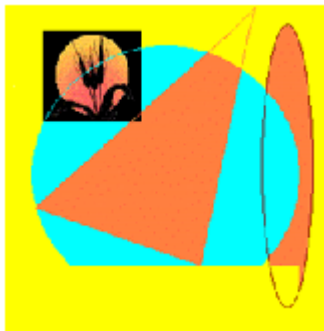


TODO MATEMÁTICAS

VOLUMEN 9

*Aplicación del Cálculo Integral
Integral Doble. Integral Triple*



PROMOCIÓN
NO VENTA

Alejo González Criado
Profesor Numerario de Matemáticas

Destinado a

El Fígaro autodidacta:

*Todo aquel que albergue algún
interés por las Matemáticas y disfrute con su
estudio.*

Obra completa:

*Formación básica,
Formación nivel medio
Formación nivel alto*

© *El Autor: Alejo González Criado*

Figuras y gráficos del autor

Edita: *El Autor*

Edición Marzo 2019

Editado en España

ISBN:

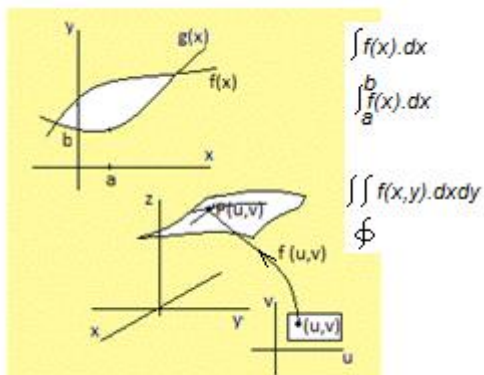
Depósito Legal:

Derechos reservados:

*Prohibida toda reproducción, por cualquier medio, sin
autorización del autor.*

VOLUMEN 9

Aplicación del Cálculo Integral



NO COPIAR

ÍNDICE

pág.

Tema 1 Ampliación de los Métodos de Integración:

- | | |
|----|--|
| 23 | 1.1.- Expresiones racionales: $R(g(x))$, donde $g(x)$ puede contener: Exponenciales, Trigonómicas, ... |
| 25 | 1.2.- Integración de expresiones irracionales:
Sus Tipos, Casos prácticos |
| 37 | 1.3.- Integral Elíptica:
Integral Elíptica de primera especie
Integral Elíptica de segunda especie |

Tema 2 Curvas en el Plano: Longitud de un arco

- | | |
|----|--|
| 53 | 2.1.- Curvas en cartesianas: $y = f(x)$ |
| 55 | 2.2.- Curva en paramétricas |
| 55 | 2.3.- Curva en coordenadas polares |
| 57 | 2.4.- Ejemplos: Aplicación a casos concretos
Parametrización de la Elipse |

Tema 3 Cálculo de Áreas en el Plano

- | | |
|----|---|
| 67 | 3.1.- Casuística en el cálculo de áreas |
| 70 | 3.2.- Ejemplos: Aplicación casos concretos: |

- Círculo, Segmento y Sector circulares
- Elipse
- Segmento y Sector circular
- Cálculo de un área en polares

Tema 4 Curvas en el Espacio: Longitud de un arco

- 79 4.1.- Longitud de un arco de curva
- 80 4.2.- Ejemplos: Aplicación casos concretos
- 89 4.3.- La Curva de Viviani

Tema 5 Superficies en el Espacio Integral doble. Cálculo de superficies

- 97 5.1.- Superficies en el Espacio
- 99 5.2.- Curvas sobre la superficie en un punto P
Rectas tangentes a la superficie en P
Plano tangente y Recta normal
- 106 5.3.- Integral doble
- 111 5.3.1.- Integral doble en cartesianas
- 111 5.3.2.- Cambio de variable en la integral doble
Ejemplos
- 120 5.4.- Cálculo de superficies
- 124 5.4.1.- En coordenadas cartesianas
- 124 5.4.2.- En coordenadas curvilíneas
- 125 5.4.3.- Resolución de casos prácticos interesantes

154 5.5.- Superficie y Volumen de un Cuerpo de revolución

5.5.1.- Estudio teórico

158 5.5.2.- Aplicación a casos concretos:

-La Esfera, Zona esférica, Casquete esférico

-Elipsoides

-Paraboloides

-Hiperboloide

-Otros

-La Bóveda de Viviani

Tema 6 Integral triple
Cálculo de Volúmenes

173 6.1.- Integral triple
Ejemplos resueltos

185 6.2.- Cálculo de Volumen mediante Integral triple

189 6.3.- Cálculo de Volumen mediante Integral doble

190 Ejemplos resueltos

Tema 7 Sólidos predefinidos de interés
Superficie y Volumen

197 7.1.- Sólidos predefinidos comunes. Cálculos

185 7.2.- Otros casos No tan comunes engendrados por

revolución de:

- La Astroide
- La Cicloide
- La Cardioide

209 Problemas resueltos o semi-resueltos

Tema 8 Integral Curvilínea
Integral de Superficie

219 8.1.- Integral curvilínea de Primer tipo
Ejemplos

224 8.2.- Integral curvilínea de Segundo tipo
Ejemplos

228 8.3.- Expresión Diferencial Exacta. Integración.
Ejemplos

233 8.4.- Fórmula de Riemann-Green
Área de un Recinto en el Plano
Ejemplos

243 8.5.- Integral de Superficie de Primer tipo
Ejemplos

249 8.6.- Integral de Superficie de Segundo tipo
Fórmula de Stokes
Ejemplos

266	8.7.- Fórmula de Ostrogradski-Gauss Ejemplos -----
279	APÉNDICE 1: Revisión sobre Métodos de Integración Prototipos
279	1.- Método: Integración por partes
280	2.- Método: Por Descomposición en fracciones simples
282	3.- Método: Funciones Trigonómicas: Prototipos
285	4.- Método: Funciones con radicales: Prototipos
287	5.- Método: Producto de dos Funciones básicas: Prototipos
290	6.- Método: Ejemplos No triviales para cambio de variable: Prototipos
291	APÉNDICE 2: Revisión sobre Integral Doble y Triple A) En coordenadas cartesianas B) En coordenadas curvilíneas
305	APÉNDICE 3: Complementos 1.- Construcción de la Elipse, su parametrización y su longitud. 2.- Coordenadas polares 3.- Coordenadas Cilíndricas 4.- Coordenadas Esféricas y coordenadas Geográficas 5.- Coordenadas Curvilíneas en el espacio

6.- Otra forma de obtener el valor de una Superficie.
La Bóveda de Viviani

321 APÉNDICE 4: Complementos

- 1.- Rectificación de una curva
- 2.- Cálculo de Superficies
- 3.- La Integral de Euler-Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx, \text{ y Otras}$$

PROBLEMAS resueltos o semi-resueltos:

339 -De Integral Indefinida

349 -De Integral Definida

355 LISTADO de Integrales Interesantes

369 LISTADO DE ACTIVIDADES semiresueltas

375 BIBLIOGRAFÍA

379 Notación y Nomenclatura. Valores

Tema 1

Ampliación de los Métodos de Integración

Integración de Expresiones Irracionales

Integrales Elíptica

NO COPIAR

1.1.- Expresiones racionales: $R(g(x))$, donde $g(x)$ puede contener exponencial a^x , trigonométrica $\sin(x)$, ...

NOTA: El alumno puede consultar el texto Cálculo Integral de P. Puig Adam. Véase Bibliografía.

A) Racionales en a^x

Cambio: $t = a^x \rightarrow x = \log_a(t) \rightarrow$

$$dx = \log_a(e) \cdot \frac{1}{t} \cdot dt$$

$$\int R(a^x) \cdot dx \rightarrow \log_a(e) \cdot \int \frac{R(t)}{t} \cdot dt$$

B) Racionales en $\sin(x)$ y $\cos(x)$

En este momento importa tener en cuenta que $\sin(x)$ y $\cos(x)$ se pueden expresar en función de $\tan(x/2)$, como sigue

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) = \frac{2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \\ &\quad (\text{divido por } \cos^2(x/2)) \\ &= \frac{2 \cdot \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \\ \cos(x) &= \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \\ &= \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior

$\int R(\sin(x), \cos(x)). dx \rightarrow \int R\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right). dx$, y por tanto la expresión dada es racionalizable mediante el cambio

$$t = \tan(x/2) \rightarrow \sin(x) = \frac{2.t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \dots = \frac{2.dt}{1+t^2}$$

C) Repaso-ampliación de trigonometría:

Sabemos que

$$\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$$

Sumándolas/Restándolas:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2.\sin(a).\cos(b)$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2.\cos(a).\cos(b)$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2.\sin(a).\sin(b)$$

Dada la integral

$\int \sin(ax). \sin(bx). dx$, tenemos en cuenta que

$$\sin(ax). \sin(bx) = \frac{-1}{2} \cdot [\cos((a+b).x) - \cos((a-b).x)]$$

Dada la integral

$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) \cdot dx$, tenemos en cuenta que

$$\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} \cdot [\sin((a + b) \cdot x) + \sin((a - b) \cdot x)]$$

Dada la integral

$\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) \cdot dx$, tenemos en cuenta que

$$\sin(ax) \cdot \cos(bx) = \frac{1}{2} \cdot [\cos((a + b) \cdot x) + \cos((a - b) \cdot x)]$$

1.2.- Integración de expresiones irracionales

Def.:

Llamamos Función irracional a aquella $f(x)$ en cuya expresión la variable x está afectada por algún radical irreducible.

Ejemplos:

$$f(x) = 5x^2 + 2\sqrt{3x^2}$$

no lo es ya que el radical que afecta a x puede hacerse desaparecer: $f(x) = 5x^2 + 2\sqrt{3} \cdot x$

En cambio $f(x) = 5x^2 + 2\sqrt{3x^3} = 5x^2 + 2\sqrt{3x} \cdot x$ es irracional.

TIPOS DE INTEGRALES de Funciones irracionales

TIPO 1

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots\right). dx, \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots \text{ racionales}$$

Para resolver este caso, en primer lugar hacemos lo siguiente:

Tomo $m = \text{mcm}(n, q, \dots)$, y hago el cambio

$$t = x^{\frac{1}{m}}, \quad x = t^m, \quad dx = m \cdot t^{m-1} \cdot dt,$$

y sustituyendo allí

queda $\int R(t^m, t^{m'}, t^{p'}, \dots) \cdot m \cdot t^{m-1} \cdot dt$, que no

contiene radicales (Es racional).

Ejemplo 1: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \cdot dx$; $m = \text{mcm}(2, 3) = 6$;

$$x = t^6, \quad dx = 6 \cdot t^5 \cdot dt$$

$$\frac{1}{t^3 + t^2} \cdot 6 \cdot t^5 \cdot dt = \frac{6 \cdot t^3}{1+t} \cdot dt = 6 \cdot \left(t^2 - t + 1 + \frac{-1}{1+t}\right) \cdot dt$$

$$I = 6 \cdot \int (t^2 - t + 1) \cdot dt - 6 \cdot \int \frac{1}{1+t} \cdot dt, \quad \text{que es inmediata.}$$

TIPO 2

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots\right) \cdot dx, \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots \text{ racionales}$$

Para resolver este caso, en primer lugar hacemos lo siguiente:

Tomo $m = \text{mcm}(n, q, \dots)$, y hago el cambio $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^m$

De aquí despejo x : $ax+b = t^m \cdot (cx+d)$,

$$x \cdot (a - c \cdot t^m) = d \cdot t^m - b \rightarrow x = \frac{d \cdot t^m - b}{a - c \cdot t^m} = g(t), \text{ que es racional};$$

$dx = g'(t) \cdot dt$, donde $g'(t)$ también es racional en t , y sustituyendo allí queda

$$I = \int R(g(t), t^{m_1}, t^{p_1}, \dots) \cdot g'(t) \cdot dt, \text{ que es racional.}$$

Ejemplo 1: $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} \cdot dx$; Hago: $x-1 = t^2$,

$$x = t^2+1, \quad dx = 2t \cdot dt, \quad x^3 = (t^2+1)^3 = t^6+1+3t^4+3t^2$$

Queda $I = \frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t} \cdot 2 \cdot t \cdot dt = 2 \cdot \int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1) \cdot dt$
que es inmediata.

Ejemplo 3: $I = \int \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}} \cdot dx$; $m = \text{mcm}(2,3) = 6$;

Hago $t^6 = (x+2)$, $x = t^6-2$, $dx = 6 \cdot t^5 \cdot dt$,

$$I = 6 \cdot \int \frac{t^6-2}{t^3-t^4} \cdot t^5 \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{t^6-2}{1-t} \cdot t^2 \cdot dt = \dots \dots,$$

y puede seguir el alumno.

TIPO 3 (Integral Binomia)

$I = \int x^m \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx$, donde m, n, p son racionales

(y por tanto pueden ser fracción), a y b constantes reales.

En primer lugar el cambio: $t = x^n$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} \cdot t^{\frac{1-n}{n}} \cdot dt$;

Entonces:

$$I = \frac{1}{n} \cdot \int t^{\frac{m}{n}} \cdot (a + b \cdot t)^p \cdot t^{\frac{1-n}{n}} \cdot dt = \frac{1}{n} \cdot \int t^q \cdot (a + b \cdot t)^p \cdot dt ,$$

$$\text{donde } q = \frac{m-n+1}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 ;$$

Analizamos ésta última:

-Si p es entero $\rightarrow \int R(t^q, t) \cdot dt$, que es del tipo 1 estudiado antes.

-Si p no es entero pero lo es q $\rightarrow$

$\int R(t, (a+b \cdot t)^p) \cdot dt$, que es uno del tipo 2 estudiado antes.

-Si ninguno de los anteriores pero p+q es entero $\rightarrow$

$$\int t^q \cdot (a + b \cdot t)^p \cdot dt = \int t^{q+p} \cdot \left(\frac{a+b \cdot t}{t}\right)^p \cdot dt ,$$

que es del tipo 2.

NOTA: Observa que q es entero si lo es $\frac{m+1}{n}$, y que $p + q$ es entero si lo es $p + \frac{m+1}{n}$.

Ejemplo 4: $I = \int x \cdot \sqrt{2 + \sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$

Observa que $I = \int x \cdot \left(2 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$
(en este caso: $m = 1, n = 2/3, p = 1/2$)

Hago $t = x^{\frac{2}{3}}, x = t^{\frac{3}{2}}, dx = \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot dt$;

Queda: $I = \frac{3}{2} \cdot \int t^{\frac{3}{2}} \cdot (2 + t)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot \int t^2 \cdot (2 + t)^{\frac{1}{2}} \cdot dt$;

Realizando otro cambio: $z^2 = (2+t), t = z^2 - 2,$
 $dt = 2zdz, I = 3 \cdot \int (z^2 - 2)^2 \cdot z^2 \cdot dz$

Nota 1: En este caso $q = 2$ es entero.

Nota 2: En $\int t^2 \cdot (2 + t)^{\frac{1}{2}} \cdot dt$ podemos también hacer el cambio $z = 2+t$, en lugar de $z^2 = t+2$.

En ese caso: $t = z-2, dt = dz, t^2 = z^2 - 4z + 4$;

$$I = \int (z^2 - 4z + 4) \cdot z^{\frac{1}{2}} \cdot dz = \int \left(z^{\frac{5}{2}} + 4z^{\frac{3}{2}} + 4z^{\frac{1}{2}} \right) \cdot dz$$

TIPO 4: Radicando de trinomio cuadrático

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) . dx$$

El simple cambio $t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ hace desaparecer este radical pero x queda bajo radical. No nos interesa. Según los caso a que da lugar la observación de sus coeficientes debemos realizar un cambio donde x quede liberada de radical.

A) Si $a > 0$: Hago $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} . x + t$; Elevando

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + t^2 + 2\sqrt{a} . x . t \rightarrow bx + c = t^2 + 2\sqrt{a} . x . t,$$

$$(b - 2\sqrt{a} . t) . x = t^2 \rightarrow x = \frac{t^2}{b + \sqrt{a} . t} = g(t), \text{ racional ;}$$

$$dx = g'(t) . dt, \text{ racional}$$

Sustituyendo allí: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} . g(t) + t$,

$$I = \int R(g(t), \sqrt{a} . g(t) + t) . g'(t) . dt ,$$

donde el argumento de R es racional en t, y $g'(t)$ también lo es, y por tanto lo es su producto.

B) Si $a < 0$ y $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t . x + \sqrt{c}$; Elevando

$$ax^2 + bx + c = t^2 . x^2 + c + 2\sqrt{c} . x . t \rightarrow$$

$$x . (ax + b) = x . (x . t^2 + 2\sqrt{c} . t) \rightarrow (a - t^2) . x = (2\sqrt{c} . t - b)$$

$$x = \frac{b - 2\sqrt{c} . t}{t^2 - a} = g(t), \text{ racional en t; } dx = g'(t) . dt, \text{ racional;}$$

Sustituyendo allí: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t . g(t) + \sqrt{c}$,

$$I = \int R(g(t), t, g(t) + \sqrt{c}).g'(t).dt, \text{ racional en } t.$$

C) Si $a < 0$ y $c < 0$: En este caso hacemos notar lo siguiente para el valor de la expresión $ax^2 + bx + c$:

$$x = 0 \rightarrow \text{Valor} = c < 0,$$

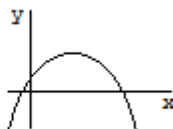
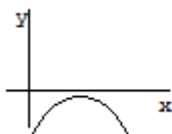
$$x \rightarrow \pm\infty \rightarrow \text{Valor que tiende a } -\infty, \text{ porque } a < 0$$

Esto nos dice que si el radicando $ax^2 + bx + c$ ha de tomar valores positivos en algún intervalo (a, b) , entonces

$ax^2 + bx + c = 0$ debe tener dos soluciones reales t_1, t_2 , y entonces

$ax^2 + bx + c = a.(x-t_1).(x-t_2)$, lo que permite salir airosos con un cambio de variable como

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t.(x - t_1) \quad (\text{Observa las figuras})$$



Para comprobar si esto es posible es suficiente calcular el discriminante: $D = b^2 - 4ac$

Ejemplos 5: $I = \int \frac{1}{(1+x).\sqrt{1+x+x^2}} . dx$

Hago: $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$, $x^2 + x + 1 = x^2 + t^2 + 2xt$;

$$x.(2t-1) = 1-t^2, \quad x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad dx = 2 \cdot \frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2} \cdot dt,$$

$$(1+x) = 1 + \frac{t^2-1}{1-2t} = \frac{t^2-2t}{1-2t}, \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t} + t = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

$$(1+x) \cdot \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-2t}{1-2t} \cdot \frac{-t^2+t-1}{1-2t} = \frac{t.(t-2).(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2};$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+x) \cdot \sqrt{1+x+x^2}} \cdot dx = \\ & = \frac{(1-2t)^2}{t.(t-2).(-t^2+t-1)} \cdot \frac{2.(-t^2+t-1)}{(1-2t)^2} \cdot dt = \\ & = \frac{2}{t.(t-2)} \cdot dt = (\text{descomponiendo en suma simples}) = \\ & = \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-2} \right) dt \quad \text{que se integra.} \end{aligned}$$

Ejemplo 6: $I = \int \sqrt{2ax - x^2} \cdot dx,$

Aquí $a < 0$, $c = 0$, $2ax - x^2 = x.(2a-x)$;

Hago: $\sqrt{2ax - x^2} = (x-0) \cdot t = x \cdot t, \rightarrow 2ax - x^2 = x^2 \cdot t^2,$

$$2.a - x = x \cdot t^2, \quad x = \frac{2a}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-4at}{(t^2+1)^2} \cdot dt,$$

$$\sqrt{2ax - x^2} \cdot dx = t \cdot \frac{2a}{t^2+1} \cdot \frac{-4at}{(t^2+1)^2} \cdot dt = \frac{-8a^2 \cdot t^2}{(t^2+1)^3} \cdot dt,$$

Al tratar la descomposición del denominador con el fin de obtener las sumas simples nos encontramos con soluciones imaginarias triples, y por tanto harto complicada.

TIPO 5: Integral del tipo I $= \int \frac{Q(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$

Llamo $p(x) = ax^2 + bx + c$;

Es importante el siguiente método para resolverla.

Si $gr(p) = m$, tomo el polinomio $h(x)$ indeterminado de grado $m-1$, e impongo la condición

$$[h(x) \cdot \sqrt{p(x)}]' = \frac{\frac{1}{2}h(x) \cdot p'(x) + h'(x) \cdot p(x)}{\sqrt{p(x)}}, \text{ después}$$

$$\frac{Q(x)}{\sqrt{p(x)}} - \frac{\frac{1}{2}h(x) \cdot p'(x) + h'(x) \cdot p(x)}{\sqrt{p(x)}} = \frac{Q(x) - \frac{1}{2}h(x) \cdot p'(x) + h'(x) \cdot p(x)}{\sqrt{p(x)}} =$$

(determinando el polinomio $h(x)$ de modo que este numerador sea constante c)

$$= \frac{c}{\sqrt{p(x)}} ; \text{ Por otro lado}$$

$$\int \frac{c}{\sqrt{p(x)}} \cdot dx = \int \left(\frac{Q(x)}{\sqrt{p(x)}} - [h(x) \cdot \sqrt{p(x)}]' \right) \cdot dx =$$

$$= \int \frac{Q(x)}{\sqrt{p(x)}} \cdot dx - h(x) \cdot \sqrt{p(x)}, \text{ es decir}$$

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{p(x)}} \cdot dx = h(x) \cdot \sqrt{p(x)} + \int \frac{c}{\sqrt{p(x)}} \cdot dx$$

El problema queda reducido a la integral $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$

TIPO 6: Integral $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$

El método consiste en ‘ajustar’ convenientemente el radicando teniendo en cuenta el carácter de sus coeficientes, como sigue.

Caso A: Si $a > 0$ hago lo siguiente

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx &= \int \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{a^2x^2+abx+ac}} \cdot dx = \\ &= \int \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ac}} \cdot dx = \int \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right)}} \cdot dx, \end{aligned}$$

y ahora hago un cambio de variable.

a) Si $\left(ac - \frac{b^2}{4}\right) > 0$ hago: $t = ax + \frac{b}{2}$, $dt = adx$, y llamo $v^2 = ac - \frac{b^2}{4}$, con lo cual tengo

$$\int \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right)}} \cdot dx = \frac{\sqrt{a}}{a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t^2+v^2}} \cdot dt =$$

hago $u = \frac{t}{v}$, $dt = v \cdot du$, y queda

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{a}}{a \cdot v} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{v}\right)^2 + 1}} \cdot dt = \frac{\sqrt{a} \cdot v}{a \cdot v} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \cdot du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \cdot du = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \text{arcSeh}(u), \text{ donde } u = \frac{t}{v}, \end{aligned}$$

$$t = ax + \frac{b}{2}, \quad v = \sqrt{ac - \frac{b^2}{4}}$$

b) Si $(ac - \frac{b^2}{4}) < 0$ hago: $t = ax + \frac{b}{2}$, $dt = adx$,

y llamo $v^2 = \frac{b^2}{4} - ac$, con lo cual tengo

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a} \cdot 1}{\sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(ac - \frac{b^2}{4}\right)}} \cdot dx &= \frac{\sqrt{a}}{a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - v^2}} \cdot dt = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{a \cdot v} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{v}\right)^2 - 1}} \cdot dt = \quad \text{hago } u = \frac{t}{v}, \quad dt = v \cdot du, \end{aligned}$$

y queda $= \frac{\sqrt{a} \cdot v}{a \cdot v} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot du = \frac{\sqrt{a}}{a} \cdot \text{arcCoh}(u)$

Caso B: Si $a < 0$ hago lo siguiente

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \cdot dx &= \int \frac{1}{\sqrt{-a'x^2 + bx + c}} \cdot dx = (\text{donde } a' > 0) \\ &= \int \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{-a'^2x^2 + a'bx + a'c}} \cdot dx = \int \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{-\left(a'x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + a'c}} \cdot dx = (*) \\ &\quad \text{hago } t = a'x - \frac{b}{2}, \quad dt = a' dx, \end{aligned}$$

a) Si $\frac{b^2}{4} + a'c > 0$, $v^2 = \frac{b^2}{4} + a'c$

$$(*) = \frac{\sqrt{a'}}{a'} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{v^2 - t^2}} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{a'} \cdot v} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{v}\right)^2}} \cdot dt =$$

$$\begin{aligned} \text{Hago } u &= \frac{t}{v}, \quad dt = v du, \\ &= \frac{v}{\sqrt{a'} \cdot v} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = \frac{1}{\sqrt{a'}} \cdot \text{arcSen}(u), \quad u = \frac{t}{v}, \quad t = a'x - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

b) Si $\frac{b^2}{4} + a'c < 0$, $v^2 = -(\frac{b^2}{4} + a'c)$

$$(*) = \frac{\sqrt{a'}}{a'} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{-v^2-t^2}} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{a'} \cdot v} \int \frac{1}{\sqrt{-1-(\frac{t}{v})^2}} \cdot dt =$$

y puede continuar el alumno ...

ALGUNOS CASOS PRÁCTICOS:

En la práctica se pueden presentar casos para los que resulte más cómodo pasar ‘tangencialmente’ del método de reducción que acabamos de ver.

Ejemplos 1: $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx$

$$\text{Hago } \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \cdot dx = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx =$$

$$= (mx+n) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} + a_0 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx ,$$

Derivando en los dos miembros

$$\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = [(mx+n) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}]' + a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

y multiplicando por $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ queda

$$ax^2 + bx + c = \dots\dots\dots + a_0 \rightarrow$$

$$ax^2 + bx + c = m.(ax^2+bx+c) + (mx+n).(ax+\frac{b}{2}) + a_0 ,$$

identificando coeficientes:

$$\begin{cases} a = 2am \\ b = bm + \frac{bm}{2} + na \\ c = mc + \frac{bn}{2} + a_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{b}{4a} \\ a_0 = \frac{c}{2} - \frac{b^2}{8a} \end{cases}$$

Por ejemplo, en

$$\int \sqrt{1+x^2}.dx \rightarrow a=1, b=0, c=1, m=1/2, n=0, a_0=1/2,$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}.dx &= \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.dx = \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \text{arcSeh}(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 2: $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.dx = \dots\dots\dots =$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.dx$$

Ejemplo 3: $\int \sqrt{2ax-x^2}.dx = \dots\dots\dots$

$$I = \int \frac{(a-x).x}{\sqrt{2ax-x^2}}.dx + a \cdot \int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}.dx$$

$$\int \frac{(a-x).x}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = (\text{por partes}) = \dots\dots\dots =$$

$$= x.\sqrt{2ax-x^2} - I$$

$$-a.\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}.dx = -a.\int \frac{(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}.dx + a^2.\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}.dx =$$

$$= -a.\sqrt{2ax-x^2} + a^2.\text{arcSen}\left(\frac{x-a}{a}\right) \rightarrow$$

$$2I = (x-a).\sqrt{2ax-x^2} + a^2.\text{arcSen}\left(\frac{x-a}{a}\right)$$

1.3.- Integrales Elípticas: De Primera y de Segunda especie

Son las de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}.dx, \text{ Elíptica de primera especie}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}.dx, \text{ Elíptica de segunda especie}$$

OBSERVA: Una integral de la forma $\int \frac{x}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}}.dx$ puede ser modificada así:

$$x^2 = z, dz = 2x.dx \rightarrow x.dx = \frac{dz}{2},$$

$$x^4 = z^2, \rightarrow I = \frac{1}{2}.\int \frac{1}{\sqrt{az^2+bz+c}}.dz, \text{ que es del tipo de las}$$

cuadráticas

estudiadas en otro lugar.

Observa que para resolver $ax^4 + bx^2 + c = 0$, hago

$z = x^2$, $az^2 + bz + c = 0$; Si z_1, z_2 son las soluciones de ésta los valores de x son:

$$x = \begin{cases} +\sqrt{z_1} \\ -\sqrt{z_1} \end{cases} ; \quad x = \begin{cases} +\sqrt{z_2} \\ -\sqrt{z_2} \end{cases} ;$$

Si z_i es real > 0 obtengo valores reales de x , pero si es < 0 , ó imaginario obtengo valores imaginarios para x .

Lo tratamos según los siguientes casos.

Caso A: $p(x) = 0$ tiene sus soluciones reales

Elíptica de primera especie: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx$

Resuelvo $p(x) = 0$, sean las soluciones $\pm t_1, \pm t_2$, (ver lo anterior)

$$\begin{aligned} \text{y } p(x) &= a.(x^2-t_1^2).(x^2-t_2^2) = a.(t_1^2-x^2).(t_2^2-x^2) = \\ &= a.t_1^2.t_2^2.\left(1-\frac{x^2}{t_1^2}\right).\left(1-k^2.\frac{x^2}{t_1^2}\right), \end{aligned}$$

donde $k^2 = \frac{t_1^2}{t_2^2}$, donde hemos tomado t_1 como la de menor valor absoluto, y por tanto $k^2 < 1$ y $k < 1$.

$$\text{Cambio: } t = \frac{x}{t_1}, \quad x = t_1 t, \quad dx = t_1 dt$$

Prescindiendo del factor 'a' tengo

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - t_1^2)(x^2 - t_2^2)}} \cdot dx = \frac{1}{t_1 t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \cdot t_1 dt = \\ = \frac{1}{t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \cdot dt = (*)$$

Haciendo el cambio

$$t = \sin(u), \quad dt = \cos(u) \cdot du, \quad 1 - t^2 = \cos^2(u),$$

$$(*) = \frac{1}{t_2} \cdot \int \frac{1}{\cos(u) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot \cos(u) \cdot du = \frac{1}{t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du$$

multiplicada por el valor 'a', finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \cdot dx = \frac{a}{t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du,$$

$$\text{donde } k = \frac{t_1}{t_2}, \quad \frac{x}{t_1} = \sin(u)$$

$$\text{Elíptica de segunda especie: } \int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \cdot dx$$

Vale lo anterior hasta llegar a la expresión

$$a \cdot (t_1^2 - x^2) \cdot (t_2^2 - x^2) = a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{t_1^2}\right) \cdot \left(1 - k^2 \cdot \frac{x^2}{t_1^2}\right)$$

Prescindo del factor 'a'.

Cambio $t = \frac{x}{t_1}$, $x = t_1 \cdot t$, $dx = t_1 \cdot dt$, $x^2 = t_1^2 \cdot t^2$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - t_1^2)(x^2 - t_2^2)}} \cdot dx = \frac{1}{t_1 \cdot t_2} \cdot \int \frac{t_1^2 \cdot t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot t_1 \cdot dt = \\ &= \frac{t_1^2}{t_2} \cdot \int \frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot dt = \frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{k^2 \cdot t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot dt = \\ &= \\ &= -\frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{1-k^2 \cdot t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot dt + \frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot dt = \\ &= -\frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{\sqrt{1-k^2 \cdot t^2}}{\sqrt{(1-t^2)}} \cdot dt + \frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 \cdot t^2)}} \cdot dt \end{aligned}$$

Para el segundo término: Hacemos el cambio

$t = \sin(u)$, $dt = \cos(u) \cdot du$, $1-t^2 = \cos^2(u)$, y la segunda queda

$$\frac{t_1^2}{t_2 \cdot k^2} \cdot \int \frac{1}{\cos(u) \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot \cos(u) \cdot du = \frac{1}{t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du,$$

ya que $k^2 = \frac{t_1^2}{t_2^2}$. (Al final multiplicaremos por $\frac{1}{\sqrt{a}}$)

Para el primer término: $\frac{\sqrt{1-k^2 \cdot t^2}}{\sqrt{(1-t^2)}} \cdot dt =$

$$= \frac{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(u)}}{\cos(u)} \cdot \cos(u) \cdot du = \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2(u)} \cdot du,$$

y queda

$$-\frac{1}{t_2} \cdot \int \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2(u)} \cdot du$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx = -\frac{1}{\sqrt{a} \cdot t_2} \cdot \int \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2(u)} \cdot du + \\ + \frac{1}{\sqrt{a} \cdot t_2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2(u)}} \cdot du$$

donde $k = \frac{t_1}{t_2}$, $\frac{x}{t_1} = \text{sen}(u)$

Caso B: $p(x) = 0$ tiene dos pares de soluciones imaginarias.

Elíptica de primera especie: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx$

En este caso, asociando cada par de soluciones conjugadas, $p(x)$ descompone en factores así

$$p(x) = a \cdot (x^2 + t_1^2) \cdot (x^2 + t_2^2), \quad t_1, t_2 \text{ valores reales.}$$

Observa que, partiendo de esta expresión:

Al resolver $p(x) = 0$ tengo: $(x^2 + t_1^2) = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-t_1^2}$

$$(x^2 + t_2^2) = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{-t_2^2}$$

imaginarias en ambos casos.

Tengo pues $ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 + t_1^2) \cdot (x^2 + t_2^2) =$
 $= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{x^2}{t_2^2} + 1\right) =$

$$= a.t1^2.t2^2.\left(\frac{x^2}{t1^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{t1^2}{t1^2} \cdot \frac{x^2}{t2^2} + 1\right) =$$

$$= a.t1^2.t2^2.\left(\frac{x^2}{t1^2} + 1\right) \cdot (k^2 \cdot \frac{x^2}{t1^2} + 1) \quad , \text{ donde } k^2 = \frac{t1^2}{t2^2}$$

eligiliendo t1 y t2 de forma que $t1^2 < t2^2$, y por tanto $k^2 < 1$, $|k| < 1$.

Haciendo el cambio: $\frac{x}{t1} = t$, $x = t1.t$, $dx = t1.dt$, la expresión anterior queda

$$= t1^2.t2^2.(t^2 + 1).(k^2.t^2 + 1),$$

Al hacer el radical prescindo del factor $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

$$\frac{1}{t1.t2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1).(k^2.t^2+1)}} \cdot t1 \cdot dt = \frac{1}{t2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(t^2+1).(k^2.t^2+1)}} \cdot dt$$

Hacemos otro cambio: $t = \tan(u)$, $dt = \sec^2(u).du$,

$$t^2 + 1 = \tan^2(u) + 1 = \sec^2(u),$$

$$\int \frac{1}{\sec(u).\sqrt{k^2.\tan^2(u)+1}} \cdot \sec^2(u) \cdot du = \int \frac{\sec(u)}{\sqrt{k^2.\tan^2(u)+1}} \cdot du$$

$$\text{Transformo: } \frac{\sec(u)}{\sqrt{k^2.\tan^2(u)+1}} \cdot du = \frac{\sec(u)}{\sqrt{k^2 \cdot \frac{\sec^2(u)}{\cos^2(u)} + 1}} =$$

$$= \frac{\sec(u) \cdot \cos(u)}{\sqrt{k^2 \cdot \sin^2(u) + \cos^2(u)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 \cdot \sin^2(u) + (1 - \sin^2(u))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cdot \sin^2(u)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \cdot \sin^2(u)}}, \text{ donde } 1 - k^2 = 1 - \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2};$$

$$\text{y queda } \frac{1}{t_1} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du, \text{ donde } k'^2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2},$$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot t_1} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du,$$

$$\text{donde } \frac{x}{t_1} = \tan(u)$$

$$\text{Elíptica de segunda especie: } \int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \cdot dx$$

Seguimos los pasos dados para la de primer especie (Caso B visto antes).

$$\text{Tengo pues } ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 + t_1^2) \cdot (x^2 + t_2^2) =$$

$$= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{x^2}{t_2^2} + 1 \right) =$$

$$= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{t_1^2}{t_1^2} \cdot \frac{x^2}{t_2^2} + 1 \right) =$$

$$= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right) \cdot \left(k^2 \cdot \frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right), \text{ donde } k^2 = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

ordeno t_1 y t_2 de forma que $t_1^2 < t_2^2$, y por tanto $k^2 < 1$, $k < 1$.

Haciendo el cambio: $\frac{x}{t^1} = t$, $x = t^1.t$, $x^2 = t^1^2.t^2$, $dx = t^1.dt$, la expresión anterior queda

$$= t^1^2.t^2^2.(t^2 + 1).(k^2.t^2 + 1),$$

Al hacer el radical prescindo del factor $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

La expresión inicial queda

$$\frac{1}{t^1.t^2} \cdot \int \frac{t^1^2.t^2}{\sqrt{(t^2+1).(k^2.t^2+1)}} \cdot t^1.dt = \frac{t^1^2}{t^2} \cdot \int \frac{t^2}{\sqrt{(t^2+1).(k^2.t^2+1)}} \cdot dt$$

Ahora hago el cambio: $t = \tan(u)$, $dt = \sec^2(u).du$,

$t^2 + 1 = \tan^2(u) + 1 = \sec^2(u)$, y prescindiendo del factor la integral queda así

$$\int \frac{\tan^2(u)}{\sec(u).\sqrt{k^2.\tan^2(u)+1}} \cdot \sec^2(u).du = \int \frac{\tan^2(u).\sec(u)}{\sqrt{k^2.\tan^2(u)+1}} \cdot du ;$$

$$\text{Transformo: } \frac{\tan^2(u).\sec(u)}{\sqrt{(k^2.\tan^2(u)+1)}} = \frac{\tan^2(u).\sec(u)}{\sqrt{k^2.(\sec^2(u)-1)+1}} =$$

$$= \frac{\tan^2(u).\sec(u)}{\sqrt{k^2.\left(\frac{1-\cos^2(u)}{\cos^2(u)}\right)+1}} = \frac{\tan^2(u).\sec(u).\cos(u)}{\sqrt{k^2.(1-\cos^2(u))+\cos(u)^2}} =$$

$$= \frac{\tan^2(u)}{\sqrt{k^2.\sec^2(u)+(1-\sec^2(u))}} = \frac{\tan^2(u)}{\sqrt{1-(1-k^2).\sec^2(u)}} =$$

$$= \frac{\tan^2(u)}{\sqrt{1-k'^2.\sec^2(u)}}, \text{ donde } k'^2 = 1-k^2 = 1 - \frac{t^2}{t^2} = \frac{t^2-t^2}{t^2}$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx = \frac{t_1^2}{\sqrt{a} \cdot t_2} \cdot \int \frac{\tan^2(u)}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du ,$$

donde $\frac{x}{t_1} = \tan(u)$, $k'^2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2}$

Caso C: $p(x) = 0$ tiene un par de soluciones imaginarias y las otras dos son reales:

Elíptica de primera especie: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx$

En este caso existen valores reales t_1, t_2 verificando

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + c &= a(x^2 - t_1^2) \cdot (x^2 + t_2^2) = \\ &= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} - 1 \right) \cdot \left(k^2 \cdot \frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right) , \text{ donde } k^2 = \frac{t_1^2}{t_2^2} \end{aligned}$$

donde elegimos de forma que $t_1^2 < t_2^2$, y por tanto $k^2 < 1$, $|k| < 1$.

Hago

$t = \frac{x}{t_1}$, $x = t_1 \cdot t$, $dx = t_1 \cdot dt$, con lo cual la última expresión queda

$$= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot (t^2 - 1) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1) = -t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot (1 - t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)$$

Entonces

I=

$$\frac{-1}{\sqrt{a} \cdot t1 \cdot t2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot t1 \cdot dt = \frac{-1}{\sqrt{a} \cdot t2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot dt$$

Prescindo del factor $\frac{-1}{\sqrt{a} \cdot t2}$

Hago $t = \cos(u)$, $dt = -\sin(u) \cdot du$; Operando tengo

$$1 - t^2 = [\sin^2(u) + \cos^2(u)] - \cos^2(u) = \sin^2(u),$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} k^2 \cdot \cos^2(u) + [\sin^2(u) + \cos^2(u)] &= (k^2 + 1) \cdot \cos^2(u) + \\ + \sin^2(u) &= (k^2 + 1) \cdot [1 - \sin^2(u)] + \sin^2(u) = \\ &= (k^2 + 1) + [1 - k^2 - 1] \cdot \sin^2(u) = \\ &= (1 + k^2) \cdot [1 - \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \sin^2(u)] \end{aligned}$$

Queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot dt &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{-\sin(u)}{\sin(u) \cdot \sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du, \quad \text{donde } k'^2 = \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{\frac{t1^2}{t2^2}}{1+\frac{t1^2}{t2^2}} = \\ &= \frac{t1^2 \cdot t2^2}{t2^2 \cdot (t2^2 + t1^2)} = \frac{t1^2}{t1^2 + t2^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{t2}{\sqrt{t1^2 + t2^2}} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx &= \frac{-1}{\sqrt{a} \cdot t_2} \cdot \frac{-t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \text{sen}(u)}} \cdot du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \text{sen}(u)}} \cdot du,\end{aligned}$$

donde $\frac{x}{t_1} = \cos(u)$, y $k'^2 = \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}$

Elíptica de segunda especie: $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx$

Sigo los primeros paso descritos en la de primera especie.

$$\begin{aligned}ax^4 + bx^2 + c &= a(x^2 - t_1^2) \cdot (x^2 + t_2^2) = \\ &= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{t_1^2} - 1 \right) \cdot \left(k^2 \cdot \frac{x^2}{t_1^2} + 1 \right), \text{ donde } k^2 = \frac{t_1^2}{t_2^2}\end{aligned}$$

donde elegimos de forma que $t_1^2 < t_2^2$, y por tanto $k^2 < 1$, $|k| < 1$.

Hago

$$t = \frac{x}{t_1}, \quad x = t_1 \cdot t, \quad dx = t_1 \cdot dt, \quad x^2 = t_1^2 \cdot t^2$$

con lo cual la última expresión queda

$$= a \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot (t^2 - 1) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1) = -t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot (1 - t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)$$

Entonces

I=

$$\frac{-1}{\sqrt{a} \cdot t1 \cdot t2} \cdot \int \frac{t1^2 \cdot t^2}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot t1 \cdot dt = \frac{-t1^2}{\sqrt{a} \cdot t2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot dt$$

Prescindo del factor $\frac{-t1^2}{\sqrt{a} \cdot t2}$

Hago $t = \cos(u)$, $dt = -\sin(u) \cdot du$; Operando tengo

$$1-t^2 = [\sin^2(u) + \cos^2(u)] - \cos^2(u) = \sin^2(u),$$

y por otro lado

$$k^2 \cdot \cos^2(u) + [\sin^2(u) + \cos^2(u)] = (k^2 + 1) \cdot \cos(u)^2 + \sin(u)^2 = (k^2 + 1) \cdot [1 - \sin^2(u)] + \sin^2(u) =$$

$$= (k^2 + 1) + [1 - k^2 - 1] \cdot \sin^2(u) = (1 + k^2) \cdot [1 - \frac{k^2}{1+k^2} \cdot \sin(u)]$$

$$\text{Queda: } \int \frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (k^2 \cdot t^2 + 1)}} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{-\cos^2(u) \cdot \sin(u)}{\sin(u) \cdot \sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du$$

=

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{\cos^2(u)}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du, \text{ donde } k'^2 = \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{\frac{t1^2}{t2^2}}{1+\frac{t1^2}{t2^2}} =$$

$$= \frac{t1^2 \cdot t2^2}{t2^2 \cdot (t2^2 + t1^2)} = \frac{t1^2}{t1^2 + t2^2}, \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{t2}{\sqrt{t1^2 + t2^2}}$$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^4+bx^2+c}} \cdot dx = \frac{t1^2}{\sqrt{a} \cdot t2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{\cos^2(u)}{\sqrt{1-k'^2 \cdot \sin^2(u)}} \cdot du,$$

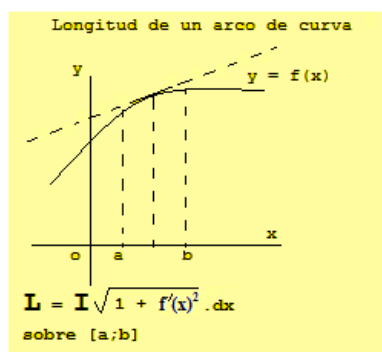
donde $\frac{x}{t_1} = \cos(u)$, y $k'^2 = \frac{t_2^2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}$

\$\$\$SoOo\$\$\$

PROMOCIÓN
NO VENTA

Tema 2

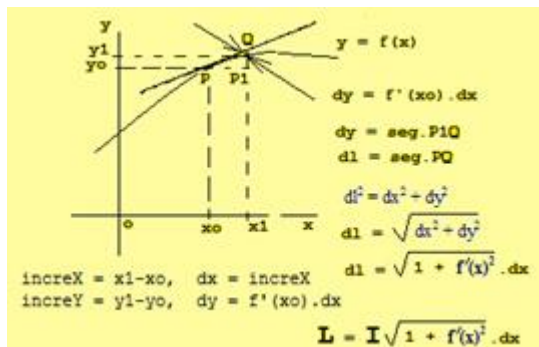
Cálculo de la longitud de un arco de curva en el Plano



NO COPIAR

2.1.- Curvas en el Plano: Longitud de un arco de curva en coordenadas Cartesianas

$$y = f(x)$$



Deseamos obtener la longitud del arco de curva correspondiente al intervalo $[a, b]$. Es decir, cuando la variable x recorre este intervalo obtenemos un “trozo” de la curva que llamamos “arco” de dicha curva, y cuya longitud (finita) deseamos calcular.

En cada punto $P(x_0, y_0)$ de la curva, en un entorno “pequeño” $V(x_0, y_0)$, el incremento de arco dl sobre la curva puede ser “aproximado” por el segmento dT sobre la tangente a la curva en P .

$$\text{Entonces } dT = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \cdot dx$$

y por tanto

$$dl \approx \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \cdot dx$$

Cuando hacemos $dx \rightarrow 0$ los valores dl y dT tienden a coincidir.

Cuando nos movemos por la curva pasando del punto $(x; f(x))$ al punto $(x+dx; f(x+dx))$, y realizamos la suma de los valores $dT = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$, obtenemos una aproximación de la suma de los arcos dl de la curva. La suma de estos arcos nos da la longitud del arco total.

Tenemos así

$$L = \sum dl \cong \sum dT$$

En el límite cuando $dx \rightarrow 0$ llegan a coincidir, de modo que

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

2.2.- Longitud de un arco de curva en coordenadas paramétricas

La curva puede venir dada mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

t recorriendo R

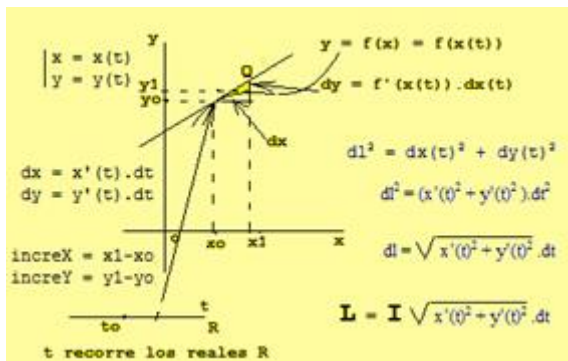
Deseamos la longitud del arco de curva correspondiente al intervalo $[a, b]$ de la variable t .

El segmento dT sobre la tangente se expresa ahora así:

$$dT = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt, \text{ en cada punto}$$

$(x(t), y(t))$ de la curva, y por tanto

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} . dt$$



2.3.- Longitud de un arco de curva en coordenadas polares

A) El radio-vector r es constante

$$\begin{cases} x = r . \cos(u) \\ y = r . \sen(u) \end{cases}, \quad u \text{ en radianes}$$

$$x'(u) = -r . \sen(u), \quad y'(u) = r . \cos(u)$$

$$x'(u)^2 + y'(u)^2 = r^2, \quad \text{y por tanto} \quad dl = r . du ,$$

$$L = \int_a^b r . du$$

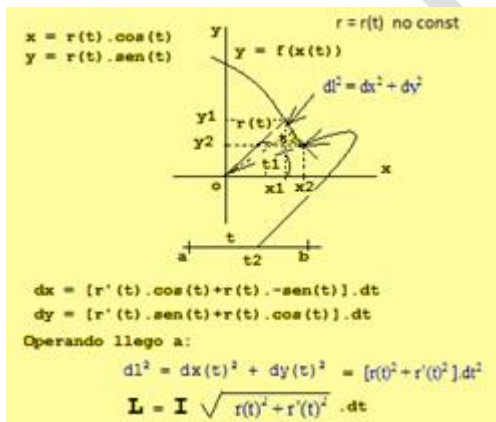
B) Caso general: El parámetro t es el ángulo que el radio vector forma con el semieje $+ox$

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cdot \cos(t), \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(t), \quad t \text{ recorriendo } R\end{aligned}$$

Derivamos respecto de t y obtenemos la expresión

$$x'(t)^2 + y'(t)^2, (\text{ver Apéndice}) \text{ llegando a que}$$

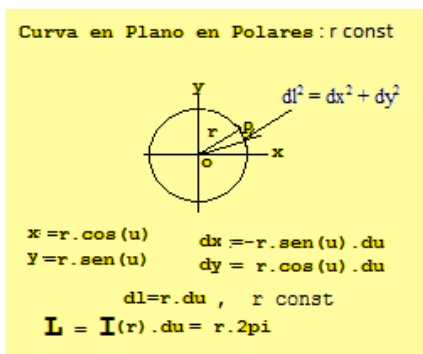
$$dl = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} \cdot dt, \quad L = \int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} \cdot dt$$



Cuando $r(t)$ es constante (que no depende de t) tenemos:

$$dl = \sqrt{0 + r^2} \cdot dt = r \cdot dt$$

$$L = \int_a^b r \cdot dt, \text{ donde } 0 \leq t < 2 \cdot \pi, \quad t \text{ en radianes}$$



2.4.- Ejemplos: Aplicación a algunos casos concretos

1.- Longitud de la circunferencia

Ecuación: $x^2 + y^2 = R^2, \quad y = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = R^2 / (R^2 - x^2), \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Para el cuadrante $x > 0, y > 0$ Tenemos

$$l' = R \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot dx = \frac{R}{R} \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \cdot dx = \left(\text{hago } \frac{x}{R} = \sin(t) \right)$$

$$= \int \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot R \cdot dt = R \cdot t = R \cdot \left(\text{arcSen} \left(\frac{x}{R} \right) \right) \Big|_0^R =$$

$$= R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = R \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{por tanto } L = 4 \cdot l' = 2 \cdot \pi \cdot R$$

(Resultado conocido de Geometría descriptiva)

2.- Longitud de la Elipse

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 1 + y'(x)^2 = \dots = \frac{(b^2 - a^2) \cdot x^2 + a^4}{a^2 \cdot (a^2 - x^2)}$$

El cuadrante de la elipse $x > 0$, $y > 0$ tiene longitud

$$L' = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{\frac{(b^2 - a^2) \cdot x^2 + a^4}{(a^2 - x^2)}} \cdot dx$$

La resolución de esta integral es sumamente difícil.

NOTA: Si tomamos la elipse como una deformación de la circunferencia con radio $R = \sqrt{a \cdot b}$, cabe aproximar la longitud de la elipse así: $L = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{a \cdot b}$

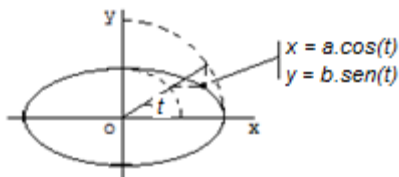
Veamos otra forma.

El tratamiento clásico para la Elipse es el siguiente.

Parametrización de la Elipse:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t)] \cdot dt^2$$



$$L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot \text{sen}^2(t) + b^2 \cdot \text{cos}^2(t)} \cdot dt = (*)$$

(la transformamos como sigue)

$$\begin{aligned} a^2 \cdot \text{sen}^2(t) + b^2 \cdot \text{cos}^2(t) &= a^2 \cdot \text{sen}^2(t) + b^2 \cdot (1 - \text{sen}^2(t)) = \\ &= b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \text{sen}^2(t) = b^2 \cdot \left[1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \text{sen}^2(t) \right] \end{aligned}$$

haciendo $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ tengo

$$(*) = b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt$$

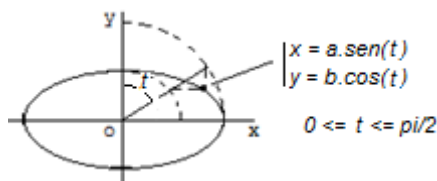
Esta integral es del tipo elíptico y su valor se obtiene mediante Tablas tabuladas.

Según otros autores:

Con el fin de obtener un resultado adaptado a las Tablas tabuladas parametrizamos del siguiente modo.

Modificamos el origen del ángulo y su sentido del recorrido.

$$\begin{cases} x = a \cdot \text{sen}(t) \\ y = b \cdot \text{cos}(t) \end{cases}$$



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [a^2 \cdot \cos^2(t) + b^2 \cdot \sin^2(t)] \cdot dt^2$$

$$dl = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2(t) + b^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt$$

(la transformamos como sigue)

$$a^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) + b^2 \cdot \sin^2(t) = a^2 + (b^2 - a^2) \cdot \sin^2(t) =$$

$$= a^2 \cdot [1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \sin^2(t)] \quad \text{Hago } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$\text{con lo cual } dl = a \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt$$

$$\text{Por tanto } L = 4 \cdot a \cdot \int_0^{pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt$$

NOTA: Esta integral $\int_0^{pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt$ es llamada ‘Segunda especie de Legendre’, y, al igual que la ‘Primera especie de Legendre’ $\int_0^{pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)}} \cdot dt$.

