el que dos de las directrices sean líneas rectas y la tercera como quiera que sea:

r1: $\begin{cases} F1(x,y,z) = 0 \\ G1(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (intersección de dos planos)

r2: $\begin{cases} F2(x,y,z) = 0 \\ G2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (intersección de dos planos)

C: $\begin{cases} F3(x,y,z) = 0 \\ G3(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (intersección de dos superficies)

Sea r la recta generatriz.

Puesto que r corta a r1 y a r2, siempre podrá ser expresada como la intersección de un plano del haz con vértice r1 con otro plano del haz con vértice r2. Además se tendrá en cuenta que r corta a la línea C. Con estas consideraciones llegamos al siguiente sistema:

$$\begin{cases} r: \begin{cases} F1(x,y,z) + u.G1(x,y,z) = 0 \\ F2(x,y,z) + v.G2(x,y,z) = 0 \end{cases} \\ \qquad C3: \begin{cases} F3(x,y,z) = 0 \\ G3(x,y,z) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(6)

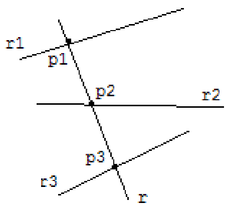
De forma análoga a lo que hicimos en el caso de las superficies de revolución, de este sistema eliminamos x,y,z de modo que obtengamos una relación h(u,v) = 0.

Sustituyendo en esta relación las expresiones de u, v, extraídas de primera y segunda obtenemos

f(x,y,z) = 0, (Ecuación de la superficie)

Ejemplo:

1.- Obtener la ecuación f(x,y,z) = 0 de la superficie S engendrada por una recta



r: $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$, que se apoya en las directrices

r1: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, r2: $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, r3: $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Sol.: Resuelvo de tres formas distintas

a) Obtengo los puntos de corte de la generatriz con las tres directrices:

p1: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$ -> $\begin{cases} 0 = \mathrm{m.z + a} \\ 0 = \mathrm{n.z + b} \end{cases}$ ->

z = -a/m, z = -b/n -- > $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ -- > a.n –m.b = 0

p2: $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$ -- > $\begin{cases} 1 = \mathrm{m.0 + a} \\ \mathrm{y} = \mathrm{n.0 + b} \end{cases}$ -- >

a = 1, y = b

p3: $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$ -- > $\begin{cases} (1 - \mathrm{y}) = \mathrm{m + a} \\ \mathrm{y} = \mathrm{n + b} \end{cases}$ -- >

1-(n+b) = m + a -> m + a + n + b = 1

Resumiendo: $\begin{cases} a = 1 \\ m = \frac{a.n}{b} \\ m = 1 - a - n - b \end{cases}$ -- > $\begin{cases} \mathrm{m} = \frac{n}{b} \\ \frac{n}{b} = -n - b \end{cases}$ -- >

n = -b.n –b^2 -- > n = $-\frac{b^2}{b+1}$ -- > m = $-\frac{b^2}{b+1} : b = -\frac{b}{b+1}$

esto es: n = $-\frac{b^2}{b+1}$, $m = -\frac{b}{b+1}$

Lo llevo a la recta generatriz:

$\begin{cases} x = -\frac{b}{b+1}.z + 1 \\ y = -\frac{b^2}{b+1}.z + b \end{cases}$, que depende del único parámetro b.

Elimino el parámetro b:

$x = -\frac{b}{b+1}.z + 1$ -- > bx+x = -b.z +b+1 -- > b.(-z+1-x) = x -1 , de donde

$$b = \frac{1-x}{x+z-1} \ , \ b^2 = \frac{1+x^2-2x}{x^2+z^2+1+2xz-2x-2z} \ ,$$

$$\frac{b^2}{b+1} = \ \dots..$$

Llegamos a f(x,y,z) = x^2 + xy +yz –x –y

b) Otra forma:

Tomamos los dos haces de planos determinados por r1 y r2:

$$\text{r1:}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ -- > haz: } x + u.y = 0$$

$$\text{r2:}\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ -- > haz: } (x-1) + v.z = 0$$

Una generatriz r es la intersección de sendos planos de estos haces:

$$\text{(*) r: }\begin{cases} x + u.y = 0 \\ (x-1) + v.z = 0 \end{cases},$$

y teniendo en cuenta que ha de apoyarse en la recta r3

$$\text{r3:}\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ -- > } \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 \end{cases} \text{ , que llavándolo a (*) tengo:}$$

$$\begin{cases} x + u.(1-x) = 0 \\ (x-1) + v.1 = 0 \end{cases}$$

De esta última pretendo obtener una relación entre u y v:

x = 1 – v, que llevo a la primera

(1-v) + u.v = 0 -- > h(u,v) = u.v –v +1 = 0

Ahora volviendo a (*) obtengo

u = -x/y, v = (1-x)/z,   y llevándolo a h(u, v)

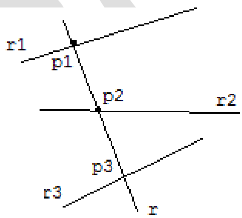
$$\frac{-x.(1-x)}{y.z} - \frac{1-x}{z} + 1 = 0 \text{ --> \ldots --> } x^2 + xy + yz - x - y = 0$$

c) Otra forma:

El siguiente procedimiento es válido para directrices cualesquiera, si bien ahora lo aplicamos al caso actual.

Consiste en tomar sendos puntos genéricos en las directrices: p1, p2, p3, que suponemos comunes a la generatriz r.

En este caso



$$\text{r1:}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad \text{r2:}\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \text{r3:}\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Supongamos

p1(0, 0, a), p2(1, b, 0), p3(c, 1-c, 1)

Observa que en r1 la variable z es ‘libre’; en la recta r2 lo es la variable y; en cambio en r3 tenemos una relación entre x, y, y z fijo.

Ahora tomo las Rectas determinadas por los puntos:

p1p2: $\frac{x}{1} = \frac{y}{b} = \frac{z-a}{-a}$, p1p3: $\frac{x}{c} = \frac{y}{1-c} = \frac{z-a}{1-a}$

De cada una obtengo dos igualdades independientes y por tanto equivale a cuatro ecuaciones independientes, con tres parámetros a, b, c.

Eliminamos estos parámetros:

$\frac{x}{1} = \frac{z-a}{-a}$ -> -a.x = z-a -> a.(1-x) = z

$\frac{x}{c} = \frac{y}{1-c}$ -> x.(1-c) = c.y -> x = c.(y+x)

$\frac{x}{1} = \frac{y}{b}$ -> b.x = y

Resulta: a = $\frac{z}{1-x}$, c = $\frac{x}{x+y}$, b = $\frac{y}{x}$

(en este caso no sería necesario despejar b)

Llevamos las expresiones de a, c alguna igualdad que todavía no haya utilizado, en este caso

$$\frac{x}{c} = \frac{z-a}{1-a} \;{-}{-}> \frac{x.(x+y)}{x} = \frac{z-\frac{z}{1-x}}{1-\frac{z}{1-x}} \;{-}{-}> \frac{x+y}{1} = \frac{-x.z}{1-x-z} \;{-}{-}>$$

(x+y).(1-x-z) = -x.z -- > …-- > x^2 + xy + yz –x-y = 0

7.4.4.- Superficie reglada desarrollable y Superficie alabeadas. Arista de retroceso

Sea una superficie reglada S definida por f(x, y, z) = 0, y r una generatriz.

Definiciones:

Decimos que S es desarrollable si, para cualquier generatriz r, el plano tangente en cualquier punto P(xo,yo,zo) de r es siempre el mismo. En otro caso la superficie (reglada) es alabeada.

A) Condición para que sea desarrollable:

Dada una generatriz r: $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$, sean dos puntos

P1(m.z1+ a,nz1+ b,z1), P2(m.z2 + a,n.z2 + b,z2) de r.

Recordamos que el plano tangente en un punto

P(m(to).zo + a(to), n(to).zo + b(to), zo) es de la forma

(y -(n(to).z + b(to)))=

$$= \frac{n'(to).zo+b'(to)}{m'(to).zo+a'(to)}.(x-(m(to).z+a(to))) \qquad (7)$$

y, por tanto, para que los planos coincidan ha de cumplirse

$$\frac{n'(t1).z1+b'(t1)}{m'(t1).z1+a'(t1)} = \frac{n'(t2).z2+b'(t2)}{m'(t2).z2+a'(t2)} \ ,$$

para cualquier valor de t, y por tanto ha de ser

$(n'.z1 + b').(m'.z2 + a') = (n'.z2 + b').(m'.z1 + a')$ -- >

n'.z1.a' + b'.m'.z2 = n'.z2.a' + b'.m'.z1 -- >

n'.a'.(z1 –z2) = m'.b'.(z1 –z2) -- >

(puesto que z1- z2 <> 0)

n'.a' = m'.b' , o bien $\frac{m'}{n'} = \frac{a'}{b'}$, para todo valor de t

(por tanto han de ser idénticas las expresiones en t)

$$\frac{m'(t)}{n'(t)} = \frac{a'(t)}{b'(t)} \quad (8)$$

B) Arista de retroceso

Def.:
Las generatrices de una superficie desarrollable son siempre tangentes a una determinada curva C que llamamos 'arista de retroceso'.

Obtención de la Ecuación de la arista de retroceso:

Si las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$S: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = z \end{cases} \quad (9)$$

Para obtener líneas sobre la superficie es suficiente encontrar una relación entre los dos parámetros t,z, por ejemplo: z = h(t), con lo cual una curva sobre S queda determinada mediante

$$C: \begin{cases} x = m(t).h(t) + a(t) \\ y = n(t).h(t) + b(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad (10)$$

Debemos obtener la relación z = h(t) que satisfaga que 'toda generatriz es tangente a C'.

Se obtiene que h(t) = $-\frac{a'(t)}{m'(t)}$, y por tanto para C queda

$$\text{C:}\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = -\frac{a'(t)}{m'(t)} \end{cases} \;\text{-- >}\; \text{C:}\begin{cases} x = -m(t).\frac{a'(t)}{m'(t)} + a(t) \\ y = -n(t).\frac{a'(t)}{m'(t)} + b(t) \\ z = -\frac{a'(t)}{m'(t)} \end{cases}$$

(Ecuación paramétrica de la arista de retroceso)

Ejemplo:

1.- Sea r: $\begin{cases} x = t.z + v(t) \\ y = v(t).z + \frac{t^3}{3} \end{cases}$

a) Obtener v(t) para que la superficie engendrada por r sea desarrollable.

$$\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases} \text{-->} \begin{cases} x = t.z + v(t) \\ y = v(t).z + \frac{t^3}{3} \end{cases} \text{-->} \begin{cases} m(t) = t \\ a(t) = v(t) \\ n(t) = v(t) \\ b(t) = \frac{t^3}{3} \end{cases} \text{-- >}$$

$$\begin{cases} m'(t) = 1 \\ a'(t) = v'(t) \\ n'(t) = v'(t) \\ b'(t) = t^2 \end{cases},$$

La condición para ser desarrollable es $\frac{m'}{n'} = \frac{a'}{b'}$

de donde n'.a' = m'.b' -- > $v'(t)^2 = t^2$ -> v'(t) = $\pm\, t$ -- >

v = $\pm \frac{t^2}{2} + k$ -- > S: $\begin{cases} x = t.z + (\frac{t^2}{2} + k) \\ y = (\frac{t^2}{2} + k).z + \frac{t^3}{3} \end{cases}$,

S: $\begin{cases} x = t.z - \left(\frac{t^2}{2} + k\right) \\ y = -(\frac{t^2}{2} + k).z + \frac{t^3}{3} \end{cases}$,

Resulta una familia de Superficies desarrollables, dependiendo del valor dado a k.

b) Superficie reglada S cuando t = 0 y v(t) = 0. Tomar la que resulta tomando el signo – en la expresión de v(t).