Sus valores han sido tabulados en las llamadas Tablas. Según resultado proporcionado en el Manual de Fórmulas y Tablas de Matemáticas (Murray R. Spiegel, ver Bibliografía), aplicando las citadas tablas resulta

$$\int_0^{pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt \cong \frac{pi}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

y por consiguiente

$$L = 4 \cdot a \cdot \int_0^{pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2(t)} \cdot dt \cong 4 \cdot a \cdot \frac{pi}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \pi i \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad L \cong 2 \cdot \pi i \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3.- Un arco de parábola

$$y = (x-2)^2 + 2, \text{ Intervalo } [a;b]$$

$$\text{Sol.: } y' = 2 \cdot (x-2), \quad 1 + y'^2 = 1 + 4 \cdot (x-2)^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + 4 \cdot (x-2)^2} \cdot dx, \text{ hago } t = x-2, \quad dt = dx,$$

$$L = \int \sqrt{1 + (2t)^2} \cdot dt, \text{ hago } 2t = \tan(u), \quad dt = \frac{1}{2} \cdot \sec(u)^2 \cdot du$$

$$L = \int \sec(u) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sec^2(u) \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \int \sec(u)^3 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (\sec(u) \cdot \tan(u) + \ln(\sec(u) + \tan(u))) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [(2x-4) \cdot \sec(\arctan(2x-4)) + \ln((2x-4) + \sec(\arctan(2x-4)))]$$

Aplicando Barrow

$$L = \frac{1}{4} \cdot [(2b-4) \cdot \sec(\arctan(2b-4)) + \ln((2b-4) +$$

$$+ \sec(\arctan(2b-4)))] - 1/4 \cdot [(2a-4) \cdot \sec(\arctan(2a-4)) +$$

$$+ \ln((2a-4) + \sec(\arctan(2a-4)))]$$

Para el intervalo $[0; 3]$ he obtenido

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot \sec(\arctan(2)) + \ln(2 + \sec(\arctan(2))) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot [-4 \cdot \sec(\arctan(-4)) + \ln(-4 + \sec(\arctan(-4)))]] = \\ &= + \frac{1}{4} \cdot [4,4716 + 1,1337] - \frac{1}{4} \cdot [-16,481 - 2,0948] = \\ &= + \frac{1}{4} \cdot (5,6053 + 18,5758) = 6,0453; \quad L = 6,0453 \text{ u.} \end{aligned}$$

Reseñamos los siguientes valores obtenidos en los cálculos, con el fin de que el alumno haga sus comprobaciones:

$$\arctan(2) = 1,1071 \rightarrow \sec(..) = 2,2358$$

$$\arctan(-4) = -1,3258 \rightarrow \sec(..) = 4,1231$$

$$2 + \sec(...) = 3,1071 \rightarrow \ln(..) = 1,1337$$

$$-4 + \sec(...) = 0,1231 \rightarrow \ln(..) = -2,0948$$

$$2 \cdot \sec(..) = 4,4716, \quad -4 \cdot \sec(..) = -16,481$$

El alumno puede completar los cálculos para el intervalo concreto $[1; 4]$.

4.- Un arco de cúbica

$$y = x^3 - 2x + 5, \text{ Intervalo } [a; b]$$

$$\text{Sol.: } y' = 3x^2 - 2, \quad 1 + (3x^2 - 2)^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (3x^2 - 2)^2} \cdot dx$$

Aproximamos su valor tanto como queramos realizando la suma para n suficientemente grande:

$$L = \sum_{i=1,2,3,\dots,n} \sqrt{1 + (3 \cdot x_i^2 - 2)^2} \cdot \Delta x$$

para lo cual divido el intervalo [a;b] en n subintervalos iguales, y donde

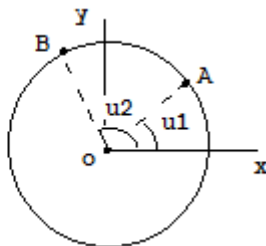
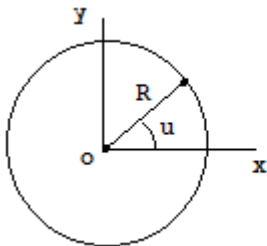
$$\Delta x = (x_{i+1} - x_i) = \frac{b - a}{n}$$

5.- Un arco de circunferencia

En polares: $\begin{cases} x = R \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \sin(u) \end{cases}, 0 < u < 2\pi$

Calculamos la longitud del arco AB, como sigue

$$x' = -R \cdot \sin(u), y' = R \cdot \cos(u)$$



$$x'^2 + y'^2 = R^2 \rightarrow L = \int_{u1}^{u2} R \cdot du = R \cdot (u)_{u1}^{u2} = R \cdot (u2 - u1)$$

Observa que cuando $u1 = 0, u2 = \pi/2$, tenemos

$$L = R \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \pi \cdot R) = \text{un cuarto del círculo completo}$$

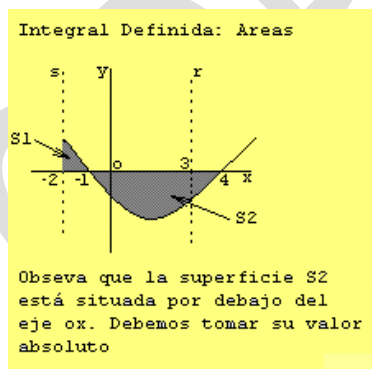
(El ángulo u siempre en radianes)

\$\$\$oOo\$\$\$

Tema 3

Cálculo de áreas en el Plano

Área de un Recinto



3.1.- Casuística en el cálculo de áreas

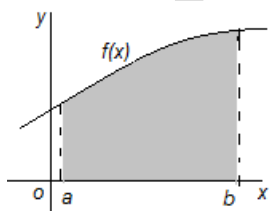
Presentamos las diferentes situaciones que se pueden presentar en el cálculo del área de un recinto en el plano.

Area limitada entre dos curvas:

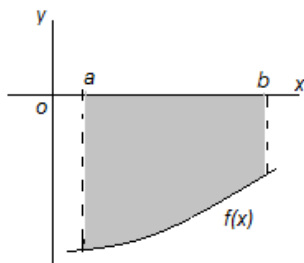
Por definición de integral definida el valor

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

coincide con el valor del área del recinto limitado por $y = f(x)$, el eje ox , y las rectas $x = a$, $x = b$



Podemos tener



Puesto que $f(x) < 0$ en el intervalo $[a; b]$ es claro que el resultado de $\int_a^b f(x).dx$ es negativo. En este caso el valor de la superficie es

$$S = -\int_a^b f(x).dx$$

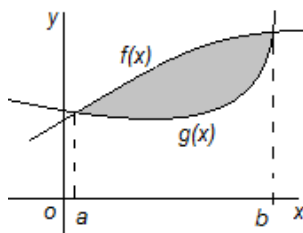
Podemos suponer la función $g(x) = 0$ para todo x , y entonces

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)].dx$$

NOTA:

El valor del área de un recinto siempre es un valor positivo.

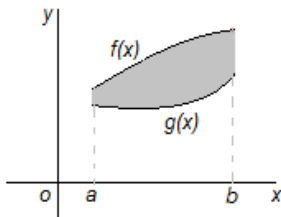
En el caso de dos gráficas,



el área del recinto limitado coincide con

$$\int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx$$

Podemos tener también la siguiente situación, y otras análogas



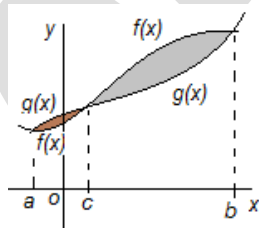
Tal como muestra la figura el valor obtenido es positivo. Pero si tomo $\int_a^b [g(x) - f(x)]. dx$, el valor obtenido es negativo. Cuando no tenemos la seguridad de su posición relativa entre sí, tomamos el valor absoluto

$$\text{abs}(\int_a^b [f(x) - g(x)]. dx)$$

Si las gráficas se cortan como en la siguiente figura tenemos que realizar dos integraciones, y tomar

$$S = \int_a^c [g(x) - f(x)]. dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]. dx$$

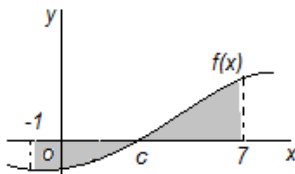
para lo cual debo conocer el punto de corte.



Podemos tener una situación como la siguiente

Ejemplos:

1.- Calcula el área del recinto de la figura



donde $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

2.- Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de

$$f(x) = (x-2).(x-3).(x+1)$$

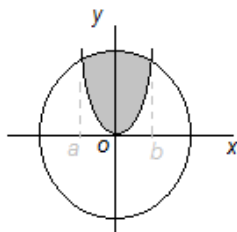
$$g(x) = -(x+1).(x-3).(x-2)$$

3.- Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de

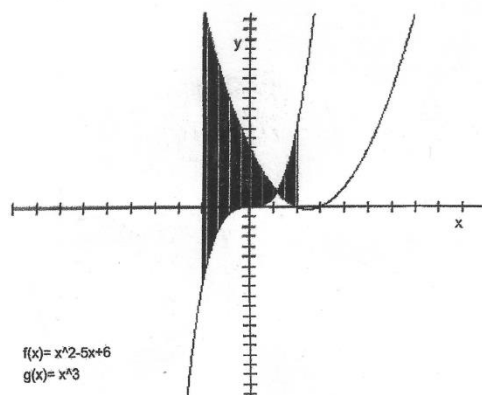
$$f(x) = -(x-3)^3 + 2$$

$$g(x) = -x + 3$$

4.- Area del recinto limitado por la circunferencia: $x^2 + y^2 = 25$, y la parábola $y = x^2$

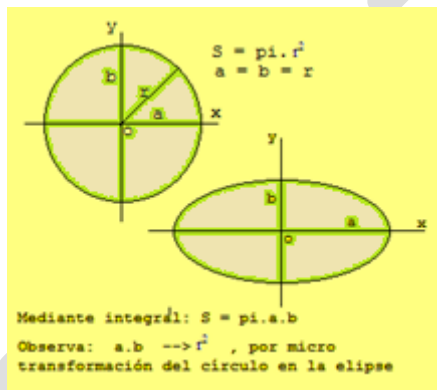


5.- Calcula el área sombreada



3.2.- Ejemplos: Aplicación a algunos casos concretos

1.- Área del círculo



Ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

El área del cuadrante $x > 0$, $y > 0$ la obtenemos así:

$$S' = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx = R \cdot \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \cdot dx =$$

$$(\text{hago } x/R = \sin(t)) = R \cdot \int \cos(t)^2 \cdot R \cdot dt =$$

$$= R^2 \cdot (t/2 + 1/2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)) =$$

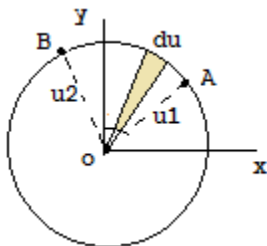
$$= R^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{R} \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right) \right) \Big|_0^R =$$

$$= R^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^2.$$

Por tanto $S = 4 \cdot S' = \pi \cdot R^2$

(Resultado conocido por Geometría básica)

Área en polares:



$$dS = \frac{1}{2} \cdot R \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot R \cdot (R \cdot du) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot du \rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \int_{u1}^{u2} du = \frac{R^2}{2} \cdot (u)_{u1}^{u2} = \frac{R^2}{2} \cdot (u2 - u1)$$

NOTA: Si $u1 = 0$ y $u2 = \pi/2$, tenemos

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{4} \text{ del disco completo}$$

2.- Área limitada por la Elipse

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

El área del cuadrante $x > 0$, $y > 0$ la obtenemos así:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \left(\text{hago } \frac{x}{a} = \text{sen}(t) \right) = \\ &= \frac{1}{b} \cdot \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot \int \cos(t) \cdot a \cdot \cos(t) \cdot dt = \\ &= b \cdot a \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(t) \cdot \cos(t) \right) = \\ &= b \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \cos(\text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right)) \right) \Big|_0^a = \end{aligned}$$

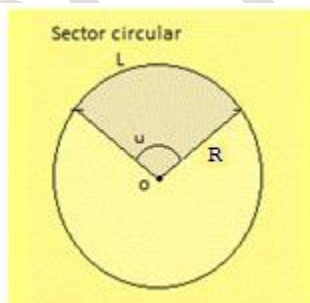
$$= b.a. \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1.0 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \right) \right] = b.a. \frac{\pi}{4}$$

Por tanto $S = \pi \cdot a \cdot b$

(Observa que es el resultado esperado si vemos la elipse como una “micro deformación progresiva” del círculo)

3.- Sector circular:

Se denomina **sector circular** a la porción del plano delimitada por un arco de circunferencia y dos de sus radios. Otros métodos para definirlo sería: porción de círculo delimitada por dos de sus radios o por un ángulo central al mismo.

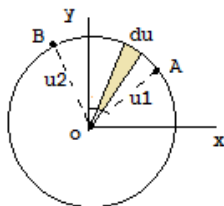


El área del sector circular es:

$$S = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{u}{2\pi} = R^2 \cdot \frac{u}{2}, \text{ u en radianes}$$

Demost.:

En polares:



$$dS = \frac{1}{2} \cdot R \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot R \cdot (R \cdot du) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot du \rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \int_{u1}^{u2} du = \frac{R^2}{2} \cdot (u)_{u1}^{u2} = \frac{R^2}{2} \cdot (u2 - u1) =$$

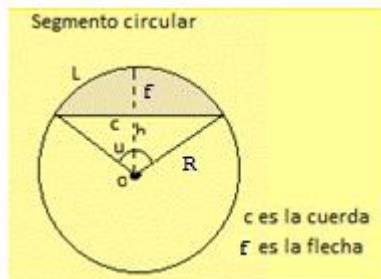
$$= \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot u, \quad u = (u2 - u1)$$

NOTA: Si $u1 = 0$ y $u2 = \pi/2$, tenemos

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{4} \text{ del disco completo}$$

4.- Segmento circular:

Es la porción de un círculo limitada cuerda por una ... correspondiente.



Sea R el radio del círculo u el ángulo central, c la longitud de la cuerda, s la longitud del arco, f la altura del segmento (flecha) y h la altura de la porción triangular (apotema).

Tenemos:

- $R = h + f$
- $L = R \cdot u$, u en radianes
- $c = 2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) = R \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(u)}$
- $h = R \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right)$
- $f = R - R \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right)$
- $u = 2 \cdot \arccos\left(\frac{h}{R}\right)$

Área del segmento:

El área del segmento circular es igual al área del sector circular menos el área del triángulo, esto es:

$$\text{Área del Sector: } S1 = R^2 \cdot \frac{u}{2}$$

Área triángulo: $S2 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \cdot h = R^2 \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\text{ÁreaSeg.} = S1 - S2 \quad (u \text{ siempre en radianes})$$

Nota: *Recordamos de trigonometría que*

$$\sin(2u) = 2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$$

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 1 - 2 \cdot \sin^2(u)$$

$$\text{sen}^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}, \quad \text{sen}(u) = \sqrt{\frac{1-\cos(2u)}{2}}$$

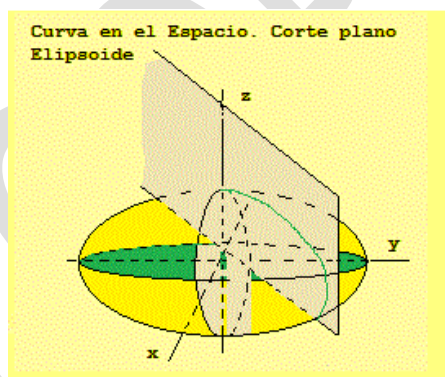
$$\text{Por tanto } \text{sen}\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(u)}{2}}$$

\$\$\$oO\$\$\$

Tema 4

Longitud de un arco de curva en el Espacio

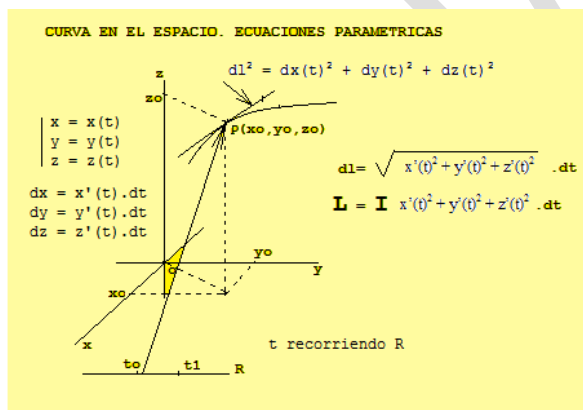
Longitud de un arco de curva



4.1.- Curvas en el Espacio: Longitud de un arco de curva

Una curva en el Espacio puede ser el resultado del vuelo de una mosca, el movimiento de un artefacto espacial, ..., la intersección de dos superficies (límites comunes de dos superficies), etc., etc.

A) Ecuaciones en paramétricas



Una curva en el espacio suele venir dada por sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \text{ recorriendo } R$$

Un arco de curva en el espacio lo tenemos cuando limitamos el recorrido del parámetro t a un intervalo finito

$$[a, b]$$

Por el mismo razonamiento hecho cuando estudiamos una curva en el plano, el incremento de arco, dl , sobre la curva en el punto P , viene aproximado por el segmento dT sobre la tangente a la curva en $P(x(t), y(t), z(t))$.

En cada punto P tengo

$$dl \cong dT = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$$

y por tanto tenemos

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt \quad (3)$$

B) Ecuaciones en cartesianas

Si el parámetro t coincide con la variable x , entonces la fórmula (3) se convierte en

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

En este caso $x'(x) = 1$, y queda

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} \cdot dx \quad (3)'$$

Análogo si el parámetro es $t=y$ ó $t=z$, lo cual podemos elegir cuando convenga

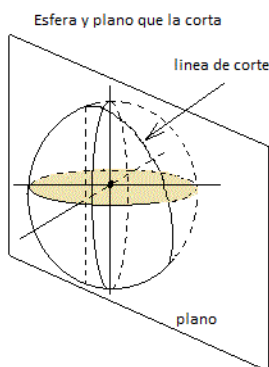
4.2.- Ejemplos: Algunos Casos concretos

1.- Arco de curva sobre la esfera al ser cortada por el plano $y = x$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases}$$

Sol.:

$$z = \sqrt{R^2 - 2x^2} \rightarrow \text{derivada } z' = -\frac{4x}{2\sqrt{R^2 - 2x^2}}$$



Para la expresión $1 + y'(x)^2 + z'(x)^2$ tengo:

$$y'_x(x) = 1, \quad z'(x)^2 = \frac{16x^2}{4(R^2 - 2x^2)} = \frac{4x^2}{R^2 - 2x^2}$$

$$\text{y finalmente: } 1 + 1 + \frac{4x^2}{R^2 - 2x^2} = \frac{2R^2}{R^2 - 2x^2}$$

$$L = \sqrt{2} \cdot R \cdot \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2x^2}} dx = \sqrt{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{R}x)^2}} dx,$$

$$\text{Hago } \sqrt{2} \cdot \frac{x}{R} = \sin(t), \quad dx = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \cos(t) \cdot dt,$$

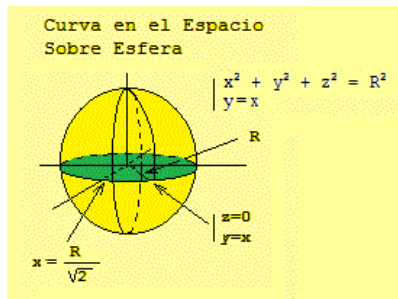
Tengo

$$R \cdot \int \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot dt = R \cdot t = R \cdot \text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{R}\right)$$

Aplicando Barrow

$$L = R \cdot \left(\text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{R}\right) \right) \Big|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = R \cdot \text{arcSen}(1) - R \cdot \text{arcSen}(0) = R \cdot \frac{\pi}{2}$$

(El alumno puede comprobar que este resultado es correcto)



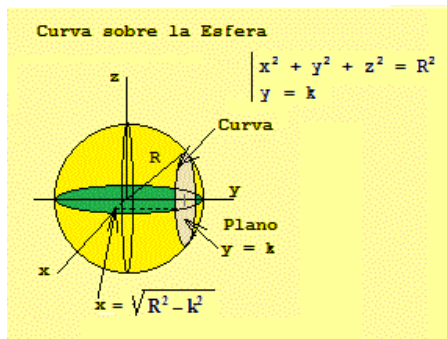
2.- Arco de curva sobre la Esfera al ser cortada por un plano del tipo $y = k$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = k \end{cases}$$

Sol:

Tengo $y = k$, x independiente

$$z^2 = (R^2 - k^2) - x^2, \quad z = \sqrt{(R^2 - k^2) - x^2}$$



Derivando: $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = -2x/2 \cdot \sqrt{(R^2 - k^2) - x^2}$

Tengo la expresión: $1 + \frac{x^2}{(R^2 - k^2) - x^2} = \frac{R^2 - k^2}{(R^2 - k^2) - x^2}$

Hago $A^2 = R^2 - k^2$, entonces

$$L = A \cdot \int_0^A \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} \cdot dx = \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{A})^2}} \cdot dx = (*)$$

hago el cambio: $\frac{x}{A} = \text{sen}(t)$, $dx = A \cdot \cos(t) \cdot dt$

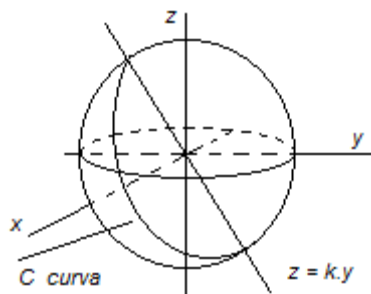
$$(*) = A \cdot \int_0^A dt = A \cdot t = A \cdot (\text{arcSen}(\frac{x}{A})) \Big|_0^A = A \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{R^2 - k^2}$$

(Tengamos en cuenta que es 1/4 de circunferencia)

3.- Estudio de la curva sobre la Esfera al ser cortada por un plano del tipo $z = k$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = k \end{cases}$$

Sol: (Su interés radica en la manipulación de los cálculos, ya que su longitud coincide con la de un meridiano)



$$z = k.y \rightarrow x^2 + y^2 + k^2.y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + (1 + k^2).y^2 = R^2$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1+k^2})^2} + y^2 = \frac{R^2}{(\sqrt{1+k^2})^2} \rightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{(\sqrt{1+k^2})^2}} = 1, \text{ que es una}$$

elipse sobre el plano $z = k.y$, con semiejes $a = R$, $b = \frac{R}{1+k^2}$

Por tanto, la curva producida por el corte con el plano $z = k.y$ queda determinada por

$$\begin{cases} \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{(\sqrt{1+k^2})^2}} = 1 \\ z = k.y \end{cases}$$

La proyección sobre el plano $z = 0$ viene dada por

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{(\sqrt{1+k^2})^2}} = 1$$

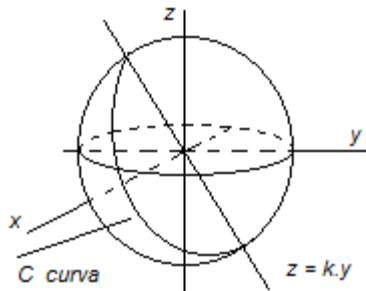
Tomo como parámetro $t = y$, con lo cual tengo en paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - (1+k^2).t^2} \\ z = k.t \end{cases},$$

$$x' = \frac{-2.(1+k^2).t}{2.\sqrt{R^2-(1+k^2).t^2}}, \quad z' = k$$

$$1 + x'^2 + z'^2 = 1 + \frac{(1+k^2)^2.t^2}{R^2-(1+k^2).t^2} + k^2$$

Dada la dificultad de la expresión resultante, y teniendo en cuenta que la curva obtenida tiene el mismo perímetro que un meridiano, y por tanto su longitud es $L = 2.\pi.R$, en lo que sigue nos limitamos a intentar calcular los límites del recorrido del parámetro t .



Obtenemos los puntos comunes de la esfera y la recta

$$\begin{cases} z = k.y \\ x = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ obtengo

$$y^2 + k^2 \cdot y^2 = R^2 \rightarrow y = \pm \frac{R}{\sqrt{1+k^2}}$$

Por tanto, la expresión de la curva queda finalmente

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - (1+k^2) \cdot t^2} \\ z = k \cdot t \end{cases}, \text{ t recorre } \left[-\frac{R}{\sqrt{1+k^2}}; \frac{R}{\sqrt{1+k^2}}\right]$$

4.- Arco de curva sobre el elipsoide al ser cortada por el plano

$$y = x$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = x \end{cases}$$

Sol.:

$$u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b} = \frac{x}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{a} = \frac{a}{b} \cdot u$$

$$u^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot u^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot u^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Hago } A = \frac{a^2+b^2}{b^2}, \text{ y tengo } z^2 = c^2 \cdot (1 - A \cdot u^2), z = c \cdot \sqrt{1 - A \cdot u^2}$$

Variable independiente u. Derivo respecto de u

$$v = \frac{a}{b} \cdot u$$

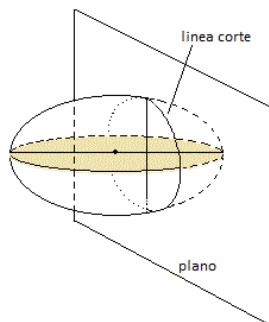
$$z = c \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot u^2}$$

$$u' = 1$$

$$v' = \frac{a}{b}$$

$$z' = \frac{-4c \cdot u}{2 \cdot \sqrt{1-2 \cdot u^2}} = \frac{-2c \cdot u}{\sqrt{1-2 \cdot u^2}}$$

Elipsoide y plano que lo corta



Tengo la expresión subintegral: $1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{4c^2 \cdot u^2}{1-2 \cdot u^2} =$
 $= \frac{a^2+b^2}{b^2} + 4c^2 \cdot \frac{u^2}{1-2 \cdot u^2}$

Llamo $A = \frac{a^2+b^2}{b^2}$, y entonces $L = \int_a^b \sqrt{A + \frac{4c^2 \cdot u^2}{1-2 \cdot u^2}} \cdot du$

NOTA:

La integración puede ser extremadamente difícil. Entonces recurrimos a obtener una aproximación como sigue.

Recuerda que por definición de Integral definida

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1,2,\dots,n} f(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $\Delta x_i \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

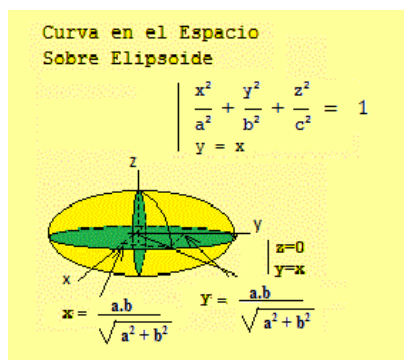
La suma $\sum_{i=1,2,\dots,n} f(x_i) \cdot \Delta x_i$ puede aproximar el valor de L tanto como queramos haciendo n grande.

Tenemos así una aproximación del valor L

$$L \approx \sum_{i=1,2,\dots,n} \sqrt{A + \frac{4c^2 \cdot u_i^2}{1-2 \cdot u_i^2}} \cdot \Delta x,$$

para lo cual hemos dividido el intervalo $[a;b]$ en n subintervalos iguales de amplitud $\Delta x = (x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}$

Haciendo n suficientemente elevado la aproximación puede sustituir su verdadero el verdadero valor de L .



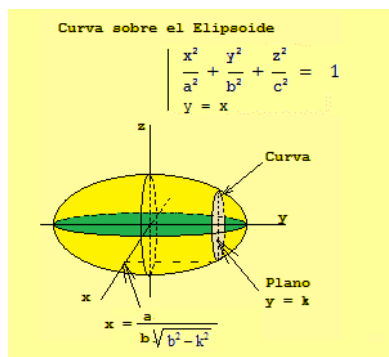
5.- Curva sobre el Elipsoide al ser cortado por un plano del tipo $y = k$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

Sol.:

Tengo $y = k$, x independiente,

$$z^2 = c^2 \cdot \left(1 - \frac{k^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) = c^2 \cdot \left(\frac{b^2 - k^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)$$



Hago $A^2 = \frac{b^2 - k^2}{b^2}$, y el cambio de variable: $u = \frac{x}{a}$

Queda: $z^2 = c^2 \cdot (A^2 - u^2)$, $z = c \cdot \sqrt{A^2 - u^2}$

Derivo: $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = \frac{-2cu}{2 \cdot \sqrt{A^2 - u^2}}$

Tengo la expresión: $1 + \frac{c^2 \cdot u^2}{A^2 - u^2}$

Límite superior de la integración:

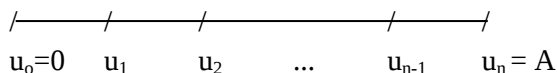
$x = \frac{x}{a} \cdot \sqrt{b^2 - k^2}$, y por tanto $u = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - k^2}}{b} = A$

Tenemos

$$L = \int_0^A \sqrt{1 + \frac{c^2 \cdot u^2}{A^2 - u^2}} \cdot du$$

Dada la dificultad de la integración nos remitimos a lo dicho en el ejercicio anterior núm. 3.

Dividiendo el intervalo $[0;A]$ en n subintervalos iguales, cada uno de amplitud $\Delta u = u_i - u_{i-1} = \frac{A}{n}$



Tenemos $L \approx \sum_{i=1,2,\dots,n} \sqrt{1 + \frac{c^2 \cdot u_i^2}{A^2 - u_i^2}} \cdot \Delta u$, donde $\Delta u = \frac{A}{n}$

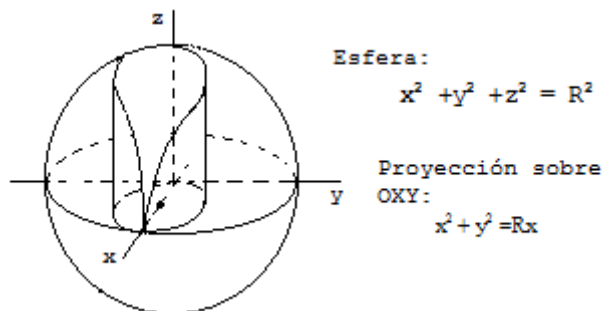
4.3.- Curva de Viviani

Su definición original es la siguiente:

Def.:

Curva de Viviani es la curva sobre la esfera que resulta al imponer la condición: $v = u$

Para la esféricas:
$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(v) \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \cos(v) \cdot \sin(u) \\ z = R \cdot \sin(v) \end{cases}$$



La condición $v = u$ nos lleva a que

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(u) \end{cases} \quad (1)$$

Expresión paramétrica de la curva.

Tomando las expresiones de x , y tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = \\ &= R^2 \cdot [\cos^4(u) + \cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(u)] = R^2 \cdot [\cos^2(u) \cdot (\cos^2(u) + \text{sen}^2(u))] = R^2 \cdot \cos^2(u) = R \cdot x \end{aligned}$$

He obtenido la relación: $x^2 + y^2 = R \cdot x$, que representa un cilindro.

Representa también la proyección de la curva (1) sobre el plano $z = 0$.

Comprueba que esta proyección es el círculo con radio $r = R/2$, y centro el punto $(R/2, 0)$.

Def.:

La curva de Viviani es la intersección de la esfera con radio R con el cilindro

$$x^2 + y^2 = R \cdot x$$

Longitud de la curva de Viviani:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(u) \end{cases}$$

El punto P(x, y, z) de la curva está sobre la esfera y por tanto R es constante.

Vectorialmente:

$$\mathbf{w} = \mathbf{OP} = (R \cdot \cos^2(u), R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u), z)$$

El elemento de longitud dl es el módulo del vector director de la tangente (o vector tangente a la curva). Este vector es

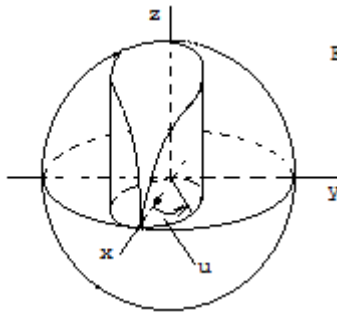
$$\mathbf{w}'_u = (-2 \cdot R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u), R \cdot [-\text{sen}^2(u) + \cos^2(u)], R \cdot \cos(u))$$

$$\begin{aligned} |W'_u|^2 &= R^2 \cdot [4 \cdot \cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(u) + (\text{sen}^4(u) + \cos^4(u) - \\ &\quad - 2 \cdot \text{sen}^2(u) \cdot \cos^2(u)) + \cos^2(u)] = \\ &= R^2 \cdot [2 \cdot \cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(u) + \text{sen}^4(u) + \cos^4(u) + \cos^2(u)] = \\ &= R^2 \cdot [\cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(u) + \cos^4(u) + \text{sen}^2(u) \cdot \cos^2(u) + \text{sen}^4(u) + \\ &\quad + \cos^2(u)] = \\ &= R^2 \cdot [\cos^2(u) \cdot (\text{sen}^2(u) + \cos^2(u)) + \text{sen}^2(u) \cdot (\cos^2(u) + \\ &\quad + \text{sen}^2(u)) + \cos^2(u)] = R^2 \cdot [1 + \cos^2(u)] , \end{aligned}$$

por lo tanto: $dl = R \cdot \sqrt{1 + \cos^2(u)} \cdot du$

Por simetría es suficiente calcular $L' = 1/2 \cdot L$

Aplicaciones del Cálculo integral. Integral curvilínea, Integral de superficie,



Esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Proyección sobre
OXY:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$L' = R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(u)} \cdot du = (*)$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \cos^2(u)} \cdot du &= \int \sqrt{2 - \sin^2(u)} \cdot du = \\ &= \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2(u)} \cdot du \end{aligned}$$

Esta integral es del tipo elíptica de segunda especie, y tendríamos que utilizar tablas (u otros medios) para su cálculo.

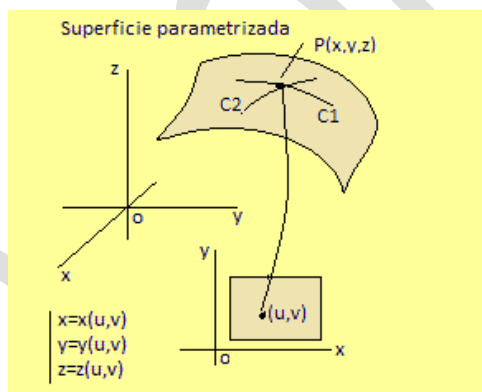
\$\$\$oOo\$\$\$

Tema 5

Superficies en el Espacio

Integral doble

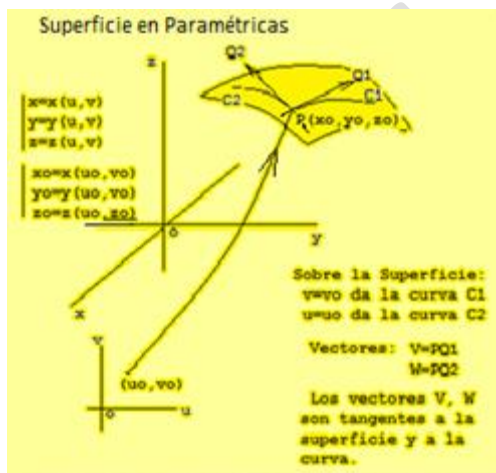
Cálculo de superficies



5.1.- Superficies en el Espacio

Una superficie, para ser definida precisa dos “parámetros”, por la misma razón que una curva precisa un parámetro.

A) Superficie en el Espacio: Ecuaciones paramétricas



$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, (u, v) \text{ recorriendo } D \subset \mathbb{R}^2$$

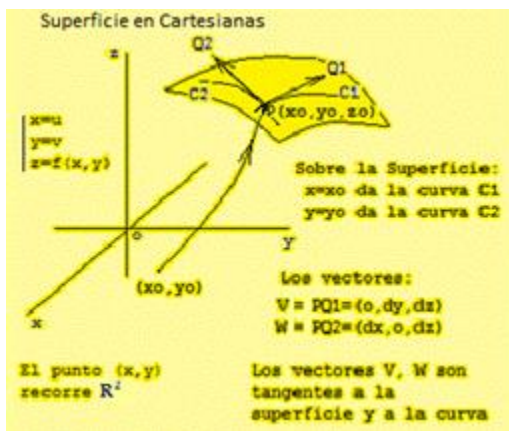
Una región finita (ó zona Z) sobre la superficie la obtenemos cuando limitamos el recorrido de (u,v) a un recinto D en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, u, v \text{ recorriendo } D \subset \mathbb{R}^2$$

B) Superficie en el Espacio: Expresión en cartesianas

Es el caso cuando los parámetros u, v son

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(x, y) \end{cases}, (x, y) \text{ recorriendo } D \subset \mathbb{R}^2$$



Introducción al Cálculo de la Superficie:

En un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie, $z_0 = f(x_0, y_0)$, una “escama pequeña” dS , curvada sobre la superficie, es aproximada por una “escama pequeña” dT plana sobre el plano tangente a la superficie en P . La suma de todas las escamas dS , cuando “saltamos” del punto

$P(x_0, y_0, z_0)$ al punto $P'(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz)$

recorriendo la zona Z , es aproximada por la suma de las correspondientes escamas dT , con un error que tiende a cero cuando dx y dy tienden a cero.

De este modo que el valor S de la zona Z (acotada) de la superficie, lo aproximamos mediante la suma de las celdas dT :

$$S \approx \sum_{Todas} dT$$

Si $e = \max\{dx, dy\}$, y hacemos $e \rightarrow 0$, obtenemos lo que llamamos “Integral doble” y que nos da el valor “exacto” de S .

Así

$$S = \iint_D dT \quad (1)$$

donde D significa que “nos movemos por el recinto de definición D , sobre el plano, recogiendo y sumando escamas infinitesimales”.

Necesitamos por tanto estudiar la Integral doble. Lo tenemos en el punto 5.3.

Lo anterior es una breve introducción siguiendo nuestra intuición. Quedará formalizado en el punto 5.4.

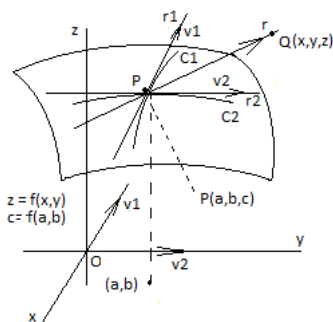
5.2.- **Curvas sobre la superficie pasando por un punto P. Tangentes a la superficie en P. Plano tangente y recta normal en P**

Observando la figura vemos las curvas C1, C2 sobre la superficie, que pasan por P. C1 la obtenemos fijando el valor $y = b$, la curva C2 fijando $x = a$.

A.- Curvas sobre la superficie en un punto P:

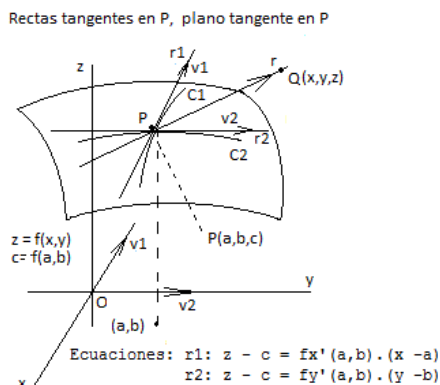
Si fijamos un valor $y = b$, tal que (x, b) está en D, la función $z = f(x, b)$ es de una variable independiente, y su gráfica es una curva C1 sobre la superficie. Es la curva que produce sobre la superficie la intersección con el plano $y = b$.

Curvas en un punto sobre la superficie



Análogamente, Si fijamos un valor $x = a$, tal que (a, y) está en D, la función $z = f(a, y)$ es de una variable independiente, y su gráfica es una curva C2 sobre la superficie anterior. Es la curva que produce sobre la superficie la intersección con el plano $x = a$.

B.- Rectas tangentes en P:



Fijado un punto $P(a, b, f(a, b))$ de la superficie, por este punto pasan las curvas antes descritas, y como tales curvas tienen su recta tangente en P:

$$C1: z = f(x, b),$$

$$\text{Tangente: } z = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot (x - a)$$

$$C2: z = f(a, y),$$

$$\text{Tangente: } z = f(a, b) + f'_y(a, b) \cdot (y - b)$$

C.- Plano tangente en $P(a, b, f(a, b))$:

Observa la figura anterior

El plano tangente a la superficie en el punto P contiene todas las rectas tangentes a la superficie en P.

Vamos a probar que la Ecuación de este plano tangente es

$$z = f(a,b,f(a,b)) + f_x(a, b).(x-a) + f_y(a, b).(y-b)$$

Dem.: La forma más adecuada la tenemos si operamos vectorialmente.

Para cualquier punto Q que esté en ese plano, tenemos

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$$

Tomo la base de vectores

$$\vec{v}_1 = (dx, 0, f'_x(P).dx)$$

$$\vec{v}_2 = (0, dy, f'_y(P).dy)$$

Entonces

$$(x,y,z) = (a,b,c) + k.(dx, 0, f'_x(P).dx) + h.(0, dy, f'_y(P).dy)$$

de donde obtengo

$$\begin{cases} x = a + k. dx \\ y = b + h. dy \\ z = c + k. f'_x(P). dx + h. f'_y(P). dy \end{cases}$$

y de aquí

$$k = \frac{x-a}{dx} , \quad h = \frac{y-b}{dy} ,$$

con lo cual

$$z = c + f'_x(P).dx. \frac{x-a}{dx} + f'_y(P).dy. \frac{y-b}{dy}$$

$$z - c = f'_x(P).(x-a) + f'_y(P).(y-b)$$

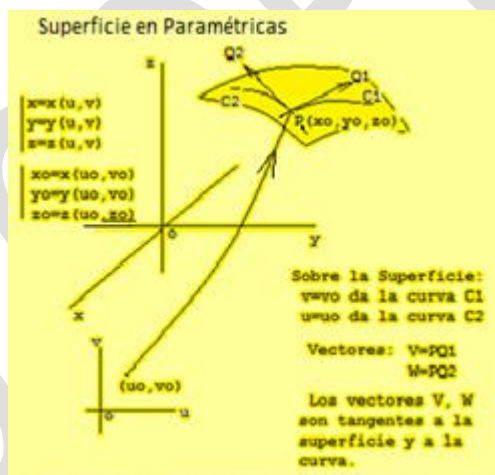
$$(Ecuación del plano tangente en P) \quad (1)$$

D).- Recta normal a la Superficie en P:

Volvemos a la definición de la superficie mediante ecuaciones paramétricas (véase la figura más abajo)

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, (u, v) \text{ recorriendo } D \text{ en } \mathbb{R}^2$$

Manteniendo el valor fijo $v = v_0$, cuando u recorre el intervalo $[a, b]$ los puntos (x, y, z) recorren un arco de la curva C_1 sobre la superficie.



El vector

$$V = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right) \cdot du$$

es tangente a esta curva C_1 al tiempo que lo es a la superficie.

Del mismo modo, si fijamos el valor $u = u_0$, cuando v recorre el intervalo $[c, d]$ los puntos (x, y, z) recorren un arco de la curva C_2 sobre la superficie.

El vector

$$W = \left(\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right) \cdot dv$$

es tangente a esta curva C_2 y a la superficie.

El vector ‘Producto vectorial’, $V \times W$ es perpendicular al plano cuyo subespacio director está generado por V y W . Este plano es el plano tangente.

Tenemos así el vector normal a la superficie en P :

$$N = V \times W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx}{du}(p) \cdot du & \frac{dy}{du}(p) \cdot du & \frac{dz}{du}(p) \cdot du \\ \frac{dx}{dv}(p) \cdot dv & \frac{dy}{dv}(p) \cdot dv & \frac{dz}{dv}(p) \cdot dv \end{vmatrix}$$

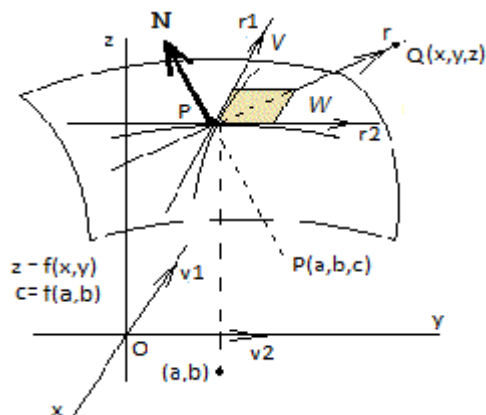
Def.:

Llamamos recta normal a la superficie en el punto P a la recta cuyo subespacio director está generado por N .

Diremos simplemente que N es un vector director de la recta.

Evidentemente esta recta es ortogonal (perpendicular) al plano.

En cartesianas:



En el caso de una superficie dada en cartesianas

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

En este caso

$$V = (dx, 0, f'_x(P).dx) = (1, 0, f'_x(P)).dx$$

$$W = (0, dy, f'_y(P).dy) = (0, 1, f'_y(P)).dy$$

Como vectores directores podemos tomar

$$V = (1, 0, f'_x(P))$$

$$W = (0, 1, f'_y(P))$$

y entonces

$$N = V_X W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'_x(p) \\ 0 & 1 & f'_y(p) \end{vmatrix} =$$

$$= -i.f'_x(p) - j.f'_y(p) + k = (-f'_x(p), -f'_y(p), 1)$$

Su módulo es

$$\text{Mod}(N) = \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2}$$

El vector normal unitario, cambiando además la orientación de N, es

$$n^{\rightarrow} = \frac{1}{\sqrt{1+f'_x(p)^2+f'_y(p)^2}} \cdot (f'_x(p), f'_y(p), -1)$$

En adelante lo designaremos por u: $u = (f'_x(p), f'_y(p), -1)$

Si Q(x,y,z) es un punto cualquiera de la recta normal

$$OQ = OP + k.u$$

$$(x,y,z) = (a,b,c) + k.(f'_x(p), f'_y(p), -1)$$

de donde las ecuaciones paramétricas de la recta normal

$$r = \begin{cases} x = a + k.f'_x(p) \\ y = b + k.f'_y(p) \\ z = c - k \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas de r:

Tengo $k = c - z$

$$r: \begin{cases} x = a + f'_x(p) \cdot (c - z) \\ y = b + f'_y(p) \cdot (c - z) \end{cases}$$

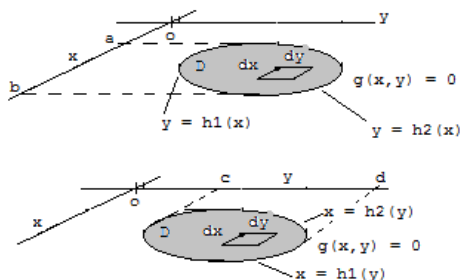
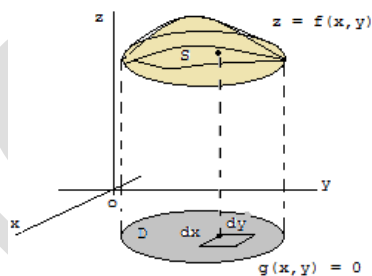
recta como intersección de dos planos.

5.3.- Integral doble

5.3.1.- Integral doble en coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas tenemos dos casos que se tratan de forma claramente distinta, como muestran las dos siguientes figuras.

$z = f(x, y)$, definida sobre un dominio D en $\mathbb{R}^2$



En la figura: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

La relación $g(x, y) = 0$, también llamada ligadura entre x, y (que sobre D son variables independientes), permitirá uno de los dos casos siguientes:

-Despejar $y = h(x)$

-Despejar $x = h(y)$

Tomaremos la más adecuada en cada caso.

La construcción de la integral doble es la siguiente. Consideramos el dominio D dividido en celdas de lados $\Delta x, \Delta y$, siendo su área $\Delta x \cdot \Delta y$. Al mismo tiempo en el interior de cada celda tomamos el punto $P(x_i, y_j, z_{ij})$ donde $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. El producto $z_{ij} \cdot (\Delta x \cdot \Delta y)$ es una aproximación del elemento de volumen dV . Cuando P recorre los “nudos” de una malla “marcada” sobre la superficie, la suma de los valores $z_{ij} \cdot (\Delta x \cdot \Delta y)$, mediante una doble suma, es una aproximación (gruesa) del volumen V :

$$V \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Una forma ordenada es la siguiente: Divido $[a; b]$ en n subintervalos $[x_i; x_{i+1}]$ donde $x_{i+1} = x_i + \Delta x$. De forma análoga divido el intervalo $[c; d]$ en m subintervalos: $[y_i; y_{i+1}]$ donde $y_{i+1} = y_i + \Delta y$

Evidentemente $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{m}$, de modo que cuando $n, m \rightarrow \infty$ los valores $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$

Def.:

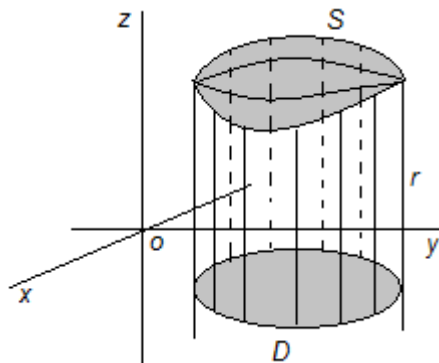
Llamamos integral doble al valor del siguiente límite cuando éste exista

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \cdot \Delta y) \cdot \Delta x$$

La representamos mediante

$$\iint_D f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

Significado:



Su valor coincide con el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie, lateralmente por el cilindroide generado por una recta r paralela al eje oz al recorrer el contorno de D (dominio de definición de $f(x, y)$), inferiormente por la región D del plano oxy .

Su cálculo:

En la práctica su valor lo obtenemos por integración sucesiva, que significa

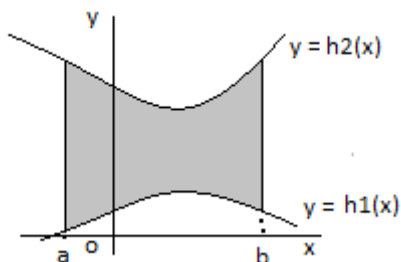
$$\int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx, \text{ o bien } \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \cdot dx \right) \cdot dy$$

donde el caso más favorable se da cuando x y y no tienen ligadura entre sí, siendo totalmente libres en el borde de D . En este caso

$$\iint_D f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Caso 1: Suponemos que la ligadura $g(x, y) = 0$ de donde es posible despejar $y = h(x)$. En este caso, para un valor de x del intervalo $[a; b]$ obtenemos valores extremos

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) \\ y_2 = h_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$



Suponemos que $h_1(x) < h_2(x)$ para todo x en D .

Entonces

$$\iint_D f(x, y). dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y). dy \right). dx = \int_a^b G(x). dx$$

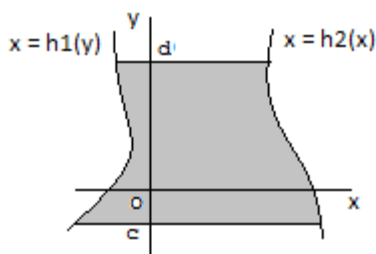
Caso 2: Puede ocurrir que de la relación $g(x, y) = 0$ resulte más fácil despejar $x = h(y)$, en este caso

$$\begin{cases} x_1 = h_1(y) \\ x_2 = h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

Suponemos que $h_1(y) < h_2(y)$ para todo y en D .

Entonces

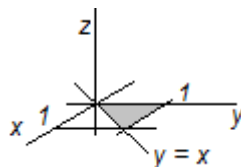
$$\iint_D f(x, y). dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y). dx \right). dy = \int_c^d H(y). dy$$



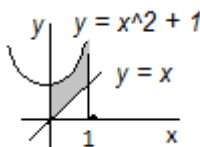
Ejemplos:

Calcula las siguientes integrales

1.- $I = \int_0^1 (\int_x^1 (x + y) \cdot dy) \cdot dx$



2.- $I = \int_0^1 (\int_x^{x^2+1} (x + y) \cdot dy) \cdot dx$



3.- Determina los límites de integración de

$$\iint_S f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

donde S es el recinto limitado por

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Sol.: $h_1(x) = -\sqrt{1 + x^2}$, $h_2(x) = \sqrt{1 + x^2}$

5.3.2.- Cambio de variable en la Integral doble

En ocasiones puede resultar más fácil utilizando otro sistema de referencia (coordenadas).

Caso 1: Cambio a coordenadas polares:

Las nuevas variables son r y g

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(g) \\ y = r \cdot \sin(g) \end{cases} \rightarrow z = f(r \cdot \cos(g), r \cdot \sin(g))$$

En el plano (x, y) el elemento de área es

$$ds = |(dx, 0, 0) \wedge (0, dy, 0)|, \text{ donde}$$

$$(dx, 0, 0) \wedge (0, dy, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, dx \cdot dy)$$

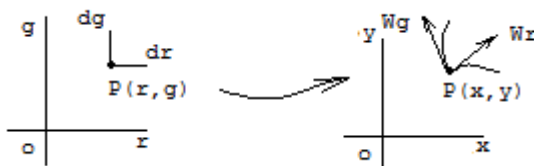
y su modulo es el valor positivo.

$$ds = dx \cdot dy$$

En el plano (r, g) :

Vectorialmente

$$W = OP = (x, y, 0) = (r \cdot \cos(g), r \cdot \sin(g), 0)$$



Los vectores direccionales (vector director) de las tangentes en un punto $p(r, g)$ son

$$w_r(p) = (x_r \cdot dr, y_r \cdot dr, 0) = (\cos(g) \cdot dr, \sin(g) \cdot dr, 0)$$

$$w_g(p) = (x_g \cdot dg, y_g \cdot dg, 0) = (-r \cdot \sin(g) \cdot dg, r \cdot \cos(g) \cdot dg, 0)$$

y su producto vectorial

$$w_r(p) \wedge w_g(p) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(g) \cdot dr & \sin(g) \cdot dr & 0 \\ -r \cdot \sin(g) \cdot dg & r \cdot \cos(g) \cdot dg & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (0, 0, r \cdot dr \cdot dg)$, donde se ha tenido en cuenta que

$$\cos^2(g) + \sin^2(g) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Su módulo es } |w_r(p) \wedge w_g(p)| &= \sqrt{0 + 0 + r^2 \cdot dr^2 \cdot dg^2} = \\ &= r \cdot dr \cdot dg \end{aligned}$$

Significa que, en la ‘transformación’ de cambio de variable,

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(g) \\ y = r \cdot \sin(g) \end{cases}$$

El valor $dr \cdot dg$ se transforma en $dx \cdot dy$, tomando éste el valor $r \cdot (dr \cdot dg)$. Esto es

$$dx.dy = r.(dr.dg)$$

Resumen:

El valor $dx.dy = r.(dr.dg)$ en el plano (x, y) es el ‘transformado’ del valor $dr.dg$ en el plano (r, g) .

El valor de $\iint_D f(x, y). dx. dy$ coincide con el valor

$$\iint_{D'} f(r.\cos(g), r.\sen(g)).r.dr.dg$$

ésto es:

$$\iint_D f(x, y). dx. dy = \iint_{D'} f(r.\cos(g), r.\sen(g)).r.dr.dg$$

donde D en el plano (x, y) es la imagen de D' en el plano (r, g) .

Caso 2: Caso general: Cambio a paramétricas

También llamadas curvilíneas

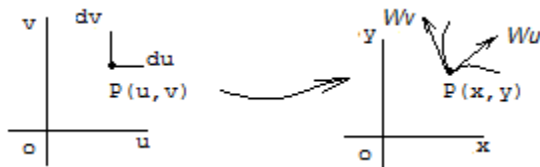
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, (u, v) \text{ recorriendo } D'$$

Transforma el recinto D' del plano (u, v) en el recinto D del plano (x, y) .

Vectorialmente tenemos

$$W = OP = (x, y, 0) = (x(u, v), y(u, v), 0)$$

En el punto $P(x_0, y_0, 0)$ tengo los vectores directores de las líneas ‘transformadas’



$$w_u = (x_u(p).du, y_u(p).du, 0)$$

$$w_v = (x_v(p).dv, y_v(p).dv, 0)$$

$$w_u \wedge w_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u(p).du & y_u(p).du & 0 \\ x_v(p).dv & y_v(p).dv & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.i + 0.j + \begin{vmatrix} x_u(p) & y_u(p) \\ x_v(p) & y_v(p) \end{vmatrix} . (du.dv).k,$$

Teniendo en cuenta que $|k| = 1$, el módulo del producto vectorial anterior toma el valor

$$|w_u \wedge w_v| = \begin{vmatrix} x_u(p) & y_u(p) \\ x_v(p) & y_v(p) \end{vmatrix} . (du.dv)$$

En Matemáticas designamos

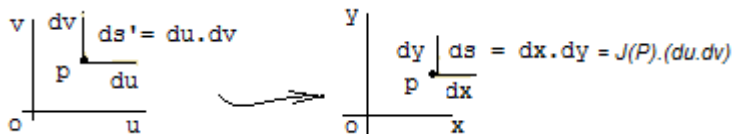
$$J(p) = \begin{vmatrix} x_u(p) & y_u(p) \\ x_v(p) & y_v(p) \end{vmatrix}$$

Así los valores $du.dv$ en el plano (u, v) , y $dx.dy$ en el plano (x, y) están relacionados por la igualdad

$$dx.dy = J(p).(du.dv)$$

(El valor $J(p)$ lo llamamos Jacobiano en el punto P .)

Gráficamente



Resumiendo: $dx.dy = J(p).du.dv$, y en la integración

$$\iint_S f(x, y). dx. dy = \iint_S f(u, v). J(P). du. dv$$

En la práctica:

En el mejor de los casos permitirá obtener una relación como $v = h(u)$ (ó $u = h(v)$), en cuyo caso operamos así

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{h_1(u)}^{h_2(u)} f(u, v). J(P). dv \right). du ,$$

Ejemplos:

1.- Calcula la siguiente haciendo el cambio a coordenadas polares:

$$I = \iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} . dx. dy$$

donde S es el círculo con radio $R = 1$ y centro el origen.

Sol.: Llegamos a

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot dr \right) \cdot dt = \frac{2}{4} \cdot \pi$$

2.- Pasando a polares calcula

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Sol.: Queda $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{2}{\cos(t)}} r \cdot f(\sqrt{r^2}) \cdot dr \right) \cdot dt$, y dependiendo de la expresión $f(r)$ se resolverá.

3.- Efectúa el cambio de variable: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ en la integral

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Sol.: En primer lugar se llega a

$$I = 1/2 \cdot \left[\int_0^1 \left(\int_{-u}^u f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot dv \right) \cdot du + \int_1^2 \left(\int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot dv \right) \cdot du \right]$$

y es que el nuevo recinto S' es un cuadrado cuyos lados son:

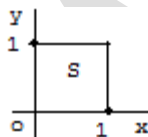
$$\begin{cases} v = u \\ u + v = 2 \\ u - v = 2 \\ v = -u \end{cases}$$

4.- Efectúa el cambio de variable: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ en la integral

$$I = \int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) \cdot dy) \cdot dx$$

El recinto S de integración es el cuadrado de lados:

$$y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$$



Sol.: Despejando x, y obtengo:

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Veamos en qué figura se convierte el recinto S

Aconsejo tener presente, por adelantado, lo que decimos en (*).

Camino 1: $y = 0, 0 \leq x \leq 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 0 = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, de donde

$0 \leq u + v \leq 2, 0 = u - v$, de donde: $v = u, y 0 \leq 2u \leq 2$, de donde

$$0 \leq u \leq 1, y 0 \leq v \leq 1$$

Camino 2: $x = 1, 0 \leq y \leq 1 \rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{u+v}{2} \\ 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \end{cases}$, de donde

$2 = u + v, 0 \leq u - v \leq 2$, de donde:

$$v = 2 - u, 0 \leq 2u - 2 \leq 2,$$

de donde $0 \leq u \leq 2$. Para que el contorno sea una línea continua ha de ser

$$1 \leq u \leq 2$$

Camino 3: $0 \leq x \leq 1, y = 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 1 = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, de donde

$0 \leq u+v \leq 2, 2 = u-v$, de donde:

$$v = u - 2, 0 \leq 2u - 2 \leq 2,$$

de donde $0 \leq u \leq 2$. Por continuidad de la línea de contorno ha de ser $2 \geq u \geq 1$

Camino 4: $x = 0, 0 \leq y \leq 1 \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{u+v}{2} \\ 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \end{cases}$, de donde

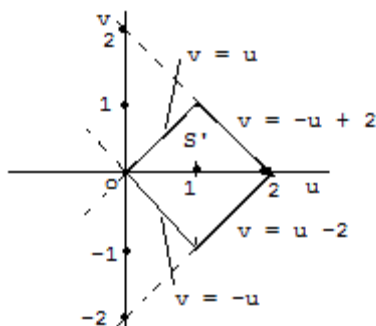
$0 = u + v, 0 \leq u - v \leq 2$, de donde

$$v = -u, 0 \leq 2u \leq 2,$$

de donde $0 \leq u \leq 1$. Por continuidad de la línea de contorno ha de ser

$$1 \geq u \geq 0$$

Observa la figura:



I =

$$\int_0^1 \left(\int_{-u}^u f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot dv \right) \cdot du + \int_1^2 \left(\int_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot dv \right) \cdot du$$

(*) Puede resultar más práctico transformar cada tramos de la línea quebrada que encierra el recinto S y después obtener sus puntos de corte (vértices de dicha línea quebrada), como sigue:

línea 1: $y = 0 \rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 0 = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, de donde línea 1: $v = u$

Línea 2: $x = 1 \rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{u+v}{2} \\ 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \end{cases}$, de donde $2 = u+v \rightarrow$

línea 2: $v = -u + 2$

Línea 3: $y = 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 1 \\ 1 = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, de donde $2 = u - v \rightarrow$

línea 3: $v = u - 2$

Línea 4: $x = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{u+v}{2} \\ 0 \leq \frac{u-v}{2} \leq 1 \end{cases}$, de donde $u + v = 0 \rightarrow$

línea 4: $v = -u$

Vértices del nuevo recinto S':

$V_1(0, 0)$, ya que $(0, 0) \rightarrow (0, 0)$ en S'

A continuación hallo corte de cada uno con el siguiente.

$$\begin{cases} v = u \\ v = -u + 2 \end{cases} \rightarrow u = -u + 2 \rightarrow u = 1 \rightarrow V2(1, 1)$$

$$\begin{cases} v = -u + 2 \\ v = u - 2 \end{cases} \rightarrow -u + 2 = u - 2 \rightarrow 2u = 4 \rightarrow V3(2, 0)$$

$$\begin{cases} v = u - 2 \\ v = -u \end{cases} \rightarrow u - 2 = -u \rightarrow 2u = 2 \rightarrow V4(1, -1)$$

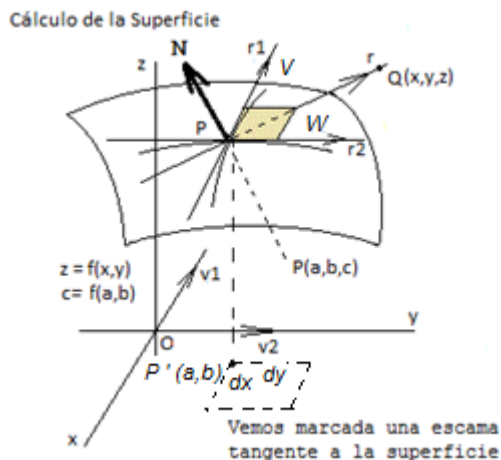
NOTA: En la práctica puede interesar hacer un cambio de variable para hacer más fácil obtener la Integral indefinida (Una primitiva). Obtenida la Integral indefinida deshacemos el cambio de variable (volver a las variables iniciales) y aplicamos los límites de integración originales.

En otro caso tendríamos que transformar los límites originales para obtener los nuevos límites de integración. Dicho esto podemos tener situaciones en las que resulte más fácil esta segunda opción.

5.4.- Cálculo de una Superficie

5.4.1.- En coordenadas cartesianas

Sea la función $z = f(x, y)$, que como sabemos determina una superficie (siguiente figura). En lo que sigue $D \subset \mathbb{R}^2$ representa la región del plano (x, y) cuya imagen Z (sobre la superficie) deseamos medir, calculando el valor de su superficie.



Fijado un punto $p'(a, b)$ en D , la celda rectangular determinada por los lados $a+dx$, $b+dy$, tiene imagen la celda dS sobre la superficie. La imagen del punto $p'(a, b)$ es $P(a, b, c)$, $c = f(a, b)$.

En este punto P tenemos el plano m_p tangente a la superficie. Sobre este plano tangente tenemos una celda dT (plana) cuya proyección (eje de proyección oz) es dS .

Cuando $dx, dy \rightarrow 0$, entonces dT tiende a coincidir con dS .

Hacemos que el punto $p'(a, b)$ recorra una parrilla predefinida sobre D : $p'(a, b) \rightarrow p'(a+dx, b)$, $p'(a, b) \rightarrow p'(a, b+dy)$, $p'(a, b) \rightarrow p'(a+dx, b+dy)$, y reiterando. (Si D fuese de la forma $[a; b] \times [c; d]$ sería más fácil imaginar la citada parrilla).

Esto nos lleva a que tenemos la superficie recubierta por celdas del tipo dS , cada una de estas asociada a una celda plana dT , y

aquellas y éstas se corresponden con celdas planas $dx \cdot dy$ en D . (Estamos identificando “celda” con el valor de la superficie que representan.

La suma de todas las celdas dT nos da una aproximación de la suma de todas las celdas dS , y, bajo las condiciones de continuidad, se cumple:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{\text{sobre } D} dT = \sum_{\text{sobre } Z} dS$$

donde $d = \max\{dx, dy\}$, y por tanto la parte Z de la superficie

$$S_Z = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{\text{sobre } D} dT \quad (\text{en adelante } S)$$

En el punto 5.2 hemos estudiado rectas y plano tangente a la superficie en P , y por los resultados allí obtenidos sabemos que

$$dT = \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} \cdot dx \cdot dy$$

(Aquí p es el punto $p'(a, b)$)

Entonces, teniendo en cuenta que $p'(x, y)$ recorre D , tenemos

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} \cdot dx \cdot dy$$

En la práctica una Integral doble se calcula mediante integrales sucesivas:

$$S = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} \cdot dy \right) \cdot dx$$

sobre el dominio D .

Hemos supuesto que x , y están relacionadas (ligadas) entre sí mediante $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$, y que hemos podido expresar $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$.

Cuando no exista ligadura entre ellas D será de la forma $D = [a; b] \times [c; d]$, y queda la forma más simple:

$$S = \int_a^b \left(\int_c^d \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \cdot dy \right) \cdot dx$$

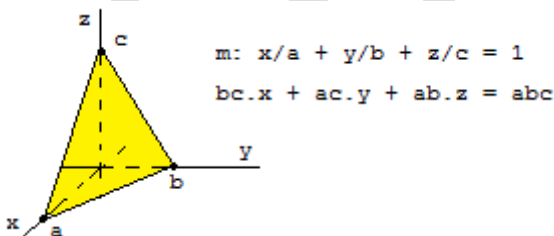
Ejemplo:

Superficie de la parte del plano

$$m: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

limitada por los planos coordenados.

Sol.: Observa la siguiente figura.



Recinto de integración: $z = 0 \rightarrow bx + ay = ab$,

$$bx + ay - ab = 0 \rightarrow y = \frac{b}{a} \cdot (a - x)$$

D es la región limitada por: $y = \frac{b}{a} \cdot (a - x)$, $x = 0$, $y = 0$.

Sobre la superficie tengo:

$$z = c.[1-(x/a + y/b)] = \frac{c}{ab} \cdot [ab - bx - ay]$$

$$z_x' = \frac{-c}{a}, \quad z_y' = \frac{-c}{b}; \quad --> 1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2} -->$$

$$\frac{1}{ab} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{ab} \cdot \int_0^a \left(\int_0^{b(x)} \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \cdot dy \right) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \cdot \int_0^a \left(\int_0^{b(x)} dy \right) \cdot dx \end{aligned}$$

Operando

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\int_0^{b(x)} dy \right) \cdot dx &= \int_0^a (y)_0^{b(x)} \cdot dx = \int_0^a \frac{b}{a} \cdot (a - x) \cdot dx = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \int_0^a (a - x) \cdot dx = \frac{b}{a} \cdot \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{b}{a} \cdot \left(a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$S = \frac{1}{ab} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$$

$$\text{Result: } S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2}$$

5.4.2.- Superficie en coordenadas curvilíneas

Sea $z = f(x, y)$, y hacemos $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \rightarrow z = f(x(u, v), y(u, v))$

Tengo

$$z_u = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dv} =$$

$$= f_x(x(u,v), y(u,v)) \cdot x_u + f_y(x(u,v), y(u,v)) \cdot y_u$$

$$z_v = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dv} =$$

$$= f_x(x(u,v), y(u,v)) \cdot x_v + f_y(x(u,v), y(u,v)) \cdot y_v$$

Tengo pues el sistema

$$\begin{cases} z_u = f_x(x(u,v), y(u,v)) \cdot x_u + f_y(x(u,v), y(u,v)) \cdot y_u \\ z_v = f_x(x(u,v), y(u,v)) \cdot x_v + f_y(x(u,v), y(u,v)) \cdot y_v \end{cases}$$

donde consideramos como incógnitas $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$

Aplicando método de Crámer (Vol. 10)

$$f_x(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}, \quad f_y(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

Entonces, realizando los cálculos llegamos a

$$1 + f_x(x(u,v), y(u,v))^2 + f_y(x(u,v), y(u,v))^2 =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2}$$

y por lo tanto, la expresión

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2} \cdot dx \cdot dy$$

se transforma en

$$S = \iint_{Z'} \frac{1}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2} \cdot du \cdot dv$$

5.4.3.- Resolución de casos prácticos

NOTA: El símbolo (#) significa que es un resultado confirmado por haber sido comprobado (corroborado de algún modo)

1.- Superficie de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = ax$,

cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

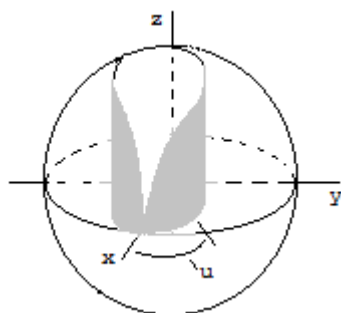
Sol.: Línea intersección de las dos superficies:

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}, \text{ Proyección de L sobre el plano } z = 0$$

$x^2 + y^2 = ax \rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0$, que puedo expresar así

$(x-a/2)^2 + y^2 - a^2/4 = 0$, de donde $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$,
que es el círculo con radio $r = \frac{a}{2}$ y centro $(\frac{a}{2}, 0, 0)$.

Esto nos dice que la proyección ortogonal, sobre el plano $z = 0$, de la sección del cilindro con la esfera es la circunferencia de radio $r = \frac{a}{2}$ y centro en $(\frac{a}{2}, 0, 0)$.



Esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Cilindro:

$$x^2 + y^2 = ax$$

NOTA: La parte sombreada representa la mitad de la superficie que nos piden, la otra mitad queda por la parte inferior al plano oxy , donde los valores de z son negativos.

Recinto de integración:

A pesar del resultado anterior nos interesa tomar el siguiente como recinto de integración.

Si L es la línea producida sobre la esfera, tomo su proyección (ortogonal), L' , sobre el plano XOZ : $y = 0$

Tengo

$$L': \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 = ax \end{cases} \rightarrow ax + z^2 = a^2 \rightarrow$$

$z = \pm\sqrt{a^2 - ax}$, relación entre x, z a lo largo de L'.

Tomo $z = +\sqrt{a^2 - ax}$ y la llamo $h(x) = +\sqrt{a^2 - ax}$

El recinto de integración, D, es el recinto del plano XOZ limitado por la línea L', y cumpliendo $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Sobre la superficie del cilindro tengo

$$y = \pm\sqrt{ax - x^2} , \text{ y tomo } y = +\sqrt{ax - x^2} \text{ y hacemos}$$

después uso de la simetría.

$$y_x' = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}, \quad y_z' = 0$$

$$1 + \left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \right)^2 = 1 + \frac{a^2+4x^2-4ax}{4.(ax-x^2)} = \frac{a^2}{4.(ax-x^2)}$$

Entonces

$$S' = \int_0^a \left(\int_0^{h(x)} \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} . dz \right) . dx = \frac{a}{2} . \int_0^a \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \left(\int_0^{h(x)} dz \right) . dx =$$

$$= \frac{a}{2} . \int_0^a \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} . \sqrt{a^2 - ax} . dx = \frac{a}{2} . \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - ax}{ax-x^2}} . dx = (*)$$

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - ax}{ax-x^2}} . dx = \sqrt{a} . \int \sqrt{\frac{a-x}{x.(a-x)}} . dx =$$

$$= \sqrt{a} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x}$$

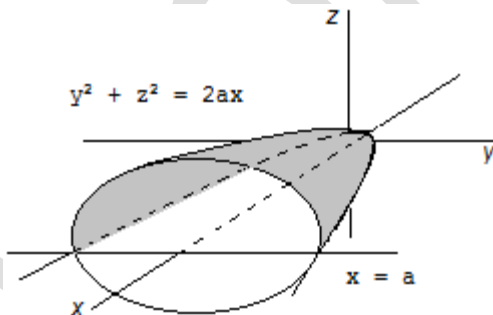
$$(*) = \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a} \cdot (\sqrt{x}) \Big|_0^a = a^2 \quad (\text{cuarta parte})$$

$$\text{Resultado: } S = 4a^2 \quad (\#)$$

2.- Superficie de la parte del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$,

limitada por el plano $x = a$.

Sol.:



Comprobaciones para la representación:

$$y^2 + z^2 = 2ax, \quad x = 0 \rightarrow y = z = 0 \rightarrow V(0,0,0)$$

$$x \geq 0, \quad x = k \rightarrow y^2 + z^2 = (\sqrt{2ak})^2$$

Esto nos dice que cualquier sección por un plano $x = k$ es un disco.

$y^2 = 2ax, \quad x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ sobre el plano $z = 0$ es una parábola.

Al ser z libre nos da un cilindroide de forma que cortando con $z = k$ resulta siempre esa misma parábola. En este cilindro ha de ser siempre $x \geq 0$.

Sobre la superficie S del paraboloide tengo $z = \pm\sqrt{2ax - y^2}$

Por simetría puedo tomar $z = +\sqrt{2ax - y^2}$

$$\text{Tengo } z'_x = \frac{2a}{2\sqrt{2ax-y^2}}, \quad z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{2ax-y^2}}$$

$$1 + \frac{a^2+y^2}{2ax-y^2} = \frac{2ax-y^2+a^2+y^2}{2ax-y^2} = \frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}$$

Recinto de integración:

Sobre el plano XOY tengo

$y = \pm\sqrt{2ax}$, tomo signo +, y entonces D es

$$D: \begin{cases} y^2 = 2ax \\ x \leq b \end{cases}; \text{ llamo } h(x) = \sqrt{2ax}$$

$$S' = \int_0^b \left(\int_0^{h(x)} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dx = (*)$$

Operando

$$\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2} = \frac{1}{\frac{2ax-y^2}{2ax+a^2}} = \frac{1}{\frac{2ax}{2ax+a^2} - \frac{y^2}{2ax+a^2}} = \frac{1}{\frac{2ax}{2ax+a^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2ax}\right)}$$

Integrando respecto de y :

$$\sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{2ax}}} \cdot dy = (**)$$

Hago $\text{sen}(t) = \frac{y}{\sqrt{2ax}}$, $dy = \sqrt{2ax} \cdot \cos(t) \cdot dt$

$$\int \frac{1}{\cos(t)} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \cos(t) \cdot dt = \sqrt{2ax} \cdot t = \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right)$$

$$(**) = \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right)$$

Aplicando Barrow

$$\int_0^{h(x)} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} \cdot dy = \left(\sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right) \right) \Big|_0^{\sqrt{2ax}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax}}\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{0}{\sqrt{2ax}}\right) = \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2ax+a^2}$$

Siguiendo

$$(*) = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^b \sqrt{2ax+a^2} \cdot dx = (**)$$

$$(\text{hago } t = 2ax + a^2)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{pi}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2a} \cdot dt &= \frac{pi}{4a} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{pi}{6.a} \cdot (2ax + a^2) \cdot \sqrt{2ax + a^2} \\ (**) &= \frac{pi}{6.a} \cdot ((2ax + a^2) \cdot \sqrt{2ax + a^2}) \Big|_0^a = \\ &= \frac{pi}{6.a} \cdot [(2a^2 + a^2) \cdot \sqrt{2a^2 + a^2} - a^3] = \\ &= \frac{pi}{6.a} \cdot [(3.a^2) \cdot a \cdot \sqrt{3} - a^3] = \frac{pi.a^2}{6} \cdot [3 \cdot \sqrt{3} - 1]\end{aligned}$$

Este valor obtenido es 1/4 de la que se pide, por tanto

$$S = 4 \cdot \frac{pi.a^2}{6} \cdot [3 \cdot \sqrt{3} - 1] = \frac{2.pi.a^2}{3} \cdot [3 \cdot \sqrt{3} - 1] \quad (\#)$$

Cuando tomo el plano $x = b$ queda:

$$\text{Resultado: } S = \frac{2.pi}{3.a} \cdot [(2ab + a^2) \cdot \sqrt{2ab + a^2} - a^3]$$

3.- Superficie de la parte del paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$,

comprendida entre el cilindro $y^2 = ax$ y el plano $x = a$. ($a > 0$)

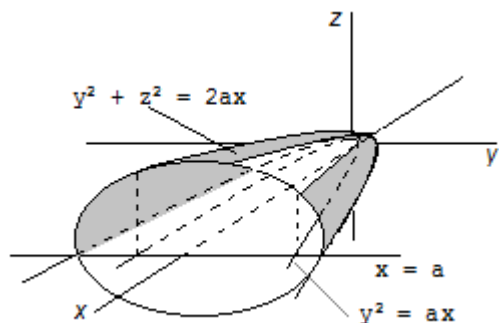
Sol.:

Comprobaciones para la representación:

$$y^2 + z^2 = 2ax, \quad x = 0 \rightarrow y = z = 0 \rightarrow V(0,0,0)$$

$$x \geq 0, \quad x = k \rightarrow y^2 + z^2 = (\sqrt{2ak})^2$$

Esto nos dice que cualquier sección por un plano $x = k$ es un disco.



Observa: $y^2 = ax$, $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ sobre el plano $z = 0$ es una parábola. Al ser z libre nos da un cilindroide de forma que cortando con $z = k$ resulta siempre esa misma parábola. En este cilindro ha de ser siempre $x \geq 0$.

Sobre la superficie S del paraboloides tengo

$$z = \pm \sqrt{2ax - y^2},$$

Por simetría puedo tomar $z = +\sqrt{2ax - y^2}$

Tengo

$$z'_x = \frac{2a}{2\sqrt{2ax - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{2ax - y^2}}$$

$$1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax - y^2 + a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}$$

Recinto de integración:

Sobre el plano XOY tengo la intersección con el cilindro:

$$y = \pm\sqrt{ax}, \text{ tomo signo } +$$

y tengo también la intersección con el paraboloide:

$$y = \pm\sqrt{2ax}, \text{ tomo signo } +$$

Entonces D es el recinto limitado por

$$D: \begin{cases} y^2 = ax \\ y^2 = 2ax; \\ x \leq a \end{cases}$$

$$\text{llamo } h_2(x) = \sqrt{2ax}, h_1(x) = \sqrt{ax}$$

Entonces

$$S' = \int_0^a \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} \cdot dy \right) \cdot dx = (*)$$

Transformamos el integrando

$$\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2} = \frac{1}{\frac{2ax-y^2}{2ax+a^2}} = \frac{1}{\frac{2ax}{2ax+a^2} - \frac{y^2}{2ax+a^2}} = \frac{1}{\frac{2ax}{2ax+a^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2ax}\right)}$$

Integrando respecto de y:

$$\sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{2ax}}} \cdot dy = (**)$$

$$\text{Hago } \sin(t) = \frac{y}{\sqrt{2ax}}, \quad dy = \sqrt{2ax} \cdot \cos(t) \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{\cos(t)} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \cos(t) \cdot dt = \sqrt{2ax} \cdot t = \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right)$$

$$(**) = \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right);$$

Aplicando Barrow

$$\begin{aligned} \int_{h1(x)}^{h2(x)} \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax-y^2}} \cdot dy &= \left(\sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right) \right) \Big|_{\sqrt{ax}}^{\sqrt{2ax}} = \\ &= \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax}}\right) - \\ &\quad - \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \text{arcSen}\left(\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{2ax}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2ax+a^2}{2ax}} \cdot \sqrt{2ax} \cdot \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2ax+a^2} - \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2ax+a^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{2ax+a^2} \end{aligned}$$

Integrando respecto de x

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a \sqrt{2ax+a^2} \cdot dx$$

(hago $t = 2ax + a^2$, $dt = 2.a.dx$)

$$\frac{\pi}{8.a} \cdot \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{\pi}{8.a} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} \right), \text{ por tanto}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^a \sqrt{2ax+a^2} \cdot dx &= \frac{\pi}{12.a} \cdot ((2ax+a^2) \cdot \sqrt{2ax+a^2}) \Big|_0^a = \\ &= \frac{\pi}{12.a} \cdot [(3 \cdot a^2) \cdot \sqrt{3 \cdot a^2} - a^3] = \frac{\pi}{12} \cdot a^2 \cdot [3 \cdot \sqrt{3} - 1] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la simetría

$$S = 4 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot a^2 \cdot [3 \cdot \sqrt{3} - 1]$$

$$\text{Result.: } S = \frac{\pi}{3} \cdot a^2 \cdot (3 \cdot \sqrt{3} - 1),$$

(#)

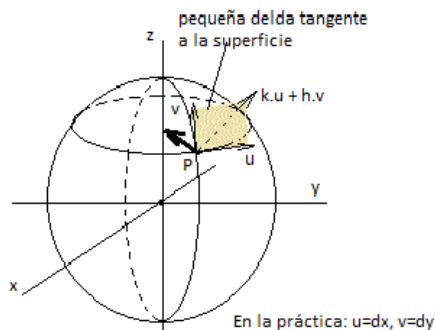
4.- La Esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = f(x, y)$$

$$f'_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

$$1 + f'_x(P)^2 + f'_y(P)^2 = \dots = \frac{R^2}{R^2 - (x^2 + y^2)} = \frac{R^2}{(R^2 - x^2) - y^2}$$

Superficie de la Esfera



Para un octante de esfera tenemos

$$S' = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{(R^2 - x^2) - y^2}} \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$(\text{hago } A = \sqrt{R^2 - x^2})$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^A \frac{R}{\sqrt{A^2 - y^2}} \cdot dy \right) \cdot dx = R \cdot \int_0^R \left(\frac{1}{A} \cdot \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{y}{A})^2}} \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$(\text{Cambio de variable } \frac{y}{A} = \text{sen}(t) \rightarrow dy = A \cdot \cos(t) \cdot dt, \quad t_1 < t < t_2)$$

$$= R \cdot \int_0^R \left(\frac{1}{A} \cdot A \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot dt \right) \cdot dx =$$

$$= R \cdot \int_0^R \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot dt \right) \cdot dx = R \cdot \int_0^R (\text{arcSen}(\frac{y}{A})) \Big|_0^A \cdot dx =$$

$$= R \cdot \int_0^R \frac{\pi}{2} \cdot dx = R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (x) \Big|_0^R = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Queda: } S \text{ esfera} = 8 \cdot R^2 \cdot \pi / 2 = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$$

5.- Superficie del Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right),$$

$z = 0$ nos da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ para el recinto de integración, de donde expresamos $y = g(x)$:

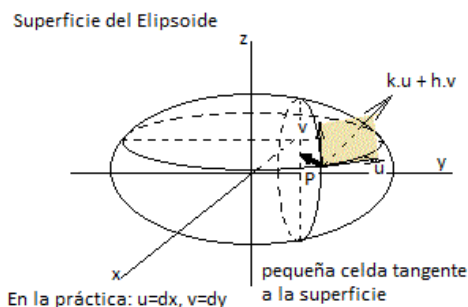
$$y^2 = \frac{1}{a^2} \cdot (a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2), \quad y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

Escribiremos $A = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ con el fin de simplificar.

$$z = \frac{c}{a.b} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2 - (b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2)} = f(x,y)$$

$$f_x(x,y) = \frac{c}{a.b} \cdot \frac{-2b^2x}{2\sqrt{a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)}} = \frac{c}{a.b} \cdot \frac{-b^2x}{\sqrt{a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{c}{a.b} \cdot \frac{-a^2y}{\sqrt{a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)}}$$



$$\begin{aligned} 1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 &= \frac{a^2b^2 \cdot (a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2)) + c^2 \cdot (b^4x^2 + a^4y^2)}{a^2b^2 \cdot (a^2b^2 - (b^2x^2 + a^2y^2))} = \\ &= \frac{(a^4b^4 - (a^2b^4x^2 + a^4b^2y^2)) + c^2 \cdot (b^4x^2 + a^4y^2)}{(a^4b^4 - (a^2b^4x^2 + a^4b^2y^2))} = \\ &= 1 + \frac{c^2 \cdot (b^4x^2 + a^4y^2)}{a^4b^4 - (a^2b^4x^2 + a^4b^2y^2)} = \\ &= 1 + \frac{c^2}{a^2b^2} \cdot \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^2b^2 - (b^4x^2 + a^4y^2)} = 1 - \frac{c^2}{a^2b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^2b^2}{b^4x^2 + a^4y^2}} \end{aligned}$$

La integral a resolver se presenta extremadamente difícil.

Para un octante del elipsoide sería

$$S' = \int_0^a \left(\int_0^A \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^2 b^2}{b^4 x^2 + a^4 y^2}}} \cdot dy \right) \cdot dx, \text{ donde}$$

$$A = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

NOTA:

Considerando el elipsoide como “micro deformación progresiva” de la esfera, afirmamos que su superficie puede ser aproximada por el valor

$$S \approx 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c})^2$$

(Tómese como una aproximación)

Esta aproximación será tanto mejor cuánto más se aproximen los semiejes a, b, c a un mismo valor R (radio de la esfera equivalente).

Más adelante veremos otra vez cómo obtener el valor de S.

6.- Superficie acotada del Paraboloide elíptico:

Paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \cdot z,$$

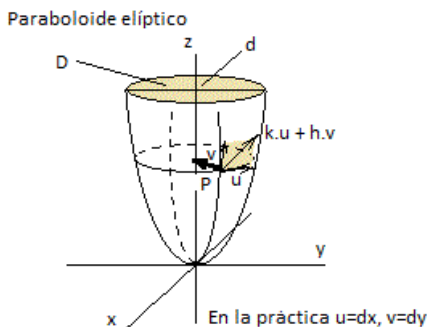
Sol.: Acotamos con el valor $z = d$

$$z = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$$

Cuando $z = d$ tengo $\frac{1}{k.d} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 1$, que es un elipse con semiejes:

$$a' = a \cdot \sqrt{k \cdot d}, \quad b' = b \cdot \sqrt{k \cdot d},$$

En lo que sigue represento a' por a , b' por b .



Recinto de integración: Es el recinto D limitado por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Integramos sobre el cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$.

Despejo y en función de x para el proceso de integración:

$$y^2 = a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2 = b^2 \cdot (a^2 - x^2), \quad y = b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Represento $b^2 = b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{k \cdot a^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{k \cdot b^2}$$

$$1 + \frac{a \cdot x^2}{k^2 \cdot a^4} + \frac{4 \cdot y^2}{k^2 \cdot b^2} = \frac{k^2 \cdot a^4 \cdot b^4 + 4 \cdot b^4 \cdot x^2 + 4 \cdot a^4 \cdot y^2}{k^2 \cdot a^4 \cdot b^4},$$

hacemos su raíz cuadrada

$$\frac{1}{k \cdot a^2 \cdot b^2} \cdot \sqrt{(k^2 \cdot a^4 \cdot b^4 + 4 \cdot b^4 \cdot x^2) + 4 \cdot a^4 \cdot y^2} \quad (1)$$

$$\text{Hago } A(x)^2 = k^2 \cdot a^4 \cdot b^4 + 4 \cdot b^4 \cdot x^2 = b^4 \cdot (k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2),$$

$$A(x) = b^2 \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}$$

En lo que sigue A representará A(x)

Entonces (1) queda así:

$$\frac{1}{k \cdot a^2 \cdot b^2} \cdot A \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a^2 \cdot y}{A}\right)^2},$$

y pasamos a integrar respecto de 'y' (prescindiendo del factor constante $\frac{1}{k \cdot a^2 \cdot b^2}$)

$$S' = \int_0^a A \cdot \left(\int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot a^2 \cdot y}{A}\right)^2} \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$(\text{Hago } \frac{2 \cdot a^2 \cdot y}{A} = \tan(t), \quad dy = \frac{A}{2 \cdot a^2} \cdot \sec^2(t) \cdot dt, \quad t = \arctan\left(\frac{2 \cdot a^2 \cdot y}{A}\right))$$

$$= \frac{1}{2 \cdot a^2} \cdot \int_0^a A^2 \cdot \left(\int \sec^2(t)^2 \cdot dt \right) \cdot dx = (*)$$

$$\text{Resuelvo} \quad \int \sec^2(t)^2 \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1/2. [\sec(t). \tan(t) + \ln(\sec(t) + \tan(t))] = \\
 &= 1/2. \left(\frac{2a^2 y}{A} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2 y}{A})) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln\left(\frac{2a^2 y}{A} + \sec(\arctan(\frac{2a^2 y}{A}))\right) \right) \Big|_0^{b^2} = \\
 &\quad \quad \quad (\text{donde } b^2 = b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}) \\
 &= 1/2. \left[\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2})) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln\left(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}))\right) \right] - \\
 &- 1/2. \left[\frac{2a^2}{A} \cdot 0 \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot 0)) + \ln\left(\frac{2a^2}{A} \cdot 0 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot 0)) \right) \right] = \\
 &= 1/2. \left[\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2})) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln\left(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}))\right) \right] - \\
 &- 1/2. [\ln(\sec(0))] = \\
 &\quad \quad \quad (\text{recuerda: } \sec(0)=1, \ln(1)=0) \\
 &= 1/2. \left[\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2})) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln\left(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \sec(\arctan(\frac{2a^2}{A} \cdot b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}))\right) \right] =
 \end{aligned}$$

(Teniendo en cuenta que $A = b^2 \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}$)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}})) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}} + \sec(\arctan(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}})))$$

(*) Sustituyo en $\frac{1}{2a^2} \cdot \int_0^a A^2 \cdot (\int \sec(t)^2 \cdot dt) \cdot dx$, y tengo

$$\frac{b^4}{4a^2} \cdot \int_0^a (k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2) \cdot \frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}} \cdot \sec(\arctan(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}})) \cdot dx +$$

$$+ \frac{b^4}{4a^2} \cdot \int_0^a (k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2) \cdot \ln(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}} +$$

$$+ \sec(\arctan(\frac{2a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{b \cdot \sqrt{k^2 \cdot a^4 + 4 \cdot x^2}}))) \cdot dx$$

NOTA: Puede comprenderse la dificultad para resolver una integral de este tipo. El interés del ejercicio puede estar en el tipo de los cálculos realizados. Entiéndase así.

7.- Superficie lateral del cono

Observa la figura y lee atentamente el texto

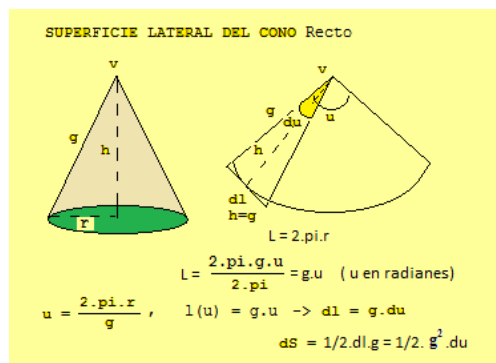
Obtendremos: $S = \pi \cdot g \cdot r$

Demost.:

Observando la figura: $dS = \frac{1}{2} \cdot dl \cdot g$

$$dl = \frac{2 \cdot \pi \cdot g \cdot du}{2 \cdot \pi} = g \cdot du, \quad du \text{ en radianes, } u \text{ en } [0; u_1]$$

$$dS = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot du$$



Observa también la siguiente figura.

La longitud del arco de circunferencia con radio g (del sector desarrollo del cono), es

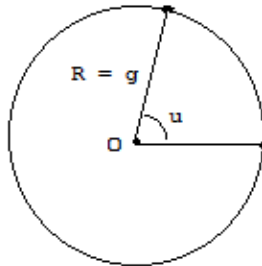
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r, \quad \text{y por otro lado}$$

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot g \cdot u_1}{2 \cdot \pi} = g \cdot u_1, \quad u_1 \text{ en radianes}$$

Por tanto $2 \cdot \pi \cdot r = g \cdot u_1$, de donde $u_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{g}$

Integrando

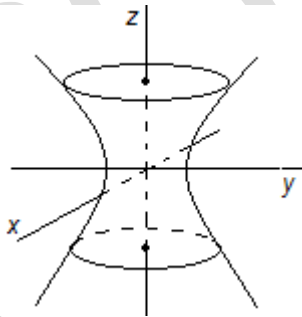
$$S = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot \int_0^{u1} du = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot (u)_0^{u1} = \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{g} = \pi \cdot g \cdot r$$



$$0 < u < u1$$

8.- Hiperboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Volumen:

$$z = k \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

Hago $h^2 = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$, y entonces: $\frac{x^2}{h^2 \cdot a^2} + \frac{y^2}{h^2 \cdot b^2} = 1$, que es una elipse.

Recordando el área de la elipse tengo

$$S(k) = \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c^2 + k^2}{c^2} \right), \text{ y por tanto}$$

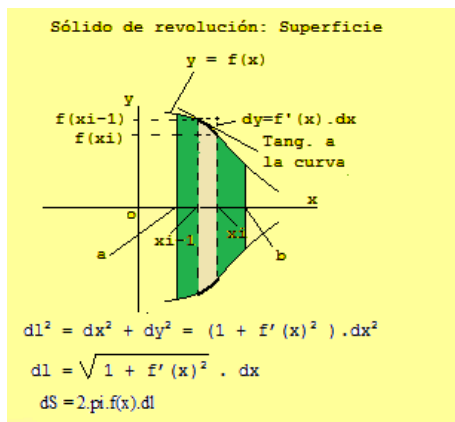
$$dV = S(k) \cdot dz = \pi \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{c^2 + k^2}{c^2} \right) \cdot dz = \pi \cdot \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot (c^2 + k^2) \cdot dz$$

Teniendo en cuenta la simetría tengo

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \int_0^k (c^2 + z^2) \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \left[c^2 \cdot k + \frac{k^3}{3} \right] = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot k \cdot \left[1 + \frac{k^2}{3 \cdot c^2} \right] \end{aligned}$$

5.5.- Superficie y Volumen de un Cuerpos de revolución

5.5.1.- Estudio teórico



A.- En coordenadas cartesianas:

Tenemos la gráfica de $y = f(x)$ en el plano, definida en el intervalo $[a; b]$. La hacemos girar 360° tomando como eje el de

coordenadas ox. El resultado es un sólido cuya superficie deseamos calcular. En un punto x de [a; b], el valor f(x) es el radio del círculo que describe. Si tomo un subintervalo [xi-1; xi] y el arco de curva producido correspondiente, tenemos una banda o franja dS sobre la superficie del sólido. Si ‘cortamos’ esta franja de forma que resulte una ‘tira’ en el plano, dS toma el valor aproximado que mostramos a continuación.

En un punto (x, f(x)), tenemos un segmento de tangente, sea dl su longitud. Se cumple

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + f'(x)^2).dx^2, \quad dl = \sqrt{1 + f'(x)^2}.dx$$

Entonces

$$dS \approx 2.\pi.f(x).dl = 2.\pi.f(x).\sqrt{1 + f'(x)^2}.dx, \text{ por tanto}$$

Superficie:

$$S = 2.\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1 + f'(x)^2}.dx \quad (1)$$

Para el volumen:

Consideramos el disco con radio f(x) y construyo una galleta con espesor (altura) Δx. Entonces

$$dV = \text{ÁreaDisco.Espesor} = \pi.f(x)^2.dx$$

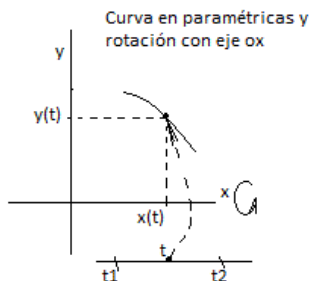
Por tanto
$$V = \pi.\int_a^b f(x)^2.dx \quad (2)$$

B.- En coordenadas paramétricas:

La curva viene definida mediante

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \text{ en } [t_1; t_2]$$

$$dx = x'(t).dt, \quad dy = y'(t).dt$$



$$dS = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} . dt$$

Por tanto:

$$S = 2.\pi.\int_{t_1}^{t_2} y(t).\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} .dt \quad (3)$$

Volumen:

$$V = \pi.\int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 . x'(t).dt \quad (4)$$

C.- En coordenadas polares:

Tenemos

$$\begin{cases} x = r(u).\cos(u) \\ y = r(u).\sen(u) \end{cases}, \quad u \text{ radianes en } [u_1; u_2]$$

$$x'(u) = r'(u) \cdot \cos(u) - r(u) \cdot \sin(u)$$

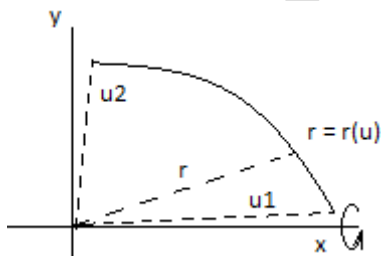
$$y'(u) = r'(u) \cdot \sin(u) + r(u) \cdot \cos(u)$$

Tengo

$$x'^2(u) + y'^2(u) = \dots = \dots =$$

$$= r^2(u) \cdot [\sin^2(u) + \cos^2(u)] + r'^2(u) \cdot [\cos^2(u) + \sin^2(u)] +$$

$$+ 2 \cdot r(u) \cdot r'(u) \cdot [\sin(u) \cdot \cos(u) - \sin(u) \cdot \cos(u)] = \dots = r^2(u) + r'^2(u)$$



Nos lleva a que

$$(dx)^2 + (dy)^2 = [r^2(u) + r'^2(u)] \cdot (du)^2$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{r^2(u) + r'^2(u)} \cdot du$$

Superficie:

Teniendo en cuenta (3)

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \int_{u1}^{u2} r(u) \cdot \sin(u) \cdot \sqrt{r(u)^2 + r'(u)^2} \cdot du$$

Volumen: Teniendo en cuenta (4)

$$V = \pi \int_{u_1}^{u_2} (y(u))^2 \cdot dx(u)$$

Desarrollamos el integrando:

$$y(u)^2 \cdot x'(u) \cdot du = [r(u) \cdot \text{sen}(u)]^2 \cdot [r'(u) \cdot \cos(u) - r(u) \cdot \text{sen}(u)] \cdot du,$$

y queda finalmente

$$V = \pi \int_{u_1}^{u_2} r(u)^2 \cdot \text{sen}^2(u) \cdot [r'(u) \cdot \cos(u) - r(u) \cdot \text{sen}(u)] \cdot du$$

Si r es constante:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{r^2} \cdot du = r \cdot du$$

Por tanto

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \int_{u_1}^{u_2} r \cdot \text{sen}(u) \cdot du = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \int_{u_1}^{u_2} \text{sen}(u) \cdot du$$

$$V = \pi \int_{u_1}^{u_2} r^2 \cdot \text{sen}^2(u) \cdot [-r \cdot \text{sen}(u)] \cdot du =$$

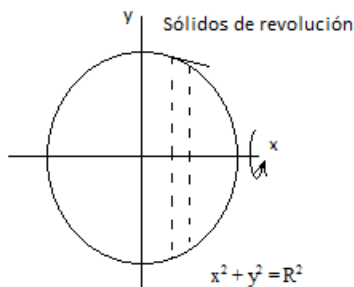
$$= - \pi \cdot r^3 \cdot \int_{u_1}^{u_2} \text{sen}^3(u) \cdot du$$

En los siguientes Ejemplos, algunos de los resultados ya son conocidos. Lo que sigue son ejemplos para que el alumno compruebe la utilización de lo que acabamos de mostrar.

5.5.2.- Aplicación-Resolución de casos concretos

Ejemplos:

1.- La Esfera como Cuerpo de revolución



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

En polares $\begin{cases} x = r(u) \cdot \cos(u) \\ y = r(u) \cdot \sin(u) \end{cases}, 0 < u < \pi$

Superficie:

$$S = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin(u) \cdot du = 2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot (-\cos(u)) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

Corroborar lo que conocemos de Geometría básica.

Volumen:

$$V = \pi \cdot r^3 \cdot \int_0^{\pi} \sin^3(u) \cdot du = 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u) \cdot du = (*)$$

Tengo

$$\int \operatorname{sen}^3(u).du = \dots = -\cos(u) + \frac{1}{3}.\cos^3(u), \text{ entonces}$$

$$(*) = 2.\pi.r^3.\frac{1}{3}.(-3.\cos(u) + \cos^3(u))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\begin{aligned} &= 2.\pi.r^3.\frac{1}{3}.(-3.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)) - (-3.\cos(0) + \cos^3(0)) \\ &= 2.\pi.r^3.\frac{1}{3}.(-3.0 + 0) - (-3.1 + 1) = \\ &= 2.\pi.r^3.\frac{1}{3}.2 = \frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{1}{3}.\pi.r^2.r \end{aligned}$$

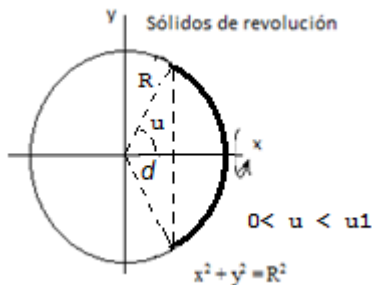
(#)

2.- Superficie del casquete y Volumen del Segmento esférico

Superficie:

$$\begin{aligned} S &= 2.R^2.\pi.\int_0^{u_1} \operatorname{sen}(u).du = 2.R^2.\pi.(-\cos(u))\Big|_0^{u_1} = \\ &= 2.R^2.\pi.(-\cos(u_1) + \cos(0)) = 2.R^2.\pi.[1 - \cos(u_1)] = \\ &= 2.R.\pi.[R - R.\cos(u_1)] = 2.R.\pi.[R - d] \end{aligned}$$

Cuando $u_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow S = 2.R^2.\pi = 1/2$ de esfera.



Volumen:

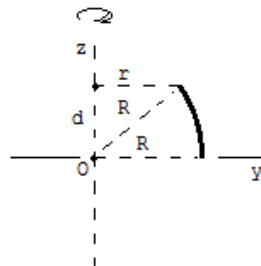
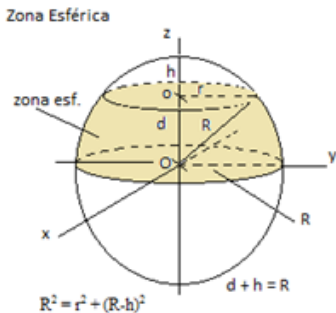
$$\begin{aligned}
 V &= \pi R^3 \int_0^{u_1} \sin^3(u) \, du = \\
 &= \pi R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(u) + \frac{1}{3} \cos^3(u) \right]_0^{u_1} = \\
 &= \pi R^3 \left[-\frac{1}{3} \cos(u_1) + \frac{1}{3} \cos^3(u_1) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{3} \pi R^3 [2 - 3 \cos(u_1) + \cos^3(u_1)] = \\
 &= \frac{\pi}{3} [2R^3 - 3R^2 d + d^3]
 \end{aligned}$$

Cuando $u_1 = \pi/2 \rightarrow V = \frac{2\pi}{3} R^3 = 1/2$ de la esfera.

3.- Superficie de una Zona Esférica, y volumen que encierra

Zona esférica es una parte de la superficie limitada por dos paralelos.

A) Suponemos que uno de los paralelos coincide con el ecuador.



Tomaré y, z como variables independientes, x variable dependiente: $x = f(y, z)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ Tengo } x = \sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}$$

Derivadas parciales

$$f_y(y, z) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}}, \quad f_z(y, z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}}$$

$$1 + f_y^2(y, z) + f_z^2(y, z) = \frac{R^2}{R^2 - (y^2 + z^2)}$$

La superficie de un cuarto de la Zona es

$$S' = \int_0^d \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}} \cdot dy \right) \cdot dz = (\text{hago } A = \sqrt{R^2 - z^2})$$

$$= \int_0^d \left(\frac{R}{A} \cdot \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{A}\right)^2}} \cdot dy \right) \cdot dz =$$

$$(\text{hago } \frac{y}{A} = \sin(t), \quad dy = A \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$= \int_0^d R \cdot \left(\int_{t_1}^{t_2} dt \right) \cdot dz = R \cdot \int_0^d [t]_{t_1}^{t_2} \cdot dz = R \cdot \int_0^d \left(\arcsen\left(\frac{y}{A}\right) \right) \Big|_0^A \cdot dz =$$

$$= R \cdot \int_0^d \frac{\pi}{2} \cdot dz = R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (z) \Big|_0^d = R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot d$$

$$\text{Por tanto } S_Z = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot d$$

Observa:

a) $d = R \rightarrow$ la zona se convierte en la semiesfera, y $S_Z = 2 \cdot \pi \cdot R^2$

b) Semiesfera – Casquete = $2 \cdot \pi \cdot R^2 - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot d =$

$= 2 \cdot \pi \cdot R \cdot [R - d] =$ Superficie del casquete.