En el caso particular $\begin{cases} t = 0 \\ v(t) = 0 \end{cases}$ -- > $\left(\frac{0}{2} + k\right) = 0$ -- >

k = 0 -- > (tomando signo -) v(t) = - $\frac{t^2}{2}$

y entonces S: $\begin{cases} x = t.z - \frac{t^2}{2} \\ y = -\frac{t^2}{2}.z + \frac{t^3}{3} \end{cases}$ -- > S: $\begin{cases} x = t.z - \frac{t^2}{2} \\ y = -\frac{t^2}{2}.z + \frac{t^3}{3} \\ z = z \end{cases}$

c)Determinar la arista de retroceso

La ecuación de esta curva (a. de retroceso) es de la forma:

C: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \\ z = -\frac{a'(t)}{m'(t)} \end{cases}$

En nuestro caso: a(t) = - $\frac{t^2}{2}$ -- > a'(t) = -t

m(t) = t -- > m'(t) = 1, y por tanto

$-\frac{a'(t)}{m'(t)} = \quad t$ -- > z = t, y finalmente

C:$\begin{cases} x = t^2 - \frac{t^2}{2} \\ y = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{3} \\ z = t \end{cases}$ -- > C:$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = -\frac{t^3}{6} \\ z = t \end{cases}$

(arista de retroceso)

7.4.5.- Caso de Superficie Cónica

Def.:
Es la superficie engendrada por una recta r (generatriz) que pivota sobre un punto fijo V (vértice) de sí misma, al tiempo que se apoya en una curva C (directriz), cerrada o no.

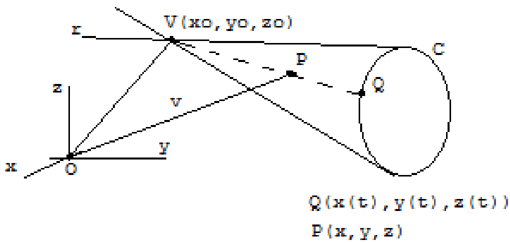
Ecuación:

A) La curva directriz viene en paramétricas

Sean r: $\begin{cases} x = m.z + a \\ y = n.z + b \end{cases}$ una generatriz cualquiera, el

vértice V(xo,yo,zo), y por otro lado la curva directriz

C:$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



Vectorialmente, para un punto P(x, y, z) de la superficie tengo

v = OP = OV + VP = OV + u.VQ

(x, y, z) = (xo, yo, zo) + u.(x(t)-xo, y(t)-yo, z(t)-zo)

de donde, dependiendo de los dos parámetros t,u

$$\begin{cases} x = xo + u.(x(t) - xo) \\ y = yo + u.(y(t) - yo) \\ z = zo + u.(z(t) - zo) \end{cases} \qquad (11)$$

Despejando el parámetro u tengo también

$$\frac{x-xo}{x(t)-xo} = \frac{y-yo}{y(t)-yo} = \frac{z-zo}{z(t)-zo} \qquad (12)$$

Eliminando el parámetro t de (2), ó los dos parámetros de (1), llegamos a la expresión cartesiana

$$f(x,y,z) = 0$$

NOTA:
Observa que no es necesario conocer la generatriz r concreta, que es suficiente conocer el vértice V(xo,yo,zo) y la curva C directriz.
La curva C la hemos dado en su forma paramétrica. Véase el ejemplo 1.

B) Directriz C intersección de dos superficies

Si la curva directriz C viene dada como intersección de dos superficies

$$C: \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

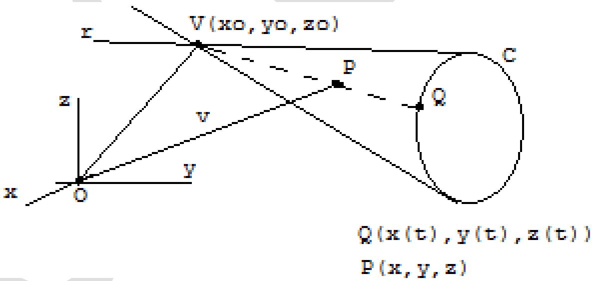
operamos del siguiente modo.

Sea Q(a,b,c) el punto genérico de C. Ahora el sistema (1) queda así

$$\begin{cases} x = xo + u.(a - xo) \\ y = yo + u.(b - yo) \\ z = zo + u.(c - zo) \end{cases} \tag{13}$$

Teniendo en cuenta que además

$$\begin{cases} F(a,b,c) = 0 \\ G(a,b,c) = 0 \end{cases}$$



reuniendo estos dos sistemas tengo

$$\begin{cases} x = xo + u.(a - xo) \\ y = yo + u.(b - yo) \\ z = zo + u.(c - zo) \\ F(a,b,c) = 0 \\ G(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

(14)

donde figuran cuatro parámetros: a, b, c, u.

Eliminamos estos parámetros:

De las tres primeras, que son 'lineales', despejamos a,b,c, y llevándolas a las dos últimas obtengo

$\begin{cases} F(x,y,z,u) = 0 \\ G(x,y,z,u) = 0 \end{cases}$, de las que elimino u y obtengo

f(x, y, z) = 0 (Véase el ejemplo 2)

Ejemplos:

1.- Tomo la directriz C: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 2t + 2 \\ z = t \end{cases}$

vértice V(0,0,0).

Sol.: Observa que con estos datos es suficiente ya que se trata precisamente del haz de rectas con vértice V y que se apoyan en C.

El sistema (11) queda ahora

$\begin{cases} x = u.(t + 1) \\ y = u.(t^2 + 2t + 2) \\ z = u.t \end{cases}$, de donde u = $\frac{x}{t+1} = \frac{z}{t} = \frac{y}{t^2+2t+2}$ -- > $\frac{x}{t+1} = \frac{z}{t}$ -- > x.t = z.t +z -- >

t.(x-z) = z --- > t = $\frac{z}{x-z}$

Por otro lado: t = $\frac{z}{u}$ -- > $\frac{z}{x-z} = \frac{z}{u}$ -- >

z.u = z.(x-z) -- > u = x-z

Llevados a la segunda (que no ha sido utilizada)

y = (x-z).($\frac{z^2}{(x-z)^2} + 2.\frac{z}{x-z} + 2$) -- >

y = $\frac{z^2}{x-z} + \frac{2z}{x-z} + \frac{2.(x-z)}{x-z}$ -- > y.(x-z) = $z^2 + 2x$ -- >

xy –yz –z^2 -2x = 0, f(x,y,z) = xy –yz –z^2 -2x

2.- Tomo la directriz C: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = z \end{cases}$, y vértice V(0,0,1)

Sol.: Sea Q(a, b, c) punto genérico de la directriz. Entonces el sistema (14) nos da el sistema

$$\begin{cases} x = 0 + u.(a-0) \\ y = 0 + u.(b-0) \\ z = 1 + u.(c-1) \\ a^2 + b^2 = 1 \\ a = c \end{cases}$$

de donde: a = $\frac{x}{u}$, $b = \frac{y}{u}$, $c = \frac{z-1+u}{u}$

Sustituyo en las dos últimas

$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} = 1$, $\frac{x}{u} = \frac{z-1+u}{u}$ -- > x = z-1+u -- >

u = x-z+1 -- > $u^2 = x^2 + z^2 + 1 - 2xz + 2x - 2z$, y

por tanto

$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 + 1 - 2xz + 2x - 2z$ -- >

$y^2 - z^2 + 2xz - 2x + 2z - 1 = 0$

Una superficie Cónica es desarrollable:

En efecto, sea una generatriz cualquiera

r: $\begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases}$ Estas pasan siempre por el

vértice V(xo,yo,zo), y por tanto

$$\begin{cases} xo = m(t).zo + a(t) \\ yo = n(t).zo + b(t) \end{cases}$$

Derivando en esta respecto de t

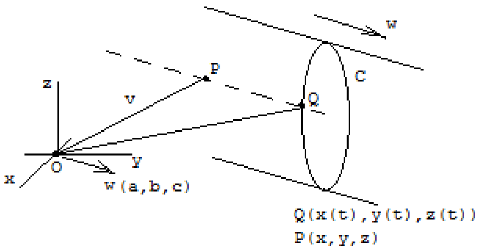
$$\begin{cases} 0 = m'(t).zo + a'(t) \\ 0 = n'(t).zo + b'(t) \end{cases},$$

$zo = \frac{-a'(t)}{m'(t)} = \frac{-b'(t)}{n'(t)}$, ó bien: $\frac{n'(t)}{m'(t)} = \frac{b'(t)}{a'(t)}$, para todo t.

Esta es la condición para que sea desarrollable.

7.4.6.- Superficie Cilíndrica

Def.:
Es la superficie engendrada por una recta r (generatriz) cuyo vector director w(a,b,c) es constante, y que se mueve apoyándose en una curva C (directriz).



Vectorialmente, para un punto P(x, y, z) de la superficie

v = OP = OQ + u.w -- >

(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t)) + u.(a,b,c) -- >

$$\begin{cases} x = x(t) + u.a \\ y = y(t) + u.b \\ z = z(t) + u.c \end{cases} \qquad (15)$$

de donde: u = $\frac{x-x(t)}{a} = \frac{y-y(t)}{b} = \frac{z-z(t)}{c}$ (16)

Esta forma (16) representa todas las generatrices: Cada valor t proporciona una.

Eliminando los dos parámetros t,u obtenemos

f(x, y, z) = 0

Si la curva C viene dada mediante C: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto Q(a', b', c') genérico de la superficie y (15) queda en la forma

$$\begin{cases} x = a' + u.a \\ y = b' + u.b \\ z = c' + u.c \end{cases}$$

y además ha de cumplir: $\begin{cases} F(a',b',c') = 0 \\ G(a',b',c') = 0 \end{cases}$

De estos dos sistemas elimino los parámetros a', b', c', u (como en el caso del cono) y obtengo

$$f(x,y,z) = 0$$

Ejemplos:

1.- Tomo la directriz C: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = 4 - t^2 \end{cases}$, y las

generatrices paralelas a la recta r:

$$r: \begin{cases} y + z = 5 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Sol.: Vector director de r: 3y = 6 -- > y = 2 -- >

z = 3 ; x libre; haciendo x = 0 tengo A(0, 2, 3)

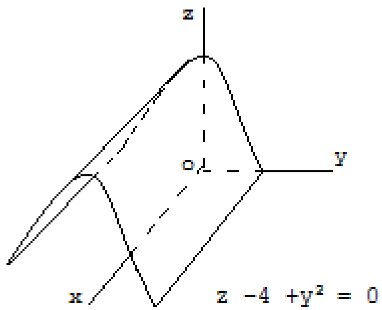
x = 1 -- > B(1,2,3) -- > w = (1,0,0)

Teniendo en cuenta (16) resulta (forma de una generatriz cualquiera):

$$\frac{x-(t+2)}{1} = \frac{y-t}{0} = \frac{z-(4-t^2)}{0}$$, de donde

$\frac{x-(t+2)}{1} = \frac{y-t}{0}$ -- > y – t = 0 -- > t = y ;

$\frac{x-(t+2)}{1} = \frac{z-(4-t^2)}{0}$ -- > z -4 + t^2 = 0 -- > z –4 + y^2 = 0



f(x,y,z) = y^2 + z -4

2.- Sea la curva directriz

$$C:\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 - x - z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Determina la proyección (ortogonal) de C sobre el plano.

Sol.: Si P(x, y, z) es un punto de C y Q(x, y, 0) es su proyección sobre xoy, es evidente que la relación entre x, y en Q es la misma que en P.