Volumen que encierra la zona esférica:

Al seccionar con el plano $z = k$ obtengo un disco:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{R^2 - k^2})^2, \text{ con radio } r(k) = \sqrt{R^2 - k^2}$$

$$S_k = \pi \cdot (R^2 - k^2)$$

Haciendo variable el valor k e integrando

$$V_z = \pi \cdot \int_0^d (R^2 - z^2) \cdot dz = \pi \cdot \left(R^2 \cdot z - \frac{1}{3} \cdot z^3 \right) \Big|_0^d =$$

$$= \pi \cdot \left[R^2 \cdot d - \frac{1}{3} \cdot d^3 \right] = \frac{\pi}{3} \cdot d \cdot (3 \cdot R^2 - d^2) = \frac{\pi}{3} \cdot (3 \cdot R^2 \cdot d - d^3)$$

Observa:

$$a) \quad d = R \rightarrow V_z = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot R^3 = 1/2 \cdot (\text{Vol de la esfera})$$

$$b) \quad V_{\text{Semiesfera}} = V_{\text{Zona}} + V_{\text{Casquete}} =$$

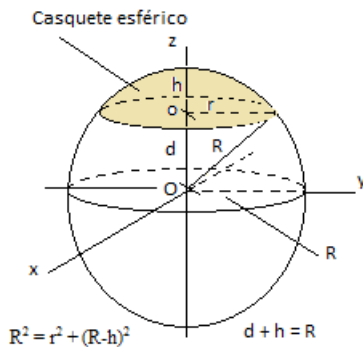
$$= \frac{\pi}{3} \cdot [(3 \cdot R^2 \cdot d - d^3) + (2 \cdot R^3 - 3 \cdot R^2 \cdot d + d^3)] = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot R^3 =$$

$$= 1/2 \cdot (\text{Vol de esfera})$$

4.- Superficie y Volumen de un Sector esférico

$$\text{Sector esférico} = \text{Segmento} + \text{Cono}$$

Al sector esférico lo podemos llamarlo **Cono esférico**



$$S.\text{Cono esférico} = S.\text{Casquete} + S.\text{Cono}$$

$$V.\text{Cono esférico} = V.\text{Casquete} + V.\text{Cono}$$

Separata:

Como buen Ejercicio calculamos de otra forma la superficie del casquete y el volumen que encierra, como sigue.

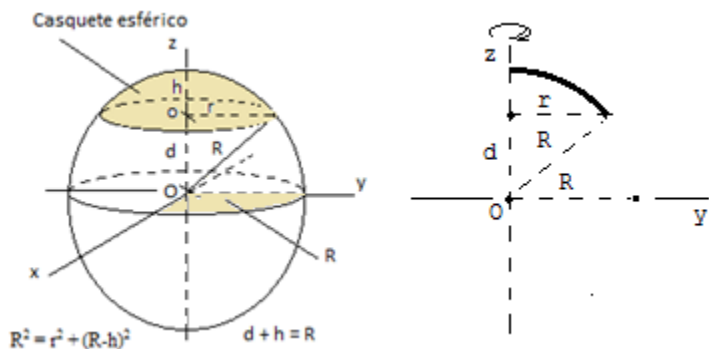
Superficie:

Seguimos los pasos dados en caso de la zona.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ Tengo } x = \sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}$$

$$f_y(y,z) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}}, \quad f_z(y,z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}}$$

$$1 + f_y^2(y,z) + f_z^2(y,z) = \frac{R^2}{R^2 - (y^2 + z^2)}$$



La superficie de un cuarto del casquete es (integrando entre los valores d y R):

$$S' = \int_d^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}} \cdot dy \right) \cdot dz = (\text{hago } A = \sqrt{R^2 - z^2})$$

$$= \int_d^R \left(\frac{R}{A} \cdot \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{y}{A})^2}} \cdot dy \right) \cdot dz =$$

$$(\text{hago } \frac{y}{A} = \text{sen}(t), dy = A \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$= \int_d^R R \cdot \left(\int_{t_1}^{t_2} dt \right) \cdot dz = R \cdot \int_d^R (t)_{t_1}^{t_2} \cdot dz = R \cdot \int_d^R \left(\text{arcSen} \left(\frac{y}{A} \right) \right)_{t_1}^{t_2} \cdot dz =$$

$$= R \cdot \int_d^R \frac{\pi i}{2} \cdot dz = R \cdot \frac{\pi i}{2} \cdot (z)_{t_1}^R = R \cdot \frac{\pi i}{2} \cdot (R - d) = \frac{\pi i}{2} \cdot (R^2 - R \cdot d)$$

Por tanto: $S_{ca} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R - d)$, (Coincide con lo obtenido antes)

Volumen:

Al seccionar con el plano $z = k$ obtengo un disco:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{R^2 - k^2} \right)^2, \text{ con } rk = \sqrt{R^2 - k^2}$$

$$S_k = \pi \cdot (R^2 - k^2)$$

Haciendo variable el valor k e integrando

$$\begin{aligned} V_{ca} &= \pi \cdot \int_d^R (R^2 - z^2) \cdot dz = \pi \cdot \left[R^2 \cdot z - \frac{1}{3} \cdot z^3 \right]_d^R = \\ &= \pi \cdot \left[\left(R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot R^3 \right) - \left(R^2 \cdot d - \frac{1}{3} \cdot d^3 \right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot [(2R^3) - (3R^2 \cdot d - d^3)] = \frac{\pi}{3} \cdot [2R^3 - d \cdot (3R^2 - d^2)] \\ &\quad \text{(coincide con el resultado anterior)} \end{aligned}$$

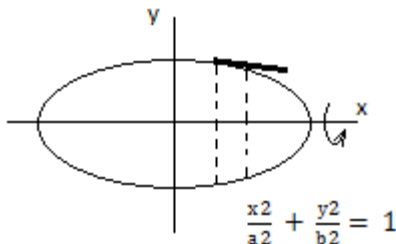
5.- Elipsoide obtenido por rotación de la Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con eje: ox si $b^2 - a^2 > 0$, eje oy si $a^2 - b^2 > 0$

Superficie:

$$a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2, \quad y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$$



$$f_x(x) = \frac{-b \cdot x}{a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$1 + f_x'(x)^2 = 1 + \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2 \cdot (a^2 - x^2)} = \frac{a^4 + (b^2 - a^2) \cdot x^2}{a^2 \cdot (a^2 - x^2)},$$

Integrando tenemos

$$\begin{aligned} S' &= 2\pi \cdot \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} \cdot dx = \\ &= 2\pi \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \int_0^a \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2} \cdot dx = \dots = \\ &= 2\pi \cdot b \cdot \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x\right)^2} \cdot dx = (*) \end{aligned}$$

$$(\text{Cambio variable: } \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x = \tan(t),$$

$$dx = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \sec^2(t) \cdot dt, \quad 1 + \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x\right)^2 = \sec^2(t)$$

Entonces

$$\begin{aligned} &2\pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \int \sec(t)^3 \cdot dt = \\ &= 2\pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\sec(t) \cdot \tan(t) + \ln(\sec(t) + \tan(t))] = \\ &= \pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \left[\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x \cdot \sec(\arctan(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x)) + \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x + \sec(\arctan(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2} \cdot x))\right) \right]_0^a = \\ &= \pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \left[\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \cdot \sec(\arctan(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a})) + \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} + \sec(\arctan(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}))\right) \right] - \\ &\quad - \pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot [0 + \ln(0 + 1)] = \end{aligned}$$

$$= \pi \cdot a \cdot b \cdot \sec\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right) + \\ + \pi \cdot b \cdot \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} + \sec\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right)\right),$$

válida cuando $b^2 - a^2 > 0$. Cuando $b = a$ tenemos una esfera.

Conclusión:

Superficie del Elipsoide de revolución

$$S = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \left[\sec\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} + \sec\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right)\right)\right) \right]$$

Volumen:

En el punto 6.3, Tema 6, obtendremos el volumen del Elipsoide, resultando:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c}{3}$$

Si hago $c = b$ el citado elipsoide es de revolución, y tengo

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot a \cdot b^2}{3}$$

No obstante, y para que sirva como ejemplo para los cálculos, lo calculamos de nuevo directamente.

Volumen del Elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Sol.: Para $x = k$ tengo $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2}$, que es un círculo con radio $R^2 = \frac{b^2 \cdot (a^2 - k^2)}{a^2}$, en el plano $x = k$

El área de este círculo es: $A(k) = \pi \cdot \frac{b^2 \cdot (a^2 - k^2)}{a^2}$

Haciendo k variable e integrando, tengo para el volumen:

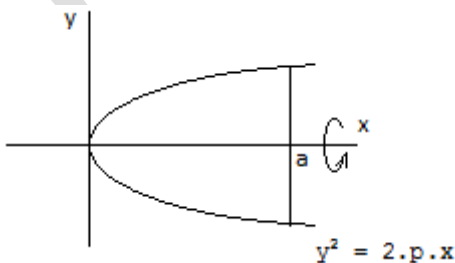
$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_0^a (a^2 - x^2) \cdot dx$$

$$\int_0^a (a^2 - x^2) \cdot dx = (a^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3) \Big|_0^a = a^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{2}{3} \cdot a^3 ,$$

$$\text{por tanto: } V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3 = \frac{4 \cdot b^2 \cdot a}{3} \cdot \pi$$

6.- Paraboloide por rotación de la parábola

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x, \quad \text{con eje } ox$$



Tengo: $y = \sqrt{2p \cdot x}$, x en $[0; a]$

Superficie:

$$f_x'(x) = \sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 1 + f_x'(x)^2 = 1 + \frac{2p}{4x} = \frac{2p+4x}{4x}$$

$$S = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{p+2x}{x}} dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{p} \cdot \sqrt{p+2x} dx =$$

(Cambio: $u = p+2x$, $du = 2dx$)

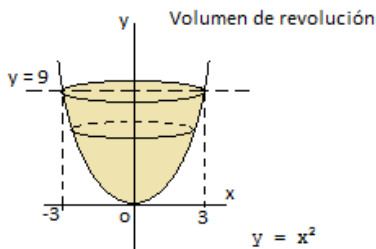
$$\begin{aligned} &= \pi \int_p^{2a+p} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \pi \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot [u^{\frac{3}{2}}]_p^{2a+p} = \pi \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot [(p+2x)^{\frac{3}{2}}]_0^a = \\ &= \pi \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot (p+2a)^{\frac{3}{2}} - \pi \cdot \sqrt{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot (p)^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} \cdot [\sqrt{(2a+p)^3} - \sqrt{p^3}] \end{aligned}$$

Conclusión: $S = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} \cdot [\sqrt{(2a+p)^3} - \sqrt{p^3}]$

Volumen: Teniendo en cuenta que $y^2 = 2px$, tengo

$$V = \pi \int_0^a 2px \cdot dx = 2\pi p \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^a = 2\pi p \cdot \left(\frac{1}{2} a^2 \right) = \pi p a^2$$

7.- Paraboloide de revolución cuando $y = x^2$, eje oy



Sea $y = x^2$, definida en $[-3, 3]$. Tomo también la recta $y = 9$, y hacemos girar alrededor del eje oy el recinto que limitan.

$$V' = \int_{-3}^3 x^4 \cdot dx = \left(\frac{1}{5} \cdot x^5 \right)_{-3}^3 = (48,6) - (-48,6) = 97,2$$

$$V = \pi \cdot V' = 305,3538 \text{ u}$$

8.- Hiperboloide de revolución: Rotación de la Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ eje de rotación } oy$$

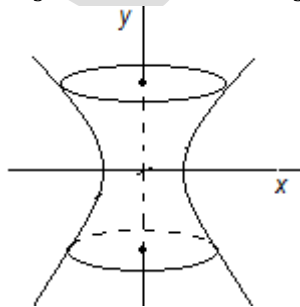
Volumen:

$$y = k \rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + k^2)$$

Entonces $S(k) = \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + k^2)$, y por tanto

$$dV = S(k) \cdot dy \rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \int_0^k (b^2 + k^2) \cdot dy =$$

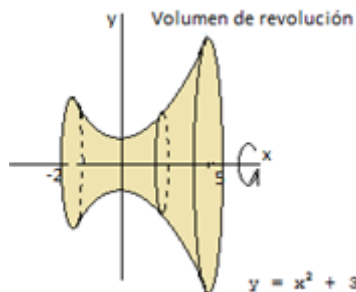
$$= 2 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(b^2 \cdot k + \frac{k^3}{3} \right) = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot k \cdot \left(1 + \frac{k^2}{3b^2} \right)$$



9.- Rotación de una curva $y = f(x)$ con eje ox

Sea la curva $y = x^2 + 3$, en el plano oxy, definida en el intervalo $[-2, 5]$. La hacemos girar alrededor del eje ox.

$$f(x)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$$



$$\begin{aligned} V' &= \int_{-2}^5 (x^2 + 3)^2 \cdot dx = (1/5 \cdot x^5 + 6/3 \cdot x^3 + 9x) \Big|_{-2}^5 = (920) - (-40,4) \\ &= 960,4 \quad \rightarrow V = \pi \cdot V' = 3017,0966 \text{ u.} \end{aligned}$$

10.- Bóveda de Viviani:

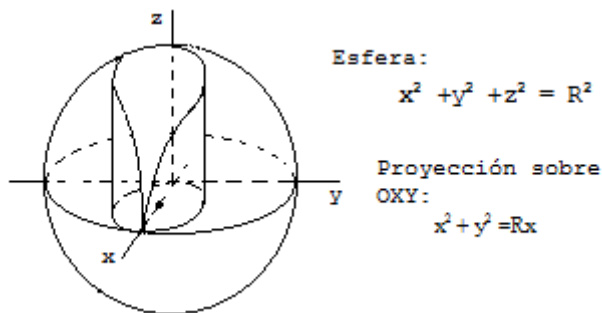
Curva de Viviani es la curva sobre la esfera que resulta al imponer la condición: $v = u$

$$\text{Para la esféricas: } \begin{cases} x = R \cdot \cos(v) \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \cos(v) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(v) \end{cases}$$

La condición $v = u$ nos lleva a que expresión paramétrica

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(u) \end{cases}$$

(1)



Tomando las expresiones de x , y tenemos

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \sin(u) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 =$$

$$= R^2 \cdot [\cos^4(u) + \cos^2(u) \cdot \sin^2(u)] =$$

$$= R^2 \cdot [\cos^2(u) \cdot (\cos^2(u) + \sin^2(u))] = R^2 \cdot \cos^2(u) = R \cdot x$$

He obtenido la relación: $x^2 + y^2 = R \cdot x$, que representa un cilindro.

Representa también la proyección de la curva (1) sobre el plano $z = 0$, y por tanto el dominio D de integración es el disco con ecuación

$$x^2 + y^2 = R \cdot x \quad (\text{en el plano } (x, y))$$

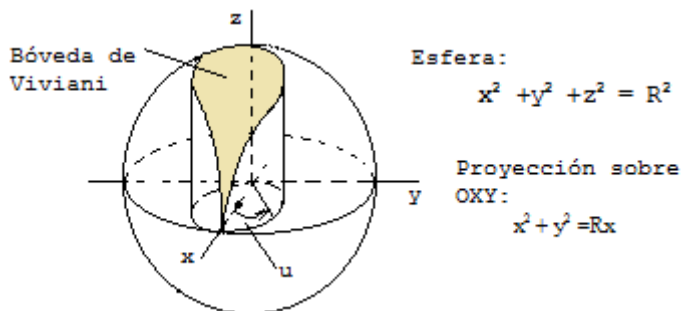
Comprueba que esta proyección es el círculo con radio $r = R/2$, y centro el punto $(R/2, 0)$.

Observa que:

La curva de Viviani es la intersección de la esfera con radio R y el cilindro

$$x^2 + y^2 = R.x$$

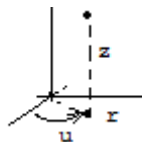
Superficie de la bóveda:



Obtendremos la mitad de la bóveda superior.

Pasamos a coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(u) \\ y = r \cdot \text{sen}(u) \\ z = z \end{cases}$$

Vector $w = (r \cdot \cos(u), r \cdot \text{sen}(u), 0)$



$$w_r = (\cos(u), \text{sen}(u), 0),$$

$$w_u = (-r \cdot \text{sen}(u), r \cdot \cos(u), 0)$$

$$w_r \wedge w_u = r \cdot (0, 0, 1) \rightarrow dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot du$$

Además: $z^2 = R^2 - r^2$, y la integral queda de la forma

(Calculando la mitad de la superficie)

$$\begin{aligned} S' &= R \iint_{D'} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \cdot du = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{R \cos(u)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \right) \cdot du = \\ &= \dots = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot (1 - \sin(u)) \cdot du = \dots = R^2 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } S = 4 \cdot R^2 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = 2 \cdot R^2 \cdot [\pi - 2]$$

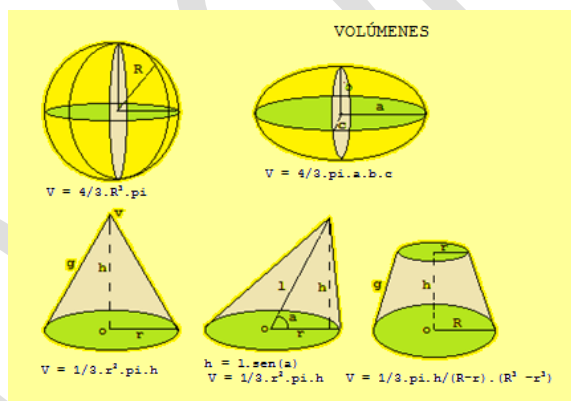
(#)

\$\$\$oOo\$\$\$

Tema 6

Integral Triple

Cálculo de Volúmenes



6.1.- Integral triple. Casos resueltos

Su definición es análoga a la integral doble con la diferencia que ahora tenemos tres variables independientes, y el dominio de integración es un volumen V .

En este caso el volumen V del sólido lo dividimos en pequeños cubos con aristas Δi , Δj , Δk , cuyo volumen es $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

El volumen V queda aproximado por la suma

$$V \cong \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^l \Delta_k) \cdot \Delta_j) \cdot \Delta_i, \text{ que podemos}$$

expresar también de la forma $V \cong \sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} \Delta_i \cdot \Delta_j \cdot \Delta_k$

Evidentemente, cuando $n \rightarrow +\infty$, $m \rightarrow +\infty$, $l \rightarrow +\infty$, la medida de $\Delta_i \rightarrow 0$, $\Delta_j \rightarrow 0$, $\Delta_k \rightarrow 0$, y la aproximación tiende a ser cada vez mejor.

Def.:

Por definición su valor es el resultado del límite (cuando exista) del miembro derecha de la igualdad:

$$V = \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^l \Delta_k) \cdot \Delta_j) \cdot \Delta_i$$

Este valor de la triple suma lo designamos mediante

$$\iiint_V dx \cdot dy \cdot dz$$

Si tengo una función $f(x, y, z)$ definida sobre el volumen V , en cada cubo $\Delta V = \Delta i \cdot \Delta j \cdot \Delta k$, tomo el valor máximo $M_{(i, j, k)}$ y el valor mínimo $m_{(i, j, k)}$, y puedo formar las sumas inferior y superior:

$$\sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} m(i, j, k). (\Delta_i. \Delta_j. \Delta_k)$$

$$\sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} M(i, j, k). (\Delta_i. \Delta_j. \Delta_k)$$

Bajo las condiciones de continuidad estas sumas acotan inferiormente y superiormente un valor T, y de tal modo que la aproximación a este valor es tanto mejor cuanto mayor sean los valores de n, m, l. También por continuidad el valor de los siguientes dos límites coincidirán precisamente en el valor T, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} m(i, j, k). (\Delta_i. \Delta_j. \Delta_k) = T =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1, j=1, k=1}^{n, m, l} M(i, j, k). (\Delta_i. \Delta_j. \Delta_k)$$

El valor T de este límite, cuando existe, lo representamos mediante

$$T = \iiint_V f(x, y, z). dx. dy. dz$$

donde V es el dominio (un volumen) de la función $u = f(x, y, z)$.

Su cálculo:

En la práctica su valor lo obtenemos por integración sucesiva (como en el caso de la integral doble), que significa

$$T = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z). dz \right). dy \right). dx$$

o de otra forma análoga. Escribiremos

$$\iiint_V f(x, y, z). dx. dy. dz =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z). dz \right). dy \right). dx$$

La dificultad reside en obtener las ligaduras $z = g(x,y)$, $y = h(x)$.

Ejemplos:

1.- Calcula

$$I = \iiint_V x^3 y^2 z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

donde V queda definido por
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq x \cdot y \end{cases}$$

Sol.:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx = \dots = \frac{1}{110}$$

(Resuelto en el punto 8.6)

2.- Calcula

$$I = \iiint_V x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

donde V es el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Sol.: Seccionando V mediante un plano paralelo al plano coordenado YOZ, lo cual se consigue haciendo $x = k$ constante, obteniendo la elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} + \frac{z^2}{c^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} + \frac{z^2}{c^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} = 1$$

El área S_{yz} encerrada por esta elipse toma el siguiente valor

$$S_{yz} = \pi \cdot \sqrt{b^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \frac{a^2 - k^2}{a^2}} = \pi \cdot \frac{b \cdot c \cdot (a^2 - k^2)}{a^2}$$

Haciendo k variable, es decir volviendo a la variable x , tengo

$$S_{yz}(x) = \pi \cdot \frac{b \cdot c \cdot (a^2 - x^2)}{a^2}, \text{ y por tanto}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= \int_{-a}^a S_{yz}(x) \cdot dx = \\ &= \frac{\pi \cdot b \cdot c}{a^2} \cdot \int_{-a}^a x^2 \cdot (a^2 - x^2) \cdot dx \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a x^2 \cdot (a^2 - x^2) \cdot dx = \left(a^2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-a}^a =$$

$$= \left(\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5} \right) - \left(-\frac{a^5}{3} + \frac{a^5}{5} \right) = \frac{2 \cdot a^5}{15} - \frac{-2 \cdot a^5}{15} = \frac{4 \cdot a^5}{15}$$

$$\text{Y finalmente: } I = \frac{\pi \cdot b \cdot c}{a^2} \cdot \frac{4 \cdot a^5}{15} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot b \cdot c \cdot a^3}{15}, \quad (\#)$$

3.- Determina los límites de integración de

$\iiint_V f(x, y, z) \cdot dx dy dz$ en cada uno de los siguientes casos:

a) V es el tetraedro limitado por los planos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) V es el cilindro limitado por las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \\ z = k \end{cases}$$

c) V es un cono limitado por las superficies

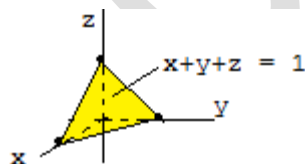
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \\ z = c \end{cases}$$

d) V es el volumen limitado por las superficies

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

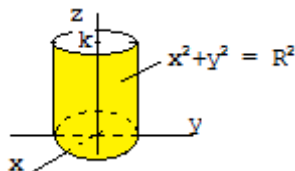
Sol.:

a) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$



b) Teniendo en cuenta la simetría:

$$\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_0^k f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$



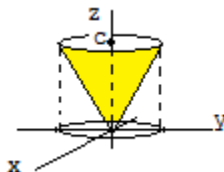
c) Teniendo en cuenta la simetría

$$z = c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \rightarrow$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$b^2 \cdot c^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot c^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot z^2 \rightarrow z = c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

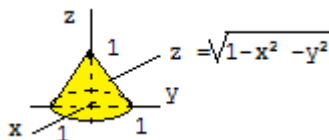
$$\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \left(\int_{\frac{c}{a \cdot b} \sqrt{b^2 x^2 + a^2 y^2}}^c f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$



d) Teniendo en cuenta la simetría

$$z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$z = k \rightarrow x^2 + y^2 = 1 - k$, Puesto que $1 - k$ ha de ser ≥ 0 en valor de z ha de ser: $0 \leq z \leq 1$. Para $z = 1$ tengo $x^2 + y^2 = 0 \rightarrow x = y = 0$



$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$

4.- Calcula

$$I = \iiint_V x^3 y^2 z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

donde V queda definido por
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq x \cdot y \end{cases}$$

$$\text{Sol.: } I = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^3 y^2 \left(\int_0^{xy} z \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx = \int_0^1 \left(\int_0^x x^3 y^2 \cdot \frac{z^2}{2} \cdot dy \right) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^5 \cdot \left(\int_0^x y^4 \cdot dy \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^5 \cdot \frac{y^5}{5} \cdot dx = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{x^{11}}{11} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{110} \quad (\#) \end{aligned}$$

$$5.- \text{Calcula } \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Sol.:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+y+1)+z}} \cdot dz = \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = 2 \cdot t^{\frac{1}{2}}, \text{ donde } t = (x+y+1)+z$$

$$2 \cdot \left(\sqrt{(x+y+1)+z} \right) \Big|_0^1 = 2 \cdot \sqrt{x+y+2} - 2 \cdot \sqrt{x+y+1}$$

$$\int \sqrt{(x+2)+y} \cdot dy = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}, \text{ donde } t = (x+2)+y$$

$$\frac{2}{3} \cdot ((x+2)+y) \cdot \sqrt{x+2+y} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x+3) \cdot \sqrt{x+3} - \frac{2}{3} \cdot (x+2) \cdot \sqrt{x+2}$$

$$\int \sqrt{(x+1)+y} \cdot dy = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}, \text{ donde } t = (x+1)+y$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot ((x+1)+y) \cdot \sqrt{x+1+y} \Big|_0^1 &= \\ &= \frac{2}{3} \cdot (x+2) \cdot \sqrt{x+2} - \frac{2}{3} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Tengo: } 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (x+3) \cdot \sqrt{x+3} - \frac{2}{3} \cdot (x+2) \cdot \sqrt{x+2} \right] -$$

$$-2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (x+2) \cdot \sqrt{x+2} - \frac{2}{3} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} \right] =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{8}{3} \cdot (x+2) \cdot \sqrt{x+2} + \frac{4}{3} \cdot (x+3) \cdot \sqrt{x+3} + \\ &\quad + \frac{4}{3} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

$$\int (x+2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \int t^{\frac{3}{2}} \cdot dt = \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}}, \text{ donde } t = x+2$$

$$\frac{2}{5} \cdot ((x+2)^{\frac{5}{2}}) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{3^5} - \sqrt{2^5}) = \frac{18}{5} \cdot \sqrt{3} - \frac{8}{5} \cdot \sqrt{2}$$

$$\int (x+3)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \int t^{\frac{3}{2}} \cdot dt = \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}}, \text{ donde } t = x+3$$

$$\frac{2}{5} \cdot ((x+3)^{\frac{5}{2}}) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{4^5} - \sqrt{3^5}) = \frac{32}{5} \cdot \sqrt{4} - \frac{18}{5} \cdot \sqrt{3}$$

$$\int (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \int t^{\frac{3}{2}} \cdot dt = \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}}, \text{ donde } t = x+1$$

$$\frac{2}{5} \cdot ((x+1)^{\frac{5}{2}}) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{2^5} - \sqrt{1^5}) = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{5}$$

$$\text{Tengo: } \frac{-8}{3} \cdot \left[\frac{18}{5} \cdot \sqrt{3} - \frac{8}{5} \cdot \sqrt{2} \right] + \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{32}{5} \cdot \sqrt{4} - \frac{18}{5} \cdot \sqrt{3} \right] +$$

$$+ \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{8}{5} \cdot \sqrt{2} - \frac{2}{5} \right] = \sqrt{3} \cdot \left[\frac{-144-72}{15} \right] + \sqrt{2} \cdot \left[\frac{64+32}{15} \right] + \frac{256-8}{15} =$$

$$= -\frac{72}{5} \cdot \sqrt{3} + \frac{32}{5} \cdot \sqrt{2} + \frac{248}{15} =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot [-216 \cdot \sqrt{3} + 96 \cdot \sqrt{2} + 248] \quad (\#)$$

$$6.- \text{ Calcula } \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Sol.:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)-z^2}} \cdot dz &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}} \cdot dz = (*) \end{aligned}$$

$$\text{hago cambio } \text{sen}(t) = \frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$dz = \sqrt{a^2-x^2-y^2} \cdot \cos(t) \cdot dt$$

$$(*) = \int dt = t = \text{arcSen}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)$$

$$\left(\text{arcSen}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right) \right) \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Continuando

$$\int \frac{pi}{2} \cdot dy = \frac{pi}{2} \cdot y \rightarrow \frac{pi}{2} \cdot (y)]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{pi}{2} \cdot \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\frac{pi}{2} \cdot \int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot dx = (*) ,$$

hago cambio $\text{sen}(t) = \frac{x}{a}$, $dx = a \cdot \cos(t) \cdot dt$

$$(*) = \frac{pi}{2} \cdot a^2 \cdot \int \cos^2(t) \cdot dt = \frac{pi}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t)\right) =$$

$$(*) = \frac{pi}{2} \cdot a^2 \cdot \int \cos^2(t) \cdot dt = \frac{pi}{2} \cdot a^2 \cdot \int \frac{1+\cos(2t)}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{pi}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t)\right) =$$

$$(\text{Recuerda que } \text{sen}(2t) = 2 \cdot \text{sen}(t) \cdot \cos(t))$$

$$= \frac{pi \cdot a^2}{4} \cdot \left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \cos\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) -->$$

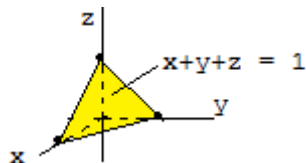
$$\begin{aligned} \frac{pi \cdot a^2}{4} \cdot \left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \cos\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) \Big|_0^a &= \\ &= \frac{pi \cdot a^2}{4} \cdot \left[\left(\frac{pi}{2} + 1.0\right) - (0 + 0.1)\right] = \frac{pi^2 \cdot a^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Res.: } \frac{pi^2 \cdot a^2}{8} \quad (\#)$$

7.- Calcula $I = \iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \cdot dx dy dz$

donde V es el volumen limitado por los planos coordenados y el plano $m: x+y+z = 1$

Sol.:



Límites de integración:

$$z = 1-(x+y)$$

$$z = 0 \rightarrow x+y = 1 \rightarrow y = 1-x$$

Por tanto $I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$

Integro respecto z:

$$\int \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \cdot dz = (*), \text{ hago } t = x+y+z+1, dt = dz$$

$$\int t^{-3} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot t^{-2} = \frac{-1}{2 \cdot (x+y+z+1)^2} \rightarrow \left(\frac{-1}{2 \cdot (x+y+z+1)^2} \right) \Big|_0^{1-x-y} =$$

$$= \frac{-1}{2 \cdot (2)^2} - \frac{-1}{2 \cdot (x+y+1)^2} = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

Integro respecto y: $\int -\frac{1}{8} \cdot dy = -\frac{1}{8} \cdot y \rightarrow$

$$\frac{-1}{8} \cdot (y) \Big|_0^{1-x} = -\frac{1}{8} \cdot [(1-x) - 0] = \frac{x-1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{(x+y+1)^2} \cdot dy = (*) , \text{ hago } t = x+y+1, dt = dy$$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \cdot \int t^{-2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{t} = \frac{-1}{2 \cdot (x+y+1)} \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y+1} \right) \Big|_0^{1-x} = \\ &= \frac{-1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{x+1} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{Integro respecto } x: \frac{1}{8} \cdot \int (x-1) \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{16}$$

$$\int -\frac{1}{4} \cdot dx = -\frac{x}{4} \rightarrow \left(-\frac{x}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x+1) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\ln(x+1)) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot [\ln(2) - \ln(1)] = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

$$\text{Resumen: } -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$$

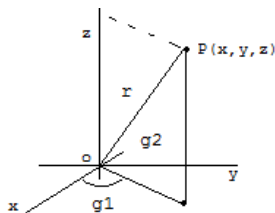
$$\text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot \ln(2) - \frac{5}{16} \quad (\#)$$

8.- Calcula la integral triple pasando a coordenadas esféricas:

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot dx dy dz$$

donde V es la esfera de radio R

Sol.:



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq R$$

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot dx dy dz = (* \text{ Cambio y Jacobiano})$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r \cdot r^2 \cdot \cos(\theta) \cdot dr \right) \cdot d\theta \right) \cdot d\varphi ;$$

$$\int_0^R r^3 \cdot \cos(\theta) \cdot dr = \cos(\theta) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot r^4 \right) \Big|_0^R = \frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot \cos(\theta)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \cdot d\theta = (\sin(\theta)) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R^4$$

Obtengo

$$\frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot (\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \cdot R^4 \cdot 2\pi = \frac{\pi \cdot R^4}{2}$$

Hemos obtenido 1/2 de la que nos piden. Multiplicando por dos:

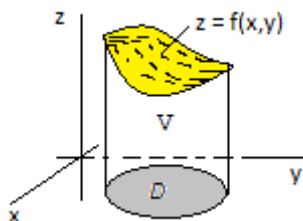
$$\text{Res.: } \pi \cdot R^4 \quad (\#)$$

6.2.- Cálculo de un Volumen mediante la Integral triple

Un sólido y su volumen, sin entrar en otras consideraciones, pueden presentarse a simple vista de una de las siguientes formas.

A) Caso simple:

Llamo caso simple al caso de un volumen de forma cilindroide limitado superiormente por una superficie $z = f(x, y)$, inferiormente por la región plana $D = \text{Dom}(f)$, y lateralmente por las paredes del cilindro.



En este caso puedo calcular el volumen mediante una integral doble:

$$V = \iint_D f(x, y) \cdot dy \cdot dx$$

B) Caso general:

Es el caso cuando el volumen a calcular está limitado por una superficie cerrada definida por una expresión $f(x, y, z) = 0$.

Para su cálculo, en la definición de Integral triple hacemos $u = f(x, y, z) = 1$, con lo cual queda

$$T = \iiint_V dx \cdot dy \cdot dz, \text{ donde } T \text{ coincide con el volumen } V$$

Su cálculo, como sabemos, se realiza por integración sucesiva,

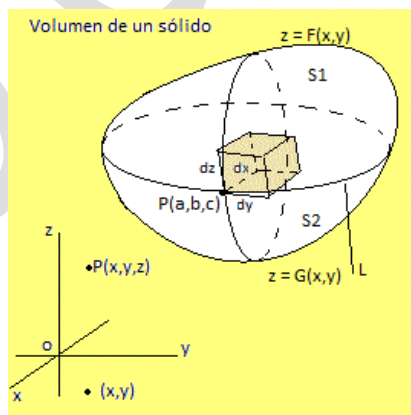
esto es:
$$V = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \right) dy \right) dx$$

Por tanto el mayor esfuerzo (mental) reside en obtener, a partir de $f(x, y, z) = 0$, las ligaduras $z = g(x, y)$, $y = h(x)$, que nos permiten obtener los llamados límites de integración: $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$, $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$.

Podemos suponer que $f(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $z = g(x, y)$, y razonamos como sigue.

Por tratarse de superficie cerrada existirá sobre ella una línea L que la divide en dos casquetes: S_1 , S_2 , que soldados por dicha línea recomponen la superficie total. Por ejemplo el caso de la Esfera y el Elipsoide.

Cada una de estos casquetes quedan determinados por una expresión de: $z = F(x, y)$, $z = G(x, y)$.



Ahora sí podemos afirmar que la expresión que determina el volumen asociado a cada casquete es

$$S1: z \leq F(x, y), \text{ o bien } z - F(x, y) \leq 0$$

$$S2: z \geq G(x,y), \text{ o bien } z - G(x,y) \geq 0$$

Ejemplos:

$$1.- \text{ Sea la Esfera: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\text{Caso de la Esfera: } S1: z = +\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, y$$

$$S2: z = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Volumen de la Esfera:

$$V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

$$V \approx \sum_{i=1,2,\dots} \sum_{j=1,2,\dots} \sum_{k=1,2,\dots} dz_k \cdot dy_j \cdot dx_i$$

$$\text{Llamamos } d = \max\{dx_i, dy_j, dz_k\}$$

Si pasamos al límite $d \rightarrow 0$, la suma

$$\sum_{i=1,2,\dots} \sum_{j=1,2,\dots} \sum_{k=1,2,\dots} dz_k \cdot dy_j \cdot dx_i \rightarrow V$$

y por definición de Integral triple

$$V = \iiint_V dx \cdot dy \cdot dz$$

En la práctica realizamos integraciones sucesivas

$$V = \int_{a1}^{a2} \left(\int_{b1}^{b2} \left(\int_{c1}^{c2} dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Los límites de integración han de ser definidos como sigue:

$$c1(x,y) = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}, \quad c2(x,y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$b1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad b2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$a1 = 0, \quad a2 = R$$

El resultado es bien conocido: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$
(Obtenido en el punto 6.5)

La integración se ha realizado en el punto 5.5 al tratar cuerpos de revolución.

2.- Sea el Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Es importante establecer los límites de integración, como sigue.

Para z:

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \rightarrow z^2 = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - b^2 \cdot c^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot c^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}, \text{ de donde}$$

$$c1(x,y): z = +c \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}},$$

$$c2(x,y): z = -c \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}}$$

Para y: Haciendo $z = 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \rightarrow y^2 = \frac{a^2 \cdot b^2 - b^2 \cdot x^2}{a^2}$$

$$b1(x): y = +\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}, \quad b2(x): y = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

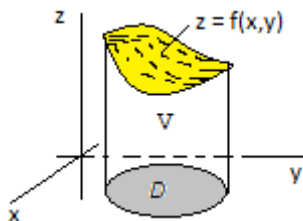
Para x: $a1 = -a$, $a2 = a$

Es muy útil aprovechar la simetría de los sólidos, cuando sea posible.

Su valor lo obtenemos en el Ejemplo 4 del siguiente punto 6.3, siendo $V = \frac{4\pi}{3} \cdot a \cdot b \cdot c$

6.3.- Cálculo de un volumen mediante integral doble

El caso más simple, y que sirve para ilustrar este tipo de cálculo, es el caso que podemos llamar Cilindroide.



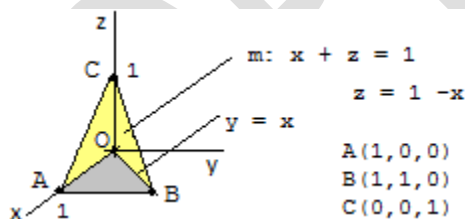
Se trata del volumen V del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$, y lateralmente por una superficie cilíndrica recta que seccionada por el plano xoy nos da el recinto plano D. Entonces

$$V = \iint_D f(x,y).dx.dy$$

Su cálculo: $\iint_D f(x,y).dx.dy = \int_a^b (\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y).dy).dx$
donde $h_1(x)$, $h_2(x)$ las obtenemos de la ligadura $y = h(x)$.

Ejemplos:

- 1.- Aplicar lo anterior al caso de la pirámide con vértices: $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,0,1)$



Sol.:

$$\begin{aligned} \text{Resultado: } V &= \int_0^1 (\int_0^x (1-x).dy).dx = \\ &= \int_0^1 (y - xy) \Big|_0^x .dx = \int_0^1 [(x - x^2) - (0)].dx = \\ &= \int_0^1 (x - x^2).dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Comprobación con la fórmula conocida de Geometría básica:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

NOTA: La ecuación del plano la obtenemos como sigue:

Vectores $V1 = CA = (1,0,-1)$, $V2 = CB = (1,1,-1)$

Vector normal:

$$W = V1 \times V2 = \begin{vmatrix} e1 & e2 & e3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e1.1 - e2.0 + e3.1 = (1,0,1)$$

Por tanto el plano es m: $x + z + D = 0$

Cuando $x = 1$ es $z = 0$, por lo que $1 + D = 0$, $D = -1$

Queda m: $x + z = 1$

2.- Calcula el volumen limitado por el paraboloide

$$x^2 + y^2 = 2az \text{ y la esfera } x^2 + y^2 + z^2 = 3.a^2$$

Sol.:

$$\text{Result.: } \frac{\pi \cdot a^3}{3} \cdot (6 \cdot \sqrt{3} - 5)$$

3.- Calcula el volumen limitado por el plano XOY, el cilindro

$$x^2 + y^2 = 2ax \text{ y el cono } x^2 + y^2 = z^2$$

Sol.:

$$\text{Result.: } \frac{32}{9} \cdot a^3$$

4.- Volumen del Elipsoide (no de revolución)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sol.: Para $z = k$ tengo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2}$, que es una elipse con ecuación reducida

$$\frac{c^2 \cdot x^2}{(c^2 - k^2) \cdot a^2} + \frac{c^2 \cdot y^2}{(c^2 - k^2) \cdot b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\frac{(c^2 - k^2) \cdot a^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(c^2 - k^2) \cdot b^2}{c^2}} = 1$$

El área encerrada por esta elipse es

$$S_z = \pi \cdot \frac{a \cdot \sqrt{c^2 - k^2}}{c} \cdot \frac{b \cdot \sqrt{c^2 - k^2}}{c} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{c^2 - k^2}{c^2}$$

Hacemos k variable volviendo a la variable z , e integramos:

$$V' = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{c^2} \cdot \int_0^c (c^2 - z^2) \cdot dz$$

$$\int_0^c (c^2 - z^2) \cdot dz = (c^2 \cdot z - \frac{1}{3} \cdot z^3) \Big|_0^c = c^3 - \frac{1}{3} \cdot c^3 = \frac{2}{3} \cdot c^3,$$

$$\text{por tanto: } V' = \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c}{3} \rightarrow V = \frac{4 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c}{3}$$

NOTA: Vemos que cabe imaginar el Elipsoide como la deformación de una esfera de radio $R = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ siendo iguales sus volúmenes.

No es descabellado aproximar el perímetro de una elipse mediante el de un círculo de radio

$$R = \sqrt{a \cdot b}$$

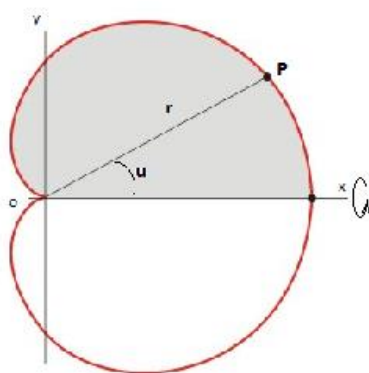
Lo mismo la superficie del Elipsoide mediante la de una Esfera de radio $R = \sqrt{a \cdot b \cdot c}$

\$\$\$\$oO\$\$\$\$

Tema 7

Sólidos predefinidos de interés

Cardioides y rotación con eje ox



7.1.- Sólidos predefinidos comunes. Cálculos

Hemos tratado ya la Superficie y el Volumen de los siguientes:

- La Esfera
- Zona, Casquete y Sector esféricos
- El Elipsoide
- El Cono

y no vamos a repetirlo.

Pasamos a estudiar otros casos genéricos.

1.- Cono circular: Ecuación en cartesianas

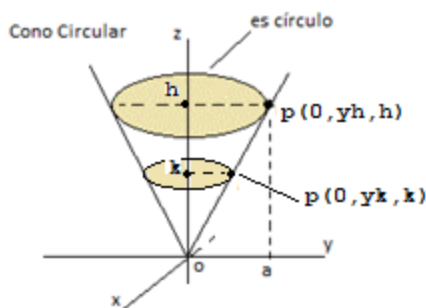
Circular porque puedo conseguir secciones que producen un círculo.

La ecuación del cono circular toma la siguiente forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ o bien } c^2x^2 + c^2y^2 = a^2z^2$$

Si seccionamos con el plano $z = k$ obtenemos el círculo:

$$c^2x^2 + c^2y^2 = a^2k^2, \text{ con radio } yk = \frac{a}{c} \cdot k$$



Para calcular el volumen utilizo la integración

$$\text{Area del disco: } S_k = \pi \cdot y_k^2 = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot k^2}{c^2}$$

Hago el valor k variable e integrando entre 0 y el valor h:

$$V = \frac{\pi \cdot a^2}{c^2} \cdot \int_0^h z^2 \cdot dz = \frac{\pi \cdot a^2}{c^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (z^3)_0^h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{c^2} \cdot h^3$$

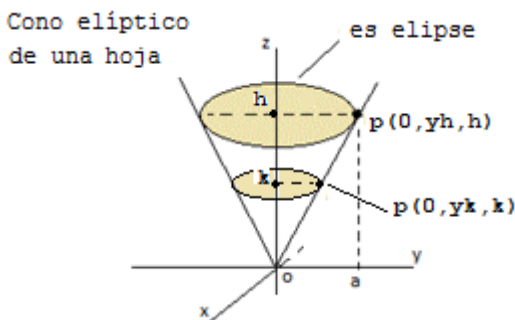
$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\pi \cdot \frac{\pi \cdot a^2 \cdot h^2}{c^2} \right) \cdot h = 1/3 \cdot [\text{áreaBase}] \cdot [\text{altura}]$$

como conocemos de Geometría básica.

2.- Cono elíptico: Ecuación en cartesianas

Elíptico porque al seccionar con un plano perpendicular a eje produce una elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ o bien } b^2 c^2 \cdot x^2 + a^2 c^2 \cdot y^2 = a^2 b^2 \cdot z^2$$



Al seccionar con el plano $z = k$ obtenemos una elipse, como sigue

$b^2 c^2 . x^2 + a^2 c^2 . y^2 = a^2 b^2 . k^2$, cuyos semiejes son

$$a' = \frac{a.k}{c} , \quad b' = \frac{b.k}{c}$$

Calculamos el volumen de aquel de altura h:

ÁreaSección: $S_k = \pi . a' . b' = \pi . \frac{a.b.k^2}{c^2}$, y haciendo variable el valor k integro

$$V = \pi . \frac{a.b}{c^2} . \int_0^h z^2 . dz = \frac{\pi . a.b}{c^2} . \frac{1}{3} . (z^3)_0^h = \frac{1}{3} . \frac{\pi . a.b}{c^2} . h^3$$

$$V = \frac{1}{3} . \left(\frac{\pi . a.b}{c^2} . h^2 \right) . h = 1/3 . [\text{áreaBase}] . [\text{altura}]$$

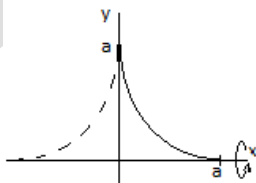
Resultado conocido en Geometría básica.

7.2.- Otros Sólidos predefinidos No tan comunes

1.- La Astroide y su revolución

$$\begin{cases} x = a . \cos(t)^3 \\ y = a . \sen(t)^3 \end{cases}$$

Astroide y rotación con eje ox



$$dx = -3.a.\cos(t)^2 . \sen(t) . dt$$

$$dy = 3.a.\sen(t)^2 . \cos(t) . dt$$

$$\begin{aligned}
 (dx)^2 + (dy)^2 &= 9.a^2.[\cos(t)^4 . \text{sen}(t)^2 + \text{sen}(t)^4 . \cos(t)^2].(dt)^2 \\
 &= 9.a^2.[\cos(t)^4 . (1 - \cos(t)^2) + \text{sen}(t)^4 . \cos(t)^2].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.[\cos(t)^4 + \cos(t)^2 . (\text{sen}(t)^4 - \cos(t)^4)].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[\cos(t)^2 + (\text{sen}(t)^4 - \cos(t)^4)].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[\cos(t)^2 . (1 - \cos(t)^2) + \text{sen}(t)^4].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[\cos(t)^2 . (1 - \cos(t)^2) + \\
 &\quad + (1 - \cos(t)^2)^2].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[\cos(t)^2 . (1 - \cos(t)^2) + 1 - 2.\cos(t)^2 + \\
 &\quad + \cos(t)^4].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[\cos(t)^2 + 1 - 2.\cos(t)^2].(dt)^2 = \\
 &= 9.a^2.\cos(t)^2.[1 - \cos(t)^2].(dt)^2 = 9.a^2.\cos(t)^2.\text{sen}(t)^2.(dt)^2
 \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
 S' &= 2.\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} a . \text{sen}(t)^3 . 3.a.\cos(t).\text{sen}(t).dt = \\
 &= 6.\pi.a^2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(t)^4.\cos(t).dt = \\
 &\quad \text{(Cambio: } u = \text{sen}(t), \text{ } du = \cos(t).dt) \\
 &= 6.\pi.a^2.\int_{u1}^{u2} u^4 . du = 6.\pi.a^2.1/5. (u^5]_{u1}^{u2} = \\
 &= 6/5.\pi.a^2.(\text{sen}(t)^5]_0^{\pi/2} = \mathbf{6/5.\pi.a^2}
 \end{aligned}$$

Conclusión:

De la Astroide completa $S = 12/5 \cdot \pi \cdot a^2$

Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 \cdot dx(t)$$

$$y(t)^2 = a^2 \cdot \text{sen}^6(t)$$

$$dx(t) = -3 \cdot a \cdot \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) \cdot dt$$

$$y(t)^2 \cdot dx(t) = -3 \cdot a^3 \cdot \text{sen}^6(t) \cdot \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) \cdot dt =$$

$$= -3 \cdot a^3 \cdot (1 - \cos^2(t))^3 \cdot \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) \cdot dt =$$

$$= -3 \cdot a^3 \cdot (1 - \cos^6(t) - 3 \cdot \cos^2(t) + 3 \cdot \cos^4(t)) \cdot \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) \cdot dt =$$

$$= -3 \cdot a^3 \cdot (-\cos^8(t) + 3 \cdot \cos^6(t) - 3 \cdot \cos^4(t) + \cos^2(t)) \cdot \text{sen}(t) \cdot dt$$

$$\text{Hago } u = \cos(t), \quad du = -\text{sen}(t) \cdot dt = -du$$

Integrando:

$$V = 3 \cdot a^3 \cdot \pi \cdot \int_{u1}^{u2} (-u^8 + 3 \cdot u^6 - 3 \cdot u^4 + u^2) \cdot du =$$

$$= 3 \cdot a^3 \cdot \pi \cdot (-1/9 \cdot u^9 + 3/7 \cdot u^7 - 3/5 \cdot u^5 + 1/3 \cdot u^3) \Big|_{u1}^{u2} =$$

$$= 3 \cdot a^3 \cdot \pi \cdot (-1/9 \cdot \cos^9(t) + 3/7 \cdot \cos^7(t) - 3/5 \cdot \cos^5(t) + 1/3 \cdot \cos^3(t)) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 3 \cdot a^3 \cdot \pi \cdot [(0) - (-1/9 + 3/7 - 3/5 + 1/3)] =$$

$$= 3 \cdot a^3 \cdot \pi \cdot (16/21 - 32/45) = a^3 \cdot \pi \cdot (16/7 - 32/15) = a^3 \cdot \pi \cdot 16/105$$

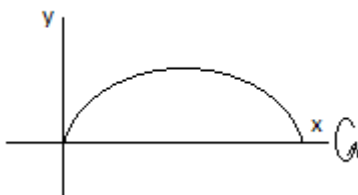
2.- La Cicloide y su revolución:

Eje de rotación ox

$$\begin{cases} x = a \cdot (t - \text{sen}(t)) \\ y = a \cdot (1 - \cos(t)) \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Cicloide y su rotación con eje ox



$$dx = a \cdot (1 - \cos(t)) \cdot dt$$

$$dy = a \cdot \text{sen}(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= a^2 \cdot [1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t) + \text{sen}^2(t)] \cdot (dt)^2 = \\ &= 2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos(t)) \cdot (dt)^2 \end{aligned}$$

Integrando:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \cos(t)} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t)) \cdot \sqrt{1 - \cos(t)} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^{3/2} \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} (2 \cdot \text{sen}(t/2))^3 \cdot dt =$$

(hago $u = t/2$)

$$= 2.\pi.a^2.\sqrt{2}.\sqrt{8}.\int (\text{sen}(u))^3.2.du =$$

$$= 16.\pi.a^2.(-\cos(u)+1/3.\cos^3(u)) =$$

$$= 16.\pi.a^2.(-\cos(t/2)+1/3.\cos^3(t/2))_0^{2\pi} =$$

(Si el intervalo fuese $0 \leq t \leq 2\pi$, como parece ser)

$$= 16.\pi.a^2.[(1 - 1/3) - (-1 + 1/3)] = 16.\pi.a^2.(2/3 + 2/3) = \\ = 64/3.\pi.a^2$$

Conclusión: $S = \frac{64}{3}.\pi.a^2$

Volumen:

$$V = \pi.\int_{t_1}^{t_2} (y(t))^2 . dx(t)$$

$$y(t)^2 = a^2.(1 - \cos(t))^2$$

$$dx(t) = a.(1 - \cos(t)).dt$$

$$y(t)^2 . dx(t) = a^3.(1 - \cos(t))^3 . dt =$$

$$= a^3.(1 - \cos^3(t) - 3.\cos(t) + 3.\cos^2(t)).dt =$$

$$= a^3.(-\cos^3(t) + 3.\cos^2(t) - 3.\cos(t) + 1).dt$$

Integramos cada término

$$-\int \cos(t)^3 . dt = -\int (1 - \text{sen}(t)^2) . \cos(t) . dt =$$

$$= -\text{sen}(t) + 1/3.\text{sen}^3(t);$$

$$3. \int \cos(t)^2 . dt = 3/2. \int (1 + \cos(2t)) . dt =$$

$$= 3/2. (t + 1/2. \text{sen}(2t)) = 3/2.t + 3/4. \text{sen}(2t);$$

$$-3. \int \cos(t) . dt = -3. \text{sen}(t); \int dt = t$$

Continuando:

$$V = \pi . a^3 . (-\text{sen}(t) + 1/3. \text{sen}^3(t) + 3/2.t + \\ + 3/4. \text{sen}(2t) - 3. \text{sen}(t) + t]_0^{2\pi} =$$

$$= \pi . a^3 . (5/2.t - 4. \text{sen}(t) + 1/3. \text{sen}^3(t) + 3/4. \text{sen}(2t))_0^{2\pi} =$$

$$= \pi . a^3 . [(5.\pi + 0) - (0)] = 5.a^3 . \pi^2$$

3.- La Cardioide y su revolución:

Eje de rotación ox

$$r = a.(1 + \cos(u)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

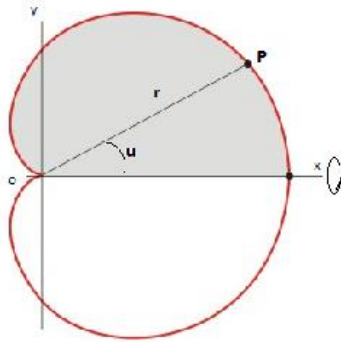
$$x = r(u). \cos(u)$$

$$y = r(u). \text{sen}(u)$$

Operamos en polares: Fórmula

$$S = 2.\pi . \int_{u_1}^{u_2} r(u) . \text{sen}(u) . \sqrt{r(u)^2 + \left(\frac{dr(u)}{du}\right)^2} . du$$

Cardioide y rotación con eje ox



$$r'(u) = -a \cdot \operatorname{sen}(u),$$

$$r^2(u) + (r'(u))^2 = \dots = 2a^2(1 + \cos(u))$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} a \cdot (1 + \cos(u)) \cdot \operatorname{sen}(u) \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 + \cos(u)} \cdot du =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos(u))^{\frac{3}{2}} \cdot \operatorname{sen}(u) \cdot du =$$

$$(\text{Cambio: } t = 1 + \cos(u), \quad dt = -\operatorname{sen}(u) \cdot du)$$

$$= -2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \int (t)^{\frac{3}{2}} \cdot dt = -2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \left[\frac{2}{5} t^{5/2} \right] =$$

$$= -2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \left[\frac{2}{5} (1 + \cos(u))^{5/2} \right]_0^{\pi} =$$

$$= -2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot [(1-1)^{5/2} - (1+1)^{5/2}] =$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2^{5/2} = \frac{32\pi a^2}{5}$$

$$\text{Conclusión: } S = \frac{32}{5} \pi a^2$$

Volumen:

$$V = \pi \int_{u_1}^{u_2} (y(u))^2 \cdot dx(u)$$

$$r = a.(1 + \cos(u)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

$$x = r(u).\cos(u)$$

$$y = r(u).\text{sen}(u)$$

$$y(u)^2 = [a.(1+\cos(u))]^2.\text{sen}^2(u) = a^2.\text{sen}^2(u).(1 + \cos^2(u) + 2.\cos(u))$$

$$dx(u) = [r'(u).\cos(u) - r(u).\text{sen}(u)].du =$$

$$= [-a.\text{sen}(u).\cos(u) - a.(1+\cos(u)).\text{sen}(u)].du =$$

$$= -a.[2.\cos(u) + 1].\text{sen}(u).du$$

$$y(u)^2.du = -a^3.\text{sen}^3(u).[\cos^2(u) + 2.\cos(u) + 1].[2.\cos(u) + 1].du =$$

$$= -a^3.\text{sen}^3(u).[2.\cos^3(u) + 4.\cos^2(u) + 2.\cos(u) + \\ + \cos^2(u) + 2.\cos(u) + 1].du =$$

$$= -a^3.\text{sen}^3(u).[2.\cos^3(u) + 5.\cos^2(u) + 4.\cos(u) + 1].du =$$

$$= -a^3.\text{sen}(u).(1-\cos^2(u)).[2.\cos^3(u) + 5.\cos^2(u) + 4.\cos(u) + 1].du =$$

$$= -a^3.\text{sen}(u).[(2.\cos^3(u) + 5.\cos^2(u) + \\ + 4.\cos(u) + 1) - (2.\cos^5(u) + 5.\cos^4(u) + 4.\cos^3(u) + \cos^2(u))].du =$$

$$= -a^3.[-2.\cos^5(u) - 5.\cos^4(u) - 2.\cos^3(u) + 4.\cos^2(u) + 4.\cos(u) + \\ + 1].\text{sen}(u).du =$$

$$(\text{Hago } t = \cos(u), \quad -\text{sen}(u).du = dt),$$

y queda

$$= a^3.[-2.t^5 - 5.t^4 - 2.t^3 + 4.t^2 + 4.t + 1].dt =$$

(Integrando obtengo de forma inmediata)

$$= a^3 \cdot [-1/3 \cdot t^6 - t^5 - 1/2 \cdot t^4 + 4/3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + t]$$

(Deshago el cambio haciendo $t = \cos(u)$, aplico la Regla de Barrow)

Calculo el volumen V1 engendrado por el recinto incluido en el primer cuadrante: $x > 0$, $y > 0$.

$$V1 = \pi \cdot a^3 \cdot (-1/3 \cdot \cos^6(u) - \cos^5(u) - 1/2 \cdot \cos^4(u) + 4/3 \cdot \cos^3(u) + 2 \cdot \cos^2(u) + \cos(u)) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi \cdot a^3 \cdot [(0) - (-1/3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1/2 \cdot 1 + 4/3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1)] =$$

$$= \pi \cdot a^3 \cdot [-(2/6 - 6/6 - 3/6 + 8/6 + 12/6 + 6/6)] =$$

$$= \pi \cdot a^3 \cdot [-(-11/6 + 26/6)] = \pi \cdot a^3 \cdot [-15/6] = -\pi \cdot a^3 \cdot 5/2$$

Tomo su valor absoluto: $V1 = \pi \cdot a^3 \cdot \frac{5}{2}$

Calculo el volumen V2 engendrado por el recinto contenido en el segundo cuadrante: $x < 0$, $y > 0$

Para ello calculo

$$Va = \pi \cdot a^3 \cdot (-1/3 \cdot \cos^6(u) - \cos^5(u) - 1/2 \cdot \cos^4(u) + 4/3 \cdot \cos^3(u) + 2 \cdot \cos^2(u) + \cos(u)) \Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} =$$

$$= \pi \cdot a^3 \cdot [(-1/3 \cdot \frac{1}{2^6} - \frac{-1}{2^5} - 1/2 \cdot \frac{1}{2^4} + 4/3 \cdot \frac{-1}{2^3} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} - 1/2) - (0)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [(-1/3 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{2}{2^6} - 1/2 \cdot \frac{4}{2^6} - 4/3 \cdot \frac{8}{2^6} + 2 \cdot \frac{16}{2^6} - 32/2^6)] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{2^6} \cdot (-1/3 + 2 - 2 - 32/3 + 32 - 32)] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{2^6} \cdot (-1/3 - 32/3)] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{2^6} \cdot (-33/3)] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{2^6} \cdot (-11)] = \\
 &= -\pi \cdot a^3 \cdot \frac{11}{64} . \text{ Tomamos el valor absoluto: } V_a = \pi \cdot a^3 \cdot \frac{11}{64}
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}
 V_b &= \pi \cdot a^3 \cdot (-1/3 \cdot \cos^6(u) - \cos^5(u) - 1/2 \cdot \cos^4(u) + \\
 &\quad + 4/3 \cdot \cos^3(u) + 2 \cdot \cos^2(u) + \cos(u))_{2\pi/3}^{\pi} = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [(-1/3 \cdot 1 - (-1) - 1/2 \cdot 1 + 4/3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 1) - \\
 &\quad - (-1/3 \cdot \frac{1}{2^6} - \frac{-1}{2^5} - 1/2 \cdot \frac{1}{2^4} + 4/3 \cdot \frac{-1}{2^3} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} - 1/2)] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [(-2/6 + 6/6 - 3/6 - 8/6 + 12/6 - 6/6) - \\
 &\quad - (\frac{1}{2^6} \cdot (-1/3 + 2 - 2 - 32/3 + 32 - 32))] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [1/6 \cdot (-2 + 6 - 3 - 8 + 12 - 6) - \frac{1}{2^6} \cdot (-33/3)] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [1/6 \cdot (-1) - \frac{1}{2^6} \cdot (-11)] = \pi \cdot a^3 \cdot [-1/6 + \frac{11}{2^6}] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{-32+33}{192}] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{192}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Para } V_2 \text{ queda: } V_2 &= V_a - V_b = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{11}{64} - \frac{1}{192}] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{32}{192}] = \\
 &= \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{6}]
 \end{aligned}$$

Volumen total $V = V_1 + V_2 =$

$$= \pi \cdot a^3 \cdot [5/2] + \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{1}{6}] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{16}{6}] = \pi \cdot a^3 \cdot [\frac{8}{3}]$$

Problemas resueltos ó Semi-resueltos:

- 1.- Calcula el área limitada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x - 4$, el eje ox, y las rectas $x = -2$, $x = 3$

Sol.- Observa la figura

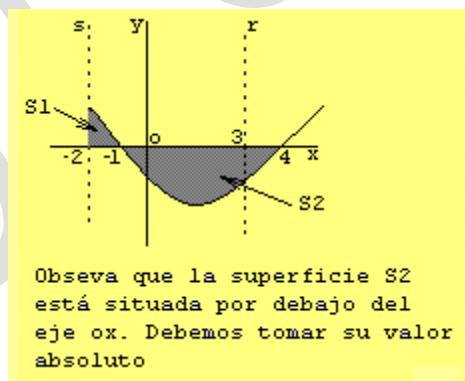
En primer lugar debemos comprobar si la curva corta al eje ox, y determinar esos cortes. En este caso:

$$y = x^2 - 3x - 4$$

$$y = 0 \quad (\text{Ecuación de la recta ox})$$

$$\text{Sistema } \begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{---> } x^2 - 3x - 4 = 0,$$

de donde $x = -1$, $x = 4$. Cortes: $(-1, 0)$, $(4, 0)$



Tenemos que calcular S1 y S2 por separado.

$$S1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4).dx = (x^3/3 - 3x^2/2 - 4x)_{-2}^{-1} =$$

$$= (-1/3 - 3/2 + 4) - (-8/3 - 12/2 + 8) = \dots = 17/6$$

$$S2: \int_{-1}^3 (x^2 - 3x - 4).dx = (x^3/3 - 3x^2/2 - 4x)_{-1}^3 =$$

$$= (27/3 - 27/2 - 12) - (13/6) = (-99/6) - (13/6) = -112/6$$

El área siempre es un valor positivo, por lo que hemos de tomar el valor absoluto: $S2 = 112/6$

$$S = S1 + S2 = 17/6 + 112/6 = 129/6 = \mathbf{43/2}$$

2.- Calcula la superficie delimitada por la gráfica de $f(x) = -x^2 + 8x$, y la recta $y = 3x$.

Sol.- Observa la figura

Calculamos los cortes entre curva y recta

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow -x^2 + 8x = 3x, x^2 - 5x = 0, x.(x-5) = 0,$$

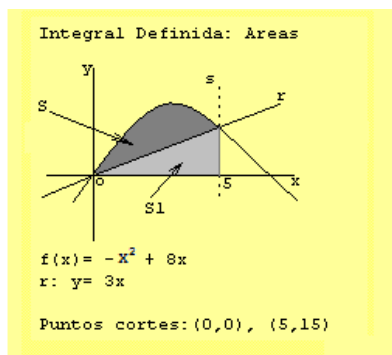
de donde : $x = 0, x = 5$,

Puntos: $(0, 0), (5, 15)$

Al calcular la integral definida $I(f(x); [0,5])$ nos dará un área T que engloba la suma de las dos partes sombreadas S y S1.

Nosotros deseamos sólo la parte S, y por tanto será

$$S = T - S1$$



$$T = \int_0^5 (-x^2 + 8x).dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 8x^2/2\right)\Big|_0^5 =$$

$$= (-125/3 + 100) - (0) = 175/3$$

S1 es un triángulo: $S1 = 1/2 \cdot (5 \cdot 15) = 75/2$

$$S = 175/3 - 75/2 = 125/6$$

3.- Calcula el área limitada por la gráfica $f(x) = 4 - x^2$, el eje ox y la recta $y = x + 2$

Sol.- Obtengo una primitiva.

$$F(x) = 4x - 1/3 \cdot x^3$$

$$\text{Area} = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1 = (4 - 1/3) - (-8 + 8/3) = (11 + 16)/3 = 27/3 =$$

$$= 9 \text{ unid.}$$

A este valor hemos de restarle el área del triángulo B:

$$1/2.(3.3) = 9/2$$

Área solicitada: $9 - 9/2 = 9/2$ unidades.

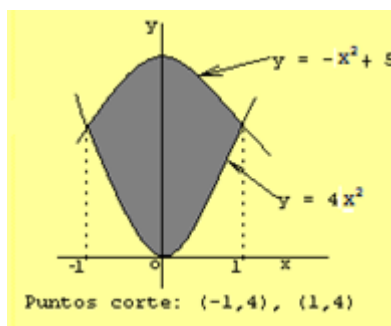
Otra forma:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (4-x^2).dx - \int_{-2}^1 (x+2).dx &= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_{-2}^1 - \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{-2}^1 = \\ &= 9 - 9/2 = \mathbf{9/2 \text{ u.}} \end{aligned}$$

4.- Calcula el área limitada por las dos gráficas siguientes:

$$y = -x^2 + 5, \quad y = 4x^2$$

Sol.- Observa la figura



Cortes entre sí:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = 4x^2 \end{cases} \quad \text{--->} \quad 5 - x^2 = 4x^2, \quad 5.(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad \text{--->} \quad x = 1, x = -1$$

$$S = \int_{-1}^1 (-x^2 + 5 - 4x^2).dx = \int_{-1}^1 (-5x^2 + 5).dx = (-5x^3/3 + 5x)_{-1}^1$$

$$= (-5/3 + 5) - (5/3 - 5) = 10 - 10/3 = 20/3.$$

$$S = 20/3$$

5.- Calcula la superficie delimitada por las gráficas de estas dos funciones:

$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x^2$$

Aprovechamos la simetría de la figura.

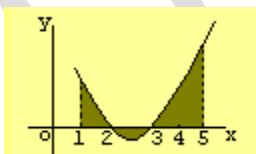
$$S1 = (4x - x^3/3)_0^1 - (x^3)_0^1 = (4 - 1/3) - (1) = 8/3$$

$$S = 2.S1 = 16/3 \text{ unidades}$$

$$S = 16/3 \text{ u.}$$

6.- Integral definida

$$\int_1^5 (x^2 - 5x + 6) dx$$

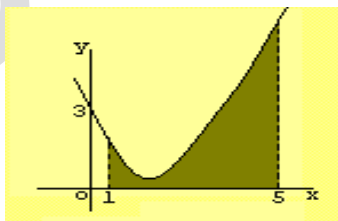


Sol.:

$$5'333$$

7.- Integral definida

$$\int_1^5 (2x^2 - 5x + 6) dx$$

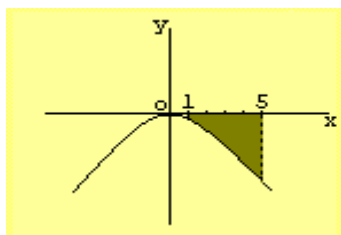


Sol.:

$$46'6667$$

8.- Integral definida $\int_1^5 -x^2 .dx$

Sol.: -41'28333



9.- Integral definida $\int_1^2 (x^2 - 5x + 6).dx$

Sol.: 0'8333

10.- Integral definida $\int_2^3 (x^2 - 5x + 6).dx$

Sol.: -0'1666

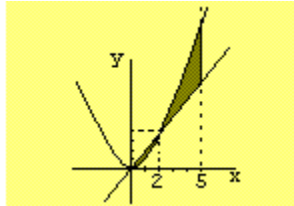
11.- Integral definida $\int_3^5 (x^2 - 5x + 6).dx$

Sol.: 4'666

12.- Área limitada por la parábola $y = x^2 - 5x + 6$, y las rectas:
 $x = 0$, $x = 5$, $y = 2x$

Sol.: Debemos Calcular:

$$\int_0^2 (2x - (x^2 - 5x + 6)) dx, \int_2^5 ((x^2 - 5x + 6) - 2x) dx$$



13.- Área limitada por las rectas: $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$, $y = 5x + 6$

Sol.: Debemos calcular

$$\int_{-5}^{-1/2} (5x + 6) dx, \int_{-1/2}^5 (5x + 6) dx$$

Obtenemos: $-36'1$, $96'1$. Área = $132'2$

14.- Área limitada por las rectas: $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$,
y la parábola $y = x^2 - 5x + 6$

Sol.: Debemos resolver

$$\int_{-5}^2 (x^2 - 5x + 6) dx, \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx, \int_3^5 (x^2 - 5x + 6) dx$$

Obtenemos: $138'83$, $0'167$, $4'67$. Área = $43'667$

\$\$\$oOo\$\$\$

Tema 8

Integral curvilínea

Integral de Superficie

8.1.- Integral curvilínea de Primer tipo, en el Espacio

Sea una función con dos variables independientes $z = f(x, y)$. Sea $D = [a, b] \times [c, d]$ el dominio de definición de $f(x, y)$.

Supongamos además que la variable y está relacionada con x mediante $y = g(x)$, definiendo una curva C sobre D , donde x recorre el intervalo $[a, b]$.

Dividimos la curva C en arcos mediante un sistema de puntos $P_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, donde la sucesión $\{x_i\}$ es creciente. Llamando Δs_i la longitud del arco $P_{i-1}P_i$.

Podemos obtener una sucesión de sumas parciales

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i, \text{ y hacer que } n \rightarrow \infty$$

Def.:

Llamamos Integral curvilínea (de Primer tipo) al resultado del siguiente límite, cuando exista:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$$

Este valor lo representamos por $\int_C f(x, y) \cdot ds$

Su cálculo:

A) En cartesianas

Teniendo en cuenta $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, y que

$ds = \sqrt{1 + g'(x)^2} \cdot dx$, obtenemos la siguiente igualdad que permite su cálculo:

$$\int_C f(x, y) \cdot ds = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + g'(x)^2} \cdot dx$$

B) En paramétricas

Si la curva C viene dada en paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \text{ entonces}$$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt,$$

$$\int_C f(x, y) \cdot ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$$

Ejemplos:

NOTA: El símbolo (#) significa que el resultado ha sido corroborado.

1.- $f(x, y) = x + y$, definida en $\mathbb{R}^2$. Sea C los lados del triángulo de vértices A(0,0), B(1,0), C(0,1), recorridos en sentido positivo (movimiento contrario a las agujas del reloj).

Sol.: $\int_C f(x, y) \cdot ds =$

$$= \int_{AB} f(x, y) \cdot ds + \int_{BC} f(x, y) \cdot ds + \int_{CA} f(x, y) \cdot ds$$

$$AB: y = 0, 0 \leq x \leq 1, ds = \sqrt{1+0} \cdot dx = dx$$

$$\int_{AB} f(x, y) \cdot ds = \int_0^1 (x) \cdot dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$BC: y = 1 - x, 1 \geq x \geq 0, y' = -1 \rightarrow 1 + g'(x)^2 = 1 + 1$$

$$ds = \sqrt{1+1} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot dx,$$

$$\int_{BC} f(x, y) \cdot ds = - \int_1^0 (1) \cdot \sqrt{2} \cdot dx = - \sqrt{2} \cdot (x) \Big|_1^0 =$$

$$= - \sqrt{2} \cdot (0 - 1) = \sqrt{2}$$

$$CA: x = 0, 1 \geq y \geq 0, ds = -dy, x + y = y$$

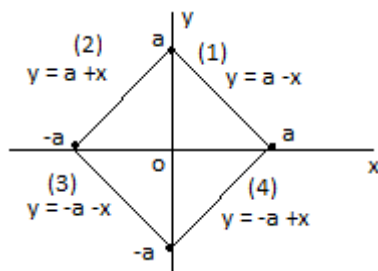
$$\int_{CA} f(x, y) \cdot ds = - \int_1^0 (y) \cdot dy = - \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^0 = - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto

$$\int_C f(x, y) \cdot ds = 1 + \sqrt{2} \quad (\#)$$

2.- $\int_C xy \cdot ds$, donde C es el cuadrado definido por:
 $|x| + |y| = a, a > 0$

Sol.:



$$(1): y' = -1 \rightarrow \sqrt{1+1} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^0 x \cdot (a-x) \cdot \sqrt{2} \cdot (-dx) &= -\sqrt{2} \cdot \left(a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^0 = \\ &= -\sqrt{2} \cdot \left[(0) - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \right] = \sqrt{2} \cdot \frac{3a^3 - 2a^3}{6} = \frac{a^3}{6} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(2): y' = 1 \rightarrow \sqrt{1+1} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 x \cdot (a+x) \cdot \sqrt{2} \cdot dx &= \left(a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^0 = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[(0) - \left(\frac{a^3}{2} + \frac{-a^3}{3} \right) \right] = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{3a^3 - 2a^3}{6} \right) = \frac{-a^3}{6} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(3): y' = -1 \rightarrow \sqrt{1+1} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 x \cdot (-a-x) \cdot \sqrt{2} \cdot dx &= \sqrt{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^0 = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[(0) - \left(\frac{-a^3}{2} - \frac{-a^3}{3} \right) \right] = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{-3a^3 + 2a^3}{6} \right) = \frac{-a^3}{6} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

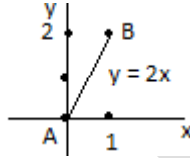
$$(4): y' = 1 \rightarrow \sqrt{2} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^a x \cdot (-a+x) \cdot \sqrt{2} \cdot dx &= \sqrt{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left[\left(\frac{-a^3}{2} + \frac{a^3}{3} \right) - (0) \right] = \sqrt{2} \cdot \frac{-3a^3 + 2a^3}{6} = \frac{-a^3}{6} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Resultado = 0 (cero) (#)

3.- $\int_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \cdot ds$, donde es el segmento con extremos A(0, 0) y B(1, 2).

Sol.:



$$y' = 2 \rightarrow \sqrt{1+4} \cdot dx = \sqrt{5} \cdot dx$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4x^2 + 4} = \sqrt{5x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}} \cdot ds &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5x^2+4}} \cdot \sqrt{5} \cdot dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} \cdot dx = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x)^2 + 1}} \cdot dx = (*) \end{aligned}$$

$$\text{Hago } \tan(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x, \quad dx = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sec(t)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \int \sec(t) \cdot dt &= \ln[\sec(t) + \tan(t)] = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x] = \\ &= \ln[\sec(\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x)) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= (\ln[\sec(\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x)) + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot x]) \Big|_0^1 = \\ &= (\ln[\sec(\arctan(\frac{\sqrt{5}}{2})) + \frac{\sqrt{5}}{2}]) - (\ln[\sec(\arctan(0)) + 0]) = \\ &= (\ln(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})) - \ln(1) = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad (\#) \end{aligned}$$

8.2.- Integral curvilínea de Segundo tipo

Supongamos dos funciones con dos variables independientes:
 $P(x, y)$, $Q(x, y)$, definidas y continuas sobre el dominio D .

Supongamos además (como en el caso anterior) que la variable y está relacionada con x mediante $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, definiendo de forma continua una curva C dentro de D , donde el recorrido de x es el intervalo $[a, b]$.

Def.:

Llamamos Integral curvilínea de Segundo tipo al resultado de

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y).dx + Q(x, y).dy &= \\ &= \int_a^b [P(x, g(x)) + Q(x, g(x)).g'(x)].dx \end{aligned}$$

Su cálculo:

A) En cartesianas

Su valor resulta del miembro derecha de la igualdad.

B) En paramétricas

Si la curva está dada en paramétricas

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y).dx + Q(x, y).dy &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)].dt \end{aligned}$$

NOTA: El símbolo (#) significa que el resultado ha sido corroborado.

Ejemplos:

1.- Calcula $\int_C y^2 \cdot dx + x^2 \cdot dy$, donde C es la semi-elipse superior:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \text{sen}(t) \end{cases}, \quad \pi \geq t \geq 0$$

recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

$$\begin{aligned} \text{Sol.: } \int_C y^2 \cdot dx + x^2 \cdot dy &= \\ &= \int_{\pi}^0 \left(b^2 \cdot \text{sen}(t)^2 \cdot a \cdot (-\text{sen}(t)) + a^2 \cdot \cos(t)^2 \cdot b \cdot \cos(t) \right) \cdot dt = \\ &= \int_{\pi}^0 \left(-b^2 \cdot a \cdot \text{sen}(t)^3 + a^2 \cdot b \cdot \cos(t)^3 \right) \cdot dt = \\ &= a \cdot b \cdot \left[\int_{\pi}^0 a \cdot \cos(t)^3 \cdot dt - \int_{\pi}^0 b \cdot \text{sen}(t)^3 \cdot dt \right] = (*) \end{aligned}$$

Nota: Consulta tabla de integrales ó métodos

Cálculos:

$$\begin{aligned} \int \cos(t)^3 \cdot dt &= \dots = \text{sen}(t) - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(t)^3, \text{ por tanto} \\ \left(\text{sen}(t) - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(t)^3 \right) \Big|_{\pi}^0 &= \left(\text{sen}(0) - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(0)^3 \right) - \\ &- \left(\text{sen}(\pi) - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(\pi)^3 \right) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\int \sin(t)^3 . dt = \dots = -\cos(t) + \frac{1}{3} . \cos(t)^3 ,$$

y por tanto, aplicando Barrow

$$\begin{aligned} & \left(-\cos(t) + \frac{1}{3} . \cos(t)^3 \right) \Big|_{pi}^0 = \\ & = \left(-\cos(0) + \frac{1}{3} . \cos(0)^3 \right) - \left(-\cos(pi) + \frac{1}{3} . \cos(pi)^3 \right) = \\ & = (-1 + 1/3) - (1 - 1/3) = -2/3 - 2/3 = -4/3 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } - \int_{pi}^0 b . \sin(t)^3 . dt = -b . (-4/3) = \frac{4.b}{3}$$

$$(*) \quad \text{Resultado final : } \frac{4.ab^2}{3} \quad (\#)$$

$$2.- \text{Calcula } \int_{AB} (x^2 - 2xy) . dx + (2xy + y^2) . dy$$

donde AB es el arco de parábola $y = x^2$ que une el punto A(1,1) con B(2,4).

$$\text{Sol.: } y'(x) = 2x \rightarrow dy = 2x . dx$$

$$\begin{aligned} & \int_{AB} (x^2 - 2xy) . dx + (2xy + y^2) . dy = \\ & = \int_1^2 [(x^2 - 2x^3) + (2x^3 + x^4) . 2x] . dx = \\ & = \int_1^2 (2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2) . dx = \left(\frac{x^6}{3} + \frac{4x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ & = \left(\frac{64}{3} + \frac{128}{5} - \frac{16}{2} + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \\ & = - \frac{640+768-240+80}{30} - \frac{10+24-15+10}{30} = \frac{1248-29}{30} = \frac{1219}{30} = 40 + \frac{19}{30} \end{aligned}$$

3.- Calcula $\int_C (2a - y).dx + x.dy$, donde C es el primer arco de la cicloide dada por

$$\begin{cases} x = a.(t - \text{sen}(t)) \\ y = a.(1 - \cos(t)) \end{cases}, \text{ donde } t \text{ creciendo}$$

Sol.: $t = 0 \rightarrow x = 0, y = 0 \rightarrow A(0; 0)$

$t = 2\pi \rightarrow x = 2.a.\pi, y = 0 \rightarrow B(2.a.\pi; 0)$

Por tanto el recorrido de t es $[0, 2.a.\pi]$

$$(2a - a.(1 - \cos(t))) = a + a.\cos(t) = a.(1 + \cos(t))$$

$$x'(t) = a.(1 - \cos(t))$$

$$y'(t) = a.\text{sen}(t)$$

Tengo

$$(2a - y).dx + x.dy = a.(1 + \cos(t)).a.(1 - \cos(t)).dt +$$

$$+ a.(t - \text{sen}(t)).a.\text{sen}(t).dt =$$

$$= [a^2.(1 - \cos(t)^2) + a^2.(t.\text{sen}(t) - \text{sen}(t)^2)].dt =$$

$$= [a^2.(1 + t.\text{sen}(t)) - a^2.(\cos(t)^2 + \text{sen}(t)^2)].dt = a^2.\text{sen}(t).dt ,$$

por lo tanto

$$\int_C (2a - y).dx + x.dy = a^2 \cdot \int_0^{2\pi} t.\text{sen}(t).dt = (*)$$

Integro por partes (Consulta tabla de integrales):

$$\int t \cdot \text{sen}(t) \cdot dt = \dots =$$

(Integración por partes)

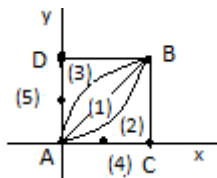
$$= [\text{sen}(t) - t \cdot \cos(t)]_0^{2\pi} = [\text{sen}(2\pi) - 2\pi \cdot \cos(2\pi)] -$$

$$- [\text{sen}(0) - 0 \cdot \cos(0)] = [0 - 2\pi] - [0] = -2\pi$$

$$(*) = -2 \cdot a^2 \cdot \pi \quad \quad \quad (\#)$$

4.- El alumno resolverá $\int_{AB} (2xy \cdot dx - x^2 \cdot dy)$, donde AB es uno de los diferentes caminos que se indican, siendo A(0; 0), B(2; 1), siguiendo (ver figura) el camino indicado:

- a) Segmento recto, camino (1)
- b) Arco de parábola (2), eje de simetría oy
- c) Arco de parábola (3), eje de simetría ox
- d) Línea quebrada ACB, camino (4)
- e) Línea quebrada ADB, camino (5)



Resultados: (1) $--> \frac{4}{3}$, (2) $--> 0$, (3) $--> \frac{12}{5}$,
(4) $--> -4$, (5) $--> 4$

8.3.- Diferencial Exacta: Integración

Supongamos que $P(x,y).dx + Q(x,y).dy = dF(x,y)$, lo que significa que es la ‘Diferencial exacta’ de $F(x,y)$.

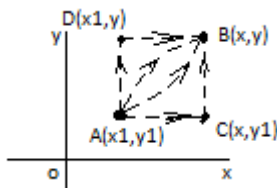
En este caso se demuestra que el resultado de

$$\int_C P(x,y).dx + Q(x,y).dy$$

no depende del ‘camino seguido’ para llegar desde el punto $A(x_1,y_1)$ inicial de C hasta su punto $B(x,y)$ final (Véase figura), cumpliéndose

$$\int_C P(x,y).dx + Q(x,y).dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

(Fórmula de Newton-Leibniz) (1)



El camino seguido ha de ser ‘continuo’ y quedar dentro del dominio D de definición y continuidad de $P(x,y)$, $Q(x,y)$. Evidentemente, si la curva C es cerrada tenemos

$\int_C P(x,y).dx + Q(x,y).dy = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1) = 0$
ya que $(x_2,y_2) = (x_1,y_1)$.

Condición para que $P(x,y).dx + Q(x,y).dy$ sea diferencial exacta:

Suponemos que D es un recinto conexo, es decir, dos cualesquiera de sus puntos se pueden unir por un ‘camino’ totalmente contenido en D.

Si además $P(x,y)$ y $Q(x,y)$, y sus primeras derivadas parciales son continuas, entonces se puede demostrar la siguiente afirmación:

Condición necesaria y suficiente para que exista $F(x, y)$ tal que

$$dF(x,y) = P(x,y).dx + Q(x,y).dy$$

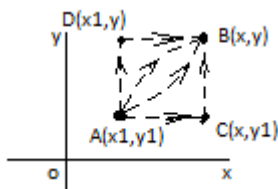
es que $Q_x'(x,y) = P_y'(x,y)$ (2)

La demostración de su existencia se puede reducir a la obtención de su expresión.

Proceso para obtener $F(x,y)$:

$$F(x,y) - F(x_1,y_1) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} P(x,y).dx + Q(x,y).dy =$$

(siguiendo el camino $A \rightarrow C \rightarrow B$ de la figura)



$$= \int_{x_1}^x P(x, y_1). dx + \int_{y_1}^y Q(x, y). dy , \text{ de donde obtengo}$$

$$F(x, y) = \int_{x_1}^x P(x, y_1). dx + \int_{y_1}^y Q(x, y). dy + \text{const}$$

$$\text{donde } \text{const} = F(x_1, y_1)$$

También podemos hacer

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_1, y_1) &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} P(x, y). dx + Q(x, y). dy = \\ &= \int_{y_1}^y Q(x_1, y). dy + \int_{x_1}^x P(x, y). dx , \end{aligned}$$

de donde despejamos $F(x, y)$ como antes.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1.- \text{ Sean } P(x, y) &= 4x + 2y, \quad Q(x, y) = 2x - 6y, \\ P_y' &= 2, \quad Q_x' = 2, \quad A(0, 0), \quad B(x, y) \end{aligned}$$

Obtener la expresión $F(x, y)$:

$$dF(x, y) = (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$$

$$F(x, y) = \int_0^x 4x. dx + \int_0^y (2x - 6y). dy + C =$$

$$= (2x^2]_0^x + (2xy - 3y^2]_0^y + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

El valor $C = F(0, 0)$ lo podemos asignar a voluntad, o conforme a la naturaleza física del problema.

Hemos seguido el camino (1), pero al mismo resultado llegamos si utilizamos el camino (2) de la figura.

2.- Comprueba que es Diferencial exacta y Calcúlala:

$$\int_{AB} x \cdot dy + y \cdot dx, \quad A(-1; 2), B(2; 3)$$

$$\text{Sol.: } P(x,y) = y \rightarrow P_y = 1; \quad Q(x,y) = x \rightarrow Q_x = 1,$$

Obtengo $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = y \cdot dx + x \cdot dy$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x, y)} P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \\ &= \int_{x_1}^x P(x, y_1) \cdot dx + \int_{y_1}^y Q(x, y) \cdot dy = \\ &\quad (\text{en este caso: } x_1 = -1, y_1 = 2) \\ &= \int_{-1}^x 2 \cdot dx + \int_2^y x \cdot dy = (2x]_{-1}^x + (xy]_2^y = \\ &= (2x - (-2)) + (xy - 2x) = xy + 2 + C \end{aligned}$$

Comprobación: $F_x = y, \quad F_y = x$ (Sí lo es)

Entonces:

$$\int_{AB} x \cdot dy + y \cdot dx = F(2;3) - F(-1;2) = 8 - 0 = 8$$

3.- Comprueba que es Diferencial exacta y Calcúlala:

$$\int_{AB} \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}, \quad A(1;2), B(2;1)$$

$$\text{Sol.: } P(x,y) = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \rightarrow P_y = \frac{-1}{y^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{-x}{y^2} \rightarrow Q_x = \frac{-1}{y^2}$$

Obtengo F(x,y):

$$F(x,y) = \int_{x_1}^x P(x, y_1) \cdot dx + \int_{y_1}^y Q(x, y) \cdot dy =$$

(en este caso: $x_1 = 1, y_1 = 2$)

$$= \int_1^x \frac{1}{2} \cdot dx + \int_2^y \frac{-x}{y^2} \cdot dy = \left(\frac{x}{2}\right)_1^x + \left(\frac{x}{y}\right)_2^y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{x}{y} - \frac{1}{2} + C; \quad F(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{1}{2} + C$$

$$\text{Comprobación: } F_x = \frac{1}{y}, \quad F_y = \frac{-x}{y^2} \rightarrow dF(x,y) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{y} \cdot dx + \frac{-x}{y^2} \cdot dy; \quad P(x,y) = \frac{1}{y}, \quad Q(x,y) = \frac{-x}{y^2};$$

$$P'_y = \frac{-1}{y^2}, \quad Q'_x = \frac{-1}{y^2}. \quad \text{Sí es diferencial exacta.}$$

Entonces:

$$\int_{AB} \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2} = F(2,1) - F(1,2) = (2 - 1/2) - (1/2 - 1/2) = \frac{3}{2}$$

4.- Comprueba que es Diferencial exacta y Calcúlala:

$$\int_{AB} \frac{dx+dy}{x+y}, \quad A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad B(3;4)$$

Resuélvalo el alumno siguiendo los ejemplos anteriores.

Resultado: $\ln(7)$

8.4.- **Fórmula de Riemann-Green en el plano** **Área de un recinto plano**

En el caso de que la curva cerrada C sea el borde de una región R conexa del plano, la integral curvilínea la representamos por

$$\oint_C f(x, y). ds$$

La siguiente fórmula permite transformar una Integral curvilínea de segunda especie

$$\int_C P(x, y). dx + Q(x, y). dy, \text{ donde C sea curva cerrada,}$$

en una Integral doble.

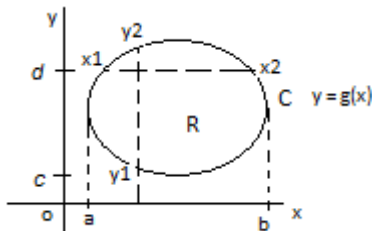
Supongamos que R es un recinto cerrado y conexo del plano, y que C es su ‘frontera’, curva cerrada. Conexo significa que dos puntos cualesquiera pueden unirse mediante un camino contenido en R.

Si las funciones $P(x,y)$, $Q(x,y)$, y sus primeras derivadas parciales, son continuas en $R+C$ (el recinto incluyendo su borde), entonces

Fórmula de Riemann-Green:

$$\oint_C P(x,y).dx + Q(x,y).dy = \iint_R \left(Q'_x(x,y) - P'_y(x,y) \right) dx dy$$

(Integral doble sobre el recinto R) (1)



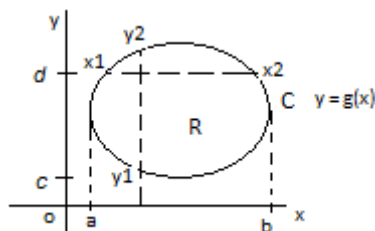
Podemos suponer que R es cerrado y por tanto su borde C queda incluido en R. C es una línea cerrada.

En lo que sigue podemos expresar $\int_C f(x,y).ds$ en lugar de $\oint f(x,y).ds$, donde ds es la diferencial de arco de curva, y donde se supone que C es cerrada.

Observa que no es necesario que la expresión

$$P(x,y).dx + Q(x,y).dy \text{ sea exacta.}$$

Interpretación-Justificación de la Fórmula de Riemann-Green:



Sea el recinto R con borde C: $y = g(x)$.

La integral doble la calculamos, como ya sabemos, así:

$$\begin{aligned} \iint_R P_y(x, y) \cdot dx \cdot dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx = \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] \cdot dx, \text{ donde } y_1(x) < y_2(x), \end{aligned}$$

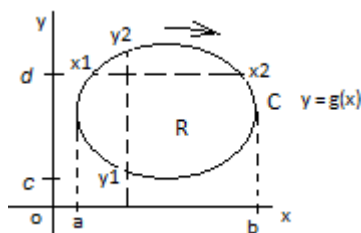
cuando x recorre [a; b]

La figura muestra cómo $y = g(x)$ ‘produce’ dos valores: $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Pero tengamos en cuenta que para la integral curvilínea

$\int_C P(x, y) \cdot dx$, el convenio para el recorrido de C consiste en dejar el recinto R a la izquierda, lo que significa girar en sentido contrario a las agujas del reloj, y que al cambiar el sentido del recorrido su valor cambia de signo.

En la integral anterior hacemos el recorrido de C ‘punto a punto’, x creciendo de izquierda a derecha en $[a; b]$, y al tomar en $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y(x, y). dy$ los límites en la forma $y_1 < y_2$, nos indica que hago el recorrido en el sentido de las agujas del reloj (ver figura).



Por tanto llegamos a que

$$\int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]. dx = - \int_C P(x, y). dx$$

donde $y = g(x)$.

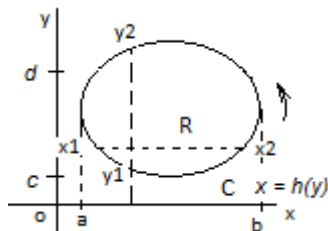
Por tanto: $\iint_R P_y(x, y). dx dy = - \int_C P(x, y). dx$,

o bien $\int_C P(x, y). dx = \iint_R -P_y(x, y). dx dy$

Del mismo modo, teniendo $x = h(y)$, para $Q_x(x, y)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R Q_x(x, y). dx dy &= \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} Q_x(x, y). dx \right). dy = \\ &= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)]. dy \end{aligned}$$

Ahora el recorrido de C lo hacemos en sentido positivo (al movernos ‘punto a punto’ desde c hasta d creciendo por el eje oy).



Por tanto

$$\iint_R Q_x(x,y).dx.dy = \int_C Q(x,y).dy$$

Concluyendo:

$$\int_C P(x,y).dx + Q(x,y).dy = \iint_R [Q_x(x,y) - P_y(x,y)].dx.dy \quad (4)$$

Ejemplo:

1.- Área de un recinto R plano delimitado por una curva C.

Sol.: Para concretar supongamos que

Tomo $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$

$$Q_x' = 1, \quad P_y' = -1$$

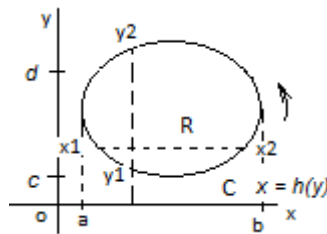
$$\int_C (-y).dx + x.dy = \iint_R (1 - (-1)).dx.dy = \iint_R 2.dx.dy$$

de donde $\iint_R dx \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot \int_C (-y \cdot dx + x \cdot dy)$

Pero, si llamo A al área del recinto comprobaremos que

$A = \int_C x \cdot dy$, $A = -\int_C y \cdot dx$, y por tanto el miembro derecha toma el valor: $\frac{1}{2} \cdot (A + A) = A$, y por tanto $\iint_R dx \cdot dy = A$.

En efecto:



$$\int_C x \cdot dy = \int_c^d x_2(y) \cdot dy + \int_a^c x_1(y) \cdot dy =$$

$= \int_c^d x_2(y) \cdot dy - \int_c^d x_1(y) \cdot dy = \text{Área del recinto (Aplicando la definición de Integral definida)}.$

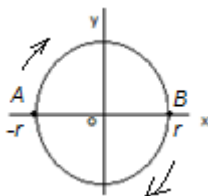
Por otro lado: $-\int_C y \cdot dx = \int_a^b y_2(x) \cdot dx + \int_b^a y_1(x) \cdot dx =$

$$= \int_a^b y_2(x) \cdot dx - \int_a^b y_1(x) \cdot dx = \text{Área del recinto conforme a la}$$

definición de Integral definida.

Ejemplos:

1.- El círculo de radio r y centro $(0,0)$



Calcula su área aplicando la fórmula de Green.

Sol.:

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Según lo anterior $A = -\int_C y(x).dx$, donde x recorre $[-r; r]$.

NOTA: Propongo encarecidamente consultar el punto 2.2, Tema 2, lo relacionado con propiedades de la Integral Definida.

Entonces

$$A = -\left[\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}.dx + \int_r^{-r} -\sqrt{r^2 - x^2}.(dx) \right] = (*)$$

Observa que el resultado de la integración será negativo porque recorro C en sentido negativo. Por tratarse de un área después nos quedamos con el valor absoluto.

$$\text{Integramos: } \int \sqrt{r^2 - x^2}.dx = r. \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}.dx =$$

$$(\text{Cambio: } \frac{x}{r} = \text{sen}(t), \quad dx = r \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$\begin{aligned} &= r^2 \cdot \int \cos(t)^2 \cdot dt = r^2 \cdot \int \frac{1+\cos(2t)}{2} \cdot dt = \frac{r^2}{2} \cdot \left(t + \frac{\text{sen}(2t)}{2} \right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot [t + \text{sen}(t) \cdot \cos(t)] = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \left[\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \cdot \cos\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx &= \frac{r^2}{2} \cdot \left[\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \cdot \cos\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right)\right) \right) \right]_{-r}^r = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right] = \frac{r^2}{2} \cdot \pi ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_r^{-r} -\sqrt{r^2 - x^2} \cdot (dx) &= - \int_r^{-r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \\ &= - \frac{r^2}{2} \cdot \left[\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{x}{r} \cdot \cos\left(\text{arcSen}\left(\frac{x}{r}\right)\right) \right) \right]_r^{-r} = \\ &= - \frac{r^2}{2} \cdot \left[\left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) - \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right] = \frac{r^2}{2} \cdot \pi ; \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } A = - \left[\frac{r^2}{2} \cdot \pi + \left(\frac{r^2}{2} \cdot \pi \right) \right] = - \pi \cdot r^2$$

$$\text{Área círculo} = \pi \cdot r^2$$

2.- Aplicando la fórmula de Green transforma la siguiente integral en una integral de superficie:

$$\oint \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx + y \cdot (xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) \cdot dy, \text{ donde } C$$

es el entorno (regular) de una superficie S.

Sol.:

$$P(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow P'_y(x,y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q(x,y) = y \cdot (xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) \rightarrow$$

$$Q'_x(x,y) = y \cdot [y + \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}}] = y \cdot [y + \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}] =$$

$$= y \cdot [\frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2}) + (x + \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}] =$$

$$= y \cdot [\frac{(1 + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}]$$

Sustituyendo: $Q_x(x,y) - P_y(x,y) =$

$$= y \cdot [\frac{(1 + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}] - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{y \cdot (1 + y \cdot \sqrt{x^2+y^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2}) - y \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})} =$$

$$= \frac{y^2 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2+y^2})} = y^2$$

Resultado: $\iint_S y^2 \cdot dx dy$

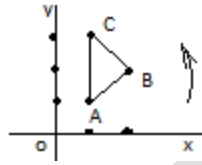
3.- a) Aplicando la fórmula de Green, calcula la integral curvilínea

$$I = \oint 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx + (x + y)^2 \cdot dy, \text{ donde}$$

C es el contorno del triángulo con vértices A(1,1), B(2,2), C(1,3), recorrido en sentido positivo.

b) Calcula directamente la integral curvilínea.

Sol.:



$$a) P(x,y) = 2.(x^2 + y^2) \rightarrow P_y = 4y,$$

$$Q(x,y) = (x+y)^2 \rightarrow Q_x = 2.(x+y),$$

$$I = \iint_S (2.(x+y) - 4y). dx dy = \iint_S (2x - 2y). dx dy$$

$$I = 2. \int_1^2 \left(\int_{y^1}^{y^2} (x - y). dy \right). dx = 2. \int_1^2 \left(\int_x^{-x+4} (x - y). dy \right). dx =$$

$$= 2. \int_1^2 \left(xy - \frac{1}{2}. y^2 \right) \Big|_x^{-x+4}. dx =$$

$$= 2. \int_1^2 \left[\left(x.(-x+4) - \frac{1}{2}.(-x+4)^2 \right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}.x^2 \right) \right]. dx =$$

$$= 2. \int_1^2 [-2x^2 + 8x - 8]. dx = -4. \int_1^2 [x^2 - 4x + 4]. dx =$$

$$= -4. \left(\frac{1}{3}. x^3 - 2x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= -4. \left[\left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4 \right) \right] = -4. \left[\frac{8}{3} - \frac{7}{3} \right] = -\frac{4}{3}$$

(#)

b) Valor de $I = \oint 2.(x^2 + y^2).dx + (x + y)^2.dy$, por cálculo directo (concepto de Integral curvilínea)

Caminos: AB: $y = x$, $y_x' = 1$

$$\begin{aligned} \int_{AB} 2.(x^2 + y^2).dx + (x + y)^2.dy &= \int_1^2 [2(2x^2) + 4x^2].dx = \\ &= 8. \int_1^2 x^2.d x = 8. \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2 = 8. \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

BC: $y = -x + 4$, $y_x' = -1$

$$\begin{aligned} \int_{BC} 2.(x^2 + y^2).dx + (x + y)^2.dy &= \\ &= -\int_1^2 [2.(x^2 + x^2 - 8x + 16) - (16)].dx = \\ &= -\int_2^1 (4x^2 - 16x + 16).dx = -4. \int_2^1 (x^2 - 4x + 4).dx = \\ &= -4. \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)_1^2 = -4. \left[\left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right] = \\ &= -4. \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2\right] = -4. \frac{7}{3} + 8 = \frac{-28}{3} + \frac{24}{3} = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

CA: $x = 1$, $x_y' = 0$

$$\begin{aligned} \int_{CA} 2.(x^2 + y^2).dx + (x + y)^2.dy &= \\ &= -\int_1^3 [2.(1 + y^2).0 + (1 + y)^2].dy = -\int_1^3 (1 + y)^2.dy = \\ &= -\int_1^3 (y^2 + 2y + 1).dy = -\left(\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right)_1^3 = \\ &= -\left[(9 + 9 + 3) - \left(\frac{1}{3} + 1 + 1\right)\right] = -\left[19 - \frac{1}{3}\right] = -\frac{56}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Resultado: } \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} &= -\frac{4}{3} \\ &(\text{Mismo resultado de antes}) \end{aligned}$$

4.- Calcula aplicando la fórmula de Green

$$\oint_C -x^2 y \cdot dx + xy^2 \cdot dy, \text{ donde } C \text{ es la}$$

circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ recorrida en sentido positivo.

Sol.: Resuélvalo el alumno. Resultado: $\frac{\pi r^4}{2}$

8.5.- Integral de Superficie de Primer tipo

Supongamos $u = f(x, y, z)$ función continua con tres variables independientes, definida sobre una superficie S . Supongamos una relación (ligadura) que expresa

$$z = g(x, y), \text{ sobre un dominio } D \text{ del plano } (x, y)$$

Dividimos la superficie S en ‘celdas’ (pequeñas celdas) que representamos por ΔS_i . ΔS_i representará también el valor de su propia superficie.

Designamos por δ_i a la mayor de las distancias entre puntos de ΔS_i (lo llamamos diámetro de ΔS_i).

Suponemos enumeradas las n celdas ΔS_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$ formando una sucesión. Podemos incrementar el número de celdas, y evidentemente, $n \rightarrow \infty$ implica que $\delta_i \rightarrow 0$.

Sea u_i un valor de $f(x, y, z)$ dentro de la celda Δs_i . Bajo las condiciones de continuidad de $f(x, y, z)$ en su dominio D , dentro de Δs_i tomará un valor mínimo m_i y un valor máximo M_i , y es evidente la relación entre las siguientes sumas

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \delta_i, \text{ cualquiera que sea } n.$$

Entre las dos sumas, si son desiguales cualquiera que sea el valor n , existirá un valor T real T al cual se aproximan dichas sumas. Entonces cabe plantear los siguientes límites y su igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta_i = T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i \cdot \delta_i$$

Defi.: (De Primer tipo)

Llamamos Integral de superficie de Primer tipo al valor T obtenido en estos límites, cuando éste sea un valor real.

La designamos mediante $\iint_S f(x, y, z) \cdot ds$

Su cálculo:

Si D es la proyección de S sobre el plano (x, y) , resultando que $z = g(x, y)$ sobre D es uniforme (un solo valor sin ambigüedad), entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \cdot ds &= \\ &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + g'_x(x, y)^2 + g'_y(x, y)^2} \cdot dx \cdot dy \end{aligned}$$

Ejemplos:

1.- Sea $f(x, y, z) = x + y + z$, y S la cara superior del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

a) Calcula $\iint_S (x + y + z). ds$

b) Lo mismo pero integrando sobre S cara inferior del citado cubo.

Sol.: a) En este caso sobre S es $z = 1$, y la proyección de S es $D = [0, 1] \times [0, 1]$, siendo

$z = g(x, y) = 1$ definida en D .

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z). ds &= \\ &= \iint_D (x + y + 1). dx. dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y + 1). dy \right). dx = \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} \cdot y^2 + y \right) \Big|_0^1. dx = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} \right). dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$

b) En este caso, sobre S tenemos $z = 0$, y la proyección sobre el plano XOY es $D = S = [0, 1] \times [0, 1]$, siendo $z = g(x, y) = 0$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z). ds &= \iint_D (x + y + 0). dx. dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y). dy \right). dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} \cdot y^2 \right) \Big|_0^1. dx = \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right). dx = \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

NOTA:

Observa que estas dos caras suman el valor 3 u. Si tomo otras dos caras opuestas, tomando como independientes el par de variables correspondientes, volvemos a obtener el valor 3 con cada par. En total, si extendiendo la integración sobre la superficie de las seis caras obtengo el valor 9 unidades.