Entonces, si de la expresión de C puedo obtener una relación z = g(x, y), sustituyendo z por esta expresión en una de las dos consigo una expresión de la forma g(x, y) = 0, que es la proyección pedida.

En este caso: z = 4-x

C: $\begin{cases} 4x^2+2y^2-x-z=0 \\ z=4-x \end{cases}$ -- > $4x^2+2y^2-x-(4-x)=0$,

g(x,y) = $4x^2 + 2y^2 - 4$

La curva proyección es

C': $\begin{cases} 4x^2+2y^2-4=0 \\ z=0 \end{cases}$

Cilindro (asociado):

Si ahora tomamos la recta generatriz r paralela al eje oz (dirección de la proyección), y directriz la curva C ó C', la ecuación del cilindro engendrado tiene ecuación

f(x,y,z)= $4x^2+2y^2-4$ (z libre)

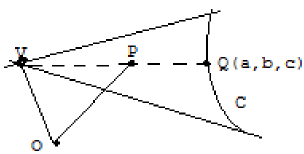
3.- Tomo la curva C: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$,

Se pide:

a) Ecuación del cono con vértice V(1,4,0) y directriz la curva C.

Sol.: Vectorialmente: OP = OV + u.VQ , y por tanto

(x, y, z) = (1+u.a, 4+u.b, u.c)



de donde: $\begin{cases} x = 1 + u.a \\ y = 4 + u.b \\ z = u.c \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$,

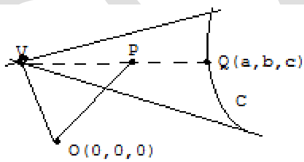
Eliminando los parámetros: a, b, c, u , obtenemos

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 4z^2 - xy + 3xz - 2x + y - 3z - 1$$

y f(x,y,z) = 0 es la ecuación del cono.

b)Ecuación del cilindro cuya directriz es C y las generatrices son paralelas a la bisectriz del primer octante.

Vector director de las generatrices w = (1, 1, 1)



Vectorialmente:

OP = OQ + QP = OQ + u.w -- > (x,y,z) = (a,b,c) + u.(1,1,1) -- >

$\begin{cases} x = a + u \\ y = b + u \\ z = c + u \end{cases}$, y además $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

Elimino los parámetros a, b, c, u, y llegamos a

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1$$

Cilindro: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = 0$

Una superficie Cilíndrica es desarrollable:

En efecto, sea una generatriz cualquiera

$$r: \begin{cases} x = m(t).z + a(t) \\ y = n(t).z + b(t) \end{cases},$$

de donde $\frac{z}{1} = \frac{x-a(t)}{m(t)} = \frac{y-b(t)}{n(t)}$,

donde vemos que el vector director de cualquier generatriz toma la forma

$$w = (m(t), n(t), 1)$$

Observa que esto es así para cualquier superficie reglada.

Por definición de cilindro, w es constante, es decir no depende de t. Por lo tanto

$$m'(t) = 0, \quad n'(t) = 0,$$

y entonces es correcta la igualdad

$$m'(t).b'(t) - n'(t).a'(t) = 0$$

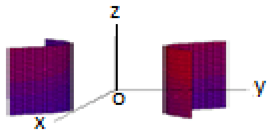
cualesquiera que sean a(t), b(t). Pero esta es la condición para ser desarrollable.

4.- Ejemplos (gráficos)

Cilindro hiperbólico:

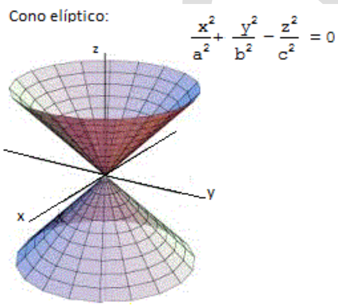
Puede tomar las siguientes formas.

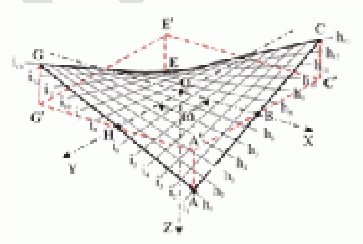
$x^2 - y^2 = 1$, ó $y^2 - x^2 = -1$,
$z^2 - y^2 = 1$, $z^2 - x^2 = 1$, $x^2 - z^2 = 1$



Cono:
Puede tomar las siguientes formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$





Caso muy general (reglada):

$$$oOo$$$

APÉNDICE 1: Complemento sobre Funciones y Superficies. Derivación implícita. Curvas sobre una superficie.

A) Sobre la Diferencial de z = f(x,y) en un punto

Recordamos que en una variable x la expresión de la "función diferencial" (y diferencial total) en el punto P(a, f(a)) viene dada por

dy(P) = f'(a).dx, donde dx = (x-a), o bien

y – f(a) = f'(a).(x-a)

donde dx = Δx

Veamos el caso de dos variables:

Sea z = f(x, y) la expresión en cartesianas que detemina una superficie S. Sea D < R^2 el dominio de definición de f(x,y).

Puesto que ahora también 'y' es independiente, del mismo modo que

dx = Δx = x-a, ahora dy = Δy = y-b.

Sea p(a, b) en el dominio D de f(x,y), y Q(a, b, c) en la superficie S, donde c = f(a,b).

Para un entorno U(P,r) con r>0 suficientemente pequeño, el incremento de z viene dado por

(z-c) = f_x(P).(x-a) + f_y(P).(y-b) + o(r),

donde o(r) representa un infinitésimo respecto de r, esto es: $\lim_{r\to 0} \frac{o(r)}{r} = 0$

Despreciando este valor o(r) infinitésimo tenemos lo que llamamos 'Diferencial total' de z

$$dz(p) = f_x(P).(x\text{-}a) + f_y(P).(y\text{-}b)$$

donde debemos detallar que:

$$\begin{cases} dx = \ x - a \ \ (por\ ser\ x\ indepen.) \\ dy = y - b \ \ (por\ ser\ y\ indepen.) \\ dz \ \approx z - c \ \ (por\ ser\ z\ depend.) \end{cases}$$

NOTA: Cuando la variable es independiente, como x e y, designamos por dx, dy, lo que realmente es $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$

B) Funciones implícitas f(x, y) = k. Derivación implícita

Def.:
Sea f(x, y) = 0 donde x es la variable independiente, e y es variable dependiente de x.

Cuando tenemos y = g(x) decimos que es ‘función explícita’. En el caso f(x,y) = f(x,g(x)) = 0 decimos que es ‘función implícita’. Significa que la relación y = g(x) no está explicitada, sino que está implícita en la expresión
f(x,y) = 0.

Teniendo en cuenta que la variable independiente es x, y que la variable ‘y’ depende de x, aplicando la ‘derivación compuesta´, tenemos para la diferencial total

$0 = f_x(x,y).dx + f_y(x,y).y'_x.dx$, de donde $0 = f_x(x,y) + f_y(x,y).y'_x$,

y de ésta despejamos y'_x , derivada de ‘y’ respecto de x:

$$y'_x = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Sus derivadas parciales y la Diferencial total:

$$0 = f_x'(x,y) + f_y'(x,y).y_x'(x) \qquad (1)$$

Su diferencial en el punto p(xo,yo)

$$0 = f_x'(p).dx + f_y'(p).y_x'(xo).dx = [f_x'(p) + f_y'(p).y_x'(xo)].dx \qquad (2)$$

De (1) obtenemos

$$y_x'(x,y) = \frac{-f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)} \qquad (3)$$

que permite obtener g'(x) sin necesidad de haber obtenido la expresión explícita y = g(x).

Recta tangente en p(xo,yo):

Sabemos que la pendiente de dicha recta es $m = y_x'(p) = \frac{-f_x'(p)}{f_y'(p)}$,

y por tanto su ecuación es de la forma

$$r: y–yo = \frac{-f_x'(p)}{f_y'(p)}.(x-xo)$$

de donde r: $f_y'(p)$.(y–yo) + $f_x'(p)$.(x-xo) = 0

o bien

$$r: f_x'(p).(x-xo) + f_y'(p).(y-yo) = 0 \qquad (4)$$

Ejemplos:

1.- Sea f(x, y) = $y^3 + x.y^2 + x - 1 = 0$, donde suponemos y = g(x), siendo x la variable independiente.

Derivando respecto de x

$$0 = 3y^2.y_x' + y^2 + 2xy.y_x' + 1$$
$$0 = [3y^2 + 2xy].y_x' + (y^2 + 1) \text{ , de donde}$$

$$y_x' = \frac{-(y^2+1)}{3y^2+2xy} \text{ ,}$$

es decir: $g'(x) = \frac{-(y^2+1)}{3y^2+2xy}$ (5)

Si conociésemos la relación y = g(x) la anterior quedaría

$$g'(x) = \frac{-(g(x)^2+1)}{3g(x)^2+2x.g(x)} \qquad (5)'$$

Cuando conocemos la relación y= g(x) será suficiente conocer un valor x = a para obtener el valor de la derivada g'(a). En otro caso necesitamos conocer el punto p(a,b) para obtener g'(a) mediante (5).

2.- Sea $f(x,y) = x^2.\text{sen}(\sqrt{xy}) - \frac{pi^4}{16} . y = 0$

donde la variable independiente es x, y donde suponemos y = g(x) aunque ésta sea desconocida. Define un curva en el plano.

Derivadas parciales:

$$f_x' = 2x.\text{sen}(\sqrt{xy}) + x^2.\cos(\sqrt{xy}).\frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{xy}}$$
$$f_y' = x^2.\cos(\sqrt{xy}).\frac{1}{2}.\frac{x}{\sqrt{xy}} - \frac{pi^4}{16}$$

Teniendo en cuenta el resultado (3) tenemos

$$g'(x) = y_x'(x) = -\frac{2x.\text{sen}(\sqrt{xy}) + x2.\cos(\sqrt{xy}).\frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{xy}}}{x2.\cos(\sqrt{xy}).\frac{1}{2}.\frac{x}{\sqrt{xy}} - \frac{pi^4}{16}}$$

En el punto p($\frac{pi^2}{4}$, 1), que satisface la expresión implícita f(x,y) = 0, las derivadas parciales toman el el siguiente valor

$$f_x'(p) = 2.\frac{pi^2}{4}.\text{sen}(\sqrt{\frac{pi^2}{4}}) + \frac{pi^4}{16}.\cos(\sqrt{\frac{pi^2}{4}}).\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{pi^2}{4}}} = \frac{pi^2}{2} + 0 = \frac{pi^2}{2}$$

$$f_y'(p) = \frac{pi^4}{16}.\cos(\sqrt{\frac{pi^2}{4}}).\frac{1}{2}.\frac{\frac{pi^2}{4}}{\sqrt{\frac{pi^2}{4}}} - \frac{pi^4}{16} = -\frac{pi^4}{16}$$

y por tanto

$$g'(p) = -\frac{-pi^2.16}{2.pi^4} = \frac{8}{pi^2}$$

Recuerda que este valor coincide con la ‘pendiente’ m de la recta tangente a la curva en el punto p($\frac{pi^2}{4}$, 1) .

C) Función implícita de f(x, y, z) = k. Caso de dos variables independientes. Derivadas parciales e implícitas. Plano tangente.

Sea f(x, y, z) = 0 , donde las variables independientes son x, y.

Suponemos que existe la relación explícita z = g(x, y) aunque no sea conocida.

Procediendo de forma análoga al caso de una variable independiente, derivando parcialmente respecto de x, y por otro lado respecto de y, bajo las condiciones suficientes de continuidad y derivabilidad en un punto p(xo,yo,zo), donde zo = g(xo,yo).

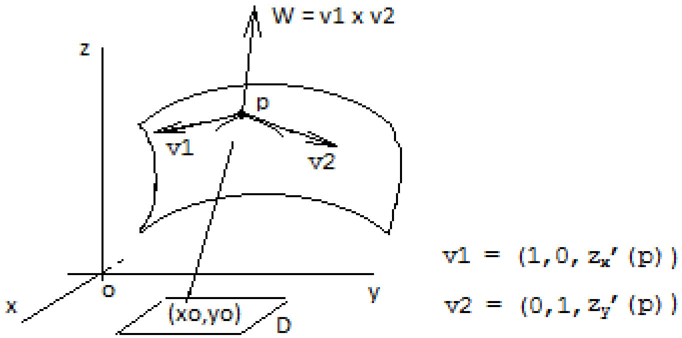
Obtenemos

$$0 = f_x'(x, y, z) + f_z'(x, y, z).z_x'(x, y)$$
$$0 = f_y'(x, y, z) + f_z'(x, y, z).z_y'(x, y) \qquad (6)$$

de donde

$$z_x'(p) = -\frac{f_x'(p)}{f_z'(p)} \;, \qquad z_y'(p) = -\frac{f_y'(p)}{f_z'(p)} \;,$$

Plano tangente en p(xo, yo, zo):



En la dirección de ox el vector tangente a la curva en p es

$$v1 = (1, 0, -\frac{f_x'(p)}{f_z'(p)}) \dashrightarrow (f_z'(p), 0, -f_x'(p))$$

y en la dirección de oy el vector tangente a la curva es

$$v2 = (0, 1, -\frac{f_y'(p)}{f_z'(p)}) \dashrightarrow (0, f_z'(p), -f_y'(p))$$

Por tanto, el vector normal es

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ f_z'(p) & 0 & -f_x'(p) \\ 0 & f_z'(p) & -f_y'(p) \end{vmatrix} =$$

$= f'_x(p).f'_z(p).e1 + f'_z(p).f'_y(p).e2 + f'_z(p).f'_z(p).e3$ -- >

Tomo uno proporcional: $w = (f'_x(p),\ f'_y(p),\ f'_z(p))$

Para un punto cualquiera (x, y, z) del plano tangente el vector

$$v = (x-xo, y-yo, z-zo)$$

es ortogonal con w, y por tanto

$$m: f'_x(p).(x-xo) + f'_y(p).(y-yo) + f'_z(p).(z-zo) = 0$$

es la ecuación del plano.

NOTA:
De la misma forma procederíamos si la superficie estuviese definida mediante dos parámetros

$$f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$$

con la diferencia de que la derivación hemos de hacerla respecto de u, v como variables independientes.

D) Curvas sobre una superficie. Recta tangente y plano tangente en un punto de la superficie.

D1) Superficie dada en forma implícita

Sea f(x, y, z) = 0 que define una superficie S en el espacio, donde x, y son las variables independientes. En la anterior va implícita la relación z = g(x, y).

Fijado un punto p(xo,yo,zo) de la superficie, para obtener una curva sobre S que pase por p es suficiente expresar x e y en función de un parámetro

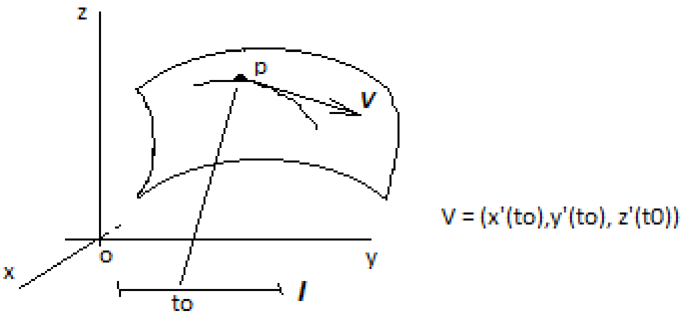
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad z(t) = g(x(t), y(t))$$

Sea to tal que xo = x(to), y0 = y(to)

Las componentes del vector tangente a la curva en p(x(to), y(to), z(to)) son

$$V = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$r: \frac{x - xo}{x\prime(to)} = \frac{y - yo}{y\prime(to)} = \frac{z - zo}{z\prime(to)}$$



El reto lo tenemos para obtener z’(t)

Tengo f(x(t), y(t), z(t)) = 0, donde

$$z(t) = g(x(t), y(t))$$

Derivando

$$0 = [f_x'(x,y,z) + f_z'(x,y,z).g_x'(x,y)].x'(t)$$

$$0 = [f_y'(x,y,z) + f_z'(x,y,z).g_y'(x,y)].y'(t)$$

de donde

$$g_x'(x, y) = \frac{-fx'(x,y,z)}{fz'(x,y,z)}, \quad g_y'(x,y) = \frac{-fy'(x,y,z)}{fz'(x,y,z)}$$

Por otro lado

$$z'(t) = \frac{-fx'(x,y,z)}{fz'(x,y,z)}.x'(t) + \frac{-fy'(x,y,z)}{fz'(x,y,z)}.y'(t)$$

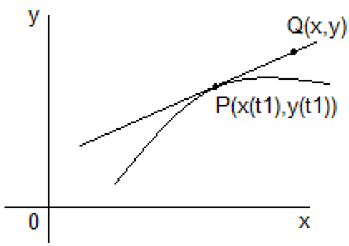
que la usaremos cuando no sea posible despejar z de la expresión implícita f(x,y,z) = 0

D2) Curvas y Superficies dadas en paramétricas

A) Curva en paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

donde t recorre la recta real R



OQ = OP + PQ

dy = y'(x).dx --> y'(x) = dy / dx

Pero, siendo dependientes del parámetro t tenemos:

$$dx = x'(t).dt, \quad dy = y'(t).dt\ , \quad \text{de donde } y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Sabemos que la pendiente de la tangente en P toma el valor

$$m_p = y'(x(t1)) = \frac{y'(t1)}{x'(t1)}$$

La ecuación de la tangente es

$$(y-y(t1)) = \frac{y'(t1)}{x'(t1)}.(x-x(t1)) \text{ --- > } \ y = m_p .x \ + (y(t1) - m_p .x(t1))$$

Por lo tanto proceso a seguir:

-Cálculo del punto P, para lo cual hallo valor puntual (x(t1), y(t1))
-Obtengo los valores x'(t1), y'(t1), con lo cual tengo m_p
-Un Vector director es V = (1, m_p)

Recuerda que si un vector director es V = (v1, v2), la pendiente es

$$m = \frac{v2}{v1}$$

B) Si la curva viene dada en cartesianas:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

donde x recorre la recta real R

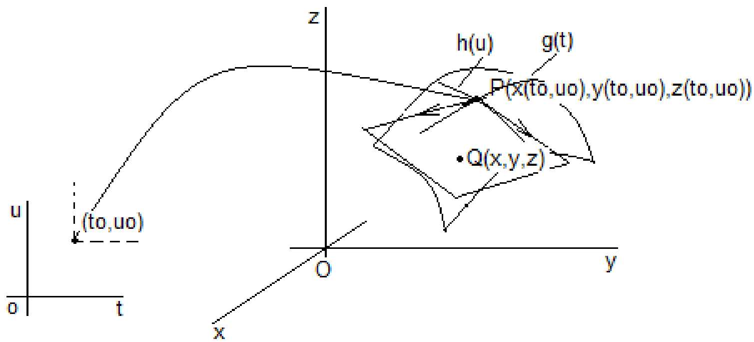
$x' = 1, \qquad m_p = f\,'(xo))$

$y = f\,'(xo).x \ + (f(xo) - f\,'(xo)\,.xo)$

A) Sea la superficie en paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases}$$

donde (t, u) recorre el plano RxR.



Si fijo el valor u = uo, al recorrer t su intervalo describirá una curva g(t) sobre la superficie:

Puntos: (x(t,uo), y(t,uo), z(t,uo))

Si fijo el valor t = to, al recorrer u su intervalo describirá un curva h(u) sobre la superficie:

Puntos: (x(to,u), y(to,u), z(to,u))

Los vectores tangentes a cada una de estas curvas, en el punto P, son

Tangente a g(t): V1 = $(x'_t(t,uo), y'_t(t,uo), z'_t(t,uo))$

Tangente a h(u): V2 = $(x'_u(to,u), y'_u(to,u), z'_u(to,u))$

El plano tangente lleva asociado el Subespacio director generado por estos dos vectores:

$$OQ = OP + k1.V1 + k2.V2$$

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{x(to, uo)} + \mathrm{k1.}\,x'_t(t, uo) + \mathrm{k2.}\,x'_u(to, u) \\ \mathrm{Y} = \mathrm{y(to, uo)} + \mathrm{k1.}\,y'(t, uo) + \mathrm{k2.}\,y'_u(to, u) \\ \mathrm{Z} = \mathrm{z(to, uo)} + \mathrm{k1.}\,z'_t(t, uo) + \mathrm{k2.}\,z'_u(to, u) \end{cases}$$

(Ecuaciones paramétricas del plano tangente)

B) Si la superficie viene definida por z = f(x,y) tenemos lo siguiente.

Punto P(xo, yo, z(xo, yo))

Fijo y = yo y tengo la curva g(x), cuyos puntos son (x, yo, z(x,yo)), y está sobre el plano que pasa por P y es paralelo al plano xoz. El vector tangente es V1 = (1, 0, z'_x(x,yo)), y la pendiente de la tangente toma el valor

$$m1 = z'_x(xo,yo)$$

Fijo x = xo y tengo la curva h(y), cuyos puntos son (xo, y, z(xo,y)), y está sobre el plano que pasa por P y es paralelo al plano yoz. El vector tangente es V2 = (0, 1, z'_y(xo,y)), y la pendiente de la tangente toma el valor

$$m2 = z'_y(xo,yo)$$

El Subespacio director del plano viene generado por estos dos vectores, y sus puntos vienen determinados así:

OQ = OP + k1.V1 + k2.V2

$$\begin{cases} X = x_o + k1 \\ Y = y_o + k2 \\ Z = z(x_o, y_o) + k1.z'_x(x, yo) + k2.z'_y(xo, y) \end{cases}$$

Si en la expresión de z sustituyo k1 y k2 obtenidos de las dos primeras

k1 = x – xo, k2 = y – yo

resulta una relación entre x, y, z, sin parámetros, de la forma

A.x + B.y + C.Z + D = 0 (Ecuación cartesiana del plano)

Ejemplos/Problemas resueltos:

1.- Sea la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

donde x, y son variables independientes.

Las relaciones $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t - 2 \end{cases}$ determinan sobre S una curva que cuando t = 2 pasa por p1(0, 0, R) y p2(0, 0, -R)

Determino la expresión z(t):

$z^2(t) = R^2 – (4t^2 -16t+16) –(t^2-4t+4) = R^2 –(5t^2-20t+20)$ -- >

z(t) = $\pm\sqrt{R^2 - 5t^2 + 20t - 20}$, tomo el signo +

$$z'(t) = \frac{-10t+20}{2.\sqrt{R^2-5t^2+20t-20}}$$

Derivadas parciales:

$$f_x' = 2x, \quad f_y' = 2y, f_z' = 2z$$

y por otro lado: $x'(t) = 2$, $y'(t) = 1$, y $z'(2) = 0$. Por tanto $V = (2, 1, 0)$

Que la tercer componente de V sea cero significa que estamos en un punto estacionario (es el polo norte de la esfera).

La ecuación de la recta tangente es

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-R}{0} \text{ -> } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z - R = 0 \end{cases}$$

Ecuación de una curva sobre la superficie de la esfera:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 4 \\ y(t) = t - 2 \\ z(t) = \pm\sqrt{R^2 - 5t^2 + 20t - 20} \end{cases} \text{, donde t}$$

recorre el dominio D tal que $R^2 - 5t^2 + 20t - 20 \geq 0$

El alumno puede comprobar que el punto (0, 0, -R) resulta el mismo vector director, siendo la recta tangente

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+R}{0} \text{ -> } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z + R = 0 \end{cases}$$

2.- Sea la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

donde x, y son variables independientes.