2.- Calcula

$\iint_S (x^2 + y^2).ds$, donde S es la superficie (exterior) de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Sol.:

Sobre la superficie S tengo $z = \pm\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$$z'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}, \quad z'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

$$1 + \frac{x^2 + y^2}{(R^2 - (x^2 + y^2))} = \frac{R^2}{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Dominio de integración: $z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = R^2$, -->

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$I = \iint_S (x^2 + y^2).ds =$$

$$= 8.R \cdot \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \cdot dy \right) \cdot dx = (*)$$

Integro respecto de y:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}} \cdot dy = x^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}})^2}} \cdot dy =$$

(Hago $\text{sen}(t) = \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $\sqrt{R^2-x^2} \cdot \cos(t) \cdot dt = dy$)

$$= \frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot \sqrt{R^2-x^2} \cdot \int \frac{1}{\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot dt = x^2 \cdot t \rightarrow$$

(deshaciendo el cambio anterior)

$$= x^2 \cdot (\text{arcSen}(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}})) \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = x^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Integro ahora

$$\int \frac{y^2}{\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}} \cdot dy = (**)$$

Integración ‘Método por partes’:

$$u = y, dv = \frac{y}{\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}} \cdot dy$$

$$v = \int \frac{y}{\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}} \cdot dy \text{ (hago } t = (R^2-x^2) - y^2,$$

$$dt = -2y \cdot dy)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{t} = -\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}$$

$$(**) = -y \cdot \sqrt{(R^2-x^2)-y^2} + \int \sqrt{(R^2-x^2)-y^2} \cdot dy$$

Integrando

$$\int \sqrt{(R^2 - x^2) - y^2} \cdot dy = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} \cdot dy =$$

$$(\text{Hago: } \sin(t) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad dy = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$= (R^2 - x^2) \cdot \int \cos^2(t) \cdot dt = (R^2 - x^2) \cdot \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} \cdot dt =$$

$$= (R^2 - x^2) \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \left(\text{arcSen} \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \cos(\text{arcSen} \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)) \right) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - (0 + 0 \cdot \cos(0)) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (R^2 - x^2);$$

$$\text{además: } (-y \cdot \sqrt{(R^2 - x^2) - y^2}) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= [(-\sqrt{R^2 - x^2} \cdot 0) - (0)] = 0$$

Integro respecto de x:

$$(*) = \int_0^R \left[x^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot (R^2 - x^2) \right] \cdot dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R \left[x^2 + \frac{1}{2} \cdot (R^2 - x^2) \right] \cdot dx = (***)$$

$$\text{Integro sus términos: } \frac{\pi}{2} \cdot \int x^2 \cdot dx \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{R^3 \cdot \pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \int (R^2 - x^2) \cdot dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R =$$

$$= \frac{\pi i}{4} \cdot \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - (0) \right] = \frac{\pi i \cdot R^3}{6}$$

$$(***) = \frac{R^3 \cdot \pi i}{6} + \frac{R^3 \cdot \pi i}{6} = \frac{R^3 \cdot \pi i}{3}$$

$$\text{Resumen: } (*) = 8 \cdot R \cdot \frac{R^3 \cdot \pi i}{3} = \frac{8 \cdot R^4 \cdot \pi i}{3} \quad (\#)$$

8.6.- Integral de Superficie de Segundo tipo Fórmula de Stockes

Supongamos funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, continuas sobre una superficie S regular. Sea S^+ la cara de S determinada por la orientación positiva de la normal N , cuyos cosenos directores son $\cos(g1)$, $\cos(g2)$, $\cos(g3)$, esto es

$$N = k \cdot (\cos(g1), \cos(g2), \cos(g3))$$

NOTA: La dirección de la normal ha de elegirse de forma que, desde su cabecera (extremo final), el recorrido de C se haga en sentido contrario a las agujas del reloj. Es la que tomamos como orientación positiva.

En estas condiciones definimos

Def.:

Llamamos Integral de Superficie de Segunda tipo a la integral de superficie

$$\iint_S [P(x, y, z) \cdot \cos(g1) + Q(\dots) \cdot \cos(g2) + R(\dots) \cdot \cos(g3)] \cdot ds$$

Su cálculo:

$$\begin{aligned} & \iint_S [P(x, y, z) \cdot \cos(g1) + Q(\dots) \cdot \cos(g2) + \\ & \qquad \qquad \qquad + R(\dots) \cdot \cos(g3)] \cdot ds = \\ & = \iint_{S^+} [P(x, y, z) \cdot dydz + Q(\dots) \cdot dx dz + R(\dots) \cdot dx dy] \end{aligned}$$

Si la superficie S viene dada por $f(x, y, z) = 0$, entonces los cosenos directores vienen dados por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \cos(g1) &= \frac{1}{D} \cdot f'_x(x, y, z), \quad \cos(g2) = \frac{1}{D} \cdot f'_y(x, y, z), \\ \cos(g3) &= \frac{1}{D} \cdot f'_z(x, y, z), \text{ donde} \end{aligned}$$

$$D = \pm \sqrt{f'_x(x, y, z)^2 + f'_y(\dots)^2 + f'_z(\dots)^2}$$

El signo de D debe ser elegido conforme a la cara S^+ ó S^- de S sobre la que integramos: $D > 0$ si tomo S^+ , $D < 0$ si tomo S^- . El vector normal N mencionado antes tiene la expresión

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{1}{D} \cdot f'_x(x, y, z), \frac{1}{D} \cdot f'_y(x, y, z), \frac{1}{D} \cdot f'_z(x, y, z) \right) = \\ &= \frac{1}{D} \cdot (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)) \end{aligned}$$

Fórmula de Stockes:

Esta fórmula permite transformar una Integral curvilínea de segundo tipo en Integral de superficie.

Sean las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, continuas y con derivadas continuas en la superficie S . Sea C una curva cerrada que limita la superficie bilateral S . Bajo estas condiciones se cumple

$$\oint_C [P(x, y, z). dx + Q(...). dy + R(...). dz] = \iint_S [(R'_y - Q'_z). \cos(g1) + (P'_z - R'_x). \cos(g2) + (Q'_x - P'_y). \cos(g3)] . ds$$

donde la dirección de la normal ha de elegirse de forma que, desde su cabecera (extremo final), el recorrido de C se haga en sentido contrario a las agujas del reloj. Es la que tomamos como orientación positiva.

Ejemplos:

1.- Calcula

$$I = \iint_S (x^2 + y^2). ds, \text{ donde } S \text{ es la superficie lateral del cono}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad b = a, \quad 0 \leq z \leq c$$

Sol.:

$$\text{Sobre la superficie } S \text{ tenemos: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \rightarrow$$

$$c^2 \cdot (x^2 + y^2) = a^2 \cdot z^2 \rightarrow z = \pm \frac{c}{a} \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

tomo el signo +.

$$\text{Tengo } z'_x = \frac{2 \cdot c \cdot x}{2 \cdot a \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{2 \cdot c \cdot y}{2 \cdot a \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dots \rightarrow$$

$$1 + z'_x + z'_y = 1 + \frac{c^2 \cdot x^2 + c^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{(a^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2)}{a^2 \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{a^2 + c^2}{a^2}$$

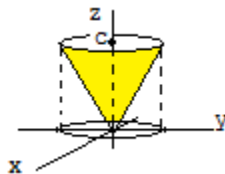
Representación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$z = 0 \rightarrow x = 0, y = 0 \rightarrow$ pasa por $(0, 0, 0)$

$$x = 0 \rightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{a} \cdot y$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \rightarrow z = \pm \frac{c}{a} \cdot x$$



Dominio de integración:

En el plano $z = c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \text{ que es un disco en dicho plano.}$$

Su proyección ortogonal sobre el plano (x,y) es el recinto D de integración:

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ tomo signo +}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x^2 + y^2) \cdot ds = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot dy \cdot dx = \\ &= 4 \cdot \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2}} \cdot dy \right) \cdot dx = \\ &= \frac{4}{a} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2) \cdot dy \right) \cdot dx = (*) \end{aligned}$$

$$\text{Calculamos } I' = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Integramos respecto de y:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + y^2) \cdot dy &= x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \rightarrow \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \left[(x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{3} \cdot (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}) - (0) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Integramos respecto de x:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx &= (**) \\ (u = x, dv = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \\ (t = a^2 - x^2, dt = -2x \cdot dx) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \rightarrow v = -\frac{1}{3} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$(**) = -\frac{1}{3} \cdot x \cdot (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{3} \cdot \int x \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \cdot dx$$

$$\int x \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \cdot dx =$$

$$(t = a^2 - x^2, dt = -2x \cdot dx)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{3}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot t^{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5} \cdot (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow$$

$$(**) = -\frac{1}{3} \cdot x \cdot (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$-\frac{1}{15} \cdot (a^2 - x^2)^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$= -(a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \left[\frac{x}{3} + \frac{a^2 - x^2}{15} \right] \rightarrow$$

$$-(((a^2 - x^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \left[\frac{x}{3} + \frac{a^2 - x^2}{15} \right])_0^a =$$

$$= -\left[(0 \dots) - (a^2) \cdot a \cdot \frac{a^2}{15} \right] = \frac{a^5}{15} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{a^5}{15}$$

Integro

$$\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = (**),$$

$$(\text{hago } \sin(t) = \frac{x}{a}, dx = a \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = a \cdot \int \cos^2(t) \cdot dt = a \cdot \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) \right] =$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \left[\operatorname{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \cos\left(\operatorname{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \right] \rightarrow$$

$$\frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\operatorname{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \cos\left(\operatorname{arcSen}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{a^3}{6} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1.0 \right) - (0 + 0.1) \right] = \frac{a^3 \cdot \pi}{12}$$

Resumen: $\Gamma' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^5}{15} + \frac{a^3 \pi}{12} = \dots$

$$I = \frac{4}{a} \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{a^5}{15} + \frac{a^3 \pi}{12} \right] = \dots$$

Resultado final: $\frac{2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$) (#)

2.- Calcula

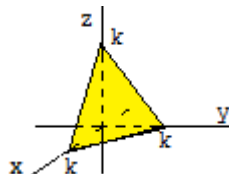
$I = \iint_S yz \cdot dydz + xz \cdot dx dz + xy \cdot dx dy$, donde S es la cara exterior del tetraedro limitado por los planos

$$(1) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Sol.:

Se trata de Integral de superficie de segunda especie.
Por definición tengo:

$I = \iint_S (yz \cdot \cos(g1) + xz \cdot \cos(2) + xy \cdot \cos(3)) \cdot ds$, donde S viene definida por (1)



S1: Sobre la cara $x + y + z = k$

$$f(x,y,z) = x+y+z-k, \quad f(x,y,z) = 0$$

$$f'_x = 1, \quad f'_y = 1, \quad f'_z = 1, \quad \rightarrow D = \sqrt{3}$$

$$\cos(g1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(g2) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos(g3) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \iint_S (yz + xz + xy) \cdot ds$$

(integral de superficie de primer tipo)

Sobre S tengo: $z = k-(x+y)$; $z'_x = -1$, $z'_y = -1$

$$1 + z'^2_x + z'^2_y = 3$$

Recinto de integración: $R: z = 0 \rightarrow x + y = k \rightarrow$
 $y = k-x$,

Por tanto $D =$ Recinto limitado por $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = k - x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Por otro lado: } & y \cdot (k - x - y) + x \cdot (k - x - y) + xy = \\ & = ky - yx - y^2 + kx - x^2 - xy + xy = -y^2 + (k-x) \cdot y + (kx - x^2) \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^k \left(\int_0^{k-x} (-y^2 + (k-x)y + (kx-x^2)) \cdot \sqrt{3} dy \right) dx = (*)$$

Integro respecto de y:

$$\int (-y^2 + (k-x)y + (kx-x^2)) dy \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{(k-x)}{2} \cdot y^2 + (kx-x^2) \cdot y \right]_0^{k-x} = \\ & = -\frac{1}{3} \cdot (k-x)^3 + \frac{k-x}{2} \cdot (k-x)^2 + (kx-x^2) \cdot (k-x) = \\ & = \frac{1}{6} \cdot (k^3 - x^3 - 3k^2x + 3kx^2) + x \cdot (k^2 + x^2 - 2kx) = \\ & = \left(-\frac{1}{6} + 1 \right) \cdot x^3 + \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdot kx^2 + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot k^2x + \frac{1}{6} \cdot k^3 = \\ & = \frac{1}{6} \cdot [5x^3 - 9kx^2 + 3k^2x + k^3] \end{aligned}$$

(*) Integro respecto de x:

$$\begin{aligned} & \int (5x^3 - 9kx^2 + 3k^2x + k^3) dx \rightarrow \\ & = \left(\frac{5}{4} \cdot x^4 - 3kx^3 + \frac{3}{2} \cdot k^2x^2 + k^3x \right)_0^k = \\ & = \frac{5}{4} \cdot k^4 - 3k^4 + \frac{3}{2} \cdot k^4 + k^4 = \\ & = \frac{1}{4} \cdot [5k^4 - 12k^4 + 6k^4 + 4k^4] = \frac{3}{4} \cdot k^4 \end{aligned}$$

$$\text{Resumen: } I = \frac{1}{6} \cdot \frac{3 \cdot k^4}{4} = \frac{3 \cdot k^4}{24} = \frac{k^4}{8} \quad (\#)$$

3.- Calcula

$I = \iint_S z \cdot dx dy$, donde S es la cara exterior del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sol.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow b^2 c^2 \cdot x^2 + a^2 c^2 \cdot y^2 + a^2 b^2 \cdot z^2 = a^2 b^2 c^2$$

$$f_x' = 2b^2 c^2 \cdot x, \quad f_y' = 2a^2 c^2 \cdot y, \quad f_z' = 2a^2 b^2 \cdot z \quad -->$$

$$D = \sqrt{4 \cdot (b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2)}$$

$$\cos(g3) = \frac{2a^2 b^2 \cdot z}{2 \cdot \sqrt{b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2}}$$

$$\text{Entonces } z \cdot \cos(g3) = \frac{a^2 b^2 \cdot z^2}{\sqrt{b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2}}$$

$$I = \iint_S \frac{a^2 b^2 \cdot z^2}{\sqrt{b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2}} \cdot ds, \quad (1)$$

(integral de superficie)

Tengo en cuenta que, sobre la superficie del Elipsoide:

$$z^2 = \frac{1}{a^2 b^2} \cdot [a^2 b^2 c^2 - b^2 c^2 \cdot x^2 - a^2 c^2 \cdot y^2]$$

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot [a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2]$$

$$y \quad z = \frac{c}{ab} \cdot \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2};$$

Necesitaré z_x' , z_y' :

$$\begin{aligned}
 z_x' &= \frac{c}{ab} \cdot \frac{-2b^2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2}}, \quad z_y' = \frac{c}{ab} \cdot \frac{-2a^2 \cdot y}{2 \cdot \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2}}, \\
 1 + z_x'^2 + z_y'^2 &= 1 + \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{b^4 \cdot x^2 + a^4 \cdot y^2}{(a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2)} = \\
 &= \frac{a^2 b^2 \cdot (a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2) + c^2 \cdot (b^4 \cdot x^2 + a^4 \cdot y^2)}{a^2 b^2 \cdot (a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2)} = \\
 &= \frac{a^4 b^4 + b^4 \cdot (c^2 - a^2) \cdot x^2 + a^4 \cdot (c^2 - b^2) \cdot y^2}{a^2 b^2 \cdot (a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2)} \rightarrow \\
 &\quad \frac{\sqrt{a^4 b^4 + b^4 \cdot (c^2 - a^2) \cdot x^2 + a^4 \cdot (c^2 - b^2) \cdot y^2}}{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2}}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sustituimos la expresión z^2 sobre la superficie en

$$\begin{aligned}
 z \cdot \cos(g_3) &= \frac{a^2 b^2 \cdot z^2}{\sqrt{b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2}} \\
 b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot z^2 &= \\
 &= b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^4 b^4 \cdot \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot [a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2] = \\
 &= b^4 c^4 \cdot x^2 + a^4 c^4 \cdot y^2 + a^2 b^2 c^2 \cdot [a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2] = \\
 &= c^2 a^4 b^4 + b^4 \cdot (c^4 - c^2 a^2) \cdot x^2 + a^4 \cdot (c^4 - c^2 b^2) \cdot y^2 = \\
 &= c^2 \cdot [a^4 b^4 + b^4 \cdot (c^2 - a^2) \cdot x^2 + a^4 \cdot (c^2 - b^2) \cdot y^2] \rightarrow
 \end{aligned}$$

el denominador queda así

$$c.\sqrt{a^4b^4 + b^4.(c^2 - a^2).x^2 + a^4.(c^2 - b^2).y^2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} a^2b^2.z^2 &= a^2b^2 \cdot \frac{c^2}{a^2b^2} \cdot [a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2] = \\ &= c^2 \cdot [a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2] \rightarrow \text{por tanto} \end{aligned}$$

$$z.\cos(g3) = \frac{c^2.[a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2]}{c.\sqrt{a^4b^4 + b^4.(c^2 - a^2).x^2 + a^4.(c^2 - b^2).y^2}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} z.\cos(g3) \cdot \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} &= \frac{c^2.[a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2]}{c.\sqrt{a^4b^4 + b^4.(c^2 - a^2).x^2 + a^4.(c^2 - b^2).y^2}} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt{a^4b^4 + b^4.(c^2 - a^2).x^2 + a^4.(c^2 - b^2).y^2}}{a.b.\sqrt{a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}} = \\ &= \frac{c.[a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2]}{a.b.\sqrt{a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2}} = \frac{c}{ab} \cdot \sqrt{a^2b^2 - b^2.x^2 - a^2.y^2} \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta la simetría es suficiente integrar sobre

$$\text{el cuadrante: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

La tercer igualdad resulta de que teníamos

$$b^2.x^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calculamos

$$I = 8 \cdot \frac{c}{a \cdot b} \cdot \int_0^a \left(\int_0^{b(x)} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2} \cdot dy \right) \cdot dx$$

Integro respecto de y:

$$\int \sqrt{a^2 b^2 - b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2} \cdot dy =$$

$$= \int \sqrt{b^2 \cdot (a^2 - x^2) - a^2 \cdot y^2} \cdot dy =$$

$$= b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{ay}{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \right)^2} \cdot dy = \quad (2)$$

$$(\text{Hago } \sin(t) = \frac{ay}{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad dy = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \cos(t) \cdot dt)$$

$$\frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \int \cos^2(t) \cdot dt = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) \right] =$$

$$= \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left[\arcsen\left(\frac{ay}{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \frac{ay}{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \cos\left(\arcsen\left(\frac{ay}{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}\right)\right) \right]_0^{\frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a}}$$

$$= \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - (0 + 0.1) \right] =$$

$$= \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{b \cdot \pi}{4 \cdot a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad \dots >$$

$$(2) = b \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{b \cdot \pi}{4 \cdot a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b^2 \cdot \pi}{4 \cdot a} \cdot (a^2 - x^2)$$

Integro respecto de x:

$$\int (a^2 - x^2).dx \rightarrow (a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^a = \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - (0) \right] = \frac{2}{3} \cdot a^3$$

Por tanto

$$I = 8 \cdot \frac{c}{a \cdot b} \cdot \frac{b^2 \cdot \pi}{4 \cdot a} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \quad (\#)$$

4.- Calcula

$I = \iint_S x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dxdz + z^2 \cdot dxdy$, donde S es la cara exterior de la semiesfera

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Sol.: Es Integral de Superficie de segunda especie

Tenemos:

$$P(x,y,z) = x^2, \quad Q(x,y,z) = y^2, \quad R(x,y,z) = z^2$$

Superficie S: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, $f(x, y, z)=0$,

que es la esfera con radio R. Derivadas parciales

$$f_x' = 2x, \quad f_y' = 2y, \quad f_z' = 2z,$$

$$D = \sqrt{4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} = 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos(g1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos(g2) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos(g3) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por tanto

$$P(x,y,z).cos(g1) + Q(.).cos(g2) + R(.).cos(g3)$$

y la integral dada se convierte en la Integral de superficie de primera especie

$$I = \iint_S \frac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot ds$$
 , donde S es la semiesfera del enunciado.

Sobre S tengo $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, tomo el signo +

$$z_x' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}} , \quad z_y' = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2} = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2} ,$$

Recinto de integración R: $z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow$
 $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, tomo el signo +

$$\text{por tanto: } I = \iint_R \frac{x^3+y^3+z(x,y)^3}{\sqrt{x^2+y^2+z(x,y)^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \cdot dydx$$

donde R es el recinto: $x^2 + y^2 = R^2$

Veamos en qué queda al sustituir la expresión

$$z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z(x, y)^2 = R^2 ,$$

$$z^3 = (R^2 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{R}{R} \cdot \iint_R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot [x^3 + y^3 + (R^2 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}] \cdot dx dy = \\
 &= \iint_R \left[\frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + (R^2 - x^2 - y^2) \right] \cdot dy dx \quad (A)
 \end{aligned}$$

Integro cada término respecto de y:

Integro

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot dy &= x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}} \cdot dy = \\
 &= x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \int dt = x^3 \cdot t \rightarrow \\
 x^3 \cdot \left(\text{arcSen}\left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \right) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} &= x^3 \cdot \frac{\pi}{2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Integro

$$\begin{aligned}
 \int \frac{y^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot dy &= (*), \text{ por partes} \\
 (u = y^2, du = 2y dy, dv = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot dy)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= \int \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot dy = \\
 (\text{hago: } t &= R^2 - x^2 - y^2, dt = -2y \cdot dy)
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \rightarrow v = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\begin{aligned}
 \int v \cdot du &= -2 \cdot \int y \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot dy = \\
 (\text{hago: } t &= R^2 - x^2 - y^2, dt = -2y \cdot dy)
 \end{aligned}$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}}.dt = \frac{2}{3}.t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ por tanto}$$

$$(*) = -y^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \rightarrow$$

$$(-y^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \left[\left(-(R^2 - x^2) \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \right) - \right. \\ \left. - \left(-0 \dots - \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \quad (2)$$

Integro

$$\int R^2 \cdot dy \rightarrow (R^2 \cdot y) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = R^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \quad (3)$$

Integro

$$-\int x^2 \cdot dy \rightarrow (-x^2 \cdot y) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = -x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \quad (4)$$

Integro

$$-\int y^2 \cdot dy \rightarrow -\left(\frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \quad (5)$$

Resumen:

$$(A) = x^3 \cdot \frac{\pi i}{2} + \frac{2}{3} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \\ + R^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{1}{3} \cdot (R^2 - x^2) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = \\ = \frac{\pi i x^3}{2} + \left(\frac{2}{3} \cdot R^2 + R^2 - \frac{1}{3} \cdot R^2 \right) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} +$$

$$+ \left(-\frac{2}{3} \cdot x^2 - x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^2 \right) \cdot \sqrt{R^2 - x^2} =$$

$$= x^3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$

Integro cada término respecto de x:

Integro

$$\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R x^3 \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{R^4 \cdot \pi}{8}$$

Integro

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx \rightarrow \frac{R^2}{2} \cdot \left(\arcsen\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{x}{R} \cdot \cos\left(\arcsen\left(\frac{x}{R}\right)\right) \right) \Big|_0^R =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1.0 \right) - (0 + 0.1) \right] = \frac{R^2 \cdot \pi}{4} -- > \frac{4}{3} \cdot R^2 \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{4} = \frac{R^4 \cdot \pi}{3}$$

Integro

$$\int x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx = R \cdot \int x^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \cdot dx =$$

$$(x/R = \text{sen}(t), dx = R \cdot \cos(t) \cdot dt, x^2 = R^2 \cdot \text{sen}^2(t))$$

$$= R^4 \cdot \int \text{sen}^2(t) \cdot \cos^2(t) \cdot dt = R^4 \cdot \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2t)}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \int (1 - \cos^2(2t)) \cdot dt = \frac{R^4}{4} \cdot \left[t - \int \frac{1 + \cos(4t)}{2} \cdot dt \right] =$$

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \left[t - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(4t) \right] = \frac{R^4}{4 \cdot 8} \cdot [4t - \text{sen}(4 \cdot t)] =$$

$$= \frac{R^4}{4.8} \cdot \left[4 \cdot \text{arcSen} \left(\frac{x}{R} \right) - \text{sen} \left(4 \cdot \text{arcSen} \left(\frac{x}{R} \right) \right) \right]_0^R =$$

$$= \frac{R^4}{4.8} \cdot \left[\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 \right) - (4.0 - 0) \right] = \frac{R^4 \cdot \pi}{16} --> -\frac{4}{3} \cdot \frac{R^4 \cdot \pi}{16} = \frac{-R^4 \cdot \pi}{12}$$

Resumen: $\frac{R^4 \cdot \pi}{8} + \frac{R^4 \cdot \pi}{3} - \frac{R^4 \cdot \pi}{12} = \frac{(3+8-2) \cdot R^4 \cdot \pi}{24} =$

$$= \frac{9 \cdot R^4 \cdot \pi}{24} = \frac{3 \cdot R^4 \cdot \pi}{8}$$

NOTA: Tengamos en cuenta que el resultado obtenido resulta de integrar sobre el recinto

$$R: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}, \text{ un cuarto del disco}$$

mientras que lo que nos piden es la integración sobre el disco

$$R: x^2 + y^2 \leq 0$$

Resultado final: $\frac{3 \cdot \pi \cdot R^4}{2}$ (#)

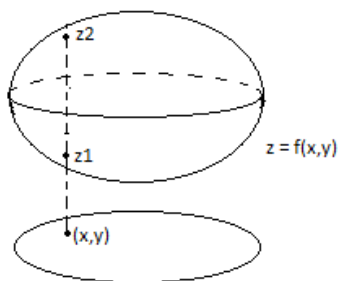
8.7.- Fórmula de Ostrogradski-Gauss

Esta fórmula permite transformar una integral de superficie de segundo tipo en una integral triple.

Supongamos el volumen V cerrado de un cuerpo en el espacio.

Cerrado significa que V incluye la superficie S que lo limita. Suponemos que la superficie S es regular, es decir la función que la define es uniforme. En este caso, puesto que se trata de ‘encerrar’ un volumen (véase la figura), para cada punto (x, y) de D existirán dos imágenes:

Suelo: $z_1 = f(x, y)$, Techo: $z_2 = f(x, y)$



Sean las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, definidas en V , siendo éstas y sus derivadas parciales de primer orden continuas. En estas condiciones afirmamos que se cumple la

Fórmula de Ostrogradski-Gauss:

$$\begin{aligned} & \iint_S [P(x, y, z) \cdot \cos(g_1) + Q(\dots) \cdot \cos(g_2) + \\ & \qquad \qquad \qquad + R(\dots) \cdot \cos(g_3)] \cdot ds = \\ & = \iiint_V \left(P'_x(x, y, z) + Q'_y(\dots) + R'_z(\dots) \right) \cdot dxdydz \end{aligned}$$

donde los cosenos son los cosenos directores de la normal N a la superficie S orientada hacia el exterior de V .

Recuerda que por definición de integral de superficie de segundo tipo

$$\iint_S [P(x, y, z) \cdot \cos(g_1) + Q(\dots) \cdot \cos(g_2) + R(\dots) \cdot \cos(g_3)] \cdot ds =$$

$$= \iint_{S^+} P(x, y, z) \cdot dydz + Q(\dots) \cdot dxdz + R(\dots) \cdot dxdy$$

por tanto la fórmula anterior también nos dice que

$$\iint_{S^+} P(x, y, z) \cdot dydz + Q(\dots) \cdot dxdz + R(\dots) \cdot dxdy =$$

$$= \iiint_V \left(P'_x(x, y, z) + Q'_y(\dots) + R'_z(\dots) \right) \cdot dxdydz$$

En los siguientes ejemplos tenemos en cuenta esta relación.

Ejemplos:

1.- Transforma en una integral de volumen la siguiente

$$\iint_S xy \cdot dxdy + yz \cdot dydz + xz \cdot dxdz$$

donde S encierra un volumen V.

Sol.:

En este caso observa que $P(x, y, z) = yz$, $Q(\dots) = xz$, $R(\dots) = xy$, y por tanto: $P'_x(x, y, z) = 0$, y lo mismo las otras dos. Por tanto

$$\iint_S xy \cdot dxdy + yz \cdot dydz + xz \cdot dxdz = (\text{Ostrogradski-Gauss})$$

$$= \iiint_V [P'_x(x, y, z) + Q'_y(\cdot) + R'_z(\cdot)] \cdot dxdydz =$$

$$= \iiint_V (0 + 0 + 0) \cdot dxdydz = 0, \text{ donde V es el volumen}$$

encerrado por la superficie S.

(#)

2.- Transforma en Integral de volumen

$$\iint_S [x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dxdz + z^2 \cdot dxdy]$$

donde S encierra un volumen V.

Sol.:

$$P(x, y, z) = x^2 \rightarrow P_x(x, y, z) = 2x$$

$$Q(x, y, z) = y^2 \rightarrow Q_x(x, y, z) = 2y$$

$$R(x, y, z) = z^2 \rightarrow R_x(x, y, z) = 2z$$

Por fórmula de Ostrogradski-Gauss tengo

$$\begin{aligned} \iint_S [x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dxdz + z^2 \cdot dxdy] &= \\ = \iiint_V [2x + 2y + 2z] \cdot dxdydz &= 2 \cdot \iiint_V [x + y + z] \cdot dxdydz, \end{aligned}$$

donde V es el volumen encerrado por S

(#)

3.- Transforma en Integral de Volumen

$$\iint_S \frac{x \cdot \cos(g1) + y \cdot \cos(g2) + z \cdot \cos(g3)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot ds$$

donde S encierra el volumen V.

$$\text{Sol: En este caso } \begin{cases} P(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ Q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ R(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{y por tanto } P_x(x, y, z) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \\ &= \frac{(x^2+y^2+z^2) - x^2}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

De forma análoga obtendremos

$$Q_y(\dots) = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$R_z(\dots) = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Resultado

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{x \cdot \cos(g1) + y \cdot \cos(g2) + z \cdot \cos(g3)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot ds &= \\ = \iiint_V \frac{(y^2+z^2) + (x^2+z^2) + (x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dxdydz &= \\ = 2 \cdot \iiint_V \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dxdydz &= \\ = 2 \cdot \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dxdydz & \quad (\#) \end{aligned}$$

4.- Transforma en Integral de Volumen

$$\begin{aligned} \iint_S (U_x(x, y, z) \cdot \cos(g1) + U_y(x, y, z) \cdot \cos(g2) + \\ + U_z(x, y, z) \cdot \cos(g3)) \cdot ds \end{aligned}$$

donde S encierra el volumen V

Sol.:

$$\begin{aligned}\text{En este caso:} \quad P(x, y, z) &= U_x(x, y, z) \\ Q(x, y, z) &= U_y(x, y, z) \\ R(x, y, z) &= U_z(x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{y por tanto :} \quad P_x(x, y, z) &= U_{xx}(x, y, z) \\ Q_y(x, y, z) &= U_{yy}(x, y, z) \\ R_z(x, y, z) &= U_{zz}(x, y, z)\end{aligned}$$

y aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss tengo

$$\begin{aligned}&\iint_S (U_x(x, y, z) \cdot \cos(g1) + U_y(x, y, z) \cdot \cos(g2) + \\&\quad + U_z(x, y, z) \cdot \cos(g3)) \cdot ds = \\&= \iiint_V [U_{xx}(x, y, z) + U_{yy}(x, y, z) + U_{zz}(x, y, z)] \cdot dx dy dz ,\end{aligned}$$

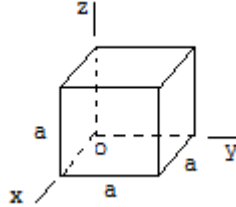
donde V es el volumen encerrado por S.

(#)

5.- Aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss calcula

$\iint_S x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dx dz + z^2 \cdot dx dy$, donde S es la cara exterior del cubo $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}$

Sol.:



En este caso tenemos:

$$P(x, y, z) = x^2 \rightarrow P_x(x, y, z) = 2x$$

$$Q(x, y, z) = y^2 \rightarrow P_y(x, y, z) = 2y$$

$$R(x, y, z) = z^2 \rightarrow P_z(x, y, z) = 2z$$

Por la fórmula de Ostrogradski-Gauss

$$\begin{aligned} & \iint_S x^2 \cdot dydz + y^2 \cdot dx dz + z^2 \cdot dx dy = \\ & = 2 \cdot \iiint_V (x + y + z) \cdot dx dy dz = \\ & \quad (V = \text{Interior} + \text{Superficie}) \\ & = 2 \cdot \int_0^a \left(\int_0^a \left(\int_0^a (x + y + z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx = \\ & = 2 \cdot \int_0^a \left(\int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a \cdot dy \right) \cdot dx = \\ & = 2 \cdot \int_0^a \left(\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) \cdot dy \right) \cdot dx = \\ & = 2 \cdot \int_0^a \left(axy + \frac{ay^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot y \right) \Big|_0^a \cdot dx = 2 \cdot \int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) \cdot dx = \\ & = 2 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot x^2}{2} + a^3 \cdot x \right) \Big|_0^a = 2 \cdot \left(\frac{a^4}{2} + a^4 \right) = 3 \cdot a^4 \quad (\#) \end{aligned}$$

6.- Aplicando la fórmula de Ostrogradski-Gauss calcula

$\iint_S x \cdot dydz + y \cdot dxdz + z \cdot dxdy$, donde S es la cara exterior de la pirámide limitada por

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

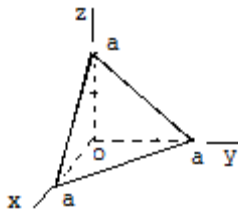
Sol.:

En este caso

$$P(x, y, z) = x \rightarrow P_x = 1$$

$$P(x, y, z) = y \rightarrow P_y = 1$$

$$P(x, y, z) = z \rightarrow P_z = 1$$



Por la fórmula citada tenemos

$$\iint_S x \cdot dydz + y \cdot dxdz + z \cdot dxdy = \iiint_V (3) \cdot dxdydz =$$

$$= 3 \cdot \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-(x+y)} dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a - (x + y)) \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \int_0^a \left[a \cdot (a - x) - x \cdot (a - x) - \frac{(a-x)^2}{2} \right] \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \int_0^a \left[a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2 + x^2 - 2ax}{2} \right] \cdot dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_0^a [x^2 - 2ax + a^2] \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2 \cdot x \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a^3}{3} - a^3 + a^3 \right) = \frac{a^3}{2} \quad (\#)$$

\$\$\$oOo\$\$\$

APÉNDICE 1: Ampliación-Profundización en los Métodos de integración

1.- Método: Integración por partes

Sea $f(x)$ una función cuya expresión se ‘presta’ a ser expresada de la forma $u(x) \cdot [v(x)]'$. Esto es, debemos ser capaces de detectar, dentro de la expresión de $f(x)$, la existencia de dos expresiones: $u(x)$, $v(x)'$, y de modo que $v(x)'$ sea integrable fácilmente, porque vamos a necesitar la expresión $v(x)$.

Además debe ocurrir que la expresión $v(x) \cdot u(x)'$ también sea integrable con relativa facilidad, ya que vamos a tener que obtener una de sus primitivas.

Si suponemos ya obtenida una primitiva $v(x)$ de $v(x)'$ y tomamos el producto $u(x) \cdot v(x)$, tenemos lo siguiente.

Derivando este producto obtenemos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u(x) \cdot v(x)' + v(x) \cdot u(x)'$$

De modo que integrando (respecto de x) los dos miembros obtenemos

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v(x)' dx + \int v(x) u(x)' dx$$

Despejamos

$$\int u(x) \cdot v(x)' dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) u(x)' dx$$

Este método interesará cuando ‘intuyamos’ que $f(x)$ podemos expresarlo como producto de dos expresiones, así: $u(x) \cdot v(x)'$, de

modo que el factor $v(x)$ se integra fácilmente obteniendo $v(x)$, y que el producto $v(x).u(x)$ sea también de integración ‘casi-inmediata’.

Ejemplos:

$$1) \int x.e^x .dx$$

Hago: $u= x$, $dv= e^x .dx$

$$2) \int x.\ln(x).dx$$

Hago: $u= \ln(x)$, $dv= x.dv$

$$3) \int x.\text{sen}(x).dx$$

Hago: $u = x$, $dv = \text{sen}(x).dx$,
(Reiterando dos veces por partes)

$$4) \int e^x .\text{sen}(x).dx$$

Hago: $u = \text{sen}(x)$, $dv = e^x .dx$

2.- Método: Descomposición en suma de fracciones simples

Es aplicable cuando $f(x)$ es una fracción algebraica: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Si $\text{gr}(p) \leq \text{gr}(q)$ podemos hacer la división (con resto) y tenemos $p(x) = q(x).c(x) + r(x)$, y por tanto

$$f(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{ donde } c(x) \text{ es polinomio.}$$

Podemos suponer que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $\text{gr}(p) < \text{gr}(q)$.

NOTA:

En el Vol.2 tenemos un Tema dedicado a la descomposición de una fracción en suma de fracciones simples, cubriendo este estudio todos los casos posibles. No lo repetiremos aquí, sino las ideas básicas.

Resolviendo los siguientes casos quedan resueltos la mayor parte de los casos de descomposición en sumas simples

En lo que sigue se supone que disponemos de la descomposición en suma de fracciones simples.

$$a) \quad f(x) = \frac{A}{(x-a)} \rightarrow F(x) = A \cdot \ln(x-a)$$

$$b) \quad f(x) = \frac{A}{(x-a)^k} = A \cdot (x-a)^{-k} \rightarrow$$

$$F(x) = \frac{A}{-k+1} \cdot (x-a)^{-k+1} = \frac{-A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

$$\begin{aligned} c) \quad f(x) &= \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} = \frac{A(x-a)+B+aA}{(x-a)^2+b^2} = \\ &= \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{B+aA}{b^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} \end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+b^2} \rightarrow F(x) = A/2 \cdot \ln((x-a)^2+b^2)$$

$$\begin{aligned}
 (**) \frac{B+a.A}{b^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} &\rightarrow G(x) = \\
 = \frac{B+a.A}{b^2} \cdot b \cdot \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) &= \frac{B+a.A}{b} \cdot \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)
 \end{aligned}$$

3.- Funciones trigonométricas

Prototipos:

Tratamos aquí algunas de las situaciones que el alumno puede comprender y asimilar.

En este tema del cálculo de primitivas no podremos llegar nunca a conseguir un círculo cerrado, en el sentido de encontrar una primitiva para cualquier función que se nos antoje plantear.

1).- $\int \operatorname{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x) \cdot dx$, donde n ó m es impar

Si m impar, hago: $t = \operatorname{sen}(x)$, $dt = \cos(x) \cdot dx$
 y entonces $f(x) \cdot dx = t^n \cdot (1-t^2)^{(m-1)/2} \cdot dt$

2).- $\int \operatorname{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x) \cdot dx$, con n y m par

Tenemos en cuenta que:

$$\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$$

$$f(x) \cdot dx = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^{n/2} \cdot \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^{m/2} \cdot dx =$$

$$= 1/4. (1-\cos(2x))^{n/2} .(1+\cos(2x))^{m/2} .dx = \dots$$

3).- $\int \sec^n(x).dx$, con n par

$$f(x).dx = \sec^{(n-2)}(x).\sec^2(x).dx = (1+\tan^2(x))^{(n-2)/2}.\sec^2(x).dx = (*)$$

Hago: $t = \tan(x)$, $dt = \sec^2(x).dx$

$$(*) \rightarrow (1+t^2)^{(n-2)/2} .dt$$

4).- $\int \sec(x).dx$

$$f(x) = \sec(x) =$$

$$(\text{Multiplico y divido por } \tan(x)+\sec(x))$$

$$= [\sec(x).(\tan(x)+\sec(x))]/(\sec(x)+\tan(x)) =$$

$$= [\sec(x).\tan(x) + \sec^2(x)]/(\sec(x)+\tan(x)) \rightarrow$$

(El numerador es la derivada del denominador)

$$\ln(\tan(x) + \sec(x))$$

5).- $\int \sec^3(x).dx = \int \sec(x).(1+\tan^2(x)).dx =$

$$= \int \sec(x).dx + \int \sec(x).\tan^2(x).dx$$

(Aplicamos el método ‘integración por partes’)

En la segunda hago: $u = \tan(x)$

$$dv = \tan(x).\sec(x).dx$$

$$v(x) = \sec(x)$$

$$\begin{aligned} 6).- \int \tan^2(x).dx &= \int (\sec^2(x) - 1).dx = \\ &= \int \sec^2(x).dx - \int dx = \tan(x) - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7).- \int \tan^3(x).dx \\ \tan^3(x) = \tan(x).(\sec^2(x)-1) = \tan(x).\sec^2(x)-\tan(x) \\ \text{e integramos cada término.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8).- \int \text{sen}(ax+b).\cos(cx+d).dx \\ \text{Por 'Ampliación de trigonometría sabemos que:} \\ \text{sen}(ax+b).\cos(cx+d) = \\ = 1/2.[\text{sen}((a+c)x+(b+d)) + \text{sen}((a-c)x+(b-d))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9).- \int \text{sen}(ax+b).\text{sen}(cx+d).dx \\ \text{Por 'Ampliación de trigonometría sabemos que:} \\ \text{sen}(ax+b).\text{sen}(cx+d) = \\ = -1/2.[\cos((a+c)x+(b+d)) - \cos((a-c)x+(b-d))] \end{aligned}$$

$$10).- \int \cos(ax+b).\cos(cx+d).dx$$

$$\begin{aligned} \text{Por 'Ampliación de trigonometría sabemos que:} \\ \cos(ax+b).\cos(cx+d) = \\ = 1/2.[\cos((a+c)x+(b+d)) + \cos((a-c)x+(b-d))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11).- \int \text{arcSen}(x).dx \\ \text{Hago: } u = \text{arcSen}(x), dv = dx \end{aligned}$$

$$12).- \int \arccos(x).dx$$

Hago: $u = \arccos(x)$, $dv = dx$

$$13).- \int \arctan(x).dx$$

Hago: $u = \arctan(x)$, $dv = dx$

$$14).- \int \operatorname{arcsec}(x).dx$$

Hago: $u = \operatorname{arcsec}(x)$, $dv = dx$

4.- Funciones con Radicales

Prototipos:

Tratamos aquí algunas de las situaciones que el alumno puede comprender y asimilar.

En este tema del cálculo de primitivas no podremos llegar nunca a conseguir un círculo cerrado, en el sentido de encontrar una primitiva para cualquier función que se nos antoje plantear.

$$1).- \int \frac{k}{\sqrt{1-x^2}}.dx = k.\arcsen(x)$$

$$\int \frac{k}{\sqrt{A-x^2}}.dx = k/\sqrt{A}. \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/\sqrt{A})^2}}.dx,$$

Hago: $t = x/\sqrt{A}$

$$2).- \int \frac{k}{1+x^2}.dx = k.\text{arcTan}(x)$$

$$\int \frac{k}{A+x^2}.dx = k/A. \int \frac{1}{1+(x/\sqrt{A})^2}.dx,$$

$$\text{Hago: } t = x/\sqrt{A}$$

$$3).- \int \frac{k}{x.\sqrt{x^2-1}}.dx = k.\text{arcSec}(x)$$

$$\int \frac{k}{x.\sqrt{x^2-A}}.dx = k/\sqrt{A} \int \frac{1}{x.\sqrt{(x/\sqrt{A})^2-1}}.dx =$$

$$= k/A. \int \frac{1}{x/\sqrt{A}.\sqrt{(x/\sqrt{A})^2-1}}.dx$$

$$\text{Hago: } t = x/\sqrt{A}$$

$$4).- \int \sqrt{A+x^2}.dx = \sqrt{A}. \int \sqrt{1+(x/\sqrt{A})^2}.dx$$

$$\text{Hago: } x/\sqrt{A} = \tan(t)$$

$$5).- \int \sqrt{A-x^2}.dx = \sqrt{A}. \int \sqrt{1-(x/\sqrt{A})^2}.dx$$

$$\text{Hago: } x/\sqrt{A} = \text{sen}(t)$$

$$6).- \int \sqrt{x^2-A}.dx = \sqrt{A}. \int \sqrt{(x/\sqrt{A})^2-1}.dx$$

$$\text{Hago: } x/\sqrt{A} = \sec(t),$$

$$dx = \sqrt{A}.\sec(t).\tan(t).dt \rightarrow k.A. \int \sec(t).\tan^2(t).dt$$

$$7).- \int \frac{k}{\sqrt{A+x^2}}.dx = k/\sqrt{A} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1+(x/\sqrt{A})^2}}.dx$$

$$\text{Hago: } t = x/\sqrt{A}$$

$$8).- \int \frac{k}{\sqrt{x^2-A}}.dx = k/\sqrt{A} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(x/\sqrt{A})^2-1}}.dx$$

$$\text{Hago: } x/\sqrt{A} = \sec(t),$$

$$dx = \sqrt{A} \cdot \sec(t) \cdot \tan(t) \cdot dt \rightarrow k \cdot \int \sec(t) \cdot dt$$

5.- Producto de dos funciones básicas

Prototipos:

Tratamos aquí algunas de las situaciones que el alumno puede comprender y asimilar.

En este tema del cálculo de primitivas no podremos llegar nunca a conseguir un círculo cerrado, en el sentido de encontrar una primitiva para cualquier función que se nos antoje plantear.

$$1).- \int x e^x \cdot dx$$

$$\text{Hago: } u = x, dv = e^x \cdot dx$$

$$\text{Lo mismo para } \int x \cdot a^x \cdot dx$$

$$2).- \int x \cdot \ln(x) \cdot dx$$

$$\text{Hago: } u = \ln(x), dv = x \cdot dx$$

$$\text{Lo mismo para } \int x \cdot \log_a(x) \cdot dx$$

$$3).- \int x.\text{sen}(x).dx$$

Hago: $u = x$, $dv = \text{sen}(x).dx$, (dos por partes)

Lo mismo para $\int x.\text{cos}(x).dx$

$$4).- \int e^x.\text{sen}(x).dx$$

Hago: $u = \text{sen}(x)$, $dv = e^x.dv$

Lo mismo para las siguientes

$$\int a^x.\text{sen}(x).dx, \int e^x.\text{cos}(x).dx, \int a^x.\text{cos}(x).dx$$

$$5).- \int x.\text{tan}(x).dx$$

Hago: $u = x$, $dv = \text{tan}(x).dx$

Lo mismo para la siguiente $\int x.\text{cota}(x).dx$

$$6).- \int x.\text{sec}(x).dx$$

Hago: $u = x$, $dv = \text{sec}(x).dx$

Lo mismo para la siguiente $\int x.\text{cose}(x).dx$

$$7).- \int \ln(x).dx$$

Hago: $u = \ln(x)$, $dv = dx$

Lo mismo para la siguiente $\int \log_a(x).dx$

$$8).- \int x.\text{arcSen}(x).dx$$

Hago: $u = x$, $dv = \text{arcSen}(x).dx$

Lo mismo para la siguiente $\int x.\text{arcCos}(x).dx$

9).- $\int x \cdot \arctan(x) \cdot dx$

Hago: $u = \arctan(x)$, $dv = x \cdot dx$

Lo mismo para la siguiente $\int x \cdot \operatorname{arccot}(x) \cdot dx$

10).- $\int x \cdot \operatorname{arcsec}(x) \cdot dx$

Hago: $u = \operatorname{arcsec}(x)$, $dv = x \cdot dx$

11).- $\int a^{\arcsen(x)} \cdot dx$

Hago: $t = \arcsen(x)$, $x = \sen(t)$,

$dx = \cos(t) \cdot dt \rightarrow \int a^t \cdot \cos(t) \cdot dt$

12).- $\int a^{\arctan(x)} \cdot dx$

Hago: $t = \arctan(x)$, $x = \tan(t)$,

$dx = \sec^2(t) \cdot dt \rightarrow \int a^t \cdot \sec^2(t) \cdot dt$

6.- Ejemplos no triviales para Cambio de variable

Prototipos:

Los que siguen muestran cómo podemos ‘intuir o adivinar’ un cambio de variable para salir victoriosos.

$$1).- \int \frac{\cos(ax+b)}{A+\sin(ax+b)} \cdot dx \quad 2).- \int \frac{\sec^2(ax+b)}{A+\tan(ax+b)} \cdot dx$$

$$3).- \int \frac{a^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \quad 4).- \int \frac{a^{\arctan(x)}}{1+x^2} \cdot dx$$

$$5).- \int \frac{a^{\arcsin(x)}}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot dx$$

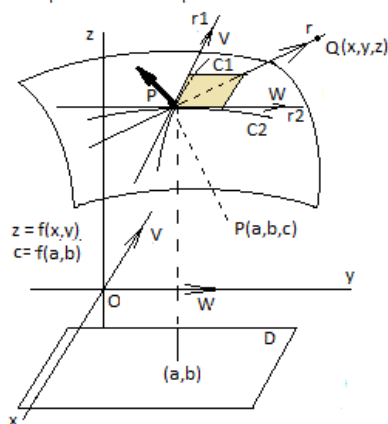
APÉNDICE 2: Sobre Integral Doble, y sobre Integral Triple

A) En coordenadas cartesianas

Integral Doble

Al igual que ocurre con la Integral definida en una variable, en el caso de $z = f(x,y)$ con dos variables independientes, la mejor manera de explicar la Integral doble (definida) consiste en interpretarla como el cálculo de la superficie acotada haciendo que el dominio de definición de la referida función $z = f(x,y)$ sea una región D acotada en el plano oxy .

Integral doble. Superficie en el espacio



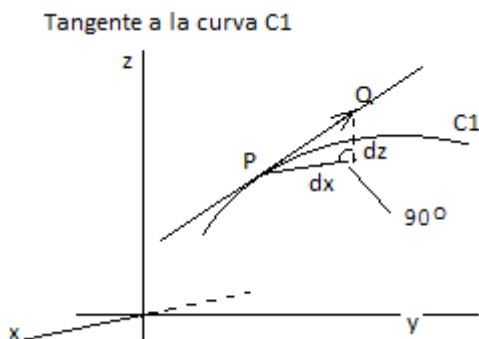
En la figura el dominio toma la forma $D = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, pero en la práctica puede tomar otra forma, y el recorrido de la variable y puede depender del valor que toma la variable x: $y = g(x)$, o bien al revés, $x = g(y)$.

En el punto P consideramos una celda o escama ‘pequeña’ pegada a la superficie, su valor es dS . Esta escama puede ser aproximada por otra escama sobre el plano tangente a la superficie en P, cuyo valor represento por dT .

Curvas sobre la Superficie:

$$C1: y = b \rightarrow z = f(x, b), \quad dz = f_x(p).dx$$

$$C2: x = a \rightarrow z = f(a, y), \quad dz = f_y(p).dy$$



(De forma análoga podemos mostrar la tangente a la curva C2)

Vectorialmente: $OQ = OP + PQ$

$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + (dx, 0, dz)$, y por tanto

$$V = (x-a, 0, z-f(a, b)) = (dx, 0, f_x(p).dx)$$

De forma análoga para la curva C2 obtendremos

$$W = (0, y-b, z-f_y(a,b)) = (0, dy, f_y(p).dy)$$

Tenemos los vectores directores de las tangentes a las curvas C1 y C2 en P:

$$V = (dx, 0, f_x(p).dx)$$

$$W = (0, dy, f_y(p).dy)$$

El valor de dT coincide con el módulo del vector ‘producto vectorial’, $V \wedge W$:

$$V \wedge W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & 0 & f_x(p).dx \\ 0 & dy & f_y(p).dy \end{vmatrix} =$$

$$= (-f_x(p).dx.dy, -f_y(p).dy.dx, dx.dy)$$

$$\text{Mod}(V \wedge W) = \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} .dx.dy$$

El valor de la Superficie viene aproximada por la suma de todas las escamas dT

$$S \approx \sum_{a1 < x < a2} \sum_{b1 < y < b2} \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} .\Delta x.\Delta y$$

Al hacer el doble límite: $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, si existe, el valor de este límite coincide con el valor de la superficie.

El valor del ‘doble límite’ lo representamos mediante

$$S = \int_{a1}^{a2} (\int_{b1}^{b2} \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} .dy).dx$$

y decimos que es ‘Integral doble’ en x, y.