Las relaciones $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t - 2 \end{cases}$ determinan sobre S una curva que cuando t = 1 pasa por p1(-2, -1, $\sqrt{R^2 - 5}$) y p2(-2, -1, - $\sqrt{R^2 - 5}$), (Observa que, en la esfera z(1) = $\pm\sqrt{R^2 - 5}$)

Determino la expresión z(t):

$z^2(t) = R^2 - (4t^2 - 16t + 16) - (t^2 - 4t + 4) = R^2 - (5t^2 - 20t + 20)$ -- >

$$z(t) = \pm\sqrt{R^2 - 5t^2 + 20t - 20}\text{ , tomo el signo +}$$

$$z'(t) = \frac{-10t+20}{2.\sqrt{R^2-5t^2+20t-20}} \text{ -> } z'(1) = \frac{10}{2.\sqrt{R^2-5}}$$

y por otro lado: x'(t) = 2, y'(t) = 1. Por tanto V = (2, 1, $\frac{5}{\sqrt{R^2-5}}$)

Por tanto r: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-\sqrt{R^2-5}}{\frac{5}{\sqrt{R^2-5}}}$ -- >

r: $\begin{cases} x + 2 = 2y + 2 \\ \frac{5}{\sqrt{R^2-5}}.(x+2) = 2.(z - \sqrt{R^2 - 5}\,) \end{cases}$, como intersección

de dos planos.

Las ecuaciones paramétricas de la curva son las mismas.

El alumno realizará los cálculos para el caso del punto y p2(-2, -1, - $\sqrt{R^2 - 5}$), 3.- Sea la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

donde x, y son variables independientes.

Deseamos obtener el plano tangente en el punto p(0, 0, R)

Derivadas parciales: $f_x' = 2x$, $f_y' = 2y$,

$$f_z' = 2z, \text{ -- > } \begin{cases} z'_x = \frac{-2x}{2z} \\ z'_y = \frac{-2y}{2z} \end{cases} \text{ -- > } \begin{matrix} z'_x(p) = \frac{0}{2R} = 0 \\ z'_y(p) = \frac{0}{2R} = 0 \end{matrix}$$

v1 = (1,0,- $\frac{f'_x(p)}{f'_z(p)}$) -- > ($f'_z(p)$, 0, - $f'_x(p)$) -- > v1 = (2R, 0, 0)

o bien v1 = (2, 0, 0)

En la dirección de oy tengo

v2 = (0, 1, - $\frac{f'_y(p)}{f'_z(p)}$) -- > (0, $f'_z(p)$, - $f'_y(p)$) -- > v2= (0, 2R, 0)

o bien v2 = (0, 2, 0)

Por tanto, el vector normal es

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \ldots\ldots (0, 0, 4)$$

La ecuación del plano tangente es:

4.(z-R) = 0, o bien m: z – R = 0

4.- Sea la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

donde x, y son variables independientes.

Deseamos obtener el plano tangente en el punto p(-2, -1, $\sqrt{R^2-5}$)

Derivadas parciales: $f_x' = 2x$, $f_y' = 2y$,

$f_z' = 2z$, -- > $\begin{cases} z_x' = \frac{-2x}{2z} \\ z_y' = \frac{-2y}{2z} \end{cases}$ -> $\begin{matrix} z_x'(p) = \frac{4}{2.\sqrt{R^2-5}} = \frac{2}{\sqrt{R^2-5}} \\ z_y'(p) = \frac{2}{2.\sqrt{R^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{R^2-5}} \end{matrix}$

v1 = (1, 0, - $\frac{f_x'(p)}{f_z'(p)}$) -- > ($f_z'(p)$, 0, - $f_x'(p)$) -- > v1 = ($\sqrt{R^2-5}$, 0, 2)

En la dirección de oy tengo

v2 = (0, 1, - $\frac{f_y'(p)}{f_z'(p)}$) -- > (0, $f_z'(p)$, - $f_y'(p)$) -- >

v2 = (0, $\sqrt{R^2-5}$, 1)

Por tanto, el vector normal es

$$w = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ \sqrt{R^2-5} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{R^2-5} & 1 \end{vmatrix} = \ldots.. \text{ -- > }$$

w = (-2. $\sqrt{R^2-5}$,- $\sqrt{R^2-5}$, R^2-5)

La ecuación del plano tangente es:

m: -2. $\sqrt{R^2-5}$.(x+2) -$\sqrt{R^2-5}$.(y+1) + (R^2 -5).(z- $\sqrt{R^2-5}$) = 0

5.- Sea el caso del paraboloide

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1 \text{ -- > } 9x^2 + 16y^2 + 16z^2 = 144 \qquad (1)$$

Fijamos los valores de x,y (como variables independientes: x = 2, y = 1, y despejando el valor de z, z = $\pm\frac{\sqrt{23}}{2} = 2{,}3979$ ...

Tengo los puntos p1(2; 1; $\frac{\sqrt{23}}{2}$) y p2(2; 1; $\frac{-\sqrt{23}}{2}$)

Plano tangente en p1:

$f_x'(x,y,z) = 18x$ -- > $f_x'(p1) = 18.2 = 36$

$f_y'(x,y,z) = 32y$ -- > $f_y'(p1) = 32.1 = 32$

$f_z'(x,y,z) = 32x$ -- > $f_z'(p1) = 32.\frac{\sqrt{23}}{2} = 16.\sqrt{23}$

Plano tangente en p1:

$$m: 36.(x-2) + 32.(y-1) + 16.\sqrt{23}.(z-\frac{\sqrt{23}}{2}) = 0$$

Del mismo modo en p2:

$$m: 36.(x-2) + 32.(y-1) - 16.\sqrt{23}.(z+\frac{\sqrt{23}}{2}) = 0$$

Curva sobre la superficie que pase por p1:

Fijo la relación $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \end{cases}$, t = 2 -- > y = 1, y obtenemos el mismo punto p1(2, 1, $\frac{\sqrt{23}}{2}$)

Un vector director de la tangente es

V = (x'(p), y'(p), z'(p))

Vamos a obtener z'(t)

$9x^2 + 16y^2 + 16z^2 = 144$ -- > $z = \frac{\pm\sqrt{144-9x^2-16y^2}}{4}$, tomo

$z = \frac{\sqrt{144-9x^2-16y^2}}{4}$; lo expreso en función de t

$9t^2 + 16.(t-1)^2 = 9t^2 + 16.(t^2-2t+1) = 25t^2 -32t + 16$

$z = \frac{\sqrt{128-25t^2+32t}}{4}$ -- > $z'(t) = \frac{-50t+32}{8.\sqrt{128-25t^2+32t}} = \frac{-25t+16}{4.\sqrt{128-25t^2+32t}}$

El punto p1(2, 1, $\frac{\sqrt{23}}{2}$) corresponde a t = 2, y por tanto

$$\begin{cases} x'(2) = 1 \\ y'(2) = 1 \\ z'(2) = \dfrac{-50+16}{4.\sqrt{128-100+62}} = \dfrac{-34}{4.\sqrt{90}} = \dfrac{-34}{4.3.\sqrt{10}} = \dfrac{-17}{6.\sqrt{10}} \end{cases}$$

En el punto p1(2, 1, $\frac{\sqrt{23}}{2}$) tenemos el vector director de la tangente

V = (1, 1, $\frac{-17}{6.\sqrt{10}}$), y la ecuación de la tangente

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{\sqrt{23}}{2}}{\frac{-17}{6.\sqrt{10}}} \text{ -- > } \begin{cases} x-2 = y-1 \\ z - \frac{\sqrt{23}}{2} = \frac{-17}{6.\sqrt{10}} . (x-2) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t-1 \\ z = \frac{+\sqrt{128-25t^2+32t}}{4} \end{cases} \text{, t recorriendo D tal que}$$

$$128 - 25t^2 + 32t \geq 0$$

NOTA: Con los ejemplos anteriores quedan cumplidos nuestros objetivos, tanto si tenemos expresión explícita como si es implícita

----

APÉNDICE 2: **E**studio de las Cuádricas.
Aplicación al Análisis de los extremos locales.

En el Vol.12 estudiamos en más profundidad el Tema de las Cuádricas, después de introducir conceptos como Geometría proyectiva, donde se introducen las ‘Coordenadas homogéneas’.

No es conveniente introducirlo en este Vol.8, por lo que aquí nos limitamos a aplicar algunos de los resultados allí obtenidos.

NOTA: En este momento el alumno debe consultar en el Vol.10 la Teoría de Matrices y Determinantes.

A) Estudio de las Cuádricas

Definición:

Llamamos ‘forma cuadrática’ a una expresión de la forma

$$F(x,y,z) = a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + 2a12xy + 2a13xz + 2a23yz + a44 \qquad (1)$$

Si igualamos a cero

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2)$$

esta es la ecuación de una superficie en el espacio, y la llamamos ‘Cuádrica’.

La expresión (2) de la Cuádrica podemos representarla matricialmente así

$$(x \;\; y \;\; z \;\; 1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ 0 & 0 & 0 & a44 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2')$$

Simbólicamente sería

$$X.A.X^t = 0, \qquad (3)$$

donde X es la matriz fila, X^t es la matriz columna traspuesta de X, y A es la matriz de los coeficientes.

Recordamos cómo se hace este producto de tres matrices:

X.A =

(a11x+a21y+a31z+0, a12x+a22y+a32z+0, a13x+a23y+a33z+0, a44).

$$.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (a11x^2+a21yx+a31zx+0) + (a12xy+a22y^2+a32zy+0) +$$

$$+ (a13xz+a23yz+a33z^2+0) + (\; a44 \;) =$$

$$= a11x^2 + a22y^2 + a33z^2 + 2a12xy + 2a13xz + 2a23yz + a44$$

Calculamos los menores de A de orden 1, 2, 3 y 4, que son los siguientes determinantes de signados por H_k, k = 1, 2, 3, 4

$$H_1 = a11 \,, \qquad H_2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}, \quad H_4 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 & 0 \\ a21 & a22 & a23 & 0 \\ a31 & a32 & a33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a44 \end{vmatrix} = a44.H_3$$

Se han demostrado que las siguientes afirmaciones:

a) $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, $H_3 > 0$ -- > La forma cuadrática es definida positiva.

Al analizar la diferencial dz(p) en un punto P(a, b, f(a,b)) de una superficie z = f(x, y), lo anterior significa que en este punto tiene un 'mínimo local':

Existe un entorno D(P) tal que

$$z = f(x, y) > f(a, b)$$

siempre que (x,y) esté en D(P)

b) $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0$ -- > La forma cuadrática es Definida negativa.

En este caso significa que en P tiene un 'máximo local':

Existe un entorno D(P) tal que

$$z = f(x,y) < f(a,b)$$

siempre que (x, y) esté en D(P).

En otros casos es 'Semidefinida ó Indefinida, lo cual significa que no existe máximo ni mínimo.

(posible punto de ensilladura).