Observa que su cálculo lo hacemos reiterando la integración ‘lineal’ (es decir, en una sola variable)

En el caso más general, cuando b_1 ó b_2 dependan de x , o las dos, tenemos

$$S = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} .dy \right) .dx$$

El caso en el que resulte más fácil expresar a_1 y a_2 en función de y obtenemos

$$S = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \sqrt{1 + f'_x(p)^2 + f'_y(p)^2} .dx \right) .dy$$

Resumiendo, la Integral doble la representamos mediante

$$\iint_D f(x,y) .dxdy, \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

Ejemplo corroborativo: Área del Disco

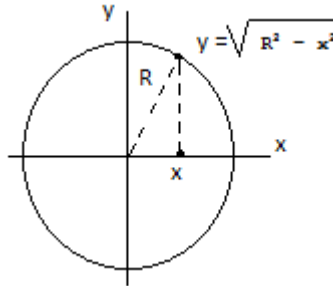
$$x^2 + y^2 \leq R^2 \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Para el cuadrante $x > 0, y > 0$, tenemos lo que sigue

$$S = \iint_D dy .dx = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) .dx = \int_0^R (y) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} .dx =$$

$$= \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2} - 0) .dx = R . \int_0^R \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right) .dx =$$

$$(\text{hago } x/R = \text{sen}(t), \quad dx = R.\cos(t).dt)$$



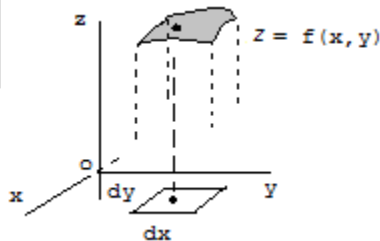
$$\begin{aligned}
 &= R \cdot \int_{t_1}^{t_2} R \cdot \cos(t)^2 \cdot dt = R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} (1 + \cos(2t)) \cdot dt = \\
 &= R^2/2 \cdot (t + 1/2 \cdot \text{sen}(2t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = \\
 &= R^2/2 \cdot (\text{arcSen}(x/R) + 1/2 \cdot \text{sen}(2 \cdot \text{arcSen}(\frac{x}{R}))) \Big|_0^R = \\
 &= R^2/2 \cdot [(\pi/2 + 1/2 \cdot 0) - (0 + 1/2 \cdot 0)] = \frac{\pi \cdot R^2}{4}
 \end{aligned}$$

Para el disco completo queda $S = \pi \cdot R^2$

(Resultado conocido de Geometría básica)

Volumen en cartesianas

$z = f(x, y)$, definida en D del plano R^2



$$V = \iint_D f(x, y) \cdot dx dy$$

Integral Triple en cartesianas:

Su definición es análoga a la integral doble con la diferencia que ahora tenemos tres variables independientes, y el dominio de integración es un volumen V .

Por definición su valor es el resultado en el miembro derecha de la igualdad

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \\ = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Su cálculo se realiza reiterando la integración respecto de cada variable del mismo modo que en la integral doble.

Seguiremos un razonamiento análogo al de la Integral doble.

Consideramos el volumen encerrado por una superficie $z = f(x, y)$

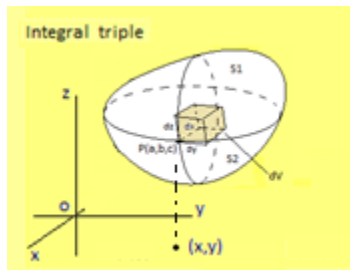
Ahora hacemos que la variable z sea también independiente, y tenemos la función de tres variables

$$z - f(x, y) = 0$$

Para que una función como esta defina el volumen que encierra debemos modificar la igualdad por la desigualdad, así:

Volumen: Lugar geométrico de los puntos (x, y, z) del espacio tales que

$$z - f(x,y) \leq 0$$



Lo comprenderá muy bien cuando veamos el siguiente ejemplo corroborativo. De momento seguimos hacia la definición de Integral triple.

dV representa el volumen de un ‘pequeño cubo’ en el punto P , de modo que el volumen V queda aproximado por la ‘triple suma’

$$V \approx \sum_{a_1 < x < a_2} \sum_{b_1 < y < b_2} \sum_{c_1 < z < c_2} dz \cdot dy \cdot dx$$

Al hacer ‘triple límite’: $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, si existe, el valor de este límite coincide con el valor del volumen encerrado por la superficie.

La triple suma la llamamos ‘Integral triple’, y la representamos mediante

$$V = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \left(\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x, y, z) \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Observa que su cálculo lo hacemos mediante reiteración de integrales ‘lineales’ (es decir, en una sola variable), análogo a como hacemos en la integral doble.

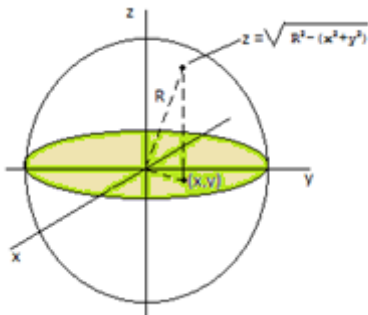
Resumiendo, la integral triple la representamos mediante

$$\iiint_V f(x, y, z). dx dy dz$$

Ejemplo corroborativo: Volumen de la esfera

La superficie esférica viene definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \text{ o bien } z = \pm \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$



En cambio el volumen interior viene definido por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

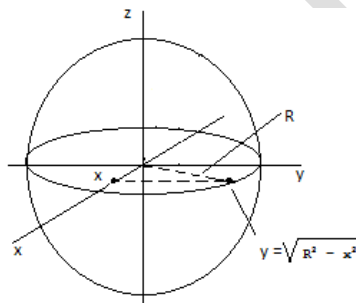
Vamos a calcular la integral triple. Antes hagamos las siguientes consideraciones respecto de los límites de integración. Lo hacemos para el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

Fijados valores de x, y , la variable z recorre el intervalo $[0, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}]$.

En el plano $z = 0$, fijado un valor x , la variable y recorre el intervalo $[0, \sqrt{R^2 - x^2}]$.

La variable x recorre el intervalo $[0, R]$.



El volumen del citado octante lo calculamos como sigue:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dz \right) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (z) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dy \right) dx = \\
 &= \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{(R^2 - x^2) - y^2} dy \right) dx = \\
 &\quad (\text{observa que aquí } R^2 - x^2 \text{ es constante; hago } A = \sqrt{R^2 - x^2}) \\
 &= \int_0^R \left(A \cdot \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{A} \right)^2} dy \right) dx = \\
 &\quad (\text{hago } y/A = \text{sen}(t), dy = A \cdot \cos(t) \cdot dt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^R (A \cdot \int_{t1}^{t2} A \cdot \cos(t)^2 \cdot dt) \cdot dx = \int_0^R A^2 \cdot \int_{t1}^{t2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \cdot dt \cdot dx = \\
 &= \int_0^R A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2t) \right) \Big|_{t1}^{t2} \cdot dx = \\
 &= \int_0^R A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\text{arcSen} \left(\frac{y}{A} \right) + 1/2 \cdot \text{sen} \left(2 \cdot \text{arcSen} \left(\frac{y}{A} \right) \right) \right) \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \\
 &= 1/2 \cdot \int_0^R (R^2 - x^2) \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \left(0 + 1/2 \cdot 0 \right) \right] = \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^R (R^2 - x^2) \cdot dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left(R^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^R = \\
 &= \pi/4 \cdot \left[(R^3 - 1/3 \cdot R^3) - (0 - 1/3 \cdot 0) \right] = \pi/4 \cdot 2/3 \cdot R^3 = \frac{\pi}{2.3} \cdot R^3
 \end{aligned}$$

Para la esfera completa: $V = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3$

Resultado ya conocido de Geometría básica.

Otro Ejemplo: Calcula $I = \iiint_V x^3 y^2 z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

donde V queda definido por $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq z \leq x \cdot y \end{cases}$

Sol.:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z \cdot dz \right) \cdot dy \right) \cdot dx = \dots = \frac{1}{110}$$

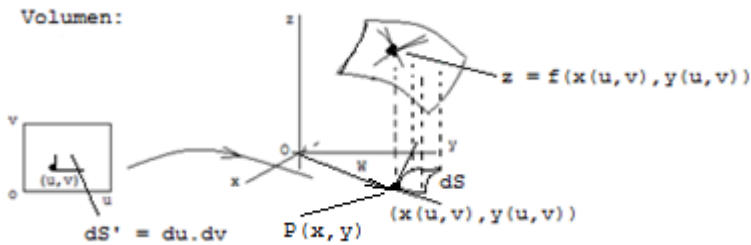
B) En coordenadas curvilíneas (en el plano):

Integral Triple

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = f(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}, (u, v) \text{ recorriendo } D' \subset \mathbb{R}^2$$

Vectorialmente:

$$\mathbf{W} = \mathbf{OP} = (x(u, v), y(u, v), 0)$$



Vectores directores de las tangentes a las curvas sobre el plano (x, y) en P :

$$\mathbf{W}_u = du.(x_u, y_u, 0), \quad \mathbf{W}_v = dv.(x_v, y_v, 0)$$

$$\mathbf{W}_u \wedge \mathbf{W}_v = (du.dv) \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (du \cdot dv).(0, 0, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix})$$

El elemento de superficie $(du.dv)$ se ha transformado en el elemento de superficie ds cuyo valor es ahora

$$ds = |W_u \wedge W_v| = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot (du.dv)$$

y el elemento de volumen es

$$dV = f(x(u, v), y(u, v)).ds, \text{ y por tanto}$$

$$V = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot du.dv$$

Otra forma:

Integral Triple En coordenadas paramétricas (curvilíneas en el plano):

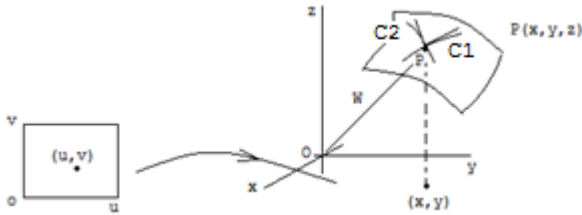
$$z = f(x, y), \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = f(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}$$

(u, v) recorriendo $D' \subset \mathbb{R}^2$

Vectorialmente:

$$W = OP = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$$

Vectores directores de las tangentes a las curvas C_1 y C_2 (como en el apartado anterior) sobre la superficie en P :



$$W_u = (x_u, y_u, f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u)$$

$$W_v = (x_v, y_v, f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v)$$

Como dijimos antes, hacemos su producto vectorial

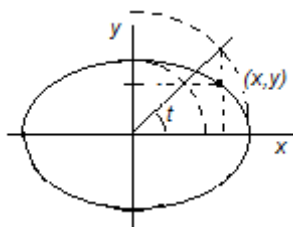
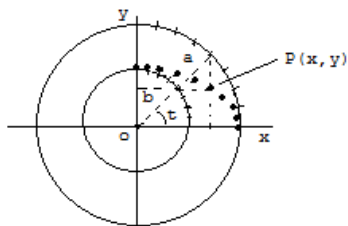
$$\begin{aligned} W_u \wedge W_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \\ x_v & y_v & f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_u & f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \\ y_v & f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} x_u & f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \\ x_v & f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v \end{vmatrix} \cdot j + \\ &+ \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot k \end{aligned}$$

El valor de la superficie la tenemos ahora mediante

$$S = \iint_{D'} \sqrt{|W_u \wedge W_v|} \cdot du dv, \quad D' \subset \mathbb{R}^2$$

APÉNDICE 3 Complementos

1.- Construcción de la Elipse, y su parametrización:



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases}$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t)] \cdot dt^2$$

$$L' = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t)} \cdot dt = (*)$$

(la transformamos como sigue)

$$\begin{aligned} a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot \cos^2(t) &= a^2 \cdot \sin^2(t) + b^2 \cdot (1 - \sin^2(t)) = \\ &= b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \sin^2(t) = b^2 \cdot \left[1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \sin^2(t) \right] \end{aligned}$$

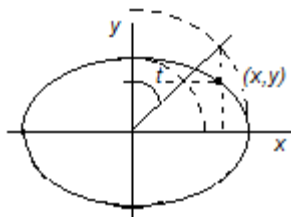
haciendo $k^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$ obtengo

$$(*) = b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt$$

Esta integral es del tipo elíptico y su valor se obtiene mediante Tablas tabuladas.

Otra forma:

Algunos autores parametrizan así:



$$\begin{cases} x = a \cdot \text{sen}(t) \\ y = b \cdot \cos(t) \end{cases}$$

Repitiendo los cálculos realizados antes llegaremos a la expresión

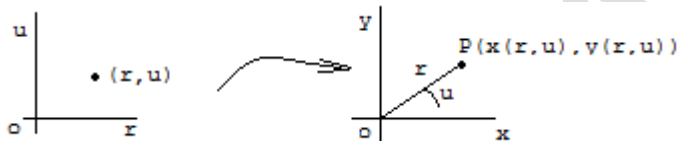
$$a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt \quad , \text{ dode } k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

Esta es la apropiada para después utilizar las tablas con valores tabulados, como se dice en el ejemplo 2 de punto 3.4

2.- Coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(u) \\ y = r \cdot \sin(u) \end{cases}, \quad r \text{ real, } u \text{ en radianes}$$

$$w = (x, y) = (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u))$$



Derivadas parciales

$$w_r = (\cos(u), \sin(u))$$

$$w_u = (-r \cdot \sin(u), r \cdot \cos(u))$$

Elemento de área (por un momento operamos dentro del espacio tridimensional):

$$w_r \wedge w_u = r \cdot (dr \cdot du) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot (dr \cdot du) \cdot (0 \cdot i + 0 \cdot j + (\cos^2(u) + \sin^2(u)) \cdot k) =$$

$$= r \cdot (dr \cdot du) \cdot k \rightarrow |w_r \wedge w_u| = r \cdot dr \cdot du$$

El valor $ds' = dr \cdot du$ se transforma en el valor

$$ds = dx \cdot dy = r \cdot ds'$$

3.- Coordenadas Cilíndricas:

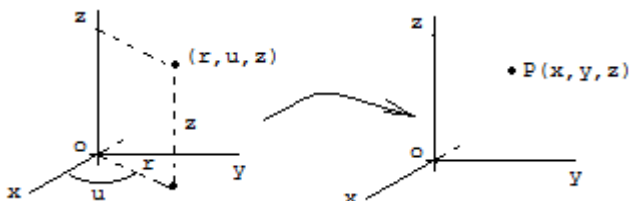
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(u) \\ y = r \cdot \text{sen}(u) \\ z = z \end{cases}$$

$$w = (r \cdot \cos(u), r \cdot \text{sen}(u), z)$$

Derivadas parciales

$$w_r = dr.(\cos(u), \text{sen}(u), 0)$$

$$w_u = du.(-r \cdot \text{sen}(u), r \cdot \cos(u), 0)$$



Producto vectorial:

$$w_r \wedge w_u = (dr \cdot du) \cdot r \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \text{sen}(u) & 0 \\ -\text{sen}(u) & \cos(u) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot (dr \cdot du) \cdot [\cos^2(u) + \text{sen}^2(u)] \cdot k = (0, 0, r \cdot (dr \cdot du))$$

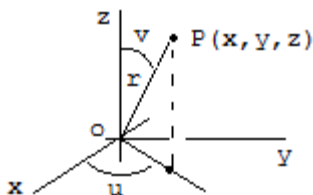
El producto mixto con $w_z = (0, 0, 1)$ nos da

$dV = dx \cdot dy \cdot dz = r \cdot (dr \cdot du \cdot dz)$, es decir, el elemento de volumen

$dV' = (dr \cdot du \cdot dz)$ se transforma en

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz = r \cdot dV'$$

4.- Coordenadas esféricas y coordenadas geográficas:



donde $0 \leq u \leq 2.\pi$, $-2.\pi \leq v \leq \pi$

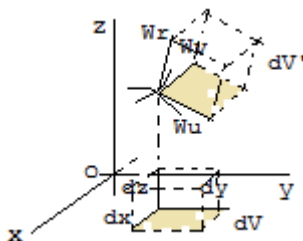
$$\begin{cases} x = r.\text{sen}(v).\cos(u) \\ y = r.\text{sen}(v).\text{sen}(u) \\ z = r.\cos(v) \end{cases}$$

Vectorialmente: $\mathbf{W} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) =$

$$= (r.\text{sen}(v).\cos(u), r.\text{sen}(v).\text{sen}(u), r.\cos(v))$$

En el espacio y en coordenadas cartesianas el elemento de volumen es

$$dV = dx.dy.dz$$



$$W_u = du.(-r.\text{sen}(v).\text{sen}(u), r.\text{sen}(v).\text{cos}(u), 0)$$

$$W_v = dv.(r.\text{cos}(v).\text{cos}(u), r.\text{cos}(v).\text{sen}(u), -r.\text{sen}(v))$$

El módulo del producto vectorial de estos dos vectores coincide con el área de la base del elemento de volumen transformado.

Producto vectorial:

$$W_u \wedge W_v = r^2.(du.dv) . \text{sen}(v) .$$

$$. \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\text{sen}(u) & \text{cos}(u) & 0 \\ \text{cos}(v).\text{cos}(u) & \text{cos}(v).\text{sen}(u) & -\text{sen}(v) \end{vmatrix} =$$

$$= r^2.(du.dv).\text{sen}(v).$$

$$. [-\text{cos}(u).\text{sen}(v) . i - \text{sen}(u).\text{sen}(v) . j + \\ + (-\text{sen}^2(u).\text{cos}(v) - \text{cos}^2(u).\text{cos}(v)).k] =$$

$$= - r^2.(du.dv).\text{sen}(v).$$

$$. [\text{cos}(u) . \text{sen}(v) . i + \text{sen}(u).\text{sen}(v) . j + \text{cos}(v).k]$$

No es necesario calcular el módulo $|W_u \wedge W_v|$, porque voy a calcular el volumen mediante el producto mixto con W_r

Obtengo W_r :

$$W_r = dr.(\text{sen}(v).\text{cos}(u), \text{sen}(v).\text{sen}(u), \text{cos}(v))$$

Producto mixto: $W_r * (W_u \wedge W_v) =$

$$\begin{aligned} &= -r^2 \cdot \text{sen}(v) \cdot [\cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(v) + \text{sen}^2(v) \cdot \text{sen}^2(u) + \cos^2(v)] \cdot dr \cdot du \cdot dv = \\ &= -r^2 \cdot \text{sen}(v) \cdot [\text{sen}^2(v) + \cos^2(v)] \cdot dr \cdot du \cdot dv = \\ &= -r^2 \cdot \text{sen}(v) \cdot dr \cdot du \cdot dv \end{aligned}$$

Tomamos su valor absoluto (El elemento de volumen ha de tomar valor positivo)

A este valor lo llamamos Jacobiano de la transformación geométrica que conlleva el cambio de variables:

$$J(u, v, r) = r^2 \cdot \text{sen}(v)$$

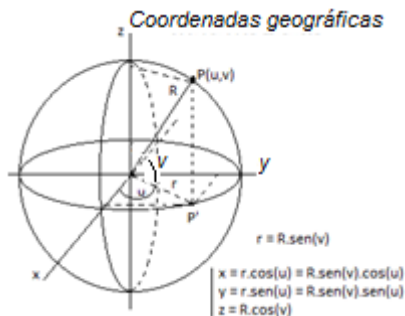
Siendo los elementos de volumen

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz, \quad dV' = du \cdot dv \cdot dr$$

al realizar la transformación resulta

$$dV = J(u, v, r) \cdot dV'$$

Coordenadas geográficas:



R es constante

u es la latitud

v es la altitud

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(v) \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \cos(v) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(v) \end{cases}$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$

Recíprocamente, a partir de las coordenadas cartesianas, se obtienen las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ u = \arcsen\left(\frac{y}{R \cdot \cos(v)}\right) \\ v = \arcsen\left(\frac{z}{R}\right) \end{cases}$$

Hechas las derivadas parciales respecto de u y de v, y operando vectorialmente como en el caso de coordenadas esféricas, obtenemos lo siguiente.

$$W_u \wedge W_v = r^2 \cdot \cos(v) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}(u) & \cos(u) & 0 \\ -\operatorname{sen}(v) \cdot \cos(u) & -\operatorname{sen}(v) \cdot \operatorname{sen}(u) & \cos(v) \end{vmatrix} = \\ & = r^2 \cdot \cos(v) \cdot [\cos(u) \cdot \cos(v) \cdot i + \operatorname{sen}(u) \cdot \cos(v) \cdot j + \\ & \quad + (\operatorname{sen}^2(u) \cdot \operatorname{sen}(v) + \cos^2(u) \cdot \operatorname{sen}(v)) \cdot k] = \\ & = r^2 \cdot \cos(v) \cdot \\ & \quad \cdot [\cos(u) \cdot \cos(v) \cdot i + \operatorname{sen}(u) \cdot \cos(v) \cdot j + \operatorname{sen}(v) \cdot k] \end{aligned}$$

Este es un vector normal a la superficie:

$$N = r^2 \cdot \cos(v) \cdot (\cos(u) \cdot \cos(v), \operatorname{sen}(u) \cdot \cos(v), \operatorname{sen}(v))$$

Su modulo:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cos^2(v) \cdot \cos^2(u) + \cos^2(v) \cdot \operatorname{sen}^2(u) + \operatorname{sen}^2(v)} = \\ & = \sqrt{\cos^2(v) + \operatorname{sen}^2(v)} = 1, \text{ por tanto } |N| = r^2 \cdot \cos(v) \end{aligned}$$

5.- Coordenadas curvilíneas (en el espacio):

Es el caso más general, y consiste en lo siguiente:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, (u, v) \text{ recorriendo } D \subset \mathbb{R}^2$$



Vectorialmente:

$$W = OP = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$W_u = du.(x_u, y_u, z_u), \quad W_v = dv.(x_v, y_v, z_v)$$

Producto vectorial:

$$W_u \wedge W_v = (du.dv) \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (du.dv).$$

$$[y_u \ z_u] \cdot i - [x_u \ z_u] \cdot j + [x_v \ y_v] \cdot k$$

El elemento de superficie $ds' = (du.dv)$ (en el plano Ouv) se transforma en el elemento de superficie (en el espacio)

$$ds = |W_u \wedge W_v| =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2} \cdot (du \cdot dv)$$

Consecuencia:

El valor de la superficie la obtenemos ahora mediante

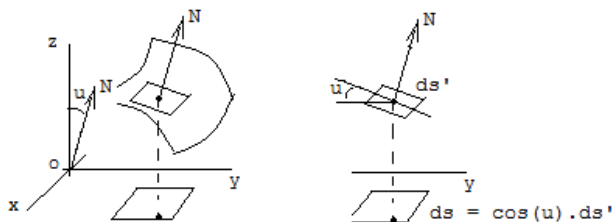
$$S = \iint_{D'} \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2} \cdot dudv$$

6.- Otra forma de obtener el valor de una superficie:

Es aplicable a los casos en los que es posible obtener la función

$$h(\vec{n}) = \cos(\vec{n}, \vec{oz})$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal (perpendicular orientado hacia el exterior) a la superficie.



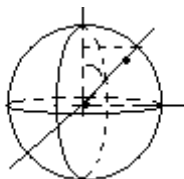
$$dS' = \frac{dS}{\cos(u)} ,$$

$$dS' = \frac{1}{\cos(u)} \cdot dx \cdot dy$$

Ejemplos corroborativos:

1.- Superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



En este caso $\cos(u) = \frac{z}{R}$

$$dS' = \frac{R}{z} \cdot dx dy = R \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \cdot dx dy, \text{ que es la}$$

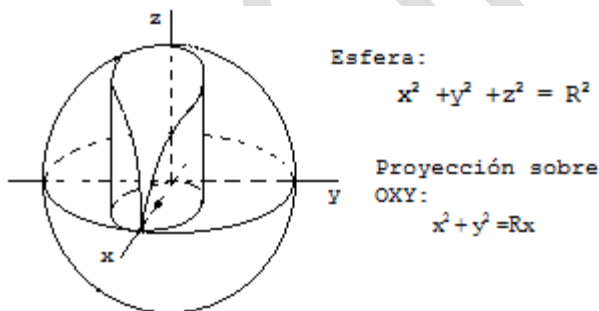
expresión habitual en cartesianas.

2.- La bóveda de Viviani:

Curva de Viviani:

Def. 1:

Curva de Viviani es la curva sobre la esfera que resulta al imponer la condición: $v = u$



Su definición original es la siguiente:

$$\text{Para la esfera: } \begin{cases} x = R \cdot \cos(v) \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \cos(v) \cdot \sin(u) \\ z = R \cdot \sin(v) \end{cases}$$

La condición $v = u$ nos lleva a que

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \\ z = R \cdot \text{sen}(u) \end{cases} \quad (1)$$

Expresión paramétrica de la curva.

Tomando las expresiones de x, y tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = R \cdot \cos^2(u) \\ y = R \cdot \cos(u) \cdot \text{sen}(u) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = \\ & = R^2 \cdot [\cos^4(u) + \cos^2(u) \cdot \text{sen}^2(u)] = \\ & = R^2 \cdot [\cos^2(u) \cdot (\cos^2(u) + \text{sen}^2(u))] = R^2 \cdot \cos^2(u) = R \cdot x \end{aligned}$$

He obtenido la relación: $x^2 + y^2 = R \cdot x$, que representa un cilindro.

Representa también la proyección de la curva (1) sobre el plano $z = 0$.

Comprueba que esta proyección es el círculo con radio $r = R/2$, y centro el punto $(R/2, 0, 0)$.

Def. 2:

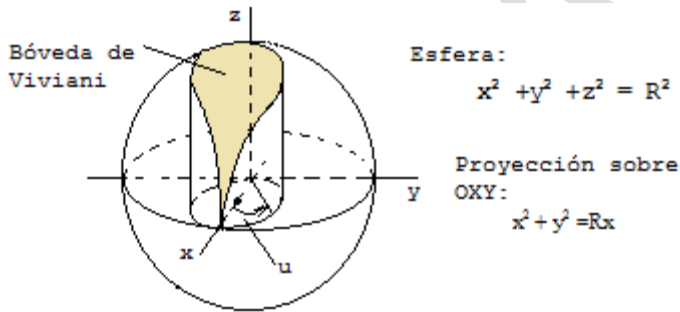
La curva de Viviani es la intersección de la esfera con radio R y el cilindro

$$x^2 + y^2 = R \cdot x$$

Superficie de la bóveda de Viviani:

Sabemos que $S = \iint_D \frac{dx \cdot dy}{\cos(n, z)}$, donde D es el

recinto de integración, $\cos(n, z)$ es el coseno del ángulo que forman la normal a la superficie con el eje oz.



Obtendremos la mitad de la bóveda superior.

En este caso $\cos(n, z) = \frac{z}{R}$, y por tanto

$$S = \iint_D R \cdot \frac{1}{z} \cdot dx dy = (\text{en cilíndricas})$$

$$= R \cdot \iint_D \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \cdot du$$

$$\int_0^{R \cdot \cos(u)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr = (-\sqrt{R^2 - r^2}) \Big|_0^{R \cdot \cos(u)} = -R \cdot \text{sen}(u) + R$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot (1 - \text{sen}(u)) \cdot du = R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Resumen: La superficie de la parte superior es

$$S = R^2 \cdot (\pi - 2)$$

Con más detalle:

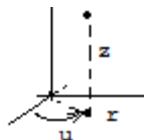
$$\cos(\vec{n}, \vec{oz}) = \frac{z}{R}$$

de modo que la superficie viene dada por

$$S = \iint_D \frac{R}{z} \cdot dx dy, \text{ donde } D \text{ es la proyección de}$$

esta superficie sobre el plano OXY

Pasamos a coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(u) \\ y = r \cdot \sin(u) \\ z = z \end{cases}$$



Vector $w = (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), 0)$

$$w_r = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad w_u = (-r \cdot \sin(u), r \cdot \cos(u), 0)$$

$$w_r \wedge w_u = r \cdot (0, 0, 1) \rightarrow dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot du$$

Además: $z^2 = R^2 - r^2$, y la integral queda de la forma
(Calculando la mitad de la superficie)

$$\begin{aligned} S' &= R \cdot \iint_{D'} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \cdot du = R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{R \cdot \cos(u)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \right) \cdot du = \\ &= \dots = R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot (1 - \sin(u)) \cdot du = \dots = R^2 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \end{aligned}$$

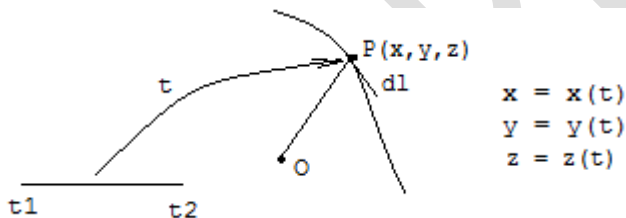
APÉNDICE 4 Complementos

Rectificación de una curva. Cálculo de una superficie

1.- Rectificación de un arco de línea

Observa que estamos en el Espacio tridimensional.

- A) Sistema de referencia cartesiano:
Ecuaciones paramétricas



Vector $v(t) = OP = (x(t), y(t), z(t))$

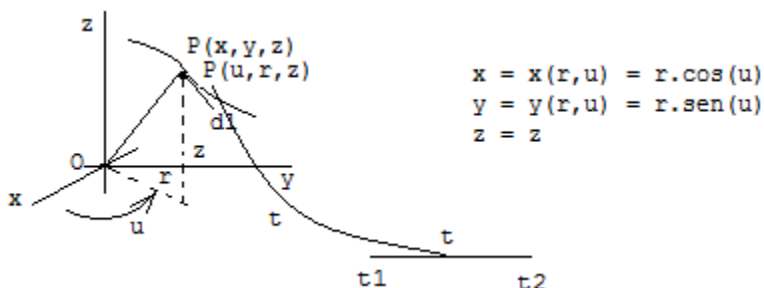
Elemento de longitud:

$$\begin{aligned} dl &= |dv(t)| = |v'(t) \cdot dt| = |(x'(t), y'(t), z'(t))| \cdot dt = \\ &= \sqrt{v'(t) * v'(t)} \cdot dt, \text{ por tanto } l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v'(t) * v'(t)} \cdot dt \end{aligned}$$

Dependiendo del sistema de referencial la base que conlleva puede ser o no ortogonal u ortonormal, y el producto escalar $v'(t) * v'(t)$ tomará la forma correspondiente.

B) Coordenadas Cilíndricas:

Supongo que la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal.



$v(t) = OP \rightarrow v(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(u(t)) \\ y(t) = r(t) \cdot \text{sen}(u(t)) \\ z(t) = z(t) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x'(t) = r' \cdot \cos(u) - r \cdot \text{sen}(u) \cdot u' \\ y'(t) = r' \cdot \text{sen}(u) + r \cdot \cos(u) \cdot u' \\ z'(t) = z'(t) \end{cases}$$

(Hemos derivado respecto de t)

$$v'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

En lo que sigue tenemos en cuenta que e_1, e_2, e_3 son ortonormales.

$$v'(t) \cdot v'(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2$$

$$\begin{aligned} x'(t)^2 &= [r' \cdot \cos(u) - r \cdot \operatorname{sen}(u) \cdot u']^2 = \\ &= r'^2 \cdot \cos^2(u) + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(u) \cdot u'^2 - 2 \cdot r' \cdot r \cdot u' \cdot \cos(u) \cdot \operatorname{sen}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t)^2 &= [r' \cdot \operatorname{sen}(u) + r \cdot \cos(u) \cdot u']^2 = \\ &= r'^2 \cdot \operatorname{sen}^2(u) + r^2 \cdot \cos^2(u) \cdot u'^2 + 2 \cdot r' \cdot r \cdot u' \cdot \operatorname{sen}(u) \cdot \cos(u) \end{aligned}$$

$$z'(t)^2 = z'^2(t)$$

Sumándolas tengo

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 &= \\ &= [r'^2 \cdot \cos^2(u) + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(u) \cdot u'^2 - 2 \cdot r' \cdot r \cdot u' \cdot \cos(u) \cdot \\ &\quad \cdot \operatorname{sen}(u)] + \\ &+ [r'^2 \cdot \operatorname{sen}^2(u) + r^2 \cdot \cos^2(u) \cdot u'^2 + 2 \cdot r' \cdot r \cdot u' \cdot \operatorname{sen}(u) \cdot \\ &\quad \cdot \cos(u)] + \\ &+ (z'(t))^2 = r'^2 + r^2 \cdot u'^2 + (z'(t))^2 \end{aligned}$$

Elemento de longitud:

$$dl = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \cdot u'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$$

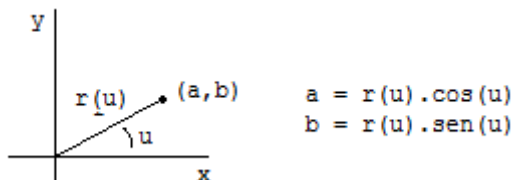
$$\text{y por tanto: } L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \cdot u'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$$

Cuando $u = t$: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r'(u)^2 + r(u)^2 + z'(u)^2} . du$

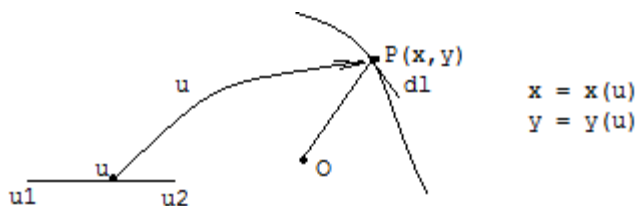
Si estamos en el plano: $z = 0$, tenemos las coordenadas polares, y queda

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r'(u)^2 + r(u)^2} . du$$

C) Coordenadas polares



$$\begin{cases} x = r(u) . \cos(u) \\ y = r(u) . \text{sen}(u) \end{cases}, \quad 0 < u < 2\pi \quad (\pi = pi)$$



Cuando el radio es constante: $r'(u) = 0$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2} . du = \int_{t_1}^{t_2} r . du$$

Ejemplos:

1.- Longitud del arco de circunferencia de radio $r = 5$, entre los valores $t_1 = \frac{\pi i}{6}$, $t_2 = \frac{\pi i}{3}$

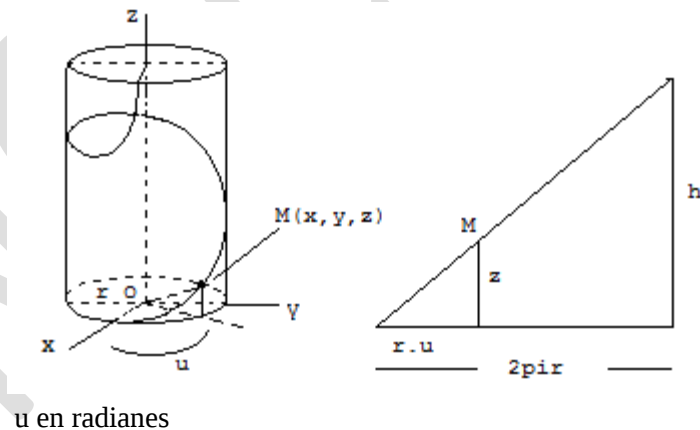
$$L = \int_{t_1}^{t_2} r \cdot dt = r \cdot (t)_{t_1}^{t_2} = r \cdot \left[\frac{\pi i}{3} - \frac{\pi i}{6} \right] = r \cdot \frac{\pi i}{6}$$

Comprobamos sabiendo que la circunferencia completa mide $2 \cdot \pi \cdot r$

Según los datos $L = 1/3 \cdot \text{Un cuadrante} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = \frac{\pi \cdot r}{6}$

2.- Longitud de una vuelta de la hélice cilíndrica.

Ecuación: Observa la figura



Por semejanza: $\frac{z}{r.u} = \frac{h}{2.\pi.r} \rightarrow z = \frac{h.u}{2.\pi}$

$$\begin{cases} x(u) = r.\cos(u) \\ y(u) = r.\sin(u) \\ z(u) = \frac{h.u}{2\pi} \end{cases}$$

$v(u) = OM = (x(u), y(u), z(u)) \rightarrow$

$$v(u) = (r.\cos(u), r.\sin(u), \frac{h.u}{2\pi})$$

$$v'(u) = (-r.\sin(u), r.\cos(u), \frac{h}{2\pi})$$

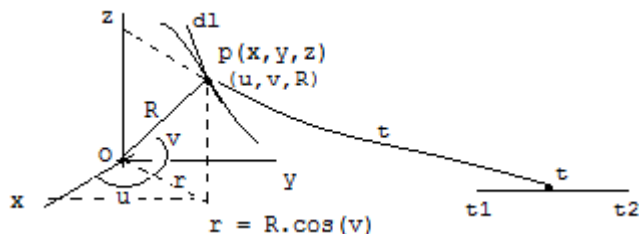
$$\begin{aligned} v'(u) \cdot v'(u) &= r^2.[\sin^2(u) + \cos^2(u)] + \frac{h^2}{4.\pi^2} = \\ &= r^2 + \frac{h^2}{4.\pi^2} = \frac{4.r^2.\pi^2 + h^2}{4.\pi^2} \end{aligned}$$

Elemento de longitud: $dl = \sqrt{\frac{4.r^2.\pi^2 + h^2}{4.\pi^2}} . du$

$$L = \frac{\sqrt{4.r^2.\pi^2 + h^2}}{2.\pi} . \int_0^{2.\pi} du = \frac{\sqrt{4.r^2.\pi^2 + h^2}}{2.\pi} . 2.\pi =$$

$$= \sqrt{4.r^2.\pi^2 + h^2}$$

D) Longitud en coordenadas esféricas



$$\begin{cases} x(t) = R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \cos(u(t)) \\ y(t) = R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \sin(u(t)) \\ z(t) = R(t) \cdot \sin(v(t)) \end{cases},$$

$$0 < u(t) < 2\pi, -\pi < v(t) < \pi$$

$$v(t) = OP = (x(t), y(t), z(t))$$

$$v'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Hago $v'(t) \cdot v'(t)$:

Observa cómo lo obtenemos con cierta facilidad, como sigue,

$$\begin{aligned} v'(t) \cdot v'(t) &= x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = \\ &= [(R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \cos(u(t)))']^2 + \\ &+ [(R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \sin(u(t)))']^2 + [(R(t) \cdot \sin(v(t)))']^2 = \\ &= [(R(t) \cdot \cos(v(t)))']^2 \cdot \cos(u)^2 + \\ &+ [R(t) \cdot \cos(v(t))]^2 \cdot [-\sin(u) \cdot u']^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [(R(t) \cdot \cos(v(t)))']^2 \cdot \text{sen}(u)^2 + \\
 & + [R(t) \cdot \cos(v(t))]^2 \cdot [\cos(u) \cdot u']^2 + [(R(t) \cdot \text{sen}(v(t)))']^2 = \\
 & = [(R(t) \cdot \cos(v(t)))']^2 + [R(t) \cdot \cos(v(t))]^2 \cdot u'^2 + \\
 & \quad + [(R(t) \cdot \text{sen}(v(t)))']^2 = \\
 & = [R(t)' \cdot \cos(v(t)) - R(t) \cdot \text{sen}(v(t)) \cdot v(t)']^2 + \\
 & \quad + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot u(t)'^2 + \\
 & \quad + [R(t)' \cdot \text{sen}(v(t)) + R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot v(t)']^2 = \\
 & = [R(t)'^2 \cdot \cos(v(t))^2 + R(t)^2 \cdot \text{sen}(v(t))^2 \cdot v(t)'^2 - \\
 & \quad - R(t)' \cdot R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \text{sen}(v(t)) \cdot v(t)'] + \\
 & \quad + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot u(t)'^2 + \\
 & + [R(t)'^2 \cdot \text{sen}(v(t))^2 + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot v(t)'^2 + \\
 & \quad + R(t)' \cdot R(t) \cdot \cos(v(t)) \cdot \text{sen}(v(t)) \cdot v(t)'] = \\
 & = [R(t)'^2 \cdot \cos(v(t))^2 + R(t)^2 \cdot \text{sen}(v(t))^2 \cdot v(t)'^2] + \\
 & \quad + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot u(t)'^2 + \\
 & + [R(t)'^2 \cdot \text{sen}(v(t))^2 + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot v(t)'^2] = \\
 & = R(t)'^2 + R(t)^2 \cdot v(t)'^2 + R(t)^2 \cdot \cos(v(t))^2 \cdot u(t)'^2
 \end{aligned}$$

Resumen: $v(t)' \cdot v(t)' =$
 $= R(t)'^2 + R(t)^2 \cdot v'(t)^2 + R(t)^2 \cdot \cos^2(v(t)) \cdot u'(t)^2$

Elemento de longitud:

$$dl = \sqrt{R'(t)^2 + R(t)^2 \cdot v'(t)^2 + R(t)^2 \cdot \cos^2(v(t)) \cdot u'(t)^2} \cdot dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R'(t)^2 + R(t)^2 \cdot v'(t)^2 + R(t)^2 \cdot \cos^2(v(t)) \cdot u'(t)^2} \cdot dt$$

Caso particular:

Si $R = \text{constante}$, queda

$$v'(t) \cdot v'(t) = R^2 \cdot [(v')^2 + \cos^2(v) \cdot (u')^2]$$

$$dl = R \cdot \sqrt{(v')^2 + \cos^2(v) \cdot (u')^2} \cdot dt$$

$$L = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(v')^2 + \cos^2(v) \cdot (u')^2} \cdot dt$$

Ejemplos:

1.- El plano $z = ky$ corta a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Calcula la longitud de la línea determinada por la sección.

Sol.: Como el plano $z = ky$ pasa por el origen de coordenadas la sección producida es un círculo de radio R con centro en O , por tanto su longitud ha de ser $2\pi R$.

Este ejemplo es un pretexto para corroborar el resultado de la integral.

Sustituyendo en la ecuación en cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

tengo

$$R^2 \cdot [(\cos(v) \cdot \cos(u))^2 + (\cos(v) \cdot \sin(u))^2 + \sin^2(v)] = R^2$$

$$(\cos(v) \cdot \cos(u))^2 + (\cos(v) \cdot \sin(u))^2 + \sin^2(v) = 1$$

$$R(t) \text{ es constante } \rightarrow R'(t) = 0$$

$$\text{Hago } u = t \rightarrow u'(t) = 1$$

Aquella queda ahora así

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2 \cdot v'(t)^2 + R^2 \cdot \cos^2(v(t))} \cdot dt =$$

$$= R \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v'(t)^2 + \cos^2(v(t))} \cdot dt$$

Por otro lado $z = k \cdot y \rightarrow$

$$R \cdot \sin(v(t)) = k \cdot R \cdot \cos(v(t)) \cdot \sin(t), \text{ de donde}$$

$$\sin(v(t)) = k \cdot \cos(v(t)) \cdot \sin(t) \rightarrow$$

$$\sin^2(v) = k^2 \cdot \cos^2(v) \cdot \sin^2(t) \rightarrow$$

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = \cos^2(v) \cdot [1 + k^2 \cdot \sin^2(t)] \rightarrow$$

$$\cos^2(v) = \frac{1}{1 + k^2 \cdot \sin^2(t)}$$

Por otro lado, de la igualdad

$$\sin(v) = k \cdot \cos(v) \cdot \sin(t), \quad \text{derivando}$$

$$\cos(v).v' = -k.\sin(v).v'.\sin(t) + k.\cos(v)\cos(t)$$

$$v'.[\cos(v) + k.\sin(v).\sin(t)] = k.\cos(v).\cos(t) \rightarrow$$

$$v' = \frac{k.\cos(v).\cos(t)}{[\cos(v) + k.\sin(v).\sin(t)]} \rightarrow$$

$$v'^2 = \frac{k^2.\cos^2(v).\cos^2(t)}{\cos^2(v) + k^2.\sin^2(v).\sin^2(t) + 2k.\cos(v).\sin(v).\sin(t)} =$$

$$\text{teniendo en cuenta que } \sin(v) = k.\cos(v).\sin(t)$$

$$= \frac{k^2.\cos^2(v).\cos^2(t)}{\cos^2(v) + k^2.\sin^2(v).\sin^2(t) + 2.\sin^2(v)} = \frac{k^2.\cos^2(v).\cos^2(t)}{1 + \sin^2(v).[1 + k^2.\sin^2(t)]} =$$

$$= \frac{k^2.\cos^2(t) \cdot \frac{1}{1 + k^2.\sin^2(t)}}{1 + (1 - \cos^2(v)).[1 + k^2.\sin^2(t)]} =$$

$$(\text{teniendo en cuenta que } \sin(v) = k.\cos(v).\sin(t))$$

$$= \frac{k^2.\cos^2(t) \cdot \frac{1}{1 + k^2.\sin^2(t)}}{1 + k^2.\sin^2(t)} = \frac{k^2.\cos^2(t)}{(1 + k^2.\sin^2(t))^2}$$

$$\text{Entonces } v'^2 + \cos^2(v) = \frac{k^2.\cos^2(t)}{(1 + k^2.\sin^2(t))^2} + \frac{1}{1 + k^2.\sin^2(t)} =$$

$$= \frac{k^2.\cos^2(t) + 1 + k^2.\sin^2(t)}{(1 + k^2.\sin^2(t))^2} = \frac{1 + k^2}{(1 + k^2.\sin^2(t))^2}$$

$$\text{Por tanto } L = 4.R.\sqrt{1 + k^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + k^2.\sin^2(t)} \cdot dt$$

Continuamos:

$$\int \frac{1}{1+k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt = (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Cambio: } z = \tan(t) \rightarrow \tan^2(t) &= \frac{\text{sen}^2(t)}{\cos^2(t)} \rightarrow \text{sen}^2(t) = \\ &= \cos^2(t) \cdot \tan^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} \cdot \tan^2(t) = \frac{z^2}{1+z^2} \end{aligned}$$

$$dz = \sec^2(t) \cdot dt = (1 + \tan^2(t)) \cdot dt \rightarrow dt = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$1 + k^2 \cdot \text{sen}^2(t) = 1 + k^2 \cdot \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1+z^2+k^2 \cdot z^2}{1+z^2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{1+k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt = \frac{1+z^2}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot dz$$

$$(*) = \int \frac{1}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot dz = \int \frac{1}{1+(1+k^2) \cdot z^2} \cdot dz =$$

$$\begin{aligned} (\text{Cambio: } y = \sqrt{1+k^2} \cdot z \rightarrow dy &= \sqrt{1+k^2} \cdot dz \\ dz &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot dy) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \text{arcTan}(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \text{arcTan}(\sqrt{1+k^2} \cdot z) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot (\text{arcTan}(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan(t))) \Big|_0^{\frac{pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot [\text{arcTan}(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan(\frac{pi}{2})) - \end{aligned}$$

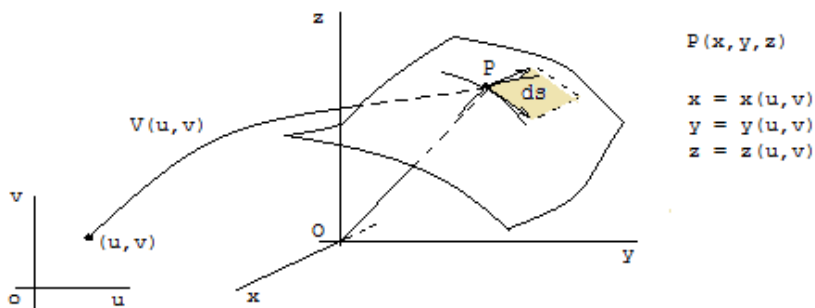
$$\begin{aligned}
 & - \arctan(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan(0))] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot [\arctan(\sqrt{1+k^2} \cdot (+\infty)) - \\
 & \quad - \arctan(\sqrt{1+k^2} \cdot 0)] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot [\arctan(+\infty) - 0] = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 & L = 4.R. \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = 2.R.\pi
 \end{aligned}$$

(La misma para un meridiano cualquiera, ya que el plano pasa por el centro de la esfera)

2.- Cálculo de superficies:

Una superficie viene definida por dos parámetros:

$$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$$



Vectorialmente: $V(u, v) = OP = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\mathbf{V}_u(u, v).du = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)).du$$

$$\mathbf{V}_v(u,v).dv = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)).dv$$

Elemento de superficie

$$ds = |(\mathbf{V}_u(u,v).du) \wedge (\mathbf{V}_v(u,v).dv)| = |\mathbf{V}_u(u,v) \wedge \mathbf{V}_v(u,v)| \cdot |du.dv| ,$$

donde $\wedge$ indica el producto vectorial de vectores.

Cálculos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_u(u,v) \wedge \mathbf{V}_v(u,v) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot e_3 , \text{ y su módulo} \end{aligned}$$

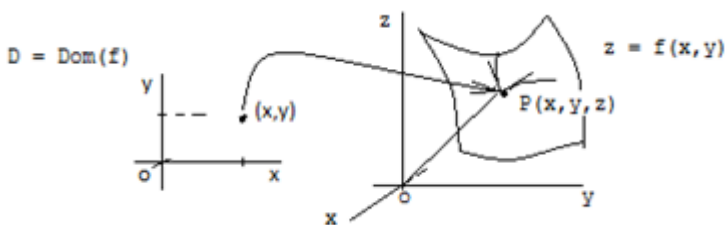
$$|\mathbf{V}_u(u,v) \wedge \mathbf{V}_v(u,v)| =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2} , \text{ de modo que}$$

$$ds = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2} \cdot dudv$$

Valor de la Superficie en cartesianas:

Sea $z = f(x, y)$, función con dos variables independientes: x, y , de modo que (x, y) recorren el dominio $D = \text{Dom}(f)$.



El elemento de superficie en cartesianas es

$$ds = |(dx, 0, f_x(p).dx) \wedge (0, dy, f_y(p).dy)|, \text{ donde } \wedge$$

representa el producto vectorial.

$$(dx, 0, f_x(p).dx) \wedge (0, dy, f_y(p).dy) =$$

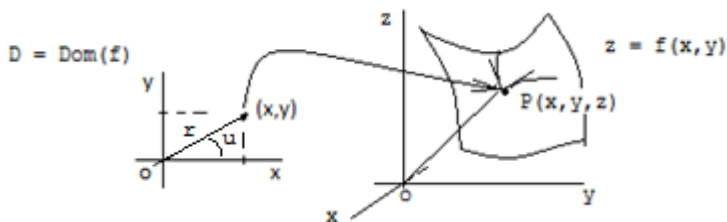
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & 0 & f_x(p).dx \\ 0 & dy & f_y(p).dy \end{vmatrix} =$$

$$= (-f_x(p).dx.dy, -f_y(p).dx.dy, dx.dy) =$$

$$= (-f_x(p), -f_y(p), 1).dx.dy, \text{ y su módulo}$$

$$ds = \sqrt{f_x(p)^2 + f_y(p)^2 + 1} .dx.dy$$

Cambio a coordenadas polares:



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(u) \\ y = r \cdot \sin(u) \end{cases} \rightarrow z = f(r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u))$$

Calculamos la nueva expresión del elemento de superficie ds.

Vectorialmente:

$$W = OP = (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), f(r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u)))$$

$$W_r = (\cos(u), \sin(u), f_r(p))$$

$$W_u = (-r \cdot \sin(u), r \cdot \cos(u), f_u(p))$$

$$W_r \wedge W_u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(u) & \sin(u) & f_r(p) \\ -r \cdot \sin(u) & r \cdot \cos(u) & f_u(p) \end{vmatrix} =$$

$$= [f_u(p) \cdot \sin(u) - r \cdot f_r(p) \cdot \cos(u)] \cdot i - [f_u(p) \cdot \cos(u) +$$

$$r \cdot f_r(p) \cdot \sin(u)] \cdot j + [r \cdot \cos^2(u) + r \cdot \sin^2(u)] \cdot k,$$

y su módulo

$$|W_r \wedge W_u| =$$

$$\begin{aligned}
 &= [f_u^2 \cdot \text{sen}^2(u) + r^2 \cdot f_r^2 \cdot \text{cos}^2(u) - 2 \cdot r \cdot f_u \cdot f_r \cdot \text{sen}(u) \cdot \text{cos}(u)] + \\
 &+ [f_u^2 \cdot \text{cos}^2(u) + r^2 \cdot f_r^2 \cdot \text{sen}^2(u) + 2 \cdot r \cdot f_u \cdot f_r \cdot \text{sen}(u) \cdot \text{cos}(u)] + \\
 &+ r^2 = f_u^2(p) + r^2 \cdot f_r^2(p) + r^2, \quad \text{y así queda}
 \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{r^2 + f_u^2(p) + r^2 \cdot f_r^2(p)} \cdot dr \cdot du$$

3.- La integral de Euler-Poisson: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx$

El tratamiento de esta integral corresponde a un nivel superior dentro del estudio de ‘la convergencia de integrales impropias’. La insertamos aquí a título de ejemplo.

La dividimos en la suma de dos integrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \int_0^1 e^{-x^2} \cdot dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx$$

La primera es finita y por tanto es convergente.

Para el segundo sumando tenemos en cuenta que

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}, \text{ siempre que } x \geq 1$$

$$\text{Calculamos } \int_1^b e^{-x} \cdot dx = (*)$$

$$(t = -x, dt = -dx)$$

$$\int e^{-x}.dx = - \int e^t .dt = - e^t = -e^{-x}$$

$$(*) = (-e^{-x}]_1^b = [-\frac{1}{e^b} + \frac{1}{e}]$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{e^b} + \frac{1}{e}) = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}, \quad \text{y por tanto}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x^2}.dx \leq \frac{1}{e}, \quad \text{y por tanto es convergente.}$$

Con herramientas de Matemática superior se ha podido determina su valor, siendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Otro ejemplo fácil de corroborar:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}.dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(b) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Otro caso:

Se puede demostrar (hágalo el alumno) que, teniendo en cuenta la simetría de su gráfica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.dx = 2. \int_0^{+\infty} e^{-x^2}.dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.dx$$

PROBLEMAS Resueltos o semi-Resueltos

1.- Halla la Integral indefinida, por cambio de variable, de las siguientes (los resultados siempre ‘salvo suma de constante C):

a) $f(x) = x \cdot (x^2+1)^8$, $t = x^2+1$, $dt = 2x dx$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $t = x^2+1$, $dt = 2x dx$

c) $f(x) = x^2 \cdot \text{sen}(x^3)$, $t = x^3$, $dt = 3x^2 dx$

d) $f(x) = e^{-3x}$, $t = -3x$, $dt = -3 dx$

e) $f(x) = \text{sen}(3x+2)$, $t = 3x+2$, $dt = 3 dx$

f) $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$, $t = x^2$, $dt = 2x dx$

g) $f(x) = x \cdot a^{x^2}$, $t = x^2$, $dt = 2x dx$

$$\int x \cdot a^{x^2} \cdot dx = \int a^t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^t = \frac{1}{2 \ln(a)} \cdot a^{x^2}$$

h) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $t = 1+e^x$, $dt = e^x dx$

$$\int \frac{1}{t} \cdot dt = \ln(t) = \ln(1 + e^x)$$

2.- Halla la Integral indefinida, aplicando ‘Integración por partes’, de las siguientes (los resultados siempre ‘salvo suma de constante C):

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x).dx &= x.e^x.d x, u = x, dv = e^x.d x, \\ du &= dx, v = e^x, \int u.d v = u.v - \int v.d u = \\ &= x.e^x - \int e^x.d x = x.e^x - e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x).dx &= x^2.e^x.d x; \text{ Hacer: } u = x^2, dv = e^x.d x \\ &(\text{Repetir el método 'por partes'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x).dx &= x.\cos(x).dx; \text{ Hacer: } u = x, \\ dv &= \cos(x).dx; du = dx, v = \sin(x) \\ \int u.d v &= x.\sin(x) - \int \sin(x).dx = x.\sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x).dx &= e^x.\sin x.d x; \text{ Hacer: } u = \sin(x), \\ dv &= e^x.d x; du = \cos(x).dx, v = e^x \\ I &= \int e^x.\sin(x).dx = e^x.\sin(x) - \int e^x.\cos(x).dx = (*) \\ \int e^x.\cos(x).dx &= (\text{hacer: } u=\cos(x), dv=e^x.d x, \\ du &= -\sin(x).dx, v = e^x) \\ &= \cos(x).e^x + \int e^x.\sin(x).dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= e^x.\sin(x) - e^x.\cos(x) - I, \text{ y por tanto} \\ 2.I &= e^x.[\sin(x) - \cos(x)] \rightarrow I = \frac{1}{2}.e^x.[\dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x).dx &= \ln(x).dx; \text{ Hago: } u = \ln(x), dv = dx; \\ du &= \frac{1}{x}.dx, v = x; \int \ln(x).dx = x.\ln(x) - \int dx = x.\ln(x) - x \end{aligned}$$

f) $f(x).dx = x.\ln(x).dx$; Hago: $u = \ln(x)$,

$$dv = x.d x, v = \frac{x^2}{2}$$

$$du = \frac{1}{x}.dx,$$

$$\int x.\ln(x).dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \int \frac{x}{2}.dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

g) $f(x).dx = x^2.\ln(x).dx$; Hago: $u = \ln(x)$,

$$dv = x^2 dx,$$

h) $f(x).dx = \arcsen(x).dx$; $u = \arcsen(x)$, $dv = dx$,

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx, v = x;$$

$$\int u.dv = \arcsen(x).x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx = (*)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx &= (\text{Cambio: } t = 1-x^2, dt = -2x.d x) = \\ &= \int \frac{-1}{2.\sqrt{t}}.dt = \frac{-1}{2}.\int t^{-1/2}.dt = \frac{-1}{2}.2.t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$(*) = x.\arcsen(x) + \sqrt{1-x^2}$$

i) $f(x).dx = \arctan(x).dx$; Hago: $u = \arctan(x)$,

$$dv = dx; du = \frac{1}{1+x^2}.dx, v = x;$$

$$\int u.dv = \arctan(x).x - \int \frac{x}{1+x^2}.dx = (*)$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = (\text{Cambio: } t = 1 + x^2, dt = 2x dx,$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2); \quad \text{Por tanto:}$$

$$(*) = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2)$$

3.- Halla la Integral indefinida, aplicando ‘Descomposición en fracciones simples’, de las siguientes (los resultados siempre ‘salvo suma de constante C):

$$\text{a) } f(x) = \frac{1+2x}{x^2+x-6}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3x-1}{x^2-5x+6}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2x^2-8x+1}{2x^2-7x+3}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}$$

Sol.: a) $q(x) = (x-2) \cdot (x+3)$, $q_1(x) = q(x):(x-2) = (x+3)$

$$\frac{1+2x}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \rightarrow 1+2x = A \cdot (x+3) + p_1(x) \cdot (x-2)$$

$$x = 2 \rightarrow 5 = A \cdot 5, \quad A = 1$$

Obtengo $p_1(x)$: $p_1(x) = [(1+2x)-(x+3)]:(x-2) \rightarrow$

$$p_1(x) = (x-2):(x-2) = 1$$

$$\text{Queda: } \frac{1+2x}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\int f(x).dx = \ln(x-2) + \ln(x+3)$$

$$b) f(x) = \frac{3x-1}{x^2-5x+6}; q(x) = (x-2).(x-3),$$

$$q_1(x) = q(x):(x-2); \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \rightarrow$$

$$p(x) = A.(x-3) + p_1(x).(x-2);$$

$$x = 2 \rightarrow 5 = A.(-1), A = -5;$$

$$p_1(x) = [(3x-1) + 5.(x-3)]:(x-2),$$

$$p_1(x) = (8x-16):(x-2) = 8$$

$$\text{Queda: } f(x) = \frac{-5}{x-2} + \frac{8}{x-3} \rightarrow$$

$$\int f(x).dx = -5.\ln(x-2) + 8.\ln(x-3)$$

$$c) f(x) = \frac{2x^2-8x+1}{2x^2-7x+3} = 1 - \frac{x+2}{2x^2-7x+3};$$

$$\text{Hago: } g(x) = \frac{x+2}{2x^2-7x+3}; p(x) = x+2;$$

$$q(x) = 2x^2-7x+3 = 0;$$

$$\text{Resuelvo: } x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{1}{2} \right\} \rightarrow$$

$$q(x) = 2.(x-3).(x-\frac{1}{2}), q_1(x) = q(x):(x-3);$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \rightarrow p(x) = A \cdot 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) + p_1(x) \cdot (x-3) =$$

$$= A \cdot (2x-1) + p_1(x) \cdot (x-3);$$

$$x = 3 \rightarrow 5 = A \cdot 5; A = 1$$

$$\text{Obtengo } p_1(x): p(x) = (2x-1) + p_1(x) \cdot (x-3) \rightarrow$$

$$p_1(x) = [(x+2)-(2x-1)]:(x-3) = (-x+3):(x-3) = -1$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2x-1};$$

$$\int g(x).dx = \ln(x-3) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x - \frac{1}{2}) \rightarrow$$

$$\int f(x).dx = x - \ln(x-3) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$d) f(x) = \frac{x^2-6x+7}{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}; p(x) = x^2-6x+7,$$

$$q(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3); q_1(x) = q(x):(x-1)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \rightarrow p(x) = A \cdot (x-2) \cdot (x-3) + p_1(x) \cdot (x-1)$$

$$x = 1 \rightarrow 2 = A \cdot (-1) \cdot (-2); A = 1,$$

$$p_1(x) = [(x^2-6x+7) - (x-2) \cdot (x-3)]:(x-1)$$

$$p_1(x) = [-x+1]:(x-1) = -1 \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{(x-2) \cdot (x-3)};$$

$$\text{Hago: } p(x) = -1, q(x) = (x-2) \cdot (x-3),$$

$$q_1(x) = q(x):(x-2) = (x-3)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{B}{x-2} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \rightarrow p(x) = B.(x-3) + p_1(x).(x-2)$$

$$x = 2 \rightarrow -1 = B.(-1), \quad B = 1,$$

$$p_1(x) = [(-1) - (x-3)]:(x-2) = (-x+2):(x-2) = -1$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x-3}; \text{ Finalmente: } f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x-3}$$

$$\int f(x).dx = \ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3)$$

4.- Halla la Integral indefinida de las siguientes (los resultados siempre 'salvo suma de constante C):

$$a) f(x) = \frac{5}{x^3}, \quad \int 5.x^{-3}.dx = -\frac{5}{2}.x^{-2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{5+7x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{5+7x^2} = \frac{1}{5.(1+\frac{7}{5}x^2)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+t^2)}$$

$$\text{donde } t^2 = \frac{7.x^2}{5} = \left(\frac{\sqrt{7}.x}{\sqrt{5}}\right)^2, \quad t = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}.x \rightarrow dt = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}.dx,$$

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}.dt; \quad \int \frac{1}{1+t^2}.dt = \text{arcTan}(t);$$

$$\int f(x).dx = \frac{1}{5} \cdot \text{arcTan}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}.x\right)$$

c) $f(x) = \frac{2x}{x^4+4}$; Hago: $t = x^2$, $dt = 2x.dx$, y sigue como en casos análogos.

d) $f(x) = \frac{x^3-7x^2+4}{x}$; $\frac{x^3-7x^2+4}{x} = x^2 - 7x + \frac{4}{x}$; y puedes seguir

e) $f(x) = \frac{x^3+2}{x-1}$; $\frac{x^3+2}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{4}{x-1}$; y puedes seguir.

$$f) f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x} ; \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{x^2+1}{x.(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x.(x-1).(x+1)} ; \text{ y}$$

aplica la descomposición en suma de f.s.

5.- Halla la Integral indefinida de las siguientes (los resultados siempre ‘salvo suma de constante C):

$$a) f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}} ; \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}} = x^{\frac{-5}{7}} , \text{ y puedes continuar.}$$

b) $f(x) = \frac{3x^2-2\sqrt{x}}{5x}$; $\frac{3x^2-2\sqrt{x}}{5x} = \frac{3x}{5} - \frac{2}{5} \cdot x^{-1/2}$, y puedes continuar.

$$c) f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}} ; \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{5}{3}x)^2}} ;$$

Hago: $t = \frac{5x}{3}$

$$dt = \frac{5}{3} \cdot dx \rightarrow dx = \frac{3}{5} \cdot dt ; \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{3}{5} \cdot dt = \frac{1}{5} \cdot \text{arcSen}(t) =$$

....

$$d) f(x) = 6x \cdot e^{x^2+2} ; \text{ Cambio: } t = x^2+2, \\ dt = 2x dx$$

$$x \cdot dx = \frac{dt}{2} ; \int 6 \cdot e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = 3 \cdot e^t , \dots$$

$$e) f(x) = \frac{5^x}{7^x} ; \frac{5^x}{7^x} = \left(\frac{5}{7}\right)^x ; \text{ y puedes seguir ...}$$

6.- Halla la Integral indefinida de las siguientes (los resultados siempre 'salvo suma de constante C):

a) $f(x) = \cos(x)^4 \cdot \sin(x)$;

Hago: $t = \cos(x)$,

$$dt = -\sin(x) \cdot dx, \text{ y puedes seguir ...}$$

b) $f(x) = \frac{\sin(x)^2 - 1 + 5 \cdot \sin(x)^3}{2 \cdot \sin(x)^2}$; $\frac{\sin(x)^2 - 1 + 5 \cdot \sin(x)^3}{2 \cdot \sin(x)^2} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot \sin(x)^2} + \frac{5}{2} \cdot \sin(x) ; \frac{1}{\sin(x)^2} = \sec(x)^2 ; \text{ y puedes}$$

seguir, teniendo en cuenta que: $\sec(x)^2$ es la derivada de $\tan(x)$.

c) $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) - \sin(x)}$; $t = \cos(x) - \sin(x)$,

$$dt = -(\sin(x) + \cos(x)) \cdot dx, \text{ y puedes seguir ...}$$

d) $f(x) = \sin(5x) \cdot \cos(7x)$; Tengo:

$$\sin(5x+7x) = \sin(5x) \cdot \cos(7x) + \sin(7x) \cdot \cos(5x)$$

$$\sin(5x-7x) = \sin(5x) \cdot \cos(7x) - \sin(7x) \cdot \cos(5x)$$

Sumándolas:

$$\sin(5x+7x) + \sin(5x-7x) = 2 \cdot \sin(5x) \cdot \cos(7x)$$

$$\begin{aligned}\sin(5x).\cos(7x) &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(12x) + \sin(-2x)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(12x) - \sin(2x)] , \text{ y puedes seguir } \dots\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{e^{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} ; \quad t = \arcsin(x), \quad dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$\int e^t \cdot dt = e^t , \text{ y sigue } \dots$$

a) $f(x) = \frac{x}{\sin(x)^2} ; \quad \frac{x}{\sin(x)^2} = x \cdot \sec(x)^2 ; \text{ Por partes:}$

$$u = x, \quad dv = \sec(x)^2 \cdot dx ; \quad du = dx, \quad v = \tan(x),$$

$$\int u \cdot dv = x \cdot \tan(x) - \int \tan(x) \cdot dx = (*)$$

$$\int \tan(x) \cdot dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot dx = -\ln(\cos(x)), \text{ y sigue } \dots$$

b) $f(x) = e^{ax} \cdot \sin(bx) ; \text{ Por partes:}$

$$u = \sin(bx), \quad dv = e^{ax} \cdot dx ; \quad du = b \cdot \cos(bx) \cdot dx,$$

$$v = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} ;$$

$$\int u \cdot dv = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx) - \int \frac{b}{a} \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) \cdot dx = (*)$$

$$\text{Repetir 'por partes' con } \int e^{ax} \cdot \cos(bx) \cdot dx$$

Puede seguir el alumno.

Problemas sobre Integral Definida:

1.- Calcula las siguientes Integrales Definidas:

Aplico la Regla de Barrow

$$a) \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}.dx = (2.x^{1/2}]_4^9 = 2.(3-2) = 2,$$

$$b) \int_0^4 x.(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}.dx = \dots \text{ Hago: } t = x^2 + 9,$$

$$dt = 2xdx, \quad xdx = 1/2.dt,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}}.dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 9) \cdot \sqrt{x^2 + 9} \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cdot ((x^2 + 9) \cdot \sqrt{x^2 + 9}) \Big|_0^4 = \dots \text{ puedes seguir}$$

aplicando Barrow ...

$$c) \int_0^2 x^2.(1 + x^3)^{\frac{1}{2}}.dx = \dots \text{ Hago: } t = 1 + x^3,$$

$$dt = 3x^2.d x, \quad x^2.d x = \frac{1}{3}.dt$$

$$\int t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}.dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \cdot (1 + x^3) \cdot \sqrt{1 + x^3}$$

$$\frac{2}{9} \cdot ((1 + x^3) \cdot \sqrt{1 + x^3}) \Big|_0^2 = \dots \text{ .. puedes seguir}$$

aplicando Barrow.

2.- Calcula el área limitada por las curvas dadas:

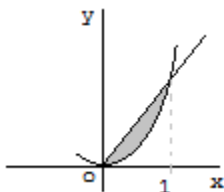
a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = 0$, en $[0, \pi]$

Sol.: a) $\int_0^1 (x - x^2) \cdot dx = \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^1 =$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{1}{6};$

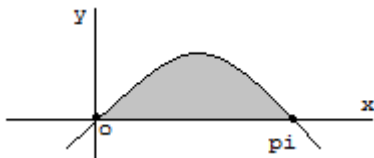


b) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \cdot dx = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$



c) $\int_0^\pi (\text{sen}(x) - 0) \cdot dx = (-\cos(x)) \Big|_0^\pi =$

$= -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$



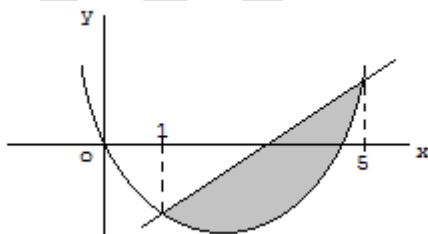
3.- Realiza las siguientes aplicaciones de la Integral definida:
(Aplico Barrow)

a) Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$, y la recta $r: 2x - 5$.

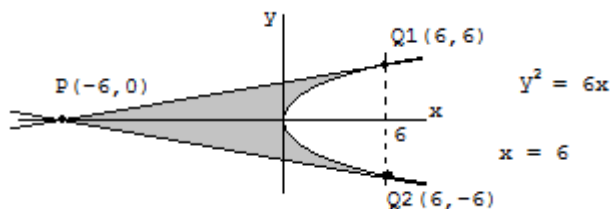
$$\text{Sol.: a) } S = \int_1^5 [(2x - 5) - (x^2 - 4x)]. dx =$$

$$= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5). dx = \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + 3x^2 - 5x\right)_1^5 = \dots \text{ sigue aplicando Barrow}$$

$$= \frac{32}{3} \text{ unidades}$$



b) Calcula el área sombreada de la figura:

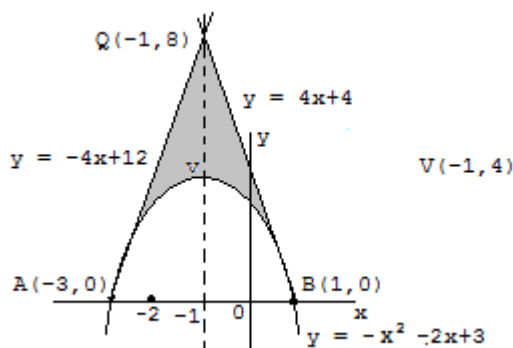


El área sombreada es la del triángulo con base=12 y h=12:
 $S_1 = 72 \text{ u.}$, menos el área S_2 limitada por la parábola y que calculamos:

$$S_2 = 2 \cdot \int_0^6 \sqrt{6} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^6 = 48 ;$$

$$S = 72 - 48 = 24 \text{ u.}$$

c) Calcula el área sombreada de la figura:



$$\text{Área triángulo ABQ: } S_1 = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \text{ u.}$$

Área limitada por la parábola:

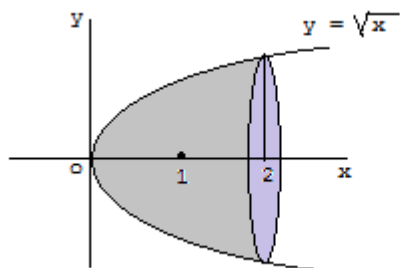
$$S_2 = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) \cdot dx = \dots$$

$$S = S_1 - S_2 = 16 - \dots = \frac{16}{3} \text{ u.}$$

d) Calcula el volumen mostrado en la figura:

Es un volumen de revolución cuya sección es el disco de radio

$$r(x) = \sqrt{x}$$



Área del disco $S(x) = \pi.(\sqrt{x})^2 = \pi.x$

$$V = \int_0^2 \pi.x.d x = \dots = 2\pi u.$$

LISTADO DE INTEGRALES

Contiene aquellas que no son inmediatas y que se presentan con frecuencia. También contiene algunas consideradas inmediatas. No se incluyen aquellas que el cambio de variable es evidente, aunque la integral se muestre complicada.

Antes de seguir conviene recordar:

$$a^x = e^{x \ln(a)}, \quad (a > 0)$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

$$1 + \tan(x)^2 = \sec(x)^2$$

$$y = \log_a(x) \longleftrightarrow x = a^y$$

Obviamos incluir el símbolo $\int f(x) \cdot dx$

$$\underline{f(x)} \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad \underline{F(x)}$$

$$\tan(x) \rightarrow -\ln(\cos(x))$$

$$\sec(x) \rightarrow \ln(\sec(x) + \tan(x))$$

$$\sec(x)^2 \rightarrow \tan(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \arctan(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin(x)$$

$$\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} \rightarrow \operatorname{arcSec}(x)$$

$$\frac{1}{a-b \cdot x^2} \rightarrow \text{Cambio: } \sin(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\sqrt{a + b \cdot x^2} \rightarrow \text{Cambio: } \tan(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\sqrt{b \cdot x^2 - a} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{1}{x \cdot \sqrt{a + b \cdot x^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \tan(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{1}{x \cdot \sqrt{a - b \cdot x^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{a + b \cdot x^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \tan(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{b \cdot x^2 - a}} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{a - b \cdot x^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(a + b \cdot x^2)^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \tan(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(a - b \cdot x^2)^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(b \cdot x^2 - a)^2}} \rightarrow \text{Cambio: } \sec(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x$$

$$\frac{\exp(\sqrt{x}; a)}{\sqrt{x}} \rightarrow \text{Cambio: } y = \sqrt{x}$$

$$\frac{\exp(\text{arcSen}(x); a)}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \text{Cambio: } y = \text{arcSen}(x)$$

$$\frac{\exp(\text{arcTan}(x); a)}{1+x^2} \rightarrow \text{Cambio: } y = \text{arcTan}(x)$$

$$\frac{\exp(\text{arcSec}(x); a)}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} \rightarrow \text{Cambio: } y = \text{arcSec}(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} \rightarrow \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\cos(2 \cdot \frac{x}{2})}{1-\cos(2 \cdot \frac{x}{2})} = \frac{\cos(2 \cdot \frac{x}{2})}{1-[\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})]} =$$

$$= \frac{\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot [\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\csc^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2]$$

$$\sqrt{1 + \exp^2(x)} \rightarrow \tan(t) = \exp(x) \dots \rightarrow \frac{\sec^3(t)}{\tan(t)} =$$

$$= \frac{\cos(t)}{\cos^3(t) \cdot \text{sen}(t)} \rightarrow \dots = \sec^2(t) \cdot \csc(t) \dots = \csc(t) +$$

$$\tan^2(t) \cdot \csc(t) =$$

$$\rightarrow \dots = \csc(t) + \frac{\text{sen}^2(t)}{\cos^2(t) \cdot \text{sen}(t)} = \csc(t) + \frac{\text{sen}(t)}{\cos^2(t)}$$

Resultado: $-\ln[\cot(t) + \csc(t)] + \sec(t)$

donde: $t = \arctan(\exp(x))$

$$\sqrt{1 - \exp^2(x)} \rightarrow \text{sen}(t) = \exp(x) \dots \rightarrow \frac{1 - \text{sen}^2(t)}{\text{sen}(t)} =$$

$$\rightarrow \dots = \csc(t) - \text{sen}(t)$$

Resul.: $-\ln[\cot(t) + \csc(t)] + \cos(t)$

donde: $t = \arcsen(\exp(x))$

$$\sqrt{\exp^2(x) - 1} \rightarrow \sec(t) = \exp(x) \dots \rightarrow \tan(t) \cdot \tan(t) =$$

$$\rightarrow \dots = \sec^2(t) - 1$$

Resul.: $\tan(t) - t$

donde: $t = \text{arcSec}(\exp(x))$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \exp^2(x)}} \rightarrow \tan(t) = \exp(x) \rightarrow \int \csc(t)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\exp^2(x)}} \rightarrow \text{sen}(t) = \exp(x) \rightarrow \int \text{cose}(t)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\exp^2(x)-1}} \rightarrow \text{sec}(t) = \exp(x) \rightarrow \int dt = t$$

$$\cos(x)^3 \rightarrow \text{sen}(x) - \frac{1}{3} \cdot \text{sen}(x)^3$$

$$\text{sen}(x)^3 \rightarrow -\cos(x) + \frac{1}{3} \cdot \cos(x)^3$$

Por partes:

$$\ln(x) \rightarrow u=\ln(x), dv=dx \rightarrow \text{Res: } x \cdot [\ln(x) - 1]$$

$$\ln(x^2) \rightarrow u=\ln(x^2), dv=dx \rightarrow \text{Res: } 2 \cdot x \cdot [\ln(x) - 1]$$

$$x \cdot \ln(x) \rightarrow u=\ln(x), dv=x \cdot dx \rightarrow$$

$$\text{Res: } \frac{x^2}{2} \cdot \left[\ln(x) - \frac{1}{2} \right]$$

$$x \cdot \exp(x) \rightarrow u=x, dv=\exp(x) \cdot dx \rightarrow$$

$$\text{Res: } \exp(x) \cdot [x - 1]$$

$$\frac{x}{\exp(x)} \rightarrow u=x, dv=\frac{1}{\exp(x)} \cdot dx$$

$$\text{arcSen}(x) \rightarrow u=\text{arcSen}(x), dv=dx$$

$$\text{Res: } x \cdot \text{arcSen}(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{arcTan}(x) \rightarrow u=\text{arcTan}(x), dv=dx$$

$$\text{Res: } x \cdot \text{arcTan}(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2)$$

$$\text{arcSec}(x) \rightarrow u=\text{arcSec}(x), dv=dx$$

$$\text{Res.: } x \cdot \text{arcSec}(x) - \ln[x + \tan(\text{arcSec}(x))]$$

$$\text{arcSec}(\sqrt{x}) \rightarrow u = \text{arcSec}(\sqrt{x}), \quad dv = dx$$

$$\text{Res.: } x \cdot \text{arcSec}(\sqrt{x}) - \sqrt{x - 1}$$

$$\exp(\text{arcSen}(x)) \rightarrow u = \text{arcSen}, \quad dv = dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \exp(\text{arcSen}(x)) \cdot [x + \cos(\text{arcSen}(x))]$$

$$\exp(\text{arcCos}(x)) \rightarrow u = \text{arcCos}, \quad dv = dx \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \exp(\text{arcCos}(x)) \cdot [-x + \sin(\text{arcCos}(x))]$$

$$\sin(\ln(x)) \rightarrow u = \sin(\ln(x)), \quad dv = dx$$

$$\text{Res.: } \frac{x}{2} \cdot [\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))]$$

$$\cos(\ln(x)) \rightarrow u = \cos(\ln(x)), \quad dv = dx$$

$$\text{Res.: } \frac{x}{2} \cdot [\cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x))]$$

$$x \cdot \sin(x) \rightarrow u = x, \quad dv = \dots, \rightarrow \sin(x) - x \cdot \cos(x)$$

$$x \cdot \cos(x) \rightarrow \cos(x) + x \cdot \sin(x)$$

$$x \cdot \sec^2(x) \rightarrow u = x, \quad dv = \sec^2(x) \cdot dx \rightarrow$$

$$\text{Res.: } x \cdot \tan(x) + \ln(\cos(x))$$

$$x \cdot \text{arcSen}(x) \rightarrow u = x, \quad dv = \text{arcSen}(x) \cdot dx \rightarrow$$

$$\text{Res.: } \frac{x}{2} \cdot [x \cdot \text{arcSen}(x) + \sqrt{1 - x^2}] -$$

$$- \frac{1}{4} \cdot [\text{arcSen}(x) + x \cdot \cos(\text{arcSen}(x))]$$

$$\begin{aligned} x \cdot \arccos(x) &\rightarrow u=x, \quad dv=\arccos(x).dx \rightarrow \\ \text{Res.: } \frac{x}{2} \cdot [x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot [\arcsen(x) + x \cdot \cos(\arcsen(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \arctan(x) &\rightarrow u = \arctan(x), \quad dv = x \cdot dx \rightarrow \\ \text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) \cdot \arctan(x) - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \text{arcCota}(x) &\rightarrow u = \text{arcCota}(x), \quad dv = x \cdot dx \rightarrow \\ \text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{arcCota}(x) - \frac{1}{2} \cdot \arctan(x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \text{arcSec}(x) &\rightarrow u = \text{arcSec}(x), \quad dv = x \cdot dx \rightarrow \\ \text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{arcSec}(x) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \text{arcCose}(x) &\rightarrow u = \text{arcCose}(x), \quad dv = x \cdot dx \rightarrow \\ \text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \text{arcCose}(x) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \ln(x) &\rightarrow u = \ln(x), \quad dv=x^2 \cdot dx \\ \text{Res.: } \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \text{sen}(x) &\rightarrow u=x^2, \quad dv=\text{sen}(x).dx \\ \text{Res.: } -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot [x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot \cos(x) &\rightarrow u=x^2, \quad dv=\cos(x).dx \\ \text{Res.: } x^2 \cdot \text{sen}(x) - 2 \cdot [-x \cdot \cos(x) + \text{sen}(x)] \end{aligned}$$

$$x^m \cdot \text{sen}(x) \rightarrow u=x^m, \quad dv=\text{sen}(x).dx$$

$$x^m \cdot \cos(x) \rightarrow u=x^m, \quad dv=\cos(x).dx$$

$$x^2 \cdot \exp(x) \rightarrow u=x^2, \quad dv=\exp(x).dx$$

$$\text{Res.: } (x^2 - 2x + 2) \cdot \exp(x)$$

$$x^m \cdot \exp(x) \rightarrow u=x^m, \quad dv=\exp(x).dx$$

$$\text{Res.: } x^m \cdot \exp(x) - m \cdot \int x^{m-1} \cdot \exp(x)$$

$$x^2 \cdot \ln(x) \rightarrow u=\ln(x), \quad dv=x^2 \cdot dx$$

$$\text{Res.: } \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \cdot \int x^2$$

$$x^3 \cdot \ln(x) \rightarrow u=\ln(x), \quad dv=x^3 \cdot dx$$

$$\text{Res.: } \frac{x^4}{4} \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \int x^3$$

$$x^m \cdot \ln(x) \rightarrow u=\ln(x), \quad dv=x^m \cdot dx$$

$$\text{Res.: } \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{m+1} \cdot \int x^m$$

$$\exp(x) \cdot \text{sen}(x) \rightarrow u=\text{sen}(x), \quad dv=\exp(x).dx$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot \exp(x) \cdot [\text{sen}(x) - \cos(x)]$$

$$\exp(x) \cdot \cos(x) \rightarrow u=\cos(x), \quad dv=\exp(x).dx$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot \exp(x) \cdot [\cos(x) + \text{sen}(x)]$$

Potencias de las Trigonómicas:

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$$

$$\sec^2(x) \rightarrow \text{Res.: } \tan(x)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^3(x) &= \operatorname{sen}^2(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = [1 - \cos^2(x)] \cdot \operatorname{sen}(x) \\ \cos^3(x) &= \cos^2(x) \cdot \cos(x) = [1 - \operatorname{sen}^2(x)] \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Si m impar:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^m(x) &= \operatorname{sen}^{m-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) = [\dots] \cdot \operatorname{sen}(x) \\ \cos^m(x) &= \cos^{m-1}(x) \cdot \cos(x) = [\dots] \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4(x) &= \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 \\ \cos^4(x) &= \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Si m par:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^m(x) &= (\operatorname{sen}^2(x))^{m/2} = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \\ \cos^m(x) &= (\cos^2(x))^{m/2} = \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

$$\tan^3(x) = \tan^2(x) \cdot \tan(x) = [\sec^2(x) - 1] \cdot \tan(x)$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot \tan^2(x) + \ln(\cos(x))$$

$$\cot^3(x) = \cot^2(x) \cdot \cot(x) = [\operatorname{cose}^2(x) - 1] \cdot \cot(x)$$

$$\text{Res.: } -\frac{1}{2} \cdot \cot^2(x) - \ln(\operatorname{sen}(x))$$

Si m impar:

$$\tan^m(x) = \tan^{m-1}(x) \cdot \tan(x) = (\tan^2(x))^{\frac{m-1}{2}} \cdot \tan(x)$$

$$\cot^m(x) = \cot^{m-1}(x) \cdot \cot(x) = (\cot^2(x))^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cot(x)$$

$$\tan^4(x) = \tan^2(x) \cdot \tan^2(x) = \tan^2(x) \cdot [\sec^2(x) - 1]$$

$$\text{Cambio: } t = \tan(x)$$

$$\cot^4(x) = \cot^2(x) \cdot \cot^2(x) = \cot^2(x) \cdot [\cos^2(x) - 1]$$

$$\text{Cambio: } t = \cot(x)$$

Si m par:

$$\begin{aligned} \tan^m(x) &= \tan^2(x) \cdot \tan^{m-2}(x) = \tan^2(x) \cdot (\tan^2(x))^{(m-2)/2} = \\ &= \tan^2(x) \cdot [\sec^2(x) - 1]^{(m-2)/2} \end{aligned}$$

$$\text{Cambio: } t = \tan(x)$$

$$\begin{aligned} \cot^m(x) &= \cot^2(x) \cdot \cot^{m-2}(x) = \\ &= \cot^2(x) \cdot (\cot^2(x))^{(m-2)/2} = \\ &= \cot^2(x) \cdot [\cos^2(x) - 1]^{(m-2)/2} \end{aligned}$$

$$\text{Cambio: } t = \cot(x)$$

$$\sec^3(x) = \sec(x) \cdot \sec^2(x) \rightarrow u = \sec(x), \quad dv = \sec^2(x) \cdot dx$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot [\sec(x) \cdot \tan(x) + \ln(\sec(x) + \tan(x))]$$

$$\cos^3(x) = \cos(x) \cdot \cos^2(x) \rightarrow$$

$$u = \cos(x), \quad dv = \sec^2(x) \cdot dx$$

$$\text{Res.: } \frac{-1}{2} \cdot [\cos(x) \cdot \cot(x) + \ln(\cos(x) + \cot(x))]$$

Si m impar:

$$\sec^m(x) = \sec^{m-2}(x) \cdot \sec^2(x) \rightarrow$$

$$u = \sec^{m-2}(x), \quad dv = \sec^2(x) \cdot dx$$

$$\sec^4(x) = \sec^2(x) \cdot \sec^2(x) = [\tan^2(x) + 1] \cdot \sec^2(x)$$

$$\text{Cambio: } t = \tan(x)$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{3} \cdot \tan^3(x) + \tan(x)$$

Si m par:

$$\sec^m(x) = \sec^{m-2}(x) \cdot \sec^2(x) = [\tan^2(x) + 1]^{(m-2)/2} \cdot \sec^2(x)$$

$$\text{Cambio: } t = \tan(x)$$

$$[\exp(x)]^m = [\exp(x)]^{m-1} \cdot \exp(x), \text{ Cambio: } t = \exp(x)$$

$$\text{Res.: } \frac{1}{m} \cdot [\exp(x)]^m$$

$$[\exp(x)]^2 \rightarrow \text{Res.: } \frac{1}{2} \cdot [\exp(x)]^2$$

$$[\ln(x)]^m \rightarrow u = (\ln(x))^m, \quad dv = dx$$

$$\text{Res.: } x \cdot [\ln(x)]^m - m \cdot \int (\ln(x))^{m-1}$$

$$[\ln(x)]^2 \rightarrow \text{Res.: } x \cdot \ln^2(x) - 2 \cdot [x \cdot \ln(x) - 1]$$

Si n ó m impar:

m impar:

$$\sen^n(x) \cdot \cos^m(x) = \sen^n(x) \cdot \cos^{m-1}(x) \cdot \cos(x) =$$

$$= \sen^n(x) \cdot [1 - \sen^2(x)]^{\frac{m-1}{2}} \cdot \cos(x), \text{ Cambio: } t = \sen(x)$$

(Análogo si n impar)

Si n y m par:

$$\sen^n(x) \cdot \cos^m(x) = [\sen^2(x)]^{\frac{n}{2}} \cdot [\cos^2(x)]^{\frac{m}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right]^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^{\frac{m}{2}} = \dots \dots$$

POR PARTES:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow u = x^2, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx$$

$$\text{Res.: } x^2 \cdot \sqrt{x^2-1} - 2 \cdot \int x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot dx$$

$$\frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}} \rightarrow u = x^{m-1}, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx$$

$$\text{Res.: } x^{m-1} \cdot \sqrt{x^2-1} - (m-1) \cdot \int x^{m-2} \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$x^n \cdot \text{sen}(x) \rightarrow u = x^n, \quad dv = \text{sen}(x) \cdot dx$$

(reiterando)

$$x^n \cdot \text{cos}(x) \rightarrow u = x^n, \quad dv = \text{cos}(x) \cdot dx$$

(reiterando)

$$x^n \cdot \exp^m(x) \rightarrow u = x^n, \quad dv = \exp^m(x) \cdot dx$$

(reiterando)

$$x^n \cdot \ln^m(x) \rightarrow u = \ln^m(x), \quad dv = x^n \cdot dx$$

(reiterando)

$$x^n \cdot \text{arcSen}(x) \rightarrow u = x^n, \quad dv = \text{arcSen}(x) \cdot dx$$

$$x^n \cdot \text{arcCos}(x) \rightarrow u = x^n, \quad dv = \text{arcCos}(x) \cdot dx$$

$$x^n \cdot \text{arcTan}(x) \rightarrow u = \text{arcTan}(x), \quad dv = x^n \cdot dx$$

$$x^n \cdot \text{arcSec}(x) \rightarrow u = \text{arcSec}(x), \quad dv = x^n \cdot dx$$

Casos especiales:

$$\int \frac{1}{1+k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt = (*)$$

$$\text{Cambio: } z = \tan(t) \rightarrow \tan^2(t) = \frac{\text{sen}^2(t)}{\cos^2(t)} \rightarrow \text{sen}^2(t) =$$

$$= \cos^2(t) \cdot \tan^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} \cdot \tan^2(t) = \frac{z^2}{1+z^2}$$

$$dz = \sec^2(t) \cdot dt = (1 + \tan^2(t)) \cdot dt \rightarrow dt = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$1 + k^2 \cdot \text{sen}^2(t) = 1 + k^2 \cdot \frac{z^2}{1+z^2} = \frac{1+z^2+k^2 \cdot z^2}{1+z^2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{1+k^2 \cdot \text{sen}^2(t)} \cdot dt = \frac{1+z^2}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot dz$$

$$(*) = \int \frac{1}{1+z^2+k^2 \cdot z^2} \cdot dz = \int \frac{1}{1+(1+k^2) \cdot z^2} \cdot dz =$$

$$\text{Cambio: } y = \sqrt{1+k^2} \cdot z \rightarrow dy = \sqrt{1+k^2} \cdot dz \rightarrow$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} \cdot dy = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \text{arcTan}(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \text{arcTan}(\sqrt{1+k^2} \cdot z) \rightarrow (\text{sobre el intervalo } \dots)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot (\text{arcTan}(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan(t))) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left[\operatorname{arcTan} \left(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arcTan} \left(\sqrt{1+k^2} \cdot \tan(0) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\operatorname{arcTan} \left(\sqrt{1+k^2} \cdot (+\infty) \right) - \operatorname{arcTan} \left(\sqrt{1+k^2} \cdot 0 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot [\operatorname{arcTan}(+\infty) - 0] = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$L = 4 \cdot R \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot R \cdot \pi$$

$$\int \sqrt{1 + \cos^2(u)} \cdot du = \int \sqrt{1 + (1 - \sin^2(u))} \cdot du =$$

$$= \int \sqrt{2 - \sin^2(u)} \cdot du = \int \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2(u)\right)} \cdot du =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2(u)} \cdot du ,$$

que es elíptica de segunda especie.

LISTADO DE ACTIVIDADES

El Alumno dotará de valor a las variables que se indican como Datos, y realizará los cálculos. Observa que se muestra la fórmula a utilizar para cada caso.

'1.- Esfera.

'Dato: Radio R;

$$'V=4/3.\pi.R^3, S=4.\pi.R^2$$

'2.- Cilindro recto.

'Datos: Radio base R, Altura H

$$'V=\pi.R^2.H, S=2.\pi.R.H$$

'3.- Cilindro No recto.

'Datos: Radio base R, arista H',

ángulo g rad.

$$'V=\pi.R^2.H'.\text{sen}(g), S=2.\pi.R.H'.\text{sen}(g)$$

'4.- Paralelepípedo recto.

'Datos: Aristas a,b,c

$$'V=a.b.c, S=2.(a.b + a.c + b.c)$$

'5.- Paralelepípedo No recto.

'Datos: Aristas base: a,b; arista c, ángulo g rad.

$$'V=a.b.c.\text{sen}(g), S=2.(a.b + a.c + b.c.\text{sen}(g))$$

'6.- Paralelepípedo No recto alaveado.

'Datos: Aristas base: a,b; Altura H

$$'V=a.b.H, S= ...$$

'7.- Prisma recto bases polígono regular.

'Datos: Radio R, arista L, n lados

' $V = n/2 \cdot l \cdot h \cdot L$, $S = n \cdot l \cdot L$

'donde: $l = 2 \cdot R \cdot \sin(\pi/n)$, $h = \text{rad}(R^2 - l^2/4)$

'8.- Prisma No recto bases polígono regular.

'Datos: Radio R, arista A, n lados, ángulo g rad.

' $V = n/2 \cdot l \cdot h \cdot H$, $S = \dots$

'donde: $l = 2 \cdot R \cdot \sin(\pi/n)$, $h = \text{rad}(R^2 - l^2/4)$

' $H = A \cdot \sin(g)$

'9.- Pirámide recta base triángulo equilátero.

'Datos: Arista base l, altura H

' $V = 1/3 \cdot (1/2 \cdot l \cdot h) \cdot H$, $S = 3 \cdot 1/2 \cdot l \cdot H'$

'donde: $h = \text{rad}(3)/2 \cdot l$, $a = 1/3 \cdot h$, $H' = \text{rad}(H^2 + a^2)$

'10.- Pirámide recta base triángulo equilátero.

'Datos: Arista base l, arista c

' $V = 1/3 \cdot (1/2 \cdot l \cdot h) \cdot H$, $S = 3 \cdot 1/2 \cdot l \cdot H'$

'donde: $h = \text{rad}(3)/2 \cdot l$, $a' = 2/3 \cdot h$, $H = \text{rad}(c^2 - a'^2)$

' $H' = \text{rad}(c^2 - l^2/4)$

'11.- Pirámide No recta base triángulo equilátero.

'Datos: Arista base l, dist. H', dist. d

' $V = 1/3 \cdot (1/2 \cdot l \cdot h) \cdot H$, $S = \dots$

'donde: $h = \text{rad}(3)/2 \cdot l$, $a = 1/3 \cdot h$, $H = \text{rad}(H'^2 - (a+d)^2)$

'12.- Pirámide recta base cuadrada.

'Datos: Arista base l, altura H

' $V = 1/3 \cdot l^2 \cdot H$, $S = 4 \cdot (1/2 \cdot l \cdot H')$

'donde: $H' = \text{rad}(H^2 + l^2/4)$

'13.- Pirámide recta base cuadrada

'Datos: Arista base l , arista c

' $V = 1/3 \cdot l^2 \cdot H$, $S = 4 \cdot (1/2 \cdot l \cdot H')$

'donde: $H' = \text{rad}(c^2 - l^2/4)$, $H = \text{rad}(H'^2 - l^2/4)$

'14.- Pirámide No recta base cuadrada

'Datos: Arista base l , altura H' , dist. d

' $V = 1/3 \cdot l^2 \cdot H$, $S = \dots$

'donde: $H = \text{rad}(H'^2 - (l/2 + d)^2)$

'15.- Pirámide recta base rectangular

'Datos: Lados base a, b , altura H

' $V = 1/3 \cdot a \cdot b \cdot H$, $S = 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h'$

'donde: sobre a : $h = \text{rad}(H^2 + b^2/4)$,

'sobre b : $h' = \text{rad}(H^2 + a^2/4)$

'16.- Pirámide recta base rectangular

'Datos: Lados base a, b , arista c

' $V = 1/3 \cdot a \cdot b \cdot H$, $S = 2 \cdot (a \cdot h + b \cdot h')$

'donde: sobre a : $h = \text{rad}(c^2 - a^2/4)$,

'sobre b : $h' = \text{rad}(c^2 - b^2/4)$, $H = \text{rad}(h^2 - b^2/4)$

'17.- Pirámide No recta base rectangular

'Datos: Lados base a, b , dist. H' , dist. d

' $V = 1/3 \cdot a \cdot b \cdot H$, $S = \dots$

'donde: $H = \text{rad}(H'^2 - (a/2 + d)^2)$

'18.- Pirámide recta base polígono regular

'Datos: Radio R, Altura H, n lados

$$'V = n/2 \cdot l \cdot h' \cdot H, S = n/2 \cdot l \cdot h$$

$$'S = n/2 \cdot (2 \cdot R \cdot \sin(\pi/2) \cdot \text{rad}(H^2 + R^2 \cdot \cos^2(\pi/2)))$$

$$'donde: l = 2 \cdot R \cdot \sin(\pi/n), h' = R \cdot \cos(\pi/n),$$

$$'h = \text{rad}(H^2 + h'^2)$$

'19.- Pirámide recta base polígono regular

'Datos: Radio R, Arista c, n lados

$$'V = n/2 \cdot l \cdot h' \cdot H, S = n/2 \cdot l \cdot h$$

$$'donde: l = 2 \cdot R \cdot \sin(\pi/n), h' = R \cdot \cos(\pi/n),$$

$$'h = \text{rad}(H^2 + h'^2)$$

'20.- Pirámide No recta base polígono regular

'Datos: Radio R, dist. H', n lados, dist. d

$$'V = n/2 \cdot l \cdot h' \cdot H, S = \dots$$

$$'donde: l = 2 \cdot R \cdot \sin(\pi/n), h' = R \cdot \cos(\pi/n),$$

$$H = \text{rad}(H'^2 - (R + d)^2)$$

'21.- Cono recto

'Datos: Radio base R, altura H

$$'V = 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H, S = 1/2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot R \cdot G)$$

$$'donde: G = \text{rad}(R^2 + H^2)$$

'22.- Cono recto

'Datos: Radio base R, generatriz G

$$'V = 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H, S = 1/2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot R \cdot G)$$

$$'donde: H = \text{rad}(G^2 - R^2)$$

'23.- Cono No recto

'Datos: Radio base R, dist. H', dist. d

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, S = \dots$$

$$\text{'donde: } H = \text{rad}(H'^2 - (R+d)^2)$$

24.- Tronco de cono recto

Datos: Radio R, radio r, altura H

$$V = \frac{\pi}{3} (R^2 (H+h) - r^2 h)$$

$$S = \pi (R(G+g) - r.g)$$

$$\text{'donde: } h = H.r/(R-r), g = \text{rad}(r^2 + h^2), G = \text{rad}(H^2 + (R-r)^2)$$

25.- Tronco de cono recto

Datos: Radio R, radio r, generatriz G

$$V = \frac{\pi}{3} (R^2 (H+h) - r^2 h), S = \pi (R(G+g) - r.g)$$

$$\text{'donde: } H = \text{rad}(G^2 - (R-r)^2), h = H.r/(R-r),$$

$$g = \text{rad}(r^2 + h^2)$$

26.- Cuña esférica

Datos: Radio R, ángulo u rad.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{u}{(2\pi)}, S = 4 \pi R^2 \frac{u}{(2\pi)}$$

27.- Cuña esférica

Datos: Radio R, ángulo u grados

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{u}{360}, S = 4 \pi R^2 \frac{u}{360}$$

28.- Segmento (o casquete) esférico

Datos: Radio esfera R, radio base del casquete r

Obtenidas por integración, Vol.9:

$$V = \frac{\pi}{3} (2.R^3 - 3.R^2.d + d^3), S = 2\pi (R^2 - R.d)$$

$$\text{'donde: } d = \text{rad}(R^2 - r^2) \text{ ó } d = R \cos(u);$$

29.- Zona esférica:

Datos: Radio esfera R, radios r1, r2 de sus bases

'Nota: Puedes tomar los segmentos por separado y réstalos.

'Obtenidas por integración, Vol.9

$$V = \pi/3 \cdot d \cdot (3R^2 - d^2)$$

$$S = 2\pi R \cdot d, \text{ donde } d = r_2 - r_1$$

'30.- Sector esférico (o cono esférico)

'Nota: Está formado por un cono + casquete

$$V_{\text{volumen}} = V_{\text{casquete}} + V_{\text{cono}}$$

$$S_{\text{super.}} = S_{\text{casquete}} + S_{\text{cono}}$$

'Datos: Radio esfera R, radio base del casquete r

$$V = \pi/3 \cdot (2R^3 - 3R^2 \cdot d + d^3) + 1/3 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot d)$$

$$S = 2\pi \cdot (R^2 - R \cdot d) + 1/2 \cdot (2\pi \cdot r \cdot R)$$

$$\text{'donde: } d = \text{rad}(R^2 - r^2)$$

'31.- Elipsoide

'Datos: Semiejes a,b,c

$$V = 4/3 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c,$$

$$S = \text{Una aproximación: } 4\pi \cdot (\text{rad}(a \cdot b \cdot c; 3))^2$$

'32.- Paraboloide de revolución : $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$

'Datos: Parámetro p, valor de x = a

'Nota: Obtenidos por integración, Vol.9

$$V = \pi \cdot p \cdot a^2, \quad S = 2/3 \cdot \pi \cdot \text{rad}(p) \cdot [\text{rad}((2a+p)^3) - \text{rad}(p^3)]$$

BIBLIOGRAFÍA

Elementos de Matemáticas

4ª Edición

Julio Rey Pasto y A. de Castro

S.A.E.T.A. (Sociedad Anónima de Traductores y Autores)

Madrid 1967

Análisis Matemático, Volúmenes I, II, III

Octava Edición 1969

Autores: Julio Rey Pastor

Pedro Pi Calleja

César A. Castro

Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires (Argentina)

Cálculo Numérico Fundamental

Autor: B.P. Demidovich

I.A. Maron

Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid

Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático

Autor: B. Demidovich y Otros

Traducido: Antonio Molina García (Ingeniero)

Editorial: Paraninfo, Madrid, 1969

Análisis Matemático

Autor: Tom M. Apostol

Versión española: Francisco Vélez Cantarell

Editorial: Reverte, S.A., 1960

Álgebra y Geometría Analítica

Autor: Francisco Granero Rodríguez

Edita: McGraw-Hill (Ediciones La Colina, S.A. (España))

Edición de 1985

La Sinfonía del Infinito

Autor: Norberto Cuesta Dutari

Ediciones Universidad de Salamanca, 1981

Cálculo Integral (Aplicado a la Física t Técnica)

Tomo I (Curso de Análisis Matemático para Ingenieros)

Autor: Pedro Puig Adam

Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, año: 1970

ANALYSE (Matemático)

COLLECTION U, M.P. Premiere annee et speciales, t.1

Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra

Edita: Librairie Armand Colin, París 1967

ANALYSE (Matemático)

COLLECTION U, M.P. Deuxieme annee et speciales, t.2

Autor: Raymond Couty et Jacques Ezra

Edita: Librairie Armand Colin, París 1967

Geometría Diferencial Clásica

Autor: Dirk J. Struik

Traducción: L. Bravo Gala

Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid, año: 1966

Cálculo Diferencial

Autor: Henri Cartan

Traducción: Amadeo Guasch

Editorial Omega S.A., Barcelona, Colección Métodos, año: 1972

Notas sobre geometría diferencial (Notes on differential
geometry)

Autor: Noel j. hicks

Traducción: Francisco Pañella y otros

Editorial Hispano Europea, Barcelona (España), 1974

Cálculo Numérico Fundamental

Autor: B.P. Demidovich

I.A. Maron

Paraninfo S.A., Segunda Edición, año: 1985, Madrid

Introducción a la Teoría Analítica de Números
(Introduction to Analytic Number Theory)

Autor: Tom M. Apostol

Traducción: José Plá Carrera

Editorial Reverté, S.A., Barcelona, año: 1980

Topología

Autor: E.M. Patterson

Traducción: Lino Álvarez Valdés y Fernando Vicente

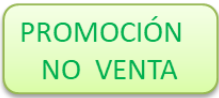
Editorial Dossat, S.A., Madrid, año: 1961

Topología general y algebraica

Autor: Wolfgang Franz

Traducido por: Juan Ochoa Mérida

Selecciones Científicas, Madrid, año: 1968



NOTACIÓN y Nomenclatura. Valores:

Símbolo	Significado
*	Producto
.	Producto
$\wedge$	Potencia
sqr(a)	Raíz cuadrada
rad(a)	Raíz cuadrada
rad(a;n)	Radical con índice n
rad(a;n/m)	Radical con índice n/m

$\in$ significa 'pertenece a'

∞ infinito

exp(x) Exponencial: $\exp(x) = e^x$

exp(x;a) Exponencial de base $a > 0$:
 $\exp(x;a) = a^x$

ln(x) Logaritmo neperiano:
 $y = \ln(x) \leftrightarrow x = e^y$

log(x;a) Logaritmo base $a > 0$:
 $y = \log(x;a) \leftrightarrow x = a^y$

$\cong$ aproximado

Δ incremento

< menor que, > mayor que, Ej.: $x < y$, $x > y$

Valores:

$\pi = 3,1415927\dots$	(número pi, en radianes)
pi = 3,1415927...	(número pi, en radianes)
$e = 2,7182818\dots$	(número e, base de $\ln(x)$)

$\text{sen}(0) = 0$	$\text{cos}(0) = 1$
$\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$	$\text{cos}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{cos}(\pi/3) = \frac{1}{2}$
$\text{sen}(\pi/2) = 1,$	$\text{cos}(\pi/2) = 0$