B) Aplicación al análisis de los extremos locales de f(x, y):

En el caso que nos ocupa, al estudiar los extremos locales de z = f(x, y), que define una superficie S, cuando tenemos

$dz(p) = f_{xx}(p).h^2 + f_{yy}(p).k^2 + 2.f_{xy}(p).h.k$

haciendo: $a11 = \frac{f_{xx}(p)}{dz(p)}$, $a22 = \frac{f_{yy}(p)}{dz(p)}$, $a12 = \frac{f_{xy}(p)}{dz(p)}$, escribimos

$$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy - 1 = 0$$

Matricialmente (tener presente que a21 = a12)

$$(x, y, -1).\begin{pmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos los Hessianos

$$H1 = a11\ , \quad H2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}\ , \quad H3 = \begin{vmatrix} a11 & a12 & 0 \\ a21 & a22 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -H2$$

Si H1 > 0, H2 > 0, H3 > 0 --> Definida positiva ≡ Mínimo local

Si H1 < 0, H2 > 0, H3 < 0 --> Definida negativa ≡ Máximo local

En la práctica es suficiente tomar la expresión

$$a11x^2 + a22y^2 + 2.a12xy$$

y en el Hessiano $H2 = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$

Esta es la razón por la que en estos casos el criterio consiste en:

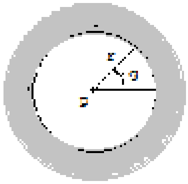
H2 > 0 --> Tiene un extremo estricto

a11 > 0 --> Mínimo local
a11 < 0 --> Máximo local

H2 < 0 --> Indefinida, o punto de ensilladura

Justificación:

En lo que sigue tendremos en cuenta el desarrollo de z = f(x, y) en Serie de Taylor (Puntos 4.2, 4.3 del Tema 4)



Hacemos el cambio de variable a polares:

$$\begin{cases} h = r.\cos(g) \\ k = r.sen(g) \end{cases}, \quad r = \sqrt{h^2 + k^2}$$

con lo cual la expresión

$$f''_{xx}(p).h^2 + 2.f''_{xy}(p).h.k + f''_{yy}(p).k^2$$

de los términos 'dominantes' en el desarrollo de Taylor queda así

$$\Delta z(p) = \frac{1}{2}.r^2 .$$
$$.\left[f''_{xx}(p).\cos^2(g) + \right.$$
$$\left. +2.f''_{xy}(p).\cos(g).sen(g) + f''_{yy}(p).sen^2(g)\right] + o(r^2)$$

Ahora podemos afirmar que, para r suficientemente pequeño, el signo de $\Delta z(q)$ es el mismo que el de la forma cuadrática en la variable-ángulo g.

Tengo así la función

$$F(g) = f''_{xx}(p).\cos^2(g) + 2.f''_{xy}(p).\cos(g).sen(g) + f''_{yy}(p).sen^2(g) \quad (*)$$

NOTA: Importa ahora lo siguiente:

Dada la forma cuadrática

$$F(x, y) = a11x^2 + 2.a12xy + a22y^2 \qquad (**)$$

su expresión matricial es

$$(x, y).\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad |A| = a11.a22 - a12^2$$

Puedo modificar la expresión (**) así:

$$F(x, y) = \frac{1}{a11}.[a11^2.x^2 + 2.a11.a12.xy + a11.a22.y^2] =$$

$$= \frac{1}{a11}.[a11^2.x^2 + 2.a11.a12.xy + a12^2.y^2 - a12^2.y^2 + $$
$$+ a11.a22.y^2] =$$
$$= \frac{1}{a11}.[(a11.x + a12.y)^2 + (a11.a22 - a12^2).y^2] =$$
$$= \frac{1}{a11}.[(a11.x + a12.y)^2 + |A|.y^2]$$

Aplicando ésto a la forma F(g) dada en (*), la anterior podemos expresarla así:

$$F(g) = \frac{1}{f_{xx}}.\left[\left(f_{xx}.\cos(g) + f_{xy}.sen(g)\right)^2 + H.sen^2(g)\right]$$

Debemos hacer notar que esta expresión no se anula para ningún valor de g ya que para ningún valor g se anulan simultáneamente cos(g) y sen(g).

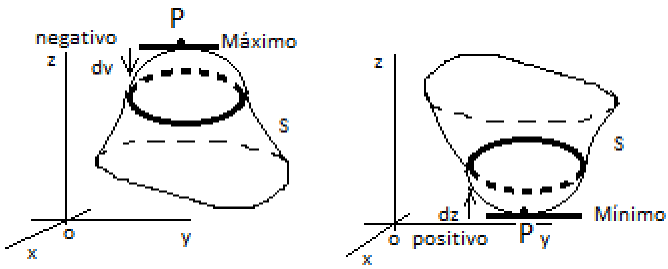
Entonces, el signo de F(g) depende sólo del signo de H y de f_{xx} .

Conclusión: (Criterios)

Si H > 0: Forma 'definida' (punto elíptico)

$$\begin{cases} f_{xx}(p) > 0 \rightarrow mínimo \\ f_{xx}(p) < 0 \rightarrow máximo \end{cases}$$

Si H < 0 -- > Forma 'indefinida' (punto 'ensilladura' ó hiperbólico)



NOTA:
La función F(g) es función continua de g, y su valor absoluto /F(g)/ también lo es. Por tanto esta última tiene un mínimo absoluto m > 0.

Tomando r suficientemente pequeño para que

$$|o(r^2)| < \frac{1}{4} . m. r^2 ,$$

en estas condiciones podemos asegurar que $\Delta z(p)$ tiene el mismo signo que F(g).

APÉNDICE 3: El Resto de Lagrange

Resto de Lagrange:

Construyo la función en la variable y

F(y) = f(x) –f(y)- $\frac{f'(y)}{1!}.(x-y)-\frac{f''(y)}{2!}.(x-y)^2-\cdots.-$

- $\frac{f^{(n}(y)}{n!}.(x-y)^n-\frac{f^{(n+1}(y)}{(n+1)!}.(x-y)^{n+1}$

(1)

Observa que F(x) = 0

Derivamos en los dos miembros de (1):

F'(y) = -f'(y) - $\frac{f''(y)}{1!}.(x-y)+\frac{f'(y)}{1!}-\frac{f'''(y)}{2!}.(x-y)^2+$

$+2.\frac{f''(y)}{2!}.(x-y)-\cdots.-\frac{f^{(n+1}(y)}{n!}.(x-y)^n+$

$+n.\frac{f^{(n}(y)}{n!}.(x-y)^{n-1}-\frac{f^{(n+2}(y)}{(n+1)!}.(x-y)^{n+1}+$

$+(n+1).\frac{f^{(n+1}(y)}{(n+1)!}.(x-y)^n$

Reajustando términos queda

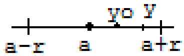
F'(y) = - $\frac{f^{(n+2}(y)}{(n+1)!}.(x-y)^{n+1}$, o bien

F'(y) = $-\frac{f^{(n+1}(y)}{n!}.(x-y)^n$

Construyo ahora otra función en la variable y, así

G(y) = F(y) – $(\frac{x-y}{x-a})^{n+1}.F(a)$

Tanto F(y) como G(y) son continuas en un entorno D(a, r) de x = a



Además en el punto y = x se cumple:

$$G(x) = F(x) - \left(\frac{x-x}{x-a}\right)^{n+1} . F(a) = F(x) = 0$$

y en y = a tengo

$$G(a) = F(a) - \left(\frac{x-a}{x-a}\right)^{n+1} . F(a) = 0$$

y por tanto la función G(y) toma el mismo valor en los dos puntos y = x, y = a (dentro del entorno D(a,r).

Por lo tanto, por el Teorema de Rolle existe un valor yo dentro de D(a, r) tal que G’(yo) = 0.

Derivamos G(y)

$$G'(y) = F'(y) + (n+1).\left(\frac{x-y}{x-a}\right)^{n} . \frac{1}{x-a} . F(a)$$

$$= F'(y) + (n+1).\frac{(x-y)^n}{(x-a)^{n+1}} . F(a) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1}(y)}{n!} . (x-y)^n + (n+1).\frac{(x-y)^n}{(x-a)^{n+1}} . F(a)$$

y ahora

$$G'(yo) = 0 \text{ -- > } \frac{f^{(n+1}(yo)}{n!} . (x-yo)^n =$$

$$= (n+1).\frac{(x-yo)^n}{(x-a)^{n+1}} . F(a) \text{ -- > } \frac{f^{(n+1}(yo)}{n!} = \frac{n+1}{(x-a)^{n+1}} . F(a)$$

de donde: $F(a) = \frac{f^{(n+1}(yo)}{(n+1)!} . (x-a)^{n+1}$

Por otro lado, por definición de F(y), para y = a tengo

Resto = F(a) = f(x) –f(a) –

$$- \frac{f'(a)}{1!} \, . \, (x-a) - \frac{f''(a)}{2!} \, . \, (x-a)^2 - \cdots . - \frac{f^{(n}(a)}{n!} \, . \, (x-a)^n$$

Conclusión:

$$\text{Resto} = \frac{f^{(n+1}(yo)}{(n+1)!} \, . \, (x-a)^{n+1}$$

NOTA: El valor yo suele expresarse así

$$yo = a + \theta . r, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

que por comodidad tipográfica podemos expresar así

$$yo = a + t . r, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

APÉNDICE 4:

Listado de derivadas inmediatas que el alumno debe retener en su memoria.

El alumno comprobará aquellas que considere necesario.

f(x)= tan(x) --> f’(x)= $\sec^2(x)$

f(x)= cotan(x) --> f’(x)= $-\operatorname{cosec}^2(x)$

f(x)= sec(x) --> f’(x)= sec(x).tan(x)

f(x)= cosec(x) --> f’(x)= -cosec(x).cotan(x)

f(x)= arcSen(x) --> f’(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x)= arcCos(x) --> f’(x)= $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x)= arcTan(x) --> f’(x)= $\frac{1}{1+x^2}$

f(x)= arcCotan(x) --> f’(x)= $\frac{-1}{1+x^2}$

f(x)= arcSec(x) --> f’(x)= $\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

f(x)= arcCosec(x) --> f’(x)= $\frac{-1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

f(x)= g(u), u= u(x) --> f’(x)= g’(u).u’(x)

$f(x)= e^{g(x)}$ --> $f'(x)= e^{g(x)}.g'(x)$

$f(x)= a^{g(x)}$ --> $f'(x)= a^{g(x)}.g'(x).\ln(a)$

$f(x)= \ln(g(x))$ --> $f'(x)= \frac{g'(x)}{g(x)}$

NOTA: $y = a^x$ <--> $x = \log_a(y$

$\ln(y) = x.\ln(a) = \log_a(y).\ln(a)$

Por tanto: $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}.\ln(x)$

$f(x) = \log_a(g(x))$ --> $f'(x)= \frac{1}{\ln(a)}.\frac{g'(x)}{g(x)}$

PROBLEMAS Resueltos o semi-Resueltos

De Derivadas:

1.- Calcula la derivada de las siguientes:

$f(x) = \ln(x^2+1) \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f(x) = \ln^3(3x) \rightarrow f'(x) = 3.\ln^2(3x).\frac{3}{3x}$

$f(x) = \log_a(3x^2+5) \rightarrow f'(x)= \frac{6x}{3x^2+5}.\ln(a)$

$f(x) = x^2.\ln(3x+5) \rightarrow f'(x) =$

$= 2x.\ln(3x+5)+x^2.\frac{3}{3x+5}$

2.- Deriva las siguientes:

$f(x) = e^{4x^2+3x+5} \rightarrow f'(x) = e^{4x^2+3x+5}.(8x+3)$

$f(x) = a^{x^2+x+2} \rightarrow f'(x) =$

$= a^{x^2+x+2}.(2x+1).\ln(a)$

$f(x) = x^3.2^x.e^x \rightarrow f'(x) = 3x^2.2^x.e^x +$

$+ (2^x.\ln(2)).x^3.e^x + e^x.x^3.2^x$

$f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x).g'(x)-g(x).h'(x)}{h(x)^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

3.- Calcula la derivada de las siguientes:

$f(x) = x^{x+1} \rightarrow \ln(f(x)) = (x+1).\ln(x) \dashrightarrow$

$\frac{f\prime(x)}{f(x)} =$ 1.ln(x) + (x+1).$\frac{1}{x}$ -- > f’(x) = x^x.[x.ln(x) + (x+1)]

f(x) = $(x^5)^{x^2+1}$ -- > $\frac{f\prime(x)}{f(x)}$ = (2x).ln(x^5)+ (x^2+1).$\frac{5x^4}{x^5}$

f’(x) = $(x^5)^{x^2}$.[2x^2.ln(x^5) +5.(x^2+1)]

4.- Deriva las siguientes funciones:

f(x) = cos(2x+1) -> f’(x) = -sen(2x+1).2

f(x) = ln(sen(x)) -> f’(x) = $\frac{\cos(x)}{sen(x)}$

f(x) = tan(x^2+x+1) -> f’(x) =

= sec(x^2+x+1).(2x+1)

f(x) = arcSen(2x) -> f’(x) = $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

f(x) = arcCos(x^2+1)-> f’(x) = $\frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}$

(Pero téngase en cuenta que Im(cos(x))= [-1,1], y por tanto arcCos(x^2+1) solo está definida en x = 0)

f(x) = arcTan($\sqrt{x}$) -> f’(x) = $\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2.\sqrt{x}}$

f(x) = arcTan(3x^2) -> f’(x) = $\frac{6x}{1+9.x^4}$

f(x) = $\sqrt{\frac{1-sen(x)}{1+\text{sen}(x)}}$ -> f’(x) =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-sen(x)}{1+sen(x)}}} \cdot \frac{(1+sen(x)).(-\cos(x))-(1-sen(x)).\cos(x)}{(1+sen(x))^2} =$$

$= \frac{\sqrt{1+sen(x)}}{2.\sqrt{1-sen(x)}} \cdot \frac{-2.\cos(x)}{(1+sen(x))^2}$

f(x) = arcSec(x^2) -> f'(x) = $\frac{2x}{x^2.\sqrt{x^4-1}} = \ldots$

f(x) = $x^{sen(3x)}$ -> ln(f(x)) = sen(3x).ln(x),

$\frac{f\prime(x)}{f(x)} = 3.\cos(3x).\ln(x) + sen(3x).\frac{1}{x}$,

f'(x) = $\frac{x^{sen(3x)}}{x}$ $.[3.x.\cos(3x).\ln(x) + sen(3x)]$

5.- Localiza el punto Q de la curva

f(x) = $6x^2$ + 9x-2, en el cual la recta tangente a ella es paralela al eje ox.

Sol.: f'(x) = 12x +9, f'(a) = 12.a + 9, y si ha de ser paralela a ox tendrá pendiente m = 0.

12.a + 9 = 0 -> a = -3/4

Sustituyendo tengo f(-3/4) = …..

6.- Estudia la monotonía de las siguientes:

(Derivas y obtienes los puntos donde f'(x))

f) f(x) = $6x^3$ -8x
g) f(x) = (x-2).(x+1).(x+3)
h) f(x) = sen(x) – x

i) $f(x) = \cos(x) + x$
j) $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$

Res.: a) Es creciente en los intervalos
$(-\infty, \frac{-2}{3}), (\frac{2}{3}, +\infty)$

b) Creciente en: $(-\infty, \frac{-2-\sqrt{19}}{3})$, $(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}, +\infty)$
Decreciente en: $(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}, \frac{-2+\sqrt{19}}{3})$

a) $f'(x) = \cos(x) - 1$; puesto que

$\cos(x)-1 <= 0$ para todo x, la gráfica es decreciente siempre.

b) $f'(x) = -\text{sen}(x) + 1$; puesto que $-\text{sen}(x)+ 1 >= 0$, es creciente siempre.

e) Creciente en: $(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{3})$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}, +\infty)$
Decreciente en: $(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$

7.- Calcula los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3x$
b) $f(x) = (x^2-1).(x^2+3)$
c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 4$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
e) $f(x) = x.\ln(x)$

Res.: a) Mínimo P(-3/2, -9/4)

b) Mínimo P(0,-3)
c) Mínimo P(-1,-4), Máximo Q(5,104)
d) No tiene extremos
e) Mínimo P($e^{-1}, -e^{-1}$)

8.- Determina los valores de a, b, c, d, de modo que la curva

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo en M(0,4) y un mínimo en m(2,0).

Res.: a = 1, b = -3, c = 0, d = 4

9.- Determina los valores de b, c, d, de modo que la curva

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo cuando x = 4, un mínimo cuando x=0 y pase por P(1,1).

Res.: b = 6, c = 0, d = -6

De Problemas: Gráficas y optimización

10.- ¿Qué dimensiones debe tener una finca rectangular de 3600 m^2 para cercarlo mediante una valla de longitud mínima.

Res.: Debe ser cuadrado de lado 60 m

11.- Una finca situada junto al camino debe ser vallada de modo que: El lado junto al camino cuesta 80 eur/m, y el resto a 10 eur/m. Determina qué dimensiones tiene aquella de área máxima que podemos cercar con 28800 euros.

Res.: Dimensiones: 160 m por 720 m

12.- Necesito inscribir un rectángulo en una circunferencia de radio R = 12 m. ¿Qué medidas tiene aquel de área máxima?

Res.: Cuadrado de lado l = $12\sqrt{2}$

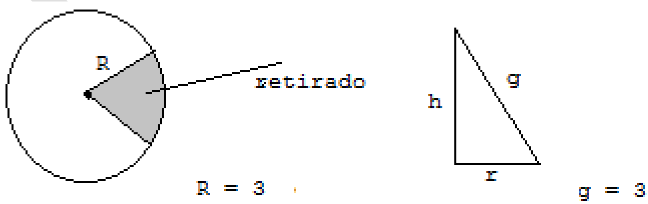
13.- Necesito inscribir un triángulo isósceles en una circunferencia de radio R = 12 m. ¿Qué medidas tiene aquel de área máxima?

Res.: Equilátero de lado l = $12\sqrt{3}$

14.- Una zona ajardinada tiene forma de sector circular. Su perímetro es P = 2.r + l, donde l es la longitud del arco. Sabemos que P = 20 m. ¿Para qué valor del radio r la superficie es máximo? . Después calcula el ángulo.

Res.: Radio r = 5 m. Ángulo g = 2 rad.

15.- Nos disponemos a construir una boya formada por dos conos (rectos) soldados por su base. Cada cono ha de ser construido tomando dos placas metálicas circulares de radio R = 3 m. Calcula las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo (Calcula: Radio de la base y la altura h)



$$V = \frac{1}{3}.(\pi.r^2).h = \frac{1}{3}.(\pi.r^2).\sqrt{9-r^2}$$

Res.: r = $\sqrt{6}$, h = $\sqrt{3}$

16.- Un pliego de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de ser de 2 cm, y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener el citado pliego para que el gasto de papel sea mínimo?

Res.: Dim. : 5 cms por 10 cms

17.- Determina los intervalos de convexidad y concavidad de las siguientes:

a) $f(x) = x^2-6x+8$

b) $f(x) = x^3 -3x^2-2x+5$

c) $f(x) = sen(x)$ en $[0, 2\pi]$

d) $f(x) = cos(x)$ en $[0, 2\pi]$

e) $f(x) = e^x$

f) $f(x) = ln(x)$

Res.: CRITERIO: Las gráficas son observadas desde el punto más bajo del eje oy.

a) Convexa en $(-\infty , +\infty)$, vista desde abajo

b) Convexa en: $(1, +\infty)$; cóncava en: $(-\infty, 1)$

c) Cóncava en: $(0, \pi)$; convexa en: $(\pi, 2\pi)$

d) Cóncava en:$(0, \frac{\pi}{2})$, y $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; convexa en:$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

e) Convexa en: $(-\infty , +\infty)$

f) Cóncava en: $(0, +\infty)$

18.- Determina los puntos de inflexión de las siguientes, cuando los tenga:

a) $f(x) = x^2-6x+8$

b) $f(x) = x^3 -3x^2-2x+5$, $f(x) = x^3-2x^2+4$

c) $f(x) = sen(x)$ en $[0, 2\pi]$

d) $f(x) = cos(x)$ en $[0, 2\pi]$

e) $f(x) = e^x$
f) $f(x) = \ln(x)$

Res.: a) No tiene; b) Punto P(1,1);
Punto $Q(\frac{2}{3}, \frac{92}{27})$; c) Punto $P(\pi, 0)$;
d) Puntos $P(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; e) No tiene; f) No tiene

De la Diferencial:

19.- Sea $f(x) = x^3 - 2x^5 + 5$. Calcula:
a) El valor real de f(1,0003)
b) Calcula f(1,0003) aplicando la diferencial

Sol.: a) f(1,0003) = ….. = 3,9979

a) Por la diferencial:

$f(1{,}0003) \cong f(1) + df(1; 0{,}0003) = (*)$
$f(1) = 4$

$df(x0; dx) = f'(x0).dx = (3x0^2 - 10x0^4).dx$

$df(1; 0{,}0003) = (-7).0{,}0003 = -0{,}0021$

(*) = 4 -0,0021 = 3,9979 , y vemos que las 4 primeras cifras decimales coinciden.

De las Cónicas:

1.- Halla la ecuación de las tangentes a la
Elipse

$12x^2 + 36y^2 - 432 = 0$ que pasan por P(3,-3)

Sol.: El haz de rectas con vértice en P tiene ecuación:
$(y+3) = m.(x-3)$

Puntos de corte (tangencia): $\begin{cases} y = mx - 3(m+1) \\ 3x^2 + 9y^2 - 108 = 0 \end{cases}$ -- >

$3x^2 + 9.(mx-3(m+1))^2 - 108 = 0,$

$3x^2 + 9.[m^2x^2 + 9.(m^2+2m+1) - 6.m.(m+1)x] - 108 = 0,$

$(3+9m^2).x^2 - 54.m.(m+1).x + [81.(m^2+2m+1) - 108] = 0,$

(Se resolverá utilizando la derivación)

2.- Determina las ecuaciones de las tangentes y las normales a la Hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$ en el punto de abscisa x = 5.

Sol.: (Para el alumno)

3.- Halla la ecuación de la tangente y de la normal a la parábola:
$y^2 = 2px$, en el punto P(9, 6)

Sol.: (Para el alumno)

4.- Determina el valor de la tangente del ángulo que forman las rectas tangentes a la Elipse:

$3x^2 + 5y^2 = 8$, y la parábola: $y^2 = x$, en el punto común situado en el cuarto cuadrante.

Sol.: (Para el alumno)

5.- Determina la ecuación de la parábola

$y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por P(1, 3), y es tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante.

Sol.: Bisectriz: $y = x$, $m = 1$

Derivando: $y' = 2ax + b$, y ha de cumplirse que $y'(0) = 1$, y por tanto

$b = 1$

Si pasa por P: $3 = a + 1 + c$

Además del enunciado se deduce que pasa por (0,0):

$0 = c$, por tanto: $a = 2$

Tengo: $y = 2x^2 +x$

6.- Dada la parábola $y = -x^2 +5x -4$, calcula el área del triángulo limitado por los ejes ox, oy y la tangente a la parábola en el punto P(3,.)

Sol.: El punto P es P(3,2);

Derivando: $y' = -2x +5$, $m = y'(3) = -1$

Recta tangente: $(y-2) = -(x-3)$, $y = -x +5$

Corte con los ejes: Con ox: $y = 0 \to x = 5$, A(5,0)

Con oy: $x = 0 \to y = 5$, B(0,5)

Área = $1/2.5.5 = \frac{25}{2}$

ACTIVIDADES: Sobre Desarrollo de Taylor

1.- a) Desarrolla $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en potencias de (x-2)
b) Utilizando este desarrollo calcula el valor P(3)

Sol.: a) El desarrollo lo hacemos en a = 2

$P(x) = 11 + 7.(x-2) + 4.(x-2)^2 + (x-2)^3$

c) P(3) = 11+7.1 + 4.1 + 1 = 23

Valor de P(3): 27 -18 + 9 + 5 = 23

2.- Desarrolla e^x en potencias de (x+1), hasta el término de grado 3

Res.: Observa que el desarrollo lo realizamos para un entorno de a = -1.

$$e^x = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}.(x+1) + \frac{1}{2!.e}.(x+1)^2 + \frac{1}{3!.e}.(x+1)^3 + \frac{(x+1)^4}{4!}.e^t ,$$

donde $t = -1+\theta.(x+1), \quad 0 < \theta < 1$

3.- Desarrolla sen(x) en potencias de x, hasta el término que contiene x^5.

Res.: Lo realizamos para un entorno de a = 0

Derivadas sucesivas: cos(x), -sen(x), -cos(x), sen(x), cos(x), ….

$$sen(x) = sen(a) + \frac{\cos(a)}{1} - \frac{sen(a)}{2} - \frac{\cos(a)}{3!} + \frac{sen(a)}{4!} + \frac{\cos(a)}{5!} -..$$

Haciendo a = 0

$$sen(x) = 0 + x - \frac{1}{3!}.x^3 + \frac{1}{5!}.x^5 - \dots..$$

4.- Desarrolla cos(x) en potencias de (x- $\frac{pi}{2}$) , hasta x^5.

Res.: Lo hacemos para un entorno de a = $\frac{pi}{2}$

Derivadas sucesivas:

-sen(x), -cos(x), sen(x), cos(x), -sen(x), -cos(x), ….

$$\cos(x) = \cos(a) - \frac{sen(a)}{1}.\left(x-\frac{pi}{2}\right) - \frac{\cos(a)}{2}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{sen(a)}{3!}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^3 + \frac{\cos(a)}{4!}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^4 - \frac{sen(a)}{5!}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^5 - \cdots$$

Teniendo en cuenta que a = $\frac{pi}{2}$

$$\cos(x) = 0 - \left(x-\frac{pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}.\left(x-\frac{pi}{2}\right)^5 - \cdots$$

5.- Desarrolla en serie de potencias de x

$$f(x) = \frac{3}{(x-1).(2x+1)}$$

Sol.: Descompongo como suma

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x+1}$$

Desarrollo cada una y las sumo.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + \cdots$, que puedo obtenerla haciendo la división

1 : (1-x)

$\frac{2}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \cdots$, que también puedo obtenerla haciendo la división 1 : (1+2x)

6.- Calcula una aproximación de $\frac{pi}{4}$ haciendo el desarrollo de arcTan(x) en a = 0 hasta los cinco primeros términos, y haciendo después x = 1. Determina una cota del error.

Sol.: Hacer x = 1 tiene sentido porque

argTan(1) = $\frac{pi}{4}$

arcTan(x) = x - $\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$

Calculo el miembro derecha haciendo x = 1

1 - $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} =$ 0,8349206

La calculadora nos da: $\frac{pi}{4} = 0{,}7853981$

error: 0,04952 < $\frac{1}{20}$ = 5 %

7.- Calcula el número $\frac{pi}{6}$ con exactitud de 0,001, utilizando el desarrollo de arcSen(x)

Sol.:

arcSen(x) = x +$\frac{1}{2} . \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} . \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{x^7}{7} + \cdots$

8.- ¿Cuántos términos debo tomar de la serie

cos(x) = 1 - $\frac{x^2}{2!} + \cdots$ ..

para aproximar el valor cos(18º) con exactitud de 0,001?

Sol.: cos(x) = 1 - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$$18º \text{ --> } 18.\frac{pi}{180} = 0{,}31415927$$

La calculadora presenta el resultado:

$$\cos(0{,}31415927) = 0{,}9510565$$

Sustituyendo en el miembro derecha obtengo

$$1 - \frac{0{,}31415927^2}{2} = 0{,}950652$$

$$1 - \frac{0{,}31415927^2}{2} + \frac{0{,}31415927^4}{2.3.4} = 0{,}950652 + 0{,}00040587087 =$$

$$= 0{,}9510578$$

error: 0,0000013708 < 0,00001

9.- ¿Cuántos términos debo tomar de la serie

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots..$$

para aproximar el valor sen(15º) con exactitud de 0,0001?

Sol.: sen(x) = x - $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots..$

15º -- > 0,2617993 rad.

La calculadora nos da: sen(0,2617993) = 0,2588189

Sustituimos en el miembro derecho

$$0{,}2617993 - \frac{0{,}2617993^3}{6} = 0{,}2588087$$

error: 0,0000102 < 0,0001

Pero añadimos otro término.

$$0{,}2617993 - \frac{0{,}2617993^3}{6} + \frac{0{,}2617993^5}{120} =$$

$$= 0{,}2588087 + 0{,}00001024852 = 0{,}2588189$$

error: 0,00000004852 < 0,0000001

NOTA: Cuando nos referimos al error debemos entender siempre en ‘valor absoluto’

10.- Reconstruir un polinomio p(x) de segundo grado sabiendo que

p(0) = 2, p’(0) = 6, p’’(0) = 6

Sol.: p(x) = ax^2 +bx +c

p’(x) = 2.ax + b, p’’(x) = 2.a

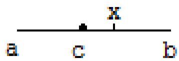
p(0) = 2 -- > c = 2

p’(0) = 6 -- > b = 6, p’’(0) = 6 -- > a = 3

$$p(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

11.- Sabemos que en el desarrollo de Taylor de f(x), en un entorno de x = c, el término complementario en la forma de Lagrange es

$$\text{Tn(n,x)} = \frac{f^{(n+1}(c+\theta.h)}{(n+1)!} \,.\, (x-c)^{n+1}, \quad h = x\text{-}c,\ 0 < \theta < 1$$



Supongamos que para un caso concreto con c = 1 tenemos, por ejemplo

$$\text{Tn(n,x)} = \frac{5.(1+\theta.h)}{(n+1)!} \,.\, (x-1)^{n+1},$$

Para x = 3, determinar el valor de n a partir del cual podemos garantizar que $T_n(n,3) < 0{,}0001$

Sol.: La importancia de este ejemplo reside en que muestra cómo hemos de proceder en el caso de que la incógnita forme parte del exponente de la expresión.

$$h = 3\text{-}1 = 2, \qquad \frac{5.(1+\theta.2)}{(n+1)!} \,.\, (3-1)^{n+1} < 0{,}0001,$$

$$5.(1+\theta.2)\,.\,2^{n+1} < (n+1)!\,.\,0{,}0001$$

Tomando $\theta = 1$

$$5.(1+\theta.2)\,.\,2^{n+1} < 5.(3)\,.\,2^{n+1} = 15.2^{n+1}$$

Impongo $15.2^{n+1} < (n+1)!\,.\,10^{-4}$, de donde

$$15.10^4.\,2^{n+1} < (n+1)!$$

Tomando logaritmos en base 10

log(15) + 4 + (n+1).log(2) < log((n+1)!)

1,1760913 + 4 + (n+1).0,30103 < log((n+1)!)

5,1760913 + 0,30103 < -0,30103.n + log((n+1)!)

5,4771213 < ln($\frac{(n+1)!}{2^n}$) -- > $\frac{(n+1)!}{2^n} > \ antiLog(5{,}4771213)$

$$\frac{(n+1)!}{2^n} > 300000{,}03$$

Necesariamente hemos de dar valores a n y probar:

n = 5 -- > 6! = 720

n = 8 -- > 9! = 362880,

n = 12 -- > 13! > 6227020800, $2^{12} = 4096$

$\frac{(n+1)!}{2^n} > \ 1520268{,}8$, que lo cumple con creces.

n = 11 -- > 12! > 479001600, $2^{11} = 2048$

$\frac{(n+1)!}{2^n} > \ 233887{,}5$, que no llega …

Conclusión: n = 12.

BIBLIOGRAFÍA

Elementos de Matemáticas
4ª Edición
Julio Rey Pasto y A. de Castro
S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)
Madrid 1967

Análisis Matemático, Volúmenes I, II, III
Octava Edición 1969
Autores: Julio Rey Pastor
Pedro Pi Calleja
César A. Castro
Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires (Argentina)

Cálculo Numérico Fundamental
Autor: B.P. Demidovich
I.A. Maron
Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid

Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático
Autor: B. Demidovich y Otros
Trducido: Antonio Molina García (Ingeniero)
Editorial: Paraninfo, Madrid, 1969

Análisis Matemático
Autor: Tom M. Apostol
Versión española: Francisco Vélez Cantarell
Editorial: Reverte, S.A., 1960

Álgebra y Geometría Analítica

Autor: Francisco Granero Rodríguez
Edita: McGraw-Hill (Ediciones La Colina, S.A. (España))
Edición de 1985

La Sinfonía del Infinito
Autor: Norberto Cuesta Dutari
Ediciones Universidad de Salamanca, 1981

Cálculo Integral (Aplicado a la Física t Técnica)
Tomo I (Curso de Análisis Matemático para Ingenieros)
Autor: Pedro Puig Adam
Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, año: 1970

ANALYSE (Matemático)
COLLECTION U, M.P. Premiere annee et speciales, t.1
Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra
Edita: Librairie Armand Colin, París 1967
ANALYSE (Matemático)
COLLECTION U, M.P. Deuxieme annee et speciales, t.2
Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra
Edita: Librairie Armand Colin, París 1967

Geometría Diferencial Clásica
Autor: Dirk J. Struik
Traducción: L. Bravo Gala
Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1966

Cálculo Diferencial
Autor: Henri Cartan
Traducción: Amadeo Guasch
Editorial Omega S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

Notas sobre geometría diferencial (Notes on differential geometry)
Autor: Noel j. hicks
Traducción: Francisco Pañella y otros
Editorial Hispano Europea, Barcelona (España), 1974

Cálculo Numérico Fundamental
Autor: B.P. Demidovich
I.A. Maron
Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid
Introducción a la Teoría Analítica de Números
(Introduction to Analytic Number Theory)
Autor: Tom M. Apostol
Traducción: José Plá Carrera
Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1980

Topología
Autor: E.M. Patterson
Traducción: Lino Álvarez Valdés y Fernando Vicente
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1961

Topología general y algebraica
Autor: Wolfgang Franz
Traducido por: Juan Ochoa Mélida
Selecciones Científicas, Madrid, año: 1968

NOTACIÓN y Nomenclatura:

Símbolo	Significado
*	Producto
.	Producto
^	Potencia
sqr(a)	Raíz cuadrada
rad(a)	Raíz cuadrada
rad(a;n)	Radical con índice n
rad(a;n/m)	Radical con índice n/m

∈ significa ‘pertenece a’

∞ infinito

exp(x) Exponencial: exp(x) = e^x

exp(x;a) Exponencial de base a>0:

exp(x;a) = a^x

ln(x) Logaritmo neperiano:

y = ln(x) <--> x = e^y

log(x;a) Logaritmo base a>0:

y = log(x;a) <--> x = a^y

≅ aproximado

Δ incremento $\qquad$ ∇ siguiente

< menor que, > mayor que, Ej.: $x < y$, $x > y$

Valores:

$\pi = 3{,}1415927...$ (número pi, en radianes)
pi = 3,1415927... (número pi, en radianes)

e = 2,7182818... (número e, base de ln(x))

sen(0) = 0 $\qquad$ cos(0) = 1

sen(pi/6) = $\frac{1}{2}$ $\qquad$ cos(pi/6) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

sen(pi/3) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ cos(pi/3) = $\frac{1}{2}$

sen(pi/2) = 1, $\qquad$ cos(pi/2) = 0